УДК 512.562

Черепня Ю.А., Величко В.Є.

[1] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: vladislav.velichko@gmail.com

НАПІВГРУПИ ВІДОБРАЖЕНЬ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ БІНАРНЕ ВІДНОШЕННЯ

Розглядаються напівгрупи часткових і повних перетворень множини X, які зберігають бінарне відношення задане на X. Розглянуто випадок, коли бінарне відношення є відношенням порядку або квазіпорядку.

Ключові слова: *частково впорядкована множина, напівгрупа бінарних відношень*

Вступ

Для довільної множини X нехай $\mathcal{T}(X)$ — напівгрупа перетворень $\alpha : X \to X$ із операцією $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$. Далі, нехай $\mathcal{PT}(X)$ — множина всіх часткових перетворень, тобто відображень $\beta : X_1 \to X$, де $X_1 \subseteq X$. Множина X_1 називається областю визначення відображення β і позначається $Dom\beta$. Операцію в напівгрупі $\mathcal{PT}(X)$ виконують за правилом $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ при $x \in Dom\alpha \cap (Dom\beta)\alpha^{-1}$. Нарешті, нехай $\mathcal{B}(X)$ – — напівгрупа бінарних відношень на множині X. Нехай $\sigma \in \mathcal{B}(X)$. Для $x \in X$ покладемо $A_x = \{y|(x,y) \in \sigma\}$. Тоді σ можна розглядати як багатозначне відображення $x \mapsto A_x$. Очевидно, $\mathcal{T}(X)$ і $\mathcal{PT}(X)$ — піднапівгрупи напівгрупи $\mathcal{B}(X)$ і $\mathcal{T}(X) \subseteq \mathcal{PT}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$. При $|X| > 1$ маємо $\mathcal{T}(X) \subset \mathcal{PT}(X) \subset \mathcal{B}(X)$. У випадку коли X — скінчена множина, елементи цих напівгруп можна записувати як звичайні підстановки. Наприклад, якщо $X = \{1, 2, 3, 4\}$, то

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}(X), \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & - & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{PT}(X),$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ - & \{1,3,4\} & 3 & \{1,2\} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(X)$$

Відомо і інше представлення елементів напівгрупи $\mathcal{B}(X)$, тобто представлення у вигляді матриць із 0 та 1 (булевих матриць). Елемент $\sigma \in \mathcal{B}(X)$ в цьому випадку представляється у вигляді матриці $\sigma = \|\sigma_{ij}\|_{i,j \in X}$, де

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{якщо } (i,j) \in \sigma, \\ 0 & \text{якщо } (i,j) \notin \sigma. \end{cases}$$

Наприклад, наведений вище елемент γ можна представити наступним чином:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нехай X — множина, на якій задано бінарне відношення σ, і $\alpha : X \to X$ — відображення. Будемо казати, що α *зберігає* σ, якщо

$$\forall x, y \in X \quad (x, y) \in \sigma \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in \sigma. \tag{1}$$

Відзначимо, що задання на множині X бінарного відношення σ рівносильно заданню графа з множиною вершин X, а відображення $\alpha : X \to X$, яке зберігає відношення σ, — ендоморфізм цього графа. Поняття ендоморфизму графа допускає ряд модифікацій, які узагальнюють означення (1) [4, 5]. Обгляд робіт по напівгрупам ендоморфізмів графів представлено в [7].

Основна частина

Необхідна і достатня умова збереження відношення σ надає наступне твердження.

Твердження 1. [6] *Відображення $\alpha \in \mathcal{T}(X)$ зберігає відношення σ в тому і тільки в тому випадку, коли $\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma$ (в розумінні добутку бінарних відношень).*

Позначимо через $\mathcal{T}_\sigma(X)$ множину всіх $\alpha \in \mathcal{T}(X)$, які зберігають σ. За умовою маємо $\mathcal{T}_\sigma(X) = \{\alpha \in \mathcal{T}(X) | \sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma\}$. Неважко перевірити, що $\mathcal{T}_\sigma(X)$ — піднапівгрупа напівгрупи $\mathcal{T}(X)$, навіть підмоноїд. У випадку коли σ — відношення порядку або квазіпорядку на множині X, напівгрупу $\mathcal{T}_\sigma(X)$ називають напівгрупою ізотонних перетворень. Ця напівгрупа несе інформацію про будову квазівпорядкованої множини X. Л.М. Глускін довів [2], що якщо для двох квазівпорядкованих множин X і Y напівгрупи $\mathcal{T}_\sigma(X)$ і $\mathcal{T}_\sigma(Y)$ ізоморфні, то множини X і Y ізоморфні або антиізоморфні.

Цікаве питання про регулярність напівгрупи $\mathcal{T}_\sigma(X)$. Якщо σ — відношення порядку, то необхідна і достатня умова регулярності напівгрупи $\mathcal{T}_\sigma(X)$ отримані в [1], більш прозорі умови, у випадку коли (X, σ) — ланцюг, — в [3].

Для елементів напівгруппи $\mathcal{PT}(X)$ «збереження σ» можна розуміти двояко.

Означення 1. *Часткове відображення $\alpha \in \mathcal{PT}(X)$ прийнятне для σ, якщо*

$$\forall x, y \in Dom\alpha (x, y) \in \sigma \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in \sigma. \tag{2}$$

Означення 2. *Часткове відображення $\alpha \in \mathcal{PT}(X)$ співставляється з σ, якщо*

$$\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma. \tag{3}$$

Нехай

$$\mathcal{PT}_\sigma(X) = \{\alpha \in \mathcal{PT}(X) | \alpha \text{ прийнятне для } \sigma\},$$
$$\widetilde{\mathcal{PT}}_\sigma(X) = \{\alpha \in \mathcal{PT}(X) | \alpha \text{ співставляється з } \sigma\}.$$

Не важко перевірити, що $\mathcal{PT}_\sigma(X)$ і $\widetilde{\mathcal{PT}}_\sigma(X)$ — моноїди, є підмоноїдами моноїда $\mathcal{PT}(X)$. Наступне твердження показує, що $\widetilde{\mathcal{PT}}_\sigma(X) \subseteq \mathcal{PT}_\sigma(X)$.

Твердження 2. [6] *Для довільного $\alpha \in \mathcal{PT}(X)$ справедлива імплікація* $(3) \Rightarrow (2)$, *але існують приклади, коли* $(2) \not\Rightarrow (3)$.

Із умови (3) випливає умова

$$\forall x, y \in X \quad ((x, y) \in \sigma \;\&\; y \in Dom\alpha \Rightarrow x \in Dom\alpha) \tag{4}$$

Твердження 3. [6] *Для довільного $\alpha \in \mathcal{PT}(X)$ справедлива імплікація* $(2) \;\&\; (4) \Rightarrow (3)$.

Розглянемо тепер більш докладно випадок, коли σ — квазіпорядок. Будемо позначати цей квазіпорядок через $\leqslant$.

Теорема 1. [6] *Нехай $(X, \leqslant)$ — квазівпорядкована множина. Напівгрупа $\mathcal{PT}_\leqslant(X)$ регулярна тоді й лише тоді, коли виконується хоча б одна умова:*

1) X — антиланцюг;

2) X — ланцюг;

3) $x \leqslant y$ для всіх $x, y \in X$.

Позначимо через Δ відношення рівності на множині X. Для $\sigma \subseteq X \times X$ транзитивне замикання відношення σ будемо обозначати через σ^t. Нарешті, обозначимо через ω будь-який лінійний порядок на множині X. Для відношення σ, яке задовольняє умові $\Delta \subseteq \sigma \subseteq \omega$, $\sigma^t = \omega$ питання про регулярність напівгрупи $PT_\sigma(X)$ вирішується наступним твердженням.

Твердження 4. [6] *Нехай* σ *— бінарне відношення на* X *,* $\Delta \subseteq \sigma \subseteq \omega$ *, де* ω *— лінійний порядок і* σ^t *. Якщо напівгрупа* $\mathcal{PT}_\sigma(X)$ *регулярна, то* $\sigma = \omega$ *.*

Доведення. Нехай $\sigma \neq \omega$. Візьмемо пару $(a, b) \in \omega \setminus \sigma$. Так як $\sigma^t = \omega$ то $\sigma \neq \Delta$, тому існує пара $(c, d) \in \sigma \setminus \Delta$. Покладемо $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Очевидно, $\alpha \in \mathcal{PT}_\sigma(X)$. Якщо $\beta \in \mathcal{PT}_\sigma(X)$ — такий елемент, що $\alpha\beta\alpha = \alpha$, то $c, d \in Dom\beta$ и $c\beta = \alpha$, $d\beta = b$, звідки отримуємо, що β не зберігає відношення σ . Це протирічить вибору β . Звідки отримуємо, що α — нерегулярний елемент напівгрупи $\mathcal{PT}_\sigma(X)$.

Нехай $\mathcal{IS}(X)$ підмножина напівгрупи часткових перетворень $\mathcal{PT}(X)$ кожен елемент якої є взаємнооднозначним частковим перетворенням (частковою підстановкою). А відношення рівності (діагональ)

$$\iota_X = \{(x, x) | x \in X\}.$$

Лема 1. $\mathcal{IS}(X)$ *є інверсною напівгрупою.*

Для часткової підстановки $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} x \\ x\alpha \end{smallmatrix} \middle| x \in X\right)$ інверсна до неї визначається таким чином

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} x\alpha \\ x \end{pmatrix} \mid x \in Dom\,\alpha \Big) \oplus \begin{pmatrix} y \\ \emptyset \end{pmatrix} \mid y \in X \setminus Dom\,\alpha \Big)$$

Тут символом $\oplus$ позначено пряму суму перетворень, що діють на множинах які не перетинаються. Для перетворень $\alpha \in \mathcal{PT}(X)$, $\beta \in \mathcal{PT}(Y)$, $X \cap Y = \emptyset$, їх пряма сума $\alpha \oplus \beta$ визначається рівністю

$$z(\alpha \oplus \beta) = \begin{cases} z\alpha & \text{якщо } z \in X \\ z\beta & \text{якщо } z \in Y \end{cases}$$

Довільну інверсну напівгрупу S можна упорядкувати, поклавши для будь-яких елементів $a, b \in S$

$$a \leqslant b \Leftrightarrow \exists e \in S(e^2 = e) : a = eb$$

Лема 2. *Відношення* $\leqslant$ *на інверсній напівгрупі* S *є відношенням часткового порядку.*

Доведення – очевидна перевірка умов часткового порядку.

Для симетричної інверсної напівгрупи $\mathcal{IS}(X)$ маємо таке твердження

Теорема 2. *В симетричній інверсній напівгрупі* $\mathcal{IS}(X)$ *,* $\alpha \leqslant \beta$ *тоді й лише тоді, коли* $\alpha \subseteq \beta$ *.*

Доведення. Досить пересвідчитись, що для відношень $\alpha, \beta \in \mathcal{IS}(X) \subset \mathcal{B}(X)$ нерівність $\alpha \leqslant \beta$ має місце тоді й лише тоді коли $\alpha \subseteq \beta$. Нехай α, β елементи напівгрупи $\mathcal{IS}(X)$ і $\alpha \leqslant \beta$. Тоді в множині X існує підмножина C для якої $\alpha = \iota_C\beta$. Якщо $(x, y) \in \alpha$, то існує такий елемент $z \in X$, що $(x, z) \in \iota_C$, $(z, y) \in \beta$. Тобто $x = z \in C$ і також $(x, y) \in \beta$. А тому $\alpha \subseteq \beta$.

Навпаки, нехай $\alpha \subseteq \beta$ містить елемент $\iota_{Dom(\alpha)}\beta$. Тоді

$$(x, y) \in \alpha \Rightarrow (x, x) \in \iota_{dom(\alpha)}, (x, y) \in \beta \Rightarrow (x, y) \in \iota_{dom(\alpha)}\beta,$$

і тому $\alpha \subseteq \iota_{dom(\alpha)}\beta$. Виходячи з оберненого включення, вважаємо, що $(x, y) \in \iota_{Dom(\alpha)}\beta$. Тоді $x \in Dom(\alpha)$ і $(x, y) \in \beta$. Тобто існує $x\alpha \in X$ такий, що $(x, x\alpha) \in \alpha \subseteq \beta$. З того, що β є частковим відображенням маємо $x\alpha = y$. Тобто $(x, y) \in \alpha$.

Ми показали, що $\alpha = \iota_{Dom(\alpha)}\beta$ і остаточно $\alpha \leqslant \beta$ в $\mathcal{IS}(X)$.

Висновки

В роботі розглянуті деякі регулярні напівгрупи напівгруп часткових та повних перетворень скінченої множини на яких зберігається бінарне відношення.

Література

[1] *Айзенштат А.Я.* Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств / А.Я. Айзенштат // Учёные записки Ленинградского гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена. — 1968. — Т. 387. — С. 3 – 11.

[2] *Глускин Л.М.* Полугруппы изотонных преобразований / Л.М. Глускин // Успехи мат. наук. — 1961. — Т. 16, № 5. — С. 157 – 162.

[3] *Adams M.E.* Posets whose monoids of order-preserving maps are regular / M.E. Adams, M. Gould // Order. — 1989. — Vol. 6, No. 2. — P. 195 – 201.

[4] *Bötcher M.* Endomorphism spectra of graphs / M. Bötcher, U. Knauer // Discrete Math. — 1992. — Vol. 109. — P. 45 – 57

[5] *Bötcher M.* Postscript: «Endomorphism spectra of graphs» / M. Bötcher, U. Knauer // Discrete Math. — 2003. — Vol. 270. — P. 329 – 331.

[6] *Ким В.И.* Слабо регулярные полугруппы изотонных преобразований / В.И. Ким, И.Б. Кожухов, В.А. Ярошевич // Фундаментальная и прикладная математика. — 2011/2012. — Т. 17, № 4. — С. 145 – 165.

[7] *Molchanov V.A.* Semigroups of mappings on graphs / V.A. Molchanov // Semigroup Forum. — 1983. — Vol. 27. — P. 155 – 199.