МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Новиков О.А., Ровенская О.Г., Шулик Т.В.

[1] *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа, СГПУ*

[2] *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, ДГМА*

[3] *ст. лаборант научного отдела, СГПУ*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ МЕТОДАМИ

Получены интегральные представления уклонений методов приближения, которые определяются прямоугольными матрицами, на классах функций многих переменных.

We obtain integral representations of the deviations of methods of approximation, which are defined by rectangular matrices, for classes of functions of several variables.

Keywords: *Fourier series, classes of functions*

Введение

Классы $\overline{\psi}$-интегралов функций многих переменных были введены в работе [1] (см. также [2-4]). В этих работах изучаются вопросы приближения классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными методами, задаваемыми треугольными суммирующими матрицами. В данной статье получены интегральные представления для верхних граней уклонений прямоугольных линейных средних рядов Фурье, задаваемых прямоугольными суммирующими матрицами на классах функций многих переменных. Для дальнейшего изложения введем ряд обозначений и определений. В одномерном случае вопросы приближения прямоугольными методами изучались в работе [6].

Следуя [5], введем ряд Фурье функции многих переменных и линейные методы их суммирования следующим образом. Пусть R^m – пространство m-мерных векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $T^m = \prod\limits_{i=1}^{m}[-\pi;\pi]$ – m-мерный куб с ребром 2π,

$$N^m = \left\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N,\ i = 1, 2, ..., m\right\},$$

$$N_*^m = \left\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N_* = N \cup \{0\},\ i = 1, 2, ..., m\right\},$$

$$N_i^m = \left\{ \vec{x} \in R^m | x_i \in N,\ x_j \in N_*,\ i \neq j \right\}.$$

Пусть E^m – множество точек из R^m, координаты которых 0 или 1. Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной, суммируемых на кубе периодов T^m функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Пусть $f \in L(T^m)$. Следуя [12, с. 546], каждой паре точек $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m$, поставим в соответствие коэффициент Фурье функции f

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i.$$

Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие гармонику функции $f(\vec{x})$

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right).$$

Следуя [5], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}), \tag{1}$$

где $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Следуя [6], определим прямоугольные методы суммирования рядов Фурье функций многих переменных. Пусть для каждого $i = 1, 2, ..., m$ задано множество $B^{(i)} \subset (1; +\infty)$, для которого $+\infty$ является предельной точкой. Элементы множества $B^{(i)}$ обозначим δ, $\delta \in B^{(i)}$. Каждой паре чисел $\delta \in B^{(i)}$ и $k = 0; 1; 2; \ldots$, поставим в соответствие число $\lambda_k^{(\delta,i)}$, $\lambda_0^{(\delta,i)} = 1$. Для каждого фиксированного $i = 1, 2, ..., m,$ обозначим $\Lambda_i = \left\{ \lambda_k^{(\delta,i)} \right\}_{\delta \in B^{(i)}}^{k=0,1,\ldots}$

В случае $B^{(i)} = \mathbb{N}$, $i = 1, 2, ..., m,$ получаем $\lambda_k^{(\delta,i)} = \lambda_k^{(n)}$ и при выполнении условия $\lambda_k^{(n)} = 0$ для $k \geq n$, матрица

$$\Lambda_i = \left\{ \lambda_k^{(\delta,i)} \right\}_{\delta \in N}^{k=0,1,\ldots} = \left\{ \lambda_k^{(n)} \right\}_{n \in N}^{k=0,1,\ldots}$$

оказывается треугольной.

В общем случае каждому значению $\delta \in B^{(i)}, i = 1, 2, ..., m,$ соответствует бесконечная строка (последовательность) величин $\lambda_k^{(\delta,i)}, k = 0, 1, 2, \ldots$, а множество $\Lambda_i = \left\{ \lambda_k^{(\delta,i)} \right\}_{\delta \in B^{(i)}}^{k=0,1,\ldots}$ представляет собой семейство строк:

$$\lambda_0^{(\delta,i)}, \lambda_1^{(\delta,i)}, \lambda_2^{(\delta,i)}, \ldots,$$

каждая из которых соответствует своему фиксированному значению $\delta \in B^{(i)}$. Если множество $B^{(i)}$ счетное и $B^{(i)} = \{\delta_1, \delta_2, ...\}$, то соответствующее множество Λ_i можно представить с в виде матрицы, которая в общем случае не является треугольной

$$\begin{pmatrix} \lambda_0^{(\delta_1,i)} & \lambda_1^{(\delta_1,i)} & \lambda_2^{(\delta_1,i)} & ... \\ \lambda_0^{(\delta_2,i)} & \lambda_1^{(\delta_2,i)} & \lambda_2^{(\delta_2,i)} & ... \\ & ... & & \end{pmatrix}$$

Выберем из каждого множества $B^{(i)}, i = 1, 2, ..., m,$ по одному элементу $\delta^{(i)} \in B^{(i)}$ и обозначим $\vec{\delta} = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, ..., \delta^{(m)})$. Тогда вектор $\vec{\delta}$ пробегает декартово произведение множеств $B^{(i)}, i = 1, 2, ..., m,$: $\vec{\delta} \in \prod_{i=1}^{m} B^{(i)}$. Обозначим

$$\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{\delta})} = \lambda_{k_1}^{(\delta,1)} \lambda_{k_2}^{(\delta,2)} ... \lambda_{k_m}^{(\delta,m)} = \prod_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(\delta,i)}.$$

Вектору $\vec{\delta}$ и функции $f \in L(T^m)$, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие ряд

$$S_{\vec{\delta}}[f] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \prod_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(\delta,i)} A_{\vec{k}}(f, \vec{x}) = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{\delta})}}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f, \vec{x}), \vec{\delta} \in \prod_{i=1}^{m} B^{(i)}. \qquad (2)$$

При соответствующем выборе набора множеств $\Lambda_{\vec{\delta}} = (\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m)$ эти ряды являются рядами Фурье некоторых функций, которые обозначим $U_{\vec{\delta}}(f, \vec{x}, \Lambda)$. Например, если $\lambda_k^{(\delta,i)} = 1$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\delta \in B^{(i)}, i = 1, 2, ..., m,$ то $U_{\vec{\delta}}(f, \vec{x}, \Lambda) = S[f]$. Таким образом,

$$S[U_{\vec{\delta}}(f, \vec{x}, \Lambda)] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \cdot \prod_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(\delta,i)} A_{\vec{k}}(f, \vec{x}). \qquad (3)$$

Изучим вопросы приближения операторами $U_{\vec{\delta}}(f, \vec{x}, \Lambda)$ классов функций многих переменных, которые, следуя [1], введем следующим образом.

Пусть $\overline{m} = \{1, 2, ..., m\}$ и через μ обозначено некоторое подмножество из $\overline{m}$, $|\mu|$ количество элементов множества μ, через $\mu(r)$ – всякое r-элементное подмножество из $\overline{m}$ так, что $|\mu(r)| = r$.

Гармоникой, сопряженной с $A_{\vec{k}}(f; \vec{x})$ по переменной x_r, будем называть величину

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_r}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i \in \overline{m} \setminus \{r\}} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) \cos\left(k_r x_r - \frac{(s_r + 1)\pi}{2}\right).$$

Пусть $\overline{\psi}_i = (\psi_{i1}(k), \psi_{i2}(k))$, $\overline{\Psi}_i = (\Psi_{i1}(k), \Psi_{i2}(k))$, $i \in \overline{m}$, $k = 0, 1, 2, ...$, – наборы систем чисел таких, что для всех $i \in \overline{m}$, $k \in N$, выполняются условия: $\psi_{i1}(0) = 1$, $\Psi_{i1}(0) = 1$, $\psi_{i2}(0) = 0$, $\Psi_{i2}(0) = 0$,

$$\overline{\psi}_i^2(k) = \psi_{i1}^2(k) + \psi_{i2}^2(k) \neq 0,\ \overline{\Psi}_i^2(k) = \Psi_{i1}^2(k) + \Psi_{i2}^2(k) \neq 0.$$

Если для фиксированного $r \in \overline{m}$ существует функция $f^{\overline{\psi}_r}(\vec{x}) \in L(T^m)$ такая, что

$$S[f^{\overline{\psi}_r}] = \sum_{\vec{k} \in N_r^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})} \overline{\psi}_r^2(k_r)} \Big(\psi_{r1}(k_r) A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) - \psi_{r2}(k_r) A_{\vec{k}}^{\vec{e}_r}(f; \vec{x})\Big), \tag{4}$$

где N_r^m – множество точек $\vec{k} \in N_*^m$, у которых $k_r \neq 0$, то будем говорить, что $f^{\overline{\psi}_r}(\vec{x})$ является частной $\overline{\psi}_r$-производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_r. Для функции $f^{\overline{\psi}_r}(\vec{x})$ будем также использовать естественное для частных производных обозначение $\frac{\partial^{\overline{\psi}_r} f(\vec{x})}{\partial x_r}$.

Для фиксированного набора $\mu \subset \overline{m}$, $\mu = \{r_1, r_2, ..., r_{|\mu|}\}$, смешанной $\overline{\Psi}_\mu$-производной по переменным x_i, $i \in \mu$ будем называть функцию $f^{\overline{\Psi}_\mu}$, которая задается соотношением

$$f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) = \frac{\partial^{\overline{\Psi}_{r_{|\mu|}}} \partial^{\overline{\Psi}_{r_{|\mu|-1}}} ... \partial^{\overline{\Psi}_{r_1}} f(\vec{x})}{\partial x_{r_{|\mu|}} \partial x_{r_{|\mu|-1}} ... \partial x_{r_1}}.$$

Множество функций $f \in L(T^m)$ таких, что для любых $i \in \overline{m}$ существуют $\overline{\psi}_i$-производные $f^{\overline{\psi}_i}$ и для всех $\mu \subset \overline{m}$ существуют смешанные $\overline{\Psi}_\mu$-производные $f^{\overline{\Psi}_\mu}$, будем обозначать $L^{m\overline{\psi}}$, а подмножество непрерывных функций из $L^{m\overline{\psi}}$ будем обозначать $C^{m\overline{\psi}}$. Множество функций из $C^{m\overline{\psi}}$, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{esssup}|f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})| \leq 1,\ \operatorname{esssup}|f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})| \leq 1,\ i \in \overline{m},\ \mu \subset \overline{m},$$

будем обозначать $C_\infty^{m\overline{\psi}}$.

Основная часть

Найдем интегральные представления для величин

$$\rho_{\vec{\delta}}(f, \vec{x}, \Lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} f(\vec{x}) - U_{\vec{\delta}}(f, \vec{x}, \Lambda). \tag{5}$$

Для этого понадобится следующее утверждение, полученное в работе [1].
Лемма. [1] *Пусть* $f \in C_\infty^{m\overline{\psi}}$. *Тогда для всякого* $\vec{k} \in N_\mu^m$, $\vec{s} \in E^m$, $\mu \subset \overline{m}$, *выполняются равенства*

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \sum_{\zeta \subset \mu} \prod_{i \in \mu \setminus \zeta} \Psi_{i1}(k_i) \prod_{j \in \zeta} (-\Psi_{j2}(k_j)) (-1)^{\sum\limits_{\nu \subset \zeta} s_\nu} a_{\vec{k}}^{\vec{s} + \sum\limits_{\nu \in \zeta} (-1)^{s_\nu} \vec{e}_\nu} (f^{\overline{\Psi}_\mu}), \tag{6}$$

в частности, для $\vec{k} \in N_i^m, \ i \in \overline{m}$,

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \psi_{i1}(k_i) a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f^{\overline{\psi}_i}) - (-1)^{s_i} \psi_{i2}(k_i) a_{\vec{k}}^{\vec{s}+(-1)^{s_i}\vec{e}_i}(f^{\overline{\psi}_i}). \tag{7}$$

Следуя А.И. Степанцу [6, с. 56], через $\{\lambda_i(v)\}, \ i = 1, 2, ..., m$, $v \in [0, +\infty)$, обозначим набор последовательностей, заданных и непрерывных на $[0, +\infty)$ функций, таких, что $\lambda_i\left(\frac{k}{\delta_i}\right) = \lambda_{\delta_i}^{(i)}(k), \ i \in \overline{m}$.

Каждому вектору $\vec{\delta}$ поставим в соответствие набор непрерывных на $[0; +\infty)$ функций $\lambda_i^{(\vec{\delta})}(u), i = 1, 2, ..., m$, так, что каждой координате $\delta^{(i)}$ этого вектора соответствует функция $\lambda_i^{(\vec{\delta})}(u)$ такая, что

$$\lambda_i^{(\vec{\delta})}\left(k/\delta^{(i)}\right) = \lambda_k^{(\delta,i)}, \ \delta^{(i)} \in B^{(i)}, \ i = 1, 2, ..., m.$$

Пусть функции $\tau_{ij}^{(\vec{\delta})}(v)$, $T_{ij}^{(\vec{\delta})}(v)$ для $i = 1, 2, ..., m, \ j = 1; 2,$ на промежутке $[\frac{1}{\delta_i}; +\infty)$ определены соотношениями

$$\tau_{ij}^{(\vec{\delta})}(v) = (1 - \lambda_i^{(\vec{\delta})}(v))\psi_{ij}(\delta_i v), T_{ij}^{(\vec{\delta})}(v) = (1 - \lambda_i^{(\vec{\delta})}(v))\Psi_{ij}(n_i v), \tag{8}$$

а на промежутке $[0; \frac{1}{\delta_i}]$ определены так, чтобы эти функции были непрерывными на $[0; +\infty)$ и выполнялись условия $T_{ij}^{(\vec{\delta})}(0) = \tau_{ij}^{(\vec{\delta})}(0) = 0, \ i \in \overline{m}$.

Известно [7, с. 54], что в случае, когда функция $\tau(u)$ определена и непрерывна на $[0; +\infty)$ и имеет суммируемое на R преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt < \infty, \quad \beta \in R,$$

то $\forall u \in [0; +\infty)$ справедливы равенства

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tau(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = \tau(u),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tau(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \sin\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = 0. \tag{9}$$

Положим

$$\widehat{\tau}_{ij}^{(\vec{\delta})}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau_{ij}^{(\vec{\delta})}(v) \cos\left(vt - \frac{(j-1)}{2}\pi\right) dv.$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функции* $\tau_{ij}^{(\vec{\delta})}(v)$, $T_{ij}^{(\vec{\delta})}(v)$ *определяемые соотношениями (8), имеют суммируемые на* R *преобразования Фурье*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\tau}_{ij}^{(\vec{\delta})}(t)|dt < \infty, \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{T}_{ij}^{(\vec{\delta})}(t)|dt < \infty, \ i = 1, 2, ..., m, \ j = 1, 2. \qquad (10)$$

Тогда для всякой функции $f \in C_{\infty}^{m\overline{\psi}}$ *в каждой точке* $\vec{x} \in T^m$ *выполняется равенство*

$$\rho_{\vec{\delta}}(f;\vec{x};\Lambda) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\overline{\psi}_k}\left(\vec{x} - \frac{t_k}{\delta^{(k)}}\vec{e}_k\right) \int\limits_{0}^{\infty} \left(\tau_{k1}^{(\vec{\delta})}(v)\cos vt_k + \tau_{k2}^{(\vec{\delta})}(v)\sin vt_k\right) dv dt_k +$$

$$+ \sum_{r=2}^{m} (-1)^{r+1} \sum_{\mu(r)\subset\overline{m}} \frac{1}{\pi^r} \int\limits_{R^r} f^{\overline{\Psi}_\mu}\left(\vec{x} - \sum_{j\in\mu(r)} \frac{t_j}{\delta^{(j)}}\vec{e}_j\right) \times$$

$$\times \prod_{\nu\in\mu(r)} \int\limits_{0}^{\infty} \left(T_{\nu1}^{(\vec{\delta})}(v_\nu)\cos v_\nu t_\nu + T_{\nu2}^{(\vec{\delta})}(v_\nu)\sin v_\nu t_\nu\right) dv_\nu dt_\nu. \qquad (11)$$

Доказательство. Имея в виду соотношения (3), (5), получаем

$$S[\rho_{\vec{\delta}}] = \sum_{\vec{k}\in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \left(1 - \prod_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(\delta,i)}\right) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Применяя равенство

$$1 - \prod_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(\delta,i)} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \sum_{\mu(i)\subset\overline{m}} \prod_{j\in\mu(i)} \left(1 - \lambda_{k_j}^{(\delta,j)}\right),$$

получаем

$$S[\rho_{\vec{\delta}}] = \sum_{\vec{k}\in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \left(\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \sum_{\mu(i)\subset\overline{m}} \prod_{j\in\mu(i)} \left(1 - \lambda_{k_j}^{(\delta,j)}\right)\right) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{\vec{k}\in N_i^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \left(1 - \lambda_{k_i}^{(\delta,i)}\right) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) + \sum_{i=2}^{m} (-1)^{i+1} \sum_{\mu(i)\subset\overline{m}} \sum_{\vec{k}\in N_\mu^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \times$$

$$\times \prod_{j\in\mu(i)} \left(1 - \lambda_{k_j}^{(\delta,j)}\right) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) \overset{df}{=} \sum_{i=1}^{m} S_i(f;\vec{x}) + \sum_{i=2}^{m} (-1)^{i+1} \sum_{\mu(i)\subset\overline{m}} S_\mu(f;\vec{x}). \qquad (12)$$

Далее воспользуемся схемой доказательства, предложенной в работе [7, с. 53]. Найдем коэффициенты Фурье функций

$$\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi^r} \int\limits_{R^r} f^{\overline{\Psi}_\mu} \left(\vec{x} - \sum_{j\in\mu(r)} \frac{t_j}{\delta^{(j)}} \vec{e}_j \right) \times$$

$$\times \prod_{\nu\in\mu(r)} \int\limits_0^\infty \left(T^{(\vec{\delta})}_{\nu 1}(v_\nu) \cos v_\nu t_\nu + T^{(\vec{\delta})}_{\nu 2}(v_\nu) \sin v_\nu t_\nu \right) dv_\nu dt_\nu, \;\; \mu = \mu(r) \subset \overline{m},$$

$\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}) = \mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x})\,,\; \mu = \mu(r) = \{i\}\,.$

Учитывая условие (10), можем применить изменение порядка интегрирования в следующих преобразованиях

$$\frac{1}{\pi^m} \int\limits_{T^m} \int\limits_{R^r} f^{\overline{\Psi}_\mu} \left(\vec{x} - \sum_{j\in\mu(r)} \frac{t_j}{\delta_j} \vec{e}_j \right) \prod_{\nu\in\mu(r)} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty (T^{(\vec{\delta})}_{\nu 1}(v) \cos v t_\nu + T^{(\vec{\delta})}_{\nu 2}(v) \sin v t_\nu) dv dt_\nu \times$$

$$\times \prod_{i=1}^m \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2} \right) dx_i = \int\limits_{R^r} \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) \prod_{i\in\overline{m}\setminus\mu(r)} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2} \right) \times$$

$$\times \prod_{j\in\mu(r)} \cos\left(k_j \left(x_j + \frac{t_j}{\delta_j} \right) - \frac{s_j \pi}{2} \right) \prod_{i=1}^m dx_i \prod_{\nu\in\mu(r)} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty (T^{(\vec{\delta})}_{\nu 1}(v) \cos v t_\nu +$$

$$+ T^{(\vec{\delta})}_{\nu 2}(v) \sin v t_\nu) dv dt_\nu = \int\limits_{R^r} \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) \prod_{i\in\overline{m}\setminus\mu(r)} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2} \right) \times$$

$$\times \prod_{j\in\mu(r)} \left(\cos\left(k_j x_j - \frac{s_j \pi}{2} \right) \cos \frac{k_j}{\delta_j} t_j - \sin\left(k_j x_j - \frac{s_j \pi}{2} \right) \sin \frac{k_j}{\delta_j} t_j \right) \prod_{i=1}^m dx_i \times$$

$$\times \prod_{\nu\in\mu(r)} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty (T^{(\vec{\delta})}_{\nu 1}(v) \cos v t_\nu + T^{(\vec{\delta})}_{\nu 2}(v) \sin v t_\nu) dv dt_\nu.$$

Применяя известное равенство

$$\prod_{j\in\mu(r)} (a_j - b_j) = \sum_{\zeta\subset\mu(r)} \prod_{i\in\mu\setminus\zeta} a_i \prod_{j\in\zeta} (-b_j),$$

получаем

$$a^{\vec{s}}_{\vec{k}}(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}) = \int\limits_{R^r} \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{T^m} f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec{x}) \prod_{i\in\overline{m}\setminus\mu(r)} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2} \right) \sum_{\zeta\subset\mu(r)} \left(\prod_{i\in\mu\setminus\zeta} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2} \right) \times \right.$$

$$\times\cos\frac{k_i}{n_i}t_i\prod_{j\in\zeta}\left(-\sin\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)\sin\frac{k_i}{n_i}t_i\right)\Bigg)\prod_{i=1}^{m}dx_i\prod_{\nu\in\mu(r)}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty(T_{\nu1}^{(\vec\delta)}(v)\cos vt_\nu+$$

$$+T_{\nu2}^{(\vec\delta)}(v)\sin vt_\nu)dvdt_\nu=\sum_{\zeta\subset\mu(r)}\left[\int\limits_{R^r}\frac{1}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec x)\prod_{i\in\overline{m}\setminus\zeta}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i\times\right.$$

$$\times\prod_{j\in\zeta}\sin\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)dx_j\prod_{\nu\in\mu(r)\setminus\zeta}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty(T_{\nu1}^{(\vec\delta)}(v)\cos vt_\nu+T_{\nu2}^{(\vec\delta)}(v)\sin vt_\nu)dv\times$$

$$\left.\times\cos\frac{k_\nu}{n_\nu}t_\nu dt_\nu\prod_{\gamma\in\zeta}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty(T_{\gamma1}^{(\vec\delta)}(v)\cos vt_\gamma+T_{\gamma2}^{(\vec\delta)}(v)\sin vt_\gamma)dv\sin\frac{k_\gamma}{\delta_\gamma}t_\gamma dt_\gamma(-1)^{|\zeta|}\right].\tag{13}$$

Так как для $\vec s\in E^m$, $\zeta\subset\mu$

$$a_{\vec k}^{\vec s+\sum\limits_{i\in\zeta}(-1)^{s_i}\vec e_i}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=\frac{(-1)^{\sum\limits_{i\in\zeta}s_i}}{\pi^m}\int\limits_{T^m}f^{\overline{\Psi}_\mu}(\vec x)\prod_{i\in\overline{m}\setminus\zeta}\cos\left(k_ix_i-\frac{s_i\pi}{2}\right)dx_i\times$$

$$\times\prod_{j\in\zeta}\sin\left(k_jx_j-\frac{s_j\pi}{2}\right)dx_j,\quad \vec k\in N_\mu^m, a_{\vec k}^{\vec s+\sum\limits_{i\in\zeta}(-1)^{s_i}\vec e_i}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=0,\quad \vec k\in N_*^m\setminus N_\mu^m,$$

то применяя (9), на основании (13) получаем

$$a_{\vec k}^{\vec s}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=\sum_{\zeta\subset\mu}(-1)^{\sum\limits_{i\in\zeta}s_i}a_{\vec k}^{\vec s+\sum\limits_{j\in\zeta}(-1)^{s_j}\vec e_j}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right)\prod_{\nu\in\mu\setminus\zeta}T_{\nu1}^{(\vec\delta)}\left(\frac{k_\nu}{n_\nu}\right)\prod_{l\in\zeta}T_{l2}^{(\vec\delta)}\left(\frac{k_l}{n_l}\right),$$

$$\vec k\in N_\mu^m,\quad a_{\vec k}^{\vec s}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=0,\quad \vec k\in N_*^m\setminus N_\mu^m.\tag{14}$$

Учитывая равенство (6), имеем для $\vec k\in N_\mu^m$, $\vec s\in E^m$

$$a_{\vec k}^{\vec s}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=\prod_{j\in\mu}\left(1-\lambda_{k_j}^{(\delta,j)}\right)\sum_{\zeta\subset\mu}\prod_{i\in\mu\setminus\zeta}\Psi_{i1}(k_i)\prod_{\nu\in\zeta}\Psi_{\nu2}(k_\nu)a_{\vec k}^{\vec s+\sum\limits_{\nu\in\zeta}(-1)^{s_\nu}\vec e_\nu}\left(f^{\overline{\Psi}_\mu}\right)=$$

$$=\prod_{j\in\mu}\left(1-\lambda_{k_j}^{(\delta,j)}\right)a_{\vec k}^{\vec s}(f).$$

Следовательно,

$$A_{\vec k}\left(\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu};\vec x\right)=\prod_{j\in\mu}(1-\lambda_{k_i}^{(\delta,i)})A_{\vec k}(f;\vec x),\quad \vec k\in N_\mu^m.\tag{15}$$

Таким образом, учитывая (12), можем записать, что

$$S\left[\mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}\right] = \sum_{\vec{k}\in N_\mu^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} \prod_{j\in\mu} \left(1-\lambda_{k_j}^{(\delta,j)}\right) a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = S_\mu(f;\vec{x}).$$

В частности $\quad S[\mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}] = \sum\limits_{\vec{k}\in N_i} \dfrac{1}{2^{q(\vec{k})}} \left(1-\lambda_{k_i}^{(\delta,i)}\right) A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) = S_i(f;\vec{x}).$

Объединяя последние два соотношения с (12), получаем

$$S\left[\rho_{\vec{\delta}}\right] = S\left[\sum_{i=1}^{m} \mathcal{I}^{\overline{\psi}_i}(f;\vec{x}) + \sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}\sum_{\mu\subset\overline{m}} \mathcal{I}^{\overline{\Psi}_\mu}(f;\vec{x})\right].$$

Это значит, что для всякой функции $f \in C_\infty^{m\overline{\psi}}$ справедливо равенство (11). □

Литература

[1] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, № 4. – С. 564 – 570.

[2] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами / В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Т. 1, № 1. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – С. 250 – 269.

[3] *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций / Р.А. Ласурия // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 7. – С. 911 – 918.

[4] *Задерей П.В.* Интегральные представления уклонений линейных средних рядов Фурье на классах дифференцируемых периодических функций двух переменных / П.В. Задерей // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций : Сб. научн. тр. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 16 – 28.

[5] *Степанец А.И.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ,β)-дифференцируемых функций / А.И. Степанец, Н.Л. Пачулиа // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, № 4. – С. 545 – 555.

[6] *Харкевич Ю.И.* О приближении классов $C_\beta^\psi H_\omega$ линейными средними их рядов Фурье / Харкевич Ю.И. – Киев, 1991. – 59 с. – (Препринт / НАН Украины, ин-т математики ; 91.8).

[7] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. – К.: Наук. думка, 1987. – 268 с.