УДК 37.016:[514.122+514.142]

Кадубовський О.А., Романкевич М.В.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, ДВНЗ «ДДПУ»*

[2] *студент 5 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: kadubovs@ukr.net

ОСНОВНІ МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА ПРЯМІ У ПЛОЩИНІ В АФІННИХ КООРДИНАТАХ

Дана стаття присвячена методичним і теоретичним аспектам вивчення теми «метричні задачі на пряму в площині в афінних координатах», яка, з урахуванням сучасної тенденції, є невід'ємною складовою при викладанні об'єднаного курсу з лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів фізико-математичних спеціальностей ВНЗ.

Ключові слова: *афінна система координат на площині, метричні коефіцієнти, матриця Грама, метричні задачі, прямі в площині.*

> «Ничто не в силах остановить математика. Не остановился он даже перед авторитетом Декарта, искривив прямоугольную систему координат, названную в честь величайшего математика и мыслителя XVII века *декартовой.*»
>
> **Р. Глазер**

Вступ

Сьогодні перед вітчизняними ВНЗ, що готують майбутніх викладачів, зокрема викладачів фізики та математики, постало надважливе завдання – формувати фахівців з високим рівнем професійної компетентності.

Традиційно, дисципліни «Аналітична геометрія» і «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» є нормативними дисциплінами у навчальних планах підготовки фахівців фізико-математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ.

Загально-визнаною вимогою сучасності є теза про те, що студенти повинні бачити та усвідомлювати «... не лише стрункість і красу теоретичної думки, а й можливості застосування апарату аналітичної геометрії в інших розділах математики, для розв'язання практичних задач у різних галузях виробництва й економіки, оскільки *подальша викладацька діяльність* студентів-математиків», зокрема які здобувають освітньо-кваліфікаційний рівень магістра за спеціальністю 8.04020101 Математика*, «... *передбачатиме навчання спеціалістів різного профілю*» [6].

На превеликий жаль, відповідними освітньо-професійними програмами підготовки фахівців для зазначених дисциплін не передбачено змістових модулів «Метричні задачі на … в афінних координатах». Можливо саме тому в більшості «рекомендованих» підручниках, методичних посібниках та збірниках задач з аналітичної геометрії (кількість яких постійно і стрімко зростає) для студентів педагогічних (і не лише) ВНЗ метричні задачі розглядають виключно в декартових прямокутних координатах. Але ж зазначені фахівці повинні володіти методами аналітичної геометрії, зокрема багатовимірної [3], не лише евклідового, а й афінного просторів.

Одним із підтверджень сучасної тенденції об'єднання традиційно різних розділів математики в одну дисципліну, з метою досягнення наочності алгебраїчних абстракцій та лаконічності геометричних доведень, є те, що тема «Метричні задачі на … в афінних координатах» є невід'ємною складовою об'єднаного курсу з лінійної алгебри та аналітичної геометрії для студентів фізико-математичних спеціальностей «класичних» університетів [12, 5].

Особливістю курсу аналітична геометрія є його (майже безпрецедентна) геометрична наочність. І тому, саме через цю обставину, для розвитку більш фундаментальних математичних уявлень студентів необхідно здійснювати цілеспрямоване навчання взаємопов'язаному використанню і «взаємоперекладам» між природними для цих математичних курсів формами інформації: геометричною наочністю і символьними образами.

Ще у 1970 р. (у журналі «Успехи математических наук», том XXV, вип. 1 (151)) Л.Д. Кудрявцев зазначив, що «Именно, курс геометрии излагается, как правило, более интуитивно, приводимые в нем доказательства часто основываются на наглядных соображениях, необходимость использования в ряде вопросов методов других разделов математики (алгебры, анализа) затушевывается». До зазначеного додамо, що в багатьох випадках правильні інтуїтивно-наочні уявлення взагалі витісняють строго-математичні обгрунтування деяких фактів (не аксіоматичного характеру). Не можна не погодитися й з тим, що такий одночасно різний підхід до вимог математичної строгості дійсно викликає ускладнення та «подвійні стандарти» у студентів, що вивчають цю дисципліну. Втішає те, що зазначеної вади позбавлена достатня кількість гарних підручників та курсів лекцій з аналітичної геометрії. Найбільш яскравими з них, на думку авторів, є [1, 2, 10, 11, 7]. Як зазначив П.С. Александров в [1]: «Что касается Б.Н. Делоне, то богатство его геометрических идей делает его книгу [2] (совместную с Д.А. Райковым) образцом геометрического мышления и изложения, который сохраняет и на многие годы сохранит свое значение».

В [2] Б.Н. Делоне наголошує на необхідності широкого розвитку афінної точки зору оскільки зв'язок аналітичної геометрії з такими важливими розділами математики, як аналіз (зокрема функціональний) і алгебра, відбувається саме через афінну і метричну геометрію. Слід зазначити, що в [2] крім звичайного матеріалу, який відноситься до різних видів рівнянь прямої та різних задач на пряму, зокрема метричних, коротко викладено й поняття про метод скорочених позначень для прямої.

Розділи «Метричні задачі на ... в афінних координатах» вперше було запропоновано П.С. Моденовим і О.С. Пархоменком у 1976 р. в збірнику задач з аналітичної геометрії [8]. Причому всі задачі таких розділів авторами було класифіковано як *задачі теоретичного характеру і підвищеної складності*. У відповідному розділі [8] для зазначених задач наведено розв'язки-відповіді, які пізніше також було наведено і в [9] у вигляді доволі повного довідкового матеріалу. За словами П.С. Александрова «... всякому понятно, что нельзя овладеть таким предметом, как аналитическая геометрия, не решая относящиеся к нему основные задачи. *Но решению задач надо научить*, ...» [1].
В роботі [4] викладено алгоритмічний підхід (при застосуванні координатно-векторного методу) до розв'язування певного кола метричних задач за допомогою введення афінної системи координат. Представлена стаття, в певному сенсі, є її логічним продовженням. Отже, **метою** даної статті є:
1) виокремлення та доповнення «ключових» задач вправами теоретичного характеру, які б (в певному розумінні) «повно» охоплювали основні метричні задачі «на прямі в площині»;
2) наведення (з дотриманням належного рівня строгості) розв'язань зазначених задач в афінних координатах за алгоритмами, які без змін (проте з очевидними значними спрощеннями) доцільно використовувати при розв'язуванні цих задач в косокутних та прямокутних координатах.

Основні поняття та попередні відомості

Нагадаємо [1], що `узагальненою декартовою` (або ж афінною) системою координат на площині називають трійку $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, де O – деяка фіксована точка даної площини – *початок координат*, а $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ – *базисні вектори* (впорядкована пара неколінеарних векторів з початком у точці O), напрями яких визначають додатні напрями координатних осей OX (*абсцис*) і OY (*ординат*) відповідно – рис. 1 *а*).

В подальшому будемо вважати, що $\omega = \angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \in (0^0; 180^0)$, а вісь OY одержується в результаті повороту осі OX навколо точки O на кут ω у напрямку проти руху годинникової стрілки.

Площину з вибраною на ній узагальненою декартовою (афінною) системою координат називають (афінною) *координатною площиною.*

Добре відомо, що кожній точці M афінної площини в єдиний спосіб можна поставити у відповідність впорядковану пару чисел (x, y), які є коефіцієнтами розкладу її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ за базисними векторами $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$.
І навпаки, кожній впорядкованій парі чисел (x, y) ставиться у відповідність єдина точка площини, що є кінцем радіус-вектора $x \cdot \overrightarrow{e_1} + y \cdot \overrightarrow{e_2}$.

З огляду на зазначену зіставленність, кожну точку афінної площини ототожнюють з відповідною їй впорядкованою парою чисел, які й називають афінними координатами точки.

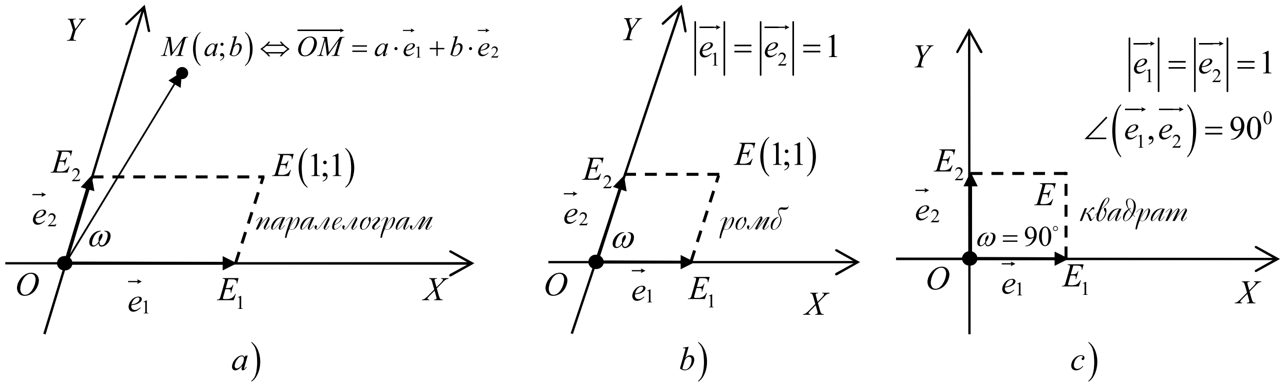

Рис. 1: $a)$ – афінна система координат (АСК); $b)$ – косокутна система координат (КСК); $c)$ – прямокутна система координат (ПСК)

Означення 1. *Афінну систему координат (АСК) називатимемо косокутною (КСК), якщо (при фіксованій одиниці довжини) всі її базисні вектори є ортами, тобто* $|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = 1$ *– рис.* $1\ b)$.
Інколи говорять, що КСК породжується нормованим базисом.

Означення 2. *Косокутну систему координат називатимемо прямокутною (ПСК), якщо базисні вектори є (попарно) ортогональними, тобто* $\forall i \neq j\ \angle(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}) = 90^0$ *– рис.* $1\ c)$.
Часто говорять, що ПСК породжується ортонормованим базисом.

Означення 3. [*11*] *Метричними коефіцієнтами* g_{ij} *базису* $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ *(на площині) називають наступні скалярні добутки*

$$g_{ij} = \langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j} \rangle = |\overrightarrow{e_i}| \cdot |\overrightarrow{e_j}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}) \quad \forall i, j \in \{1, 2\}. \tag{1}$$

Матрицю $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, *елементами якої є зазначені добутки, називають матрицею Грама метричних коефіцієнтів базису* $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$.

З урахуванням (1), мають місце рівності

$$g_{11} = |\overrightarrow{e_1}|^2, \quad g_{22} = |\overrightarrow{e_2}|^2, \quad g_{12} = g_{21} = |\overrightarrow{e_1}| \cdot |\overrightarrow{e_2}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}). \qquad (2)$$

І тому матриця Грама метричних коефіцієнтів *нормованого* базису (матриця Грама для КСК) має вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega = \angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}). \qquad (3)$$

Матриця Грама коефіцієнтів *ортонормованого* базису (матриця Грама для ПСК) є одиничною матрицею

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Добре відомо (напр. [12]), що якщо два вектори (на площині) задано своїми координатами $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2\}$, $\overrightarrow{b} = \{b_1; b_2\}$ відносно базису $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, то їх скалярний добуток можна обчислити за формулою

$$\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} g_{ij}a_ib_j = (a_1 \;\; a_2) \circ G \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A^T \circ G \circ B, \qquad (5)$$

де A, B — `матриці-стовпці`, елементами яких є координати векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ відповідно; A^T – `матриця-рядок`, що є транспонованою до матриці A.

Оскільки $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle = |\overrightarrow{a}|^2$, то наслідком з (5) є наступна формула

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(a_1 \;\; a_2) \circ G \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{A^T \circ G \circ A}. \qquad (6)$$

Слід зазначити, що для кожного базису, зокрема $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, визначник $\|G\|$ матриці Грама є строго додатним. В останньому не важко переконатися, оскільки

$$\|G\| = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = |\overrightarrow{e_1}|^2 \, |\overrightarrow{e_2}|^2 - (|\overrightarrow{e_1}| \, |\overrightarrow{e_2}| \cos\angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}))^2 =$$
$$= |\overrightarrow{e_1}|^2 \, |\overrightarrow{e_2}|^2 \sin^2\angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) > 0.$$

Більш детально з наведеними поняттями та фактами можна ознайомитися, наприклад в [1 – 3], [5], [11].

При викладі подальшого матеріалу (без додаткових пояснень) ми будемо використовувати елементарні відомості з «афінних задач на прямі в площині» [10], найпростіші факти «векторної алгебри» і «терії визначників», основні дії з матрицями та певні факти «метричної теорії векторів», з якою можна детально ознайомитися в [9, 11].

Основна частина

В умовах всіх наведених нижче задач координати даних точок і векторів та рівняння прямих задано відносно фіксованої афінної системи координат АСК $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, g_{ij}, $(i = 1,2)$ – метричні коефіцієнти базису $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, $G = (g_{ij})$ – матриця Грама, $\|G\|$ – визначник матриці Грама, G^{-1} – матриця, обернена до матриці G.

Задача 1. Рівняння прямої l, що проходить через дану точку $L_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно заданому вектору $\overrightarrow{n} = \{n_1; n_2\}$

Нехай $(x; y)$ – координати довільної але фіксована точки L прямої l. Тоді очевидно, що вектор $\overrightarrow{L_0L} = \{x - x_0; y - y_0\}$ є перпендикулярним до вектора $\overrightarrow{n} = \{n_1; n_2\}$. І тому (з урахуванням необхідної і достатньої умови ортогональності векторів) координати кожної точки $L(x; y)$ прямої l задовольняють матричному рівнянню

$$(n_1 \;\; n_2) \circ G \circ \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0,$$

яке в розгорнутому вигляді набуває вид

$$(n_1 g_{11} + n_2 g_{21})(x - x_0) + (n_1 g_{12} + n_2 g_{22})(y - y_0) = 0. \tag{7}$$

Тепер припустимо, що координати $(x'; y')$ певної точки L' задовольняють рівняння (7). Тоді (з урахуванням необхідної і достатньої умови ортогональності векторів) радіус-вектор $\overrightarrow{L_0L'} = \{x' - x_0; y' - y_0\}$ цієї точки є ортогональним до вектора $\overrightarrow{n} = \{n_1; n_2\}$. З останнього й випливає, що кінець $L'(x'; y')$ цього вектора належить прямій l.

Отже, відносно `афінної системи координат` (надалі – АСК) шуканим рівнянням прямої l, яка задовольняє зазначеним умовам, є рівняння (7).

Відносно `косокутної системи координат з координатним кутом` ω (надалі – КСК з КК ω) рівняння (7) набуває вид

$$(n_1 + n_2 \cos\omega)(x - x_0) + (n_1 \cos\omega + n_2)(y - y_0) = 0. \tag{8}$$

Відносно `прямокутної системи координат` (надалі – ПСК) рівняння (7) (або ж рівняння (8) для випадку $\omega = \pi/2$) набуває добре знайомий вид

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0. \tag{9}$$

Зауважимо, що задання прямої у зазначений в цій задачі спосіб, можна тлумачити як «геометричне місце кінців колінеарних векторів зі спільним початком, які є ортогональними до даного (не нульового) вектора».

Нагадаємо, що нормальним (*напрямним*) вектором прямої називають будь-який ненульовий вектор, що є перпендикулярним (*паралельним*) до цієї прямої. Напрямний та нормальний вектор однієї прямої є ортогональними.

Задача 2. Нормальний вектор прямої $l : ax + by + c = 0$

Добре відомо, що в якості напрямного вектора прямої $l : ax + by + c = 0$ завжди можна обрати вектор $\overrightarrow{l} = \{b; -a\}$. Тоді задача про знаходження координат нормального вектора прямої l зводиться до задачі про знаходження вектора $\overrightarrow{n}$, ортогонального до вектора $\overrightarrow{l}$.

Отже, нехай $\{n_1; n_2\}$ – шукані координати нормального вектора $\overrightarrow{n}$ прямої l. Зауважимо, що шукані n_1 і n_2 достатньо знайти з точністю до їх відношення, тобто достатньо знайти відношення $\frac{n_1}{n_2}$.

Для цього скористаємося необхідною і достатньою умовою ортогональності векторів $\overrightarrow{n}$ і $\overrightarrow{l}$ в матричному вигляді $(b \ \vdots - a) \circ G \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0$, яка в розгорнутому вигляді набуває вид $(bg_{11} - ag_{21})n_1 + (bg_{12} - ag_{22})n_2 = 0.$ Звідки $n_1 : n_2 = (ag_{22} - bg_{12}) : (bg_{11} - ag_{21})$. Таким чином, відносно АСК в якості шуканих координат $\{n_1; n_2\}$ нормального вектора прямої l можна обрати зазначено пару чисел, тобто вектор

$$\overrightarrow{n} = \{ag_{22} - bg_{12}; bg_{11} - ag_{21}\}. \tag{10}$$

Відносно КСК з КК ω в якості нормального вектора можна обрати вектор

$$\overrightarrow{n} = \{a - b\cos\omega; b - a\cos\omega\}, \tag{11}$$

а відносно ПСК – добре знайомий вектор виду

$$\overrightarrow{n} = \{a; b\}. \tag{12}$$

Задача 3. [4] Умови перпендикулярності двох прямих $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ **і** $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Дві зазначені прямі є перпендикулярними тоді і лише тоді, коли ортогональними є їх напрямні вектори $\overrightarrow{l_1} = \{b_1; -a_1\}$ і $\overrightarrow{l_2} = \{b_2; -a_2\}$. Тому з урахуванням умови (10), необхідну і достатню умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2 (заданих рівняннями відносно АСК) можна подати у вигляді

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2g_{22} - g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + b_1b_2g_{11} = 0. \tag{13}$$

Відносно КСК з КК ω умова (13) набуває вид

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)\cos\omega + b_1b_2 = 0, \tag{14}$$

а відносно ПСК –

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0. \tag{15}$$

Задача 4. [4] Рівняння прямої m, що проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно до заданої прямої $l : ax + by + c = 0$

Оскільки пряма m є перпендикулярною до прямої $l : ax+by+c = 0$, то в якості нормального її вектора можна обрати напрямний вектор $\overrightarrow{l} = \{b;-a\}$ прямої l. Тому, з урахуванням задачі 1 (рівняння (7) при $n_1 = b,\ n_2 = -a$), відносно АСК шукане рівняння прямої m має вид

$$(bg_{11} - ag_{21})(x - x_0) + (bg_{12} - ag_{22})(y - y_0) = 0. \qquad (16)$$

Відносно КСК з КК ω рівняння (16) набуває вид

$$(b - a\cos\omega)(x - x_0) + (b\cos\omega - a)(y - y_0) = 0, \qquad (17)$$

а відносно ПСК

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0. \qquad (18)$$

Вправа 1. [4] Покажіть, що рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ і є перпендикулярно до осі OX, можна подати рівнянням виду

$$g_{11}\cdot(x - x_0) + g_{12}\cdot(y - y_0) = 0, \qquad (19)$$

яке відносно КСК з КК ω набуває вид

$$(x - x_0) + \cos\omega\cdot(y - y_0) = 0, \qquad (20)$$

а відносно ПСК –

$$x - x_0 = 0. \qquad (21)$$

Вправа 2. [4] Покажіть, що рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ і є перпендикулярно до осі OY, можна подати рівнянням виду

$$g_{21}\cdot(x - x_0) + g_{22}\cdot(y - y_0) = 0, \qquad (22)$$

яке відносно КСК з КК ω набуває вид

$$(x - x_0)\cos\omega + (y - y_0) = 0, \qquad (23)$$

а відносно ПСК –

$$y - y_0 = 0. \qquad (24)$$

Задача 5. Кут між прямими $l_1 : a_1x+b_1y+c_1 = 0$ і $l_2 : a_2x+b_2y+c_2 = 0$
Шуканий кут (менший з двох суміжних) між прямими l_1 і l_2 можна знайти як кут між напрямними векторами $\overrightarrow{l_1} = \{b_1;-a_1\}$ і $\overrightarrow{l_2} = \{b_2;-a_2\}$ цих прямих. Як відомо, $\cos\angle\left(\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}\right) =$

$$= \frac{\left\langle \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_1} \right\rangle}\sqrt{\left\langle \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_2} \right\rangle}} = \frac{\begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b_2 \\ -a_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ -a_1 \end{pmatrix}}\sqrt{\begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b_2 \\ -a_2 \end{pmatrix}}}.$$

Звідки косинус не тупого кута $\theta = \angle(l_1, l_2)$ можна знайти за формулою

$$\cos\theta = \frac{|b_1 b_2 g_{11} + a_1 a_2 g_{22} - g_{12}(a_1 b_2 + a_2 b_1)|}{\sqrt{b_1^2 g_{11} + a_1^2 g_{22} - 2a_1 b_1 g_{12}}\sqrt{b_2^2 g_{11} + a_2^2 g_{22} - 2a_2 b_2 g_{12}}}. \qquad (25)$$

Відносно КСК з КК ω (25) набуває вид

$$\cos\theta = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)\cos\omega|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos\omega}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 - 2a_2 b_2 \cos\omega}}, \qquad (26)$$

а відносно ПСК

$$\cos\theta = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \qquad (27)$$

Не важко перевірити, що відносно АСК косинус, синус і тангенс кута θ між зазначеними прямими можна подати за допомогою співвідношень

$$\cos\theta = -\frac{\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_1 \\ g_{21} & g_{22} & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{Vmatrix}}{\sqrt{\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_1 \\ g_{21} & g_{22} & b_1 \\ a_1 & b_1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_2 \\ g_{21} & g_{22} & b_2 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{Vmatrix}}},$$

$$\sin\theta = +\frac{\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} \cdot \sqrt{\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix}}}{\sqrt{\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_1 \\ g_{21} & g_{22} & b_1 \\ a_1 & b_1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_2 \\ g_{21} & g_{22} & b_2 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{Vmatrix}}}, \quad \operatorname{tg}\theta = -\frac{\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} \cdot \sqrt{\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix}}}{\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_1 \\ g_{21} & g_{22} & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{Vmatrix}} \qquad (28)$$

Задача 6. Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $l : ax + by + c = 0$

Нехай $L(x'; y')$ – довільна але фіксована точка прямої l. Тоді шукану відстань $\rho(M_0; l)$ від точки M_0 до прямої l можна знайти як модуль проекції вектора $\overrightarrow{M_0 L}$ на нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ прямої l. Тобто $\rho(M_0; l) = \frac{\left|\langle \overrightarrow{M_0 L}, \overrightarrow{n} \rangle\right|}{|\overrightarrow{n}|}$.

Використовуючи результати задачі 3, в якості вектора $\overrightarrow{n}$ можна обрати вектор $\overrightarrow{n} = \{a g_{22} - b g_{12}; b g_{11} - a g_{21}\}$. Тому

$$\langle\overrightarrow{M_0L},\overrightarrow{n}\rangle = (x'-x_0\ \ y'-y_0)\circ\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} ag_{22}-bg_{12}\\ bg_{11}-ag_{21}\end{pmatrix}=$$

$$=(x'-x_0\ \ y'-y_0)\circ\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12}\\ -g_{21} & g_{11}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=$$

$$=(x'-x_0\ \ y'-y_0)\circ G\circ G^{-1}\cdot\|G\|\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=\|G\|\cdot(a(x'-x_0)+b(y'-y_0))\,.$$

$$|\overrightarrow{n}|^2=\langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{n}\rangle=(ag_{22}-bg_{12}\ \ bg_{11}-ag_{21})\circ\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} ag_{22}-bg_{12}\\ bg_{11}-ag_{21}\end{pmatrix}=$$

$$=(a\ \ b)\circ G^{-1}\cdot\|G\|\circ G\circ G^{-1}\cdot\|G\|\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=\|G\|^2\cdot(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}.$$

Оскільки $\|G\|>0$, $ax'+by'=-c$, то

$$\rho(M_0;l)=\frac{\left|\langle\overrightarrow{M_0L},\overrightarrow{n}\rangle\right|}{|\overrightarrow{n}|}=\frac{|a(x'-x_0)+b(y'-y_0)|}{\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}}}\,.$$

Таким чином, відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $l: ax+by+c=0$, заданих відносно АСК, можна обчислити за формулою

$$\rho(M_0;l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}}}. \tag{29}$$

Відносно КСК з КК ω формула (29) набуває вид

$$\rho(M_0;l)=\frac{\sin\omega\cdot|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}, \tag{30}$$

а відносно ПСК – добре знайому формулу

$$\rho(M_0;l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{31}$$

Задача 7. [4] Відстань між двома паралельними прямими $l_1: ax+by+c_1=0$ і $l_2: ax+by+c_2=0$

Нехай $L_2(x_2,y_2)$ – довільна але фіксована точка прямої l_2. Тоді шукану відстань $\rho(l_1;l_2)$ можна знайти як відстань точки L_2 до прямої l_1. Оскільки $ax_2+bx_2=-c_2$, то, з урахуванням формули (29), має місце рівність

$$\rho(L_2;l_1)=\frac{|ax_2+by_2+c_1|}{\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}}}=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}}}.$$

Таким чином, відстань між паралельними прямими l_1 і l_2, заданих своїми загальними рівняннями відносно АСК, можна обчислити за формулою

$$\rho(l_1;l_2)=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}}}. \tag{32}$$

Відносно КСК з КК ω формула (32) набуває вид

$$\rho(l_1;l_2)=\frac{\sin\omega\cdot|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}}, \tag{33}$$

а відносно ПСК – добре знайому формулу

$$\rho(l_1;l_2)=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{34}$$

Вправа 3. Перевірити, що рівняння прямої l_0, яка відстоїть на однакових відстанях від паралельних прямих $l_1: ax+by+c_1=0$ і $l_2: ax+by+c_2=0$ (заданих своїми рівняннями відносно АСК), можна подати у вигляді

$$l_0:\ ax+by+c_0=0,\ \text{де}\quad c_0=(c_1+c_2)/2. \tag{35}$$

Вправа 4. Перевірити, що рівняння прямої $\bar{l}$, яка є паралельною до прямих $l_1: ax+by+c_1=0$ і $l_2: ax+by+c_2=0$ (заданих своїми рівняннями відносно АСК) та ділить їх спільний перпендикуляр у відношенні $m:n,\ m,n\in N, m\geqslant n$ (у напрямку від l_1 до l_2), можна подати у вигляді

$$\bar{l}:\ ax+by+\bar{c}=0,\ \text{де}\quad \bar{c}=(mc_2+nc_1)/(m+n). \tag{36}$$

Вправа 5. Доведіть, що рівняння прямої $\widetilde{l}$, відношення відстаней якої до прямих $l_1: ax+by+c_1=0$ і $l_2: ax+by+c_2=0$ (заданих своїми рівняннями відносно АСК) становить $m:n,\ m,n\in N, m>n$ (у напрямку від l_1 до l_2), можна подати у вигляді (36) або ж

$$\widetilde{l}:\ ax+by+\widetilde{c}=0,\ \text{де}\quad \widetilde{c}=(mc_2-nc_1)(m-n). \tag{37}$$

Задача 8. [4] Рівняння бісектрис кутів, утворених двома непаралельними прямими $l_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ і $l_2: a_2x+b_2y+c_2=0$

Нехай $(x';y')$ – координати довільної але фіксованої точки D, що належить бісектрисі d одного з двох суміжних кутів, утворених прямими l_1 і l_2. Як відомо, відстані довільної точки (D) бісектриси (d) кута до його сторін є рівними, тобто $\rho(D;l_1)=\rho(D;l_2)$. Тому, з урахуванням формули (29), має місце рівність

$$\frac{|a_1x'+b_1y'+c_1|}{\Delta_1}=\frac{|a_2x'+b_2y'+c_2|}{\Delta_2},\ \text{де}\ \ \Delta_i=\sqrt{(a_i\ \ b_i)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix}},$$

$i=1,2$.

Оскільки $(x'; y')$ – поточні координати довільної точки однієї з двох бісектрис, то шукані рівняння бісектрис d_1 і d_2 відносно АСК можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} d_1: \quad & \frac{(a_1x + b_1y + c_1)}{\Delta_1} = +\frac{(a_2x + b_2y + c_2)}{\Delta_2}; \\ d_2: \quad & \frac{(a_1x + b_1y + c_1)}{\Delta_1} = -\frac{(a_2x + b_2y + c_2)}{\Delta_2}, \end{aligned} \tag{38}$$

де

$$\Delta_i = \sqrt{(a_i \ \ b_i) \circ G^{-1} \circ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}}, \ \forall\, i = 1, 2.$$

Шукані рівняння бісектрис d_1 і d_2 відносно КСК з КК ω набувають вид

$$\begin{aligned} d_1: \quad & \frac{(a_1x + b_1y + c_1)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos\omega}} = +\frac{(a_2x + b_2y + c_2)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos\omega}}; \\ d_2: \quad & \frac{(a_1x + b_1y + c_1)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos\omega}} = -\frac{(a_2x + b_2y + c_2)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos\omega}}, \end{aligned} \tag{39}$$

а відносно ПСК

$$\begin{aligned} d_1: \quad & \frac{(a_1x + b_1y + c_1)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = +\frac{(a_2x + b_2y + c_2)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}; \\ d_2: \quad & \frac{(a_1x + b_1y + c_1)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{(a_2x + b_2y + c_2)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}. \end{aligned} \tag{40}$$

Вправа 6. Задано дві прямі $l_1: \ a_1x+b_1y+c_1 = 0$ і $l_2: \ a_2x+b_2y+c_2 = 0$, які перетинаються, та точку $M_0(x_0; y_0)$, що не належить жодній з них. Доведіть, що рівняння бісектриси того кута, внутрішності якого належить дана точка M_0, має вид

$$\frac{(a_1x + b_1y + c_1)\cdot \mathrm{sign}F_1(x_0; y_0)}{\Delta_1} = \frac{(a_2x + b_2y + c_2)\cdot \mathrm{sign}F_2(x_0; y_0)}{\Delta_2}, \tag{41}$$

де $F_1(x_0; y_0) = a_1x_0 + b_1y_0 + c_1$, а $F_2(x_0; y_0) = a_2x_0 + b_2y_0 + c_2$.

Вправа 7. [4] Доведіть, що рівняння бісектрис координатних кутів АСК можна подати у вигляді

$$m: \ x\sqrt{g_{11}} \pm y\sqrt{g_{22}} = 0, \tag{42}$$

які відносно КСК з КК ω та ПСК набувають вид

$$m: \ y = \pm x. \tag{43}$$

Задача 9. Координати ортогональної проекції P' точки $P(\overline{x};\overline{y})$ на пряму $l:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$

Нехай $(x';y')$ – шукані координати точки P'. Оскільки $P'\in l$, то $\begin{cases} x'=mt+x_0\\ y'=nt+y_0.\end{cases}$ Оскільки вектор $\overrightarrow{P'P}=\{mt+x_0-\overline{x};nt+y_0-\overline{y}\}$ є перпендикулярним до прямої l, а $\overrightarrow{l}=\{m;n\}$ – напрямний вектор прямої l, то вектори $\overrightarrow{P'P}$ і $\overrightarrow{l}$ є ортогональними. Тому має місце рівність

$$\left(mt+x_0-\overline{x} \,\vdots\, nt+y_0-\overline{y}\right)\circ G\circ\begin{pmatrix} m\\ n\end{pmatrix}=0.$$

Звідки $\quad t\cdot\begin{pmatrix} m & n\end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} m\\ n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{x}-x_0 & \overline{y}-y_0\end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} m\\ n\end{pmatrix}$, або ж

$$t=\frac{\begin{pmatrix}\overline{x}-x_0 & \overline{y}-y_0\end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} m\\ n\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} m & n\end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} m\\ n\end{pmatrix}}.$$

Отже, $\quad x'=\dfrac{\begin{pmatrix}\overline{x}-x_0 & \overline{y}-y_0\end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} m\\ n\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} m & n\end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} m\\ n\end{pmatrix}}\cdot m+x_0=\dfrac{\left(m\overline{x} \,\vdots\, m(\overline{y}-y_0)+nx_0\right)\circ G\circ\begin{pmatrix} m\\ n\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} m & n\end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} m\\ n\end{pmatrix}}.$

Таким чином, шукані координати ортогональної проекції точки $P(\overline{x};\overline{y})$ на пряму $l:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$, заданих відносно АСК, можна подати у вигляді

$$x'=\frac{\left(m\overline{x} \,\vdots\, m(\overline{y}-y_0)+nx_0\right)\circ G\circ\begin{pmatrix} m\\ n\end{pmatrix}}{\Delta};\quad y'=\frac{\left(n(\overline{x}-x_0)+my_0 \,\vdots\, n\overline{y}\right)\circ G\circ\begin{pmatrix} m\\ n\end{pmatrix}}{\Delta},\tag{44}$$

де

$$\Delta=\begin{pmatrix} m & n\end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix} m\\ n\end{pmatrix}.$$

Шукані координати x', y' відносно КСК з КК ω набувають вид

$$\begin{aligned} x'&=\frac{m(m\overline{x}+n\overline{y})+n(nx_0-my_0)+m\cos\omega(n\overline{x}+m\overline{y}+nx_0-my_0)}{m^2+n^2+2mn\cos\omega};\\ y'&=\frac{n(m\overline{x}+n\overline{y})-m(nx_0-my_0)+n\cos\omega(n\overline{x}+m\overline{y}-nx_0+my_0)}{m^2+n^2+2mn\cos\omega},\end{aligned}\tag{45}$$

а відносно ПСК

$$x'=\frac{m(m\overline{x}+n\overline{y})+n(nx_0-my_0)}{m^2+n^2};\ y'=\frac{n(m\overline{x}+n\overline{y})-m(nx_0-my_0)}{m^2+n^2}.\tag{46}$$

Вправа 8. [9] Перевірити, що координати ортогональної проекції точки $P(\overline{x};\overline{y})$ на пряму $l: ax+by+c=0$, заданих відносно АСК, можна подати у вигляді

$$x' = \frac{\begin{pmatrix} b\overline{x} \vdots b\overline{y}+c \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}; \quad y' = -\frac{\begin{pmatrix} a\overline{x}+c \vdots a\overline{y} \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}. \quad (47)$$

Вправа 9. Показати, що координати точки P'', симетричної точці $P(\overline{x};\overline{y})$ відносно прямої $l: ax+by+c=0$, заданих відносно АСК, можна подати у вигляді

$$x'' = \frac{\begin{pmatrix} b\overline{x} \vdots 2b\overline{y}+2c+a\overline{x} \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}; \quad y'' = -\frac{\begin{pmatrix} 2a\overline{x}+2c+b\overline{y} \vdots a\overline{y} \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}. \quad (48)$$

Нагадаємо, що *кутовим коефіцієнтом* k прямої l називають відношення другої до першої координати напрямного вектора $\overrightarrow{l}$ цієї прямої. Оскільки перша координата будь-якого вектора, паралельного до осі OY, дорівнює нулю, то кутовий коефіцієнт коректно визначений (існує) лише для прямих, що не є паралельними до осі OY.

Очевидно, що (відносно АСК) рівняння прямої l, яка проходить через дану точку $L(x_0;y_0)$ та має кутовий коефіцієнт рівний k, можна подати у вигляді $\quad l: \quad y-y_0=k(x-x_0)$.

Задача 10. Рівняння прямої l, що проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ і утворює кут φ з додатним напрямом осі OX

Очевидно, що у випадку $\varphi=0^0$, шукане рівняння прямої l має вид

$$l: \ y=y_0;$$

якщо $\varphi=\angle(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, то рівняння прямої має вид

$$l: \ x=x_0;$$

якщо ж $\varphi=90^0$, то дана задача зводиться до задачі 4, а шукане рівняння прямої (з урахуванням вправи 1) має вид

$$l: \ (x-x_0)g_{11}+(y-y_0)g_{12}=0.$$

В подальшому достатньо обмежитися розглядом $\varphi\in\left(0^0;180^0\right)\setminus\{90^0;\omega\}$, де $\omega=\angle(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. Оскільки за припущенням $\varphi\neq\omega$, то шукане рівняння прямої l можна знайти як рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, тобто як рівняння виду $y-y_0=k(x-x_0)$ з невідомим кутовим коефіцієнтом k.

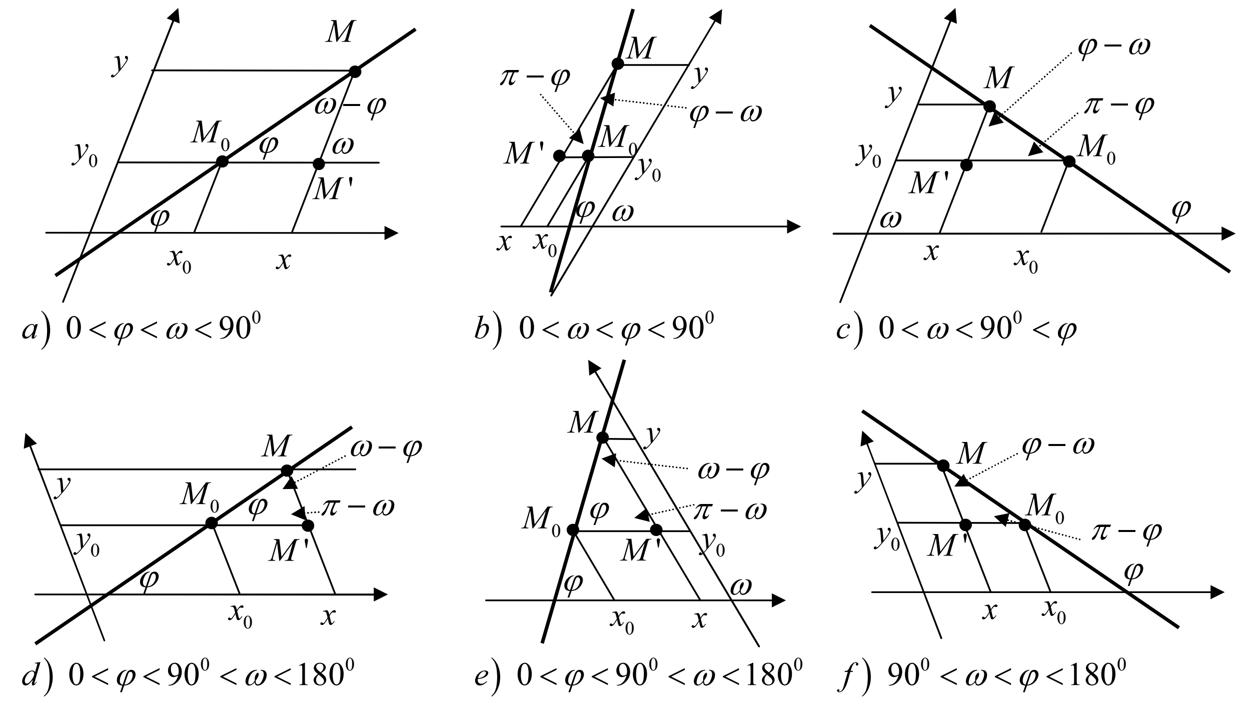

Рис. 2: до задачі 10

Нехай $M(x;y)$ – довільна але фіксована точка шуканої прямої l, яка є відміною від точки $M_0(x_0;y_0)$.

Через кожну з точок M_0, M проведемо прямі, що є паралельними до координатних осей. Пряму, що проходить через точку M паралельно до осі OY, позначимо як m. Оскільки (за припущенням) пряма l не є паралельною до осі OY, то прямі $y=y_0$ та m завжди перетинаються, точку перетину яких позначимо через M'.

Розглянемо $\Delta MM_0M'$. Не важко перевірити, що в кожному із 6-ти суттєво різних випадків (рис. 2. $a)$ — $f)$) мають місце наступні системи рівностей

$$\begin{cases} M'M_0=(x-x_0)\sqrt{g_{11}} \\ M'M=(y-y_0)\sqrt{g_{22}} \\ \angle M'M_0M=\varphi \\ \angle M'MM_0=\omega-\varphi \end{cases} (*), \quad \text{або ж} \quad \begin{cases} M'M_0=-(x-x_0)\sqrt{g_{11}} \\ M'M=(y-y_0)\sqrt{g_{22}} \\ \angle M'M_0M=\pi-\varphi \\ \angle M'MM_0=\varphi-\omega. \end{cases} (**)$$

З $\Delta MM_0M'$ за теоремою синусів має місце рівність

$$\frac{M'M}{\sin\angle M'M_0M}=\frac{M'M_0}{\sin\angle M'MM_0}. \tag{49}$$

Тоді, з урахуванням $(*)$ і $(**)$, рівність (49) набуває вид

$$\frac{(y-y_0)\sqrt{g_{22}}}{\sin\varphi}=\frac{(x-x_0)\sqrt{g_{11}}}{\sin(\omega-\varphi)}, \quad \text{або ж} \quad \frac{(y-y_0)\sqrt{g_{22}}}{\sin(\pi-\varphi)}=\frac{-(x-x_0)\sqrt{g_{11}}}{\sin(\varphi-\omega)} \tag{50}$$

відповідно.

Отже, координати $(x;y)$ довільної точки M шуканої прямої l задовольняють рівняння

$$y-y_0=\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega-\varphi)}(x-x_0). \tag{51}$$

Виразимо величину $\sin(\omega-\varphi)$ в термінах вихідних даних.
З урахуванням рівностей $\cos\omega=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$, $\sin\omega=\frac{\sqrt{\|G\|}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$ (які є безпосереднім наслідком з визначення коефіцієнтів матриці Грама), маємо:
$\sin(\omega-\varphi)=\sin\omega\cos\varphi-\cos\omega\sin\varphi=\frac{\sqrt{\|G\|}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}\cos\varphi-\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}\sin\varphi$.

За припущенням $\varphi\neq 90^0$. Звідки $\cos\varphi\neq 0$ і тому

$$k=\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\cdot\frac{\sin\varphi}{\frac{\sqrt{\|G\|}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}\cos\varphi-\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}\sin\varphi}=\frac{g_{11}\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{\|G\|}-g_{12}\operatorname{tg}\varphi}. \tag{52}$$

Таким чином, шукане рівняння прямої відносно АСК має вид

$$y-y_0=\frac{g_{11}\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{\|G\|}-g_{12}\operatorname{tg}\varphi}\cdot(x-x_0). \tag{53}$$

Відносно КСК з КК ω (53) набуває вид

$$y-y_0=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin\omega-\cos\omega\operatorname{tg}\varphi}\cdot(x-x_0), \tag{54}$$

а відносно ПСК – добре знайомий вид

$$y-y_0=\operatorname{tg}\varphi\cdot(x-x_0). \tag{55}$$

`Геометричний зміст коефіцієнта` k `прямої` $l: y-y_0=k(x-x_0)$.
З урахуванням (52), не важко пересвідчитись у тому, що для прямої, заданої відносно АСК рівнянням з кутовим коефіцієнтом,

$$k>0\Leftrightarrow\psi\in\left(0^0;\omega\right)\text{ і навпаки, }k<0\Leftrightarrow\psi\in\left(\omega;180^0\right).$$

Геометричний зміст кутового коефіцієнта прямої, заданої рівнянням відносно ПСК, полягає у тому, що він дорівнює тангенсу кута φ між прямою та додатним напрямом осі OX. Для прямої, заданої рівнянням відносно АСК,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k\sqrt{\|G\|}}{g_{11}+kg_{12}}. \tag{56}$$

Слід також зазначити, що кутовий коефіцієнт прямої, яка є перпендикулярною до осі OX АСК з координатним кутом $\omega=\angle(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})\neq 90^0$, (або ж як безпосередньо випливає з рівняння (19) вправи 1) становить

$$k=\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\cdot\frac{\sin 90^0}{\sin(\omega-90^0)}=-\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\cdot\frac{\sin 90^0}{\sin(90^0-\omega)}=-\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\cdot\frac{1}{\cos\omega}=\boxed{-\frac{g_{11}}{g_{12}}}. \tag{57}$$

Задача 11. [10] Кут між прямими, заданими рівняннями $l_1 : y = k_1x + h_1$ і $l_2 : y = k_2x + h_2$ відносно АСК

З урахуванням задачі 5, косинус *не тупого* кута θ між прямими l_1 і l_2 можна знайти за формулою (25). Поділивши чисельник і знаменник правої частини (25) на добуток $b_1 \cdot b_2$, та прийнявши до уваги рівності $\frac{a_i}{b_i} = -k_i$ ($i = 1; 2$), одержимо

$$\cos\theta = \frac{|g_{11} + k_1k_2g_{22} + g_{12}(k_1 + k_2)|}{\sqrt{g_{11} + k_1^2g_{22} + 2k_1g_{12}}\sqrt{g_{11} + k_2^2g_{22} + 2k_2g_{12}}}. \qquad (58)$$

З урахуванням (58) та основної тригонометричної тотожності, синус *не тупого* кута θ між прямими l_1 і l_2 можна знайти за формулою

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\|G\|} \cdot |k_1 - k_2|}{\sqrt{g_{11} + k_1^2g_{22} + 2k_1g_{12}}\sqrt{g_{11} + k_2^2g_{22} + 2k_2g_{12}}}. \qquad (59)$$

З урахуванням (58) і (59), тангенс *не тупого* кута між прямими l_1 і l_2, заданих рівняннями відносно АСК, можна знайти за формулою

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{\|G\|} \cdot |k_1 - k_2|}{|g_{11} + k_1k_2g_{22} + g_{12}(k_1 + k_2)|}. \qquad (60)$$

Відносно КСК з КК ω (60) набуває вид

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\omega \cdot |k_1 - k_2|}{|1 + k_1k_2 + (k_1 + k_2)\cos\omega|}, \qquad (61)$$

а відносно ПСК

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{|k_1 - k_2|}{|1 + k_1k_2|}. \qquad (62)$$

Задача 12. [10] Умови перпендикулярності прямих $l_1 : y = k_1x + h_1$ і $l_2 : y = k_2x + h_2$ в термінах їх кутових коефіцієнтів k_1 і k_2

З урахуванням необхідної і достатньої умови перпендикулярності прямих, заданих своїми загальними рівняннями відносно АСК (умова (13) із задачі 3) та рівностей $\frac{a_i}{b_i} = -k_i$ ($i = 1; 2$), або ж з урахуванням рівності (60), необхідну й достатню умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2, заданих своїми рівняннями (з кутовим коефіцієнтом) відносно АСК, можна подати у вигляді

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow g_{11} + k_1k_2g_{22} + g_{12}(k_1 + k_2) = 0 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{g_{11} + k_1g_{12}}{g_{21} + k_1g_{22}}. \qquad (63)$$

Відносно КСК з КК ω у вигляді

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow 1 + k_1k_2 + (k_1 + k_2)\cos\omega = 0 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1 + k_1\cos\omega}{\cos\omega + k_1}, \qquad (64)$$

а відносно ПСК –

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1. \qquad (65)$$

Задача 13. Рівняння прямої l, яка відстоїть від початку координат на відстані $p > 0$, а її нормальний вектор утворює кут α з додатним напрямом осі OX

Нехай $(x'; y')$ – координати основи перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму l. Тоді $\overrightarrow{n} = \{x'; y'\}$ – нормальний вектор прямої l. За умовою пряма l відстоїть від початку координат на відстані $p > 0$ і тому $|\overrightarrow{n}| = p$. Звідки має місце матрична рівність

$$\begin{pmatrix} x' \ y' \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = p^2. \tag{66}$$

З іншого боку, оскільки вектор $\overrightarrow{n}$ утворює з додатним напрямом осі OX (з вектором $\overrightarrow{e_1} = \{1; 0\}$) кут α, то з урахуванням (66), має місце рівність

$$\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}} = \cos\alpha \Leftrightarrow \frac{g_{11}x' + g_{12}y'}{\sqrt{g_{11}} \cdot p} = \cos\alpha \tag{67}$$

Нехай далі $(x; y)$ – координати довільної точки прямої l. Тоді вектори $\overrightarrow{n} = \{x'; y'\}$ та $\overrightarrow{l} = \{x - x'; y - y'\}$ є ортогональними, і тому шукане рівняння прямої l можна подати у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} x' \ y' \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \ y' \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \ y' \end{pmatrix} \circ G \circ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0.$$

З урахуванням (67), останнє рівняння можна подати у вигляді

$$(g_{11}x' + g_{21}y')\,x + (g_{12}x' + g_{22}y')\,y - p^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{g_{11}}\frac{g_{11}x' + g_{12}y'}{\sqrt{g_{11}} \cdot p}x + \sqrt{g_{22}}\frac{g_{12}x' + g_{22}y'}{\sqrt{g_{22}} \cdot p}y - p = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{g_{11}}\cos\alpha \cdot x + \sqrt{g_{22}}\cos\beta \cdot y - p = 0, \tag{68}$$

де β – кут, який утворює вектор $\overrightarrow{n}$ з додатним напрямом осі OY (з вектором $\overrightarrow{e_2} = \{0; 1\}$).

Позначимо далі $\omega = \angle(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Оскільки $\beta = \pm(\alpha - \omega)$ і $\cos\beta = \cos(-\beta)$, то, з урахуванням рівностей $\cos\omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$, $\sin\omega = \frac{\sqrt{\|G\|}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$, маємо рівність $\cos\beta = \cos(\alpha - \omega) = \cos\alpha\cos\omega + \sin\alpha\sin\omega = \cos\alpha \cdot \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} + \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{\|G\|}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$

Таким чином, шукане рівняння прямої l відносно АСК має вид

$$\sqrt{g_{11}}\cos\alpha \cdot x + \left(\cos\alpha \cdot \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} + \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{\|G\|}}{\sqrt{g_{11}}}\right) \cdot y - p = 0. \tag{69}$$

Відносно КСК з КК ω рівняння (69) набуває вид

$$\cos\alpha\cdot x+(\cos\alpha\cdot\cos\omega+\sin\alpha\cdot\sin\omega)\cdot y-p=0, \tag{70}$$

а відносно ПСК – добре знайомий вигляд

$$\cos\alpha\cdot x+\sin\alpha\cdot y-p=0. \tag{71}$$

Задача 14. Зведення загального рівняння прямої $l: ax+by+c=0$ до нормального виду

Під нормальним рівнянням прямої $l: ax+by+c=0$ будемо розуміти рівняння прямої l виду

$$l: \sqrt{g_{11}}\cos\alpha\cdot x+\sqrt{g_{12}}\cos\beta\cdot y-p=0, \tag{72}$$

де p – відстань від початку координат до прямої l, а α і β – кути, які утворює нормальний вектор прямої l (початок якого співпадає з початком O АСК) з додатними напрямами осей OX і OY відповідно.

Як відомо, в ПСК зведення загального рівняння прямої $l: ax+by+c=0$ до нормального виду досягається завдяки множенню обох частин загального рівняння прямої на нормуючий множник $\mu=\dfrac{-\text{sign } c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Покажемо, що в якості нормуючого множника у випадку АСК необхідно обрати величину

$$\mu=\frac{-\text{sign } c}{\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}}}. \tag{73}$$

Дійсно:

1) з урахуванням формули (29), $\mu\cdot c=\dfrac{(-\text{sign } c)\cdot c}{\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}}}=-\rho(O;l)=-p$;

2) $\cos\alpha=\cos\angle(\overrightarrow{n},OX_+)=\cos\angle(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{n})=$

$$=\frac{\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\circ G\circ\begin{pmatrix}ag_{22}-bg_{12}\\ bg_{11}-ag_{21}\end{pmatrix}}{\sqrt{g_{11}}\cdot\|G\|\cdot\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}}}=\frac{a\cdot\|\cancel{G}\|}{\sqrt{g_{11}}\cdot\|\cancel{G}\|\cdot\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}}};$$

3) аналогічно

$$\cos\beta=\cos\angle(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{n})=\frac{b\cdot\|\cancel{G}\|}{\sqrt{g_{22}}\cdot\|\cancel{G}\|\cdot\sqrt{(a\ \ b)\circ G^{-1}\circ\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}}}.$$

Таким чином, для зведення загального рівняння прямої $l: ax+by+c=0$ до нормального виду необхідно:
1) помножити обидві частини загального рівняння прямої l на нормуючий множник (73);
2) помножити та розділити чисельник і знаменник першого доданку на $\sqrt{g_{11}}$;
3) помножити та розділити чисельник і знаменник другого доданку на $\sqrt{g_{22}}$.

Задача 15. Рівняння прямих, що проходять через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ під кутом θ ($0<\theta<\frac{\pi}{2}$) до даної прямої $l: y=kx+h$

Оскільки шукані прямі m_1 і m_2 утворюють рівні кути θ з даною прямою l, то, з урахуванням (63) із задачі 12, їх кутові коефіцієнти k_1 і k_2 задовольняють умову

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{\|G\|}\cdot|k_i-k|}{|g_{11}+k_ikg_{22}+g_{12}(k_i+k)|}\Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta=\pm\frac{\sqrt{\|G\|}\cdot(k_i-k)}{g_{11}+k_ikg_{22}+g_{12}(k_i+k)},\quad (74)$$

звідки маємо: $\operatorname{tg}\theta=-\frac{\sqrt{\|G\|}\cdot(k_1-k)}{g_{11}+k_1kg_{22}+g_{12}(k_1+k)} \ \Rightarrow\ k_1=\frac{k\sqrt{\|G\|}-(g_{11}+kg_{12})\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{\|G\|}+(g_{21}+kg_{22})\operatorname{tg}\theta}$

$$\operatorname{tg}\theta=+\frac{\sqrt{\|G\|}\cdot(k_2-k)}{g_{11}+k_2kg_{22}+g_{12}(k_2+k)} \ \Rightarrow\ k_2=\frac{k\sqrt{\|G\|}+(g_{11}+kg_{12})\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{\|G\|}-(g_{21}+kg_{22})\operatorname{tg}\theta}.$$

І тому рівняння прямих m_1 і m_2 (відносно АСК) можна подати у вигляді

$$m_1,m_2:\ y-y_0=\frac{k\sqrt{\|G\|}\mp(g_{11}+kg_{12})\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{\|G\|}\pm(g_{21}+kg_{22})\operatorname{tg}\theta}(x-x_0). \quad (75)$$

Відносно КСК з КК ω рівняння прямих (75) набувають вид

$$m_1,m_2:\ y-y_0=\frac{k\sin\omega\mp(1+k\cos\omega)\operatorname{tg}\theta}{\sin\omega\pm(\cos\omega+k)\operatorname{tg}\theta}(x-x_0), \quad (76)$$

а відносно ПСК – рівняння виду

$$m_1:\ y-y_0=\frac{k-\operatorname{tg}\theta}{1+k\operatorname{tg}\theta}(x-x_0),\ \ m_2:\ y-y_0=\frac{k+\operatorname{tg}\theta}{1-k\operatorname{tg}\theta}(x-x_0), \quad (77)$$

Вправа 10. Покажіть, що відносно АСК рівняння прямої l_2, яка є симетричною до прямої $l_1: y-y_0=k_1(x-x_0)$ відносно прямої $l: y-y_0=k(x-x_0)$, можна подати у вигляді $y-y_0=k'(x-x_0)$, де

$$k'=k_1+2(k-k_1)\cdot\frac{g_{11}+g_{12}(k+k_1)+g_{22}kk_1}{g_{11}+2k_1g_{12}+k(2k_1-k)g_{22}}. \quad (78)$$

Зауважимо, що шукана пряма існує завжди. Тому у випадку коли $g_{11}+2k_1g_{12}+k(2k_1-k)g_{22}=0$, рівняння шуканої прямої має вид $x-x_0=0$, оскільки на площині існує єдина пряма, яка проходить через точку $(x_0;y_0)$ і для якої кутовий коефіцієнт не визначено (через паралельність до осі OY).

Більше того, має місце простий спосіб знаходження рівнянь бісектрис кутів, утворених прямими $x = x_0$ і $l_1 : y - y_0 = k_1(x - x_0)$. А саме, кутові коефіцієнти зазначених бісектрис є коренями квадратного рівняння (відносно k): $g_{11} + 2k_1 g_{12} + k(2k_1 - k)g_{22} = 0$.

Задача 16. Рівняння прямих, що проходять через дану точку $M_1(x_1; y_1)$ та відстоять від точки $M_0(x_0; y_0)$ на відстані p

Оскільки шукана пряма m проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$, то її рівняння будемо шукати у вигляді $m : y - y_1 = k(x - x_1)$. Отже, знаходження рівняння шуканої прямої зводиться до відшукання її кутового коефіцієнта k.

За умовою точка $M_0(x_0; y_0)$ відстоїть від прямої $m : k(x-x_1)-(y-y_1) = 0$ на відстані p. Тому, з урахуванням (29), має місце рівність

$$\frac{|k(x_0 - x_1) - (y_0 - y_1)|}{\sqrt{(k \quad -1) \circ G^{-1} \circ \begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}}} = p, \text{ звідки}$$

$$\left(k^2(x - x_1)^2 - 2k(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) + (y_0 - y_1)^2\right) = \tfrac{p^2}{\|G\|}\left(k^2 g_{22} + 2kg_{12} + g_{11}\right),$$

$$k^2\left(\|G\|(x_0 - x_1)^2 - p^2 g_{22}\right) - 2k\left(\|G\|(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) + p^2 g_{12}\right) + \\ + \|G\|(y_0 - y_1)^2 - p^2 g_{11} = 0. \quad (*)$$

1) Припустимо, що $\|G\|(x_0 - x_1)^2 - p^2 g_{22} \neq 0$. Тоді рівняння $(*)$ можна розв'язати як квадратне рівняння відносно k. Не важко перевірити, що

$$\tfrac{D}{4} = p^2\|G\|\left(d^2 - p^2\right), \text{ де}$$

$$d^2 = (x_0 - x_1 \quad y_0 - y_1) \circ G \circ \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix} = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|^2. \qquad (79)$$

Можливими є лише наступні три випадки.

1.1) Якщо $d < p$, то шуканої прямої не існує.

1.2) Якщо $d = p$, то існує єдина (дві співпадаючі) шукана пряма m (для неї в цьому випадку вектор $\overrightarrow{n} = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1\}$ є нормальним вектором), рівняння якої відносно АСК можна подати у вигляді

$$m : y - y_1 = \frac{\|G\|(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) + p^2 g_{12}}{\|G\|(x_0 - x_1)^2 - p^2 g_{22}}(x - x_1), \quad \text{або ж}$$

$$(x-x_1)\left(g_{11}(x_0 - x_1) + g_{12}(y_0 - y_1)\right) + (y-y_1)\left(g_{12}(x_0 - x_1) + g_{22}(y_0 - y_1)\right) = 0. \qquad (80)$$

Зазначимо, що в цьому випадку шукана пряма m дотикається кола $\omega(M_0; p)$ (з центром в точці $M_0(x_0; y_0)$ радіуса p) в точці $M_1(x_1; y_1)$.

Рівняння прямої (80) відносно КСК з КК ω набуває вид

$$(x-x_1)\left((x_0 - x_1) + (y_0 - y_1)\cos\omega\right) + (y-y_1)\left((x_0 - x_1)\cos\omega + (y_0 - y_1)\right) = 0, \qquad (81)$$

а відносно ПСК –

$$(x - x_1)(x_0 - x_1) + (y - y_1)(y_0 - y_1) = 0. \tag{82}$$

1.3) Якщо $d > p$, то `існує дві шукані прямі` m_1 і m_2 (дотичні до кола $\omega(M_0; p)$, що проходять через точку $M_1(x_1; y_1)$), рівняння яких відносно АСК можна подати у вигляді $m_i : y - y_1 = k_i(x - x_1)$, де

$$k_{1,2} = \frac{\|G\|(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) + p^2 g_{12} \mp p\sqrt{\|G\|}\sqrt{d^2 - p^2}}{\|G\|(x_0 - x_1)^2 - p^2 g_{22}}, \tag{83}$$

а величина d обчислюється за формулою (79).
Формули (83) для обчислення k_1 і k_2 відносно КСК з КК ω набувають вид

$$k_{1,2} = \frac{(x_0 - x_1)(y_0 - y_1)\sin^2\omega + p^2\cos\omega \mp p\sin\omega\sqrt{d^2 - p^2}}{\sin^2\omega \cdot (x_0 - x_1)^2 - p^2}, \tag{84}$$

$$d^2 = (x_0 - x_1)^2 + 2(x_0 - x_1)(y_0 - y_1)\cos\omega + (y_0 - y_1)^2$$

а відносно ПСК –

$$k_{1,2} = \frac{(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) \mp p\sqrt{d^2 - p^2}}{(x_0 - x_1)^2 - p^2}, \quad d^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2. \tag{85}$$

2) Припустимо тепер, що $\|G\|(x_0 - x_1)^2 - p^2 g_{22} = 0 \quad (\star)$.
Тоді рівняння $(*)$ «вироджується» у лінійне рівняння відносно k:

$$2k\left(\|G\|(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) + p^2 g_{12}\right) = \|G\|(y_0 - y_1)^2 - p^2 g_{11} \quad (**)$$

Зауважимо, що `геометричний зміст умови` $(\star)$ полягає у тому, що вона є рівносильною умові про те, що точка M_0 відстоїть від прямої $\overline{m} : x - x_1 = 0$ на відстані p. В останньому не важко пересвідчитись шляхом безпосередньої перевірки за допомогою формули (29).

Таким чином, 2)-ий випадок характеризується тим, що пряма $\overline{m} : x = x_1$ є шуканою прямою. Крім того, можливими є наступні підвипадки.

2.1) Якщо $\|G\|(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) + p^2 g_{12} \neq 0$, то

$$k = \frac{\|G\|(y_0 - y_1)^2 - p^2 g_{11}}{2\left(\|G\|(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) + p^2 g_{12}\right)} = k' \tag{86}$$

і тому шукані рівняння прямих мають вид

$$m' : y - y_1 = k'(x - x_1) \text{ та } \overline{m} : x = x_1.$$

2.2) Якщо $\|G\|(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) + p^2 g_{12} = 0 \quad (\star\star)$, то
2.2.1) у випадку $\|G\|(y_0 - y_1)^2 - p^2 g_{11} \neq 0$, рівняння $(**)$ взагалі не має розв'язків, і тому єдиною шуканою прямою є пряма $\overline{m} : x = x_1$;

2.2.2) у випадку $\|G\|(y_0 - y_1)^2 - p^2 g_{11} = 0$ $(\star\star\star)$, рівняння $(**)$ має безліч розв'язків, тобто $k \in R$. Дійсно, за умов одночасного виконання $(\star)$, $(\star\star)$ та $(\star\star\star)$ точка M_1 співпадає з точкою M_0 а $p = 0$. І тому будь-яка пряма, яка проходить через точку M_1, відстоїть від точки $M_0 \equiv M_1$ на відстані $p = 0$. Шуканими прямими у цьому випадку є прямі $m_k : y - y_0 = k(x - x_0), k \in R$ та $\overline{m} : x = x_1$ $(x_1 = x_0)$.

Площа трикутника, обмеженого трьома прямими

Вправа 11.[9] Пряму l відносно АСК задано «рівнянням у відрізках» $l : \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. Доведіть, що $S_{\triangle MNO}$ (O – початок координат, $M = l \cap OX$, $N = l \cap OY$), обмеженого прямою l та координатними прямими, можна обчислити за формулою

$$S_{\triangle MNO} = \frac{\sqrt{\|G\|}}{2} \cdot |m||n|. \tag{87}$$

Вправа 12.[4] Нехай сторони трикутника ABC відносно АСК задано рівняннями (BC) : $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, (CA) : $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, (AB) : $a_3x + b_3y + c_3 = 0$. Доведіть, що $S_{\triangle ABC}$ можна обчислити за формулою

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{\|G\|}}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{\operatorname{mod}\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)}. \tag{88}$$

Зауважимо, що `геометричний зміст визначника матриці Грама` G, елементами якої є метричні коефіцієнти g_{ij} базису $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ (який разом з полюсом O визначає на площині АСК) полягає у тому, що значення $\sqrt{\|G\|}$ дорівнює площі координатного (*масштабного*) паралелограма OE_1EE_2 узагальненої декартової системи координат АСК $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ – рис. 1 a).

Висновки

В представленій роботі наведено розв'язання 16 «ключових» задач та 12 вправ теоретичного характеру, які (в певному розумінні) «повно» охоплюють метричні задачі «на пряму в площині» в афінних координатах.

На нашу думку є доцільним проведення аналогічних досліджень стосовно метричних задач «на пряму і площину в просторі» в афінних координатах.

Апробація запропонованого підходу до викладання зазначеної теми (під час проведення у 1-му семестрі 2012-2013 н.р. «Вибраних питань математики» для студентів 5 курсу фізико-математичного факультету ДВНЗ «ДДПУ») дозволяє стверджувати, що метричні задачі в афінних координатах у студентів викликали інтерес, спонукали їх до творчої діяльності та посилювали розуміння студентів причинно-наслідкових та міжпредметних зв'язків.

Автори мають надію, що наведений матеріал буде корисний студентам ВНЗ під час вивчення відповідної теми «Аналітичної геометрії» як посібник, та зацікавить викладачів, які викладають цю дисципліну, принаймні, як довідковий матеріал, який лише доповнює відповідні параграфи [8], [9].

Література

[1] Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, поплненные необходимыми сведениями из алгебры / П.С. Александров. — М.: Наука, 1968. — 912 с.

[2] Делоне Б.Н. Аналитическая геометрия / Б.Н. Делоне, Д.А. Райков. — Ленинград: ОГИЗ, 1948. — Т. 1. — 456 с.

[3] Ефимов Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. — М., 1974. — 544 с.

[4] Кадубовський О.А. Введення косокутної системи координат, як метод розв'язання широкого кола задач з аналітичної геометрії середньої та вищої шкіл / О.А. Кадубовський, О.Л. Кадубовська // Пошуки і знахідки. — 2003. — С. 47 – 51.

[5] Ким Г.Д. Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи / Г.Д. Ким, Л.В. Крицков. — М.: Планета знаний, 2007. — Т. 1. — 469 с.

[6] *Лосєва Н.М.* Прикладна спрямованість навчання аналітичної геометрії як основа формування професійної компетентності викладача математики / Н.М. Лосєва, О.А. Ніколаєва // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт. — 2012. — № 38. — С. 46 – 50.

[7] Моденов П.С. Аналитическая геометрия / П.С. Моденов. — М.: МГУ, 1969. — 699 с.

[8] Моденов П.С. Сборник задач по аналитической геометрии / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. — М.: Наука, 1976. — 384 с.

[9] Моденов П.С. Задачи по геометрии / П.С. Моденов. — М.: Наука, 1979. — 368 с.

[10] Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии / Н.И. Мусхелишвили. — [4-е изд.]. — М.: Высшая школа, 1967. — 655 с.

[11] Постников М.М. Аналитическая геометрия / М.М. Постников. — М.: Наука, 1973. — 384 с.

[12] Алания Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л.А. Алания, И.А. Дынников, В.М. Мануйлов; [под ред. Ю.М. Смирнова]. — [2-е изд.]. — М.: Логос, 2005. — 376 с.