УДК 517.5

Кадубовский А.А., Новиков О.А., Ровенская О.Г., Шулик Т.В., Байдуга Е.В.

[1] *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры геометрии и МПМ, СГПУ*

[2] *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа, СГПУ*

[3] *канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, ДГМА*

[4] *ст. лаборант научного отдела, СГПУ*

[5] *учитель математики, Славянская ОШ №16*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА r–ПОВТОРНЫМИ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Обчислені значення інтегралів у головному члені асимптотичних формул для точних верхніх меж відхилень r–повторних сум Валле Пуссена на класах інтегралів Пуассона.

Calculated values in the main term of asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of the r–repeated de la Vallee Poussin sums taken over classes of Poisson integrals.

Keywords: *Fourier series, asymptotic equalities*

Введение

Следуя [1], обозначим $C^q_\beta H_\omega$ — класс непрерывных 2π–периодических функций $f(x)$, которые можно представить при помощи свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\, dt,$$

в которой

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}),\ \ q \in (0;1),\ \ \beta \in R,$$

— ядро Пуассона, а функция $\varphi(\cdot)$ удовлетворяет условие

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \le \omega(|t' - t''|), \forall t', t'' \in R,$$

где $\omega(t)$ — произвольный фиксированный модуль непрерывности. Известно [2, с. 32], что классы $C^q_\beta H_\omega$, которые принято называть классами интегралов Пуассона, состоят из функций f, которые являются сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\mathrm{Im} z| \le \ln\frac{1}{q}/2\ln 2$.

Пусть $S_n(f;x)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$, p, p_1, $p_2,...,p_r$ — произвольные натуральные числа такие, что $p < n$, $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k \overset{\mathrm{df}}{=} \Sigma_p < n$. Тогда суммы Валле Пуссена функции $f(x) \in L^1[-\pi;\pi]$ обычные $V_{n,p}(f,x)$ и r–повторные $V_{n,\overline{p}}^{(r)}(f,x)$, соответственно, задаются соотношениями

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x),$$

$$V_{n,\overline{p}}^{(r)}(f,x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k_1=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1}...\frac{1}{p_r}\sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f,x).$$

Вопросам изучения приближений классов интегралов Пуассона посвящен ряд работ С.М. Никольского [3], С.Б. Стечкина, А.И. Степанца [1], В.И. Рукасова и С.О. Чайченко [4], А.С. Сердюка [5], и других. В работе [1] было показано, что при $n \to \infty$ выполняется равенство

$$\mathcal{E}\left(C_\beta^q H_\omega; S_n\right) = \frac{4q^n}{\pi^2}K(q)\theta_n(\omega)\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\; dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}\omega(1/n),$$

где $\theta_n(\omega) \in [1/2;1]$, причем $\theta_n(\omega) = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

В работе [4] для верхних граней отклонений сумм Валле Пуссена получены асимптотические формулы

$$\mathcal{E}\left(C_\beta^q H_\omega; V_{n,p}\right) = \frac{2\theta_n(\omega)q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n-p}\right)\sin t dt +$$

$$+O(1)\omega(\frac{1}{n-p})\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right),\; 1 < p < n.$$

Применяя рассуждения работы [6], можно получить аналогичную формулу для верхних граней уклонений полиномов $V_{n,\overline{p}}^{(r)}(f;x)$ $r \in \mathbb{N}$ от функций из классов $C_\beta^q H_\omega$

Теорема. Пусть $q \in (0;1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{r} p_i = \Sigma_p < n$ и $\omega(t)$ – произвольный модуль непрерывности. Тогда при $n - \Sigma_p \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\mathcal{E}(C_\beta^q H_\omega; V_{n,\overline{p}}^{(r)}) = \frac{2q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi^2\prod_{i=1}^{r} p_i}e_{n-\Sigma_p}(\omega)\int\limits_0^{\pi} Z_q^{r+1}(x)dx +$$

$$+O(1)\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\prod_{i=1}^{r}p_i}\frac{\omega\left((n-\Sigma_p)^{-1}\right)}{(n-\Sigma_p)}\left[\frac{1}{(1-q)^{r+3}}+\frac{1}{(1-q)^{2r}}\right]+$$

$$+O(1)\frac{1}{\prod_{i=1}^{r}p_i}\left(\sum_{\alpha(r-1)\subset\overline{r}}\frac{q^{(n-\Sigma_p^{\alpha(r-1)}+r)}}{(1-q)^{r+1}}\omega\left(\left[n-\Sigma_p^{\alpha(r-1)}\right]^{-1}\right)\right), n-\Sigma_p\to\infty$$

где $\overline{r}=\{1;2;...;r\}$, $\Sigma_p^{\alpha}=\sum\limits_{j\in\alpha}p_j$, $\alpha(i)$ – множество, содержащее i элементов,

$$Z_q(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x+q^2}}; e_{n-\Sigma_p}(\omega)=\theta_\omega(n)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2\tau(n-\Sigma_p)^{-1})\sin\tau d\tau,$$

$\theta_\omega(n)\in[1/2;1]$, причем $\theta_\omega(n)=1$, если $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности, $O(1)$ – величина равномерно ограниченная по n, q, β, p_i, $i=1,2,...,r$.

Основная часть

Основным результатом данной работе является вычисление значений величин $\int\limits_0^{\pi}Z_q^{r+1}(x)dx$ для произвольных нечетных r.

Теорема 1. *Для всякого* $r=2\nu-1$, $\nu\in\mathbb{N}$,

$$\int\limits_0^{\pi}Z_q^{r+1}(x)dx=\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^{\nu}}=\frac{\pi}{(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^{k}\right)^2q^{2k},\qquad(1)$$

где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ *– коэффициенты биномиального разложения.*

Доказательство. Обозначим $\nu=\frac{r+1}{2}$. В работе [7] показано, что справедлива формула

$$\int\limits_0^{\pi}Z_q^{r+1}(x)dx=$$

$$=\frac{\pi}{4^{\nu-1}(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k)!(2(\nu-k-1))!}{(k!)^2((\nu-k-1)!)^2}(1-q)^{2k}(1+q)^{2(\nu-k-1)},\qquad(2)$$

где $\nu=\frac{r+1}{2}$.

Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k)!(2(\nu-k-1))!}{(k!)^2((\nu-k-1)!)^2}(1-q)^{2k}(1+q)^{2(\nu-k-1)}=$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q^2)^{2\nu-1}}(1+q)^{2(\nu-1)} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left[C_{2k}^{k} C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)} \cdot \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{2k} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}} \frac{(1+q)^{2\nu-2}}{(1+q)^{2\nu-1}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left[C_{2k}^{k} C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)} \cdot \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{2k} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}(1+q)} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left[C_{2k}^{k} C_{2(\nu-k-1)}^{(\nu-k-1)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{2k} \right]. \qquad (3)$$

Так как в силу соотношения 1.2.7.38 работы [8]

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} C_{2(n-k)}^{(n-k)} x^{2k} = 2^{2n} x^n P_n \left(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \right),$$

где $P_n(z)$ – полином Лежандра, то

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} C_{2k}^{k} C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{2k} = 2^{2(\nu-1)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{\nu-1} P_{\nu-1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1-q}{1+q} + \frac{1+q}{1-q} \right) \right) =$$

$$= 2^{2(\nu-1)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{\nu-1} P_{\nu-1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1-2q+q^2+1+2q+q^2}{1-q^2} \right) =$$

$$= 2^{2(\nu-1)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{\nu-1} P_{\nu-1} \left(\frac{1+q^2}{1-q^2} \right). \qquad (4)$$

Известно также, что ([8], с.625)

$$(1-y)^n P_n \left(\frac{1+y}{1-y} \right) = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 y^k.$$

Поэтому при $y = q^2$, $n = \nu - 1$ справедливо равенство

$$(1-q^2)^{\nu-1} P_{\nu-1} \left(\frac{1+q^2}{1-q^2} \right) = \sum_{k=0}^{\nu-1} (C_{\nu-1}^k)^2 q^{2k},$$

т.е.

$$P_{\nu-1} \left(\frac{1+q^2}{1-q^2} \right) = \frac{1}{(1-q^2)^{\nu-1}} \sum_{k=0}^{\nu-1} (C_{\nu-1}^k)^2 q^{2k}.$$

Следовательно, на основании соотношения (4)

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} C_{2k}^{k} C_{2(\nu-1-k)}^{(\nu-1-k)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{2k} = 2^{2(\nu-1)} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{(1-q^2)^{\nu-1}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(C_{\nu-1}^k \right)^2 q^{2k} =$$

$$= 2^{2(\nu-1)}\frac{1}{(1+q)^{2(\nu-1)}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^{k}\right)^2 q^{2k}.$$

Сопоставляя последнее соотношение с равенством (3), получаем

$$\frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{(2(\nu-k-1))!}{((\nu-k-1)!)^2}(1-q)^{2k}(1+q)^{2(\nu-k-1)} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2(\nu-1)}(1-q)^{2\nu-1}(1+q)}\cdot 2^{2(\nu-1)}\frac{1}{(1+q)^{2(\nu-1)}}\cdot\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^{k}\right)^2 q^{2k} =$$

$$= \frac{\pi}{(1-q^2)^{2\nu-1}}\sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C_{\nu-1}^{k}\right)^2 q^{2k}.$$

Поэтому на основании соотношения (2) немедленно получаем равенство (1).

Литература

[1] *Степанец А.И.* Приближение аналитических непрерывных функций / А. И. Степанец // Мат. сборник. – 2001. – Т. 192, № 1. – С. 113 – 138.

[2] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. – К.: Наук. думка, 1987. – 268 с.

[3] *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. сер. мат. – 1946. – 10, № 3. – С. 207 – 256.

[4] *Рукасов В.І.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле – Пуссена / В.І. Рукасов, С.О. Чайченко // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1653 – 1668.

[5] *Сердюк А.С.* Наближення інтегралів Пуасона сумами Валле Пуссена / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 1. – С. 97 – 107.

[6] *Ровенская О.Г.* Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена / О.Г. Ровенская, О.А. Новиков // Нелінійні коливання – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 96 – 99.

[7] *Новиков О.А.* Приближение аналитических функций r–повторными суммами Валле Пуссена / О.О. Новиков, Т.В. Шулик, О.Г. Ровенская // Вісник СДПУ Математика вып. 1(4) – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 74 – 94.

[8] *Прудников А.П.* Интегралы и ряды: [В 3 т. Т.1: Элементарные функции] / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – Санкт-Петербург: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 632 с.