УДК 517.5

Ключникова А.Р., Леденева А.С., Качина Ю.М., Маслакова О.Ю., Рухлова И.Ю., Шаталова Е.А.

[1] *студенты 5 курса физико-математического факультета, СГПУ*

e-mail: sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Отримані асимптотичні формули для верхніх граней відхилень прямокутних операторів на класах (ψ,β)–диференційовних функцій багатьох змінних.

Keywords: *Fourier series, asymptotic equalities*

Введение

Классы (ψ,β)-дифференцируемых функций многих переменных, с двумя наборами функций $\psi(k)$ были введены в работе [1] (см. также [2-4]). В этих работах изучаются вопросы приближения прямоугольными линейными методами классов (ψ,β)-дифференцируемых периодических функций многих переменных, в которых для определения производных по одной переменной и по нескольким переменным применяется два различных набора мультипликаторов. В данной статье изучаются аналогичные вопросы на классах (ψ,β)-дифференцируемых функций m переменных, определяемых m наборами мультипликаторов для каждого числа переменных. На этих классах получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений различных прямоугольных линейных средних рядов Фурье, взятых по классам функций многих переменных малой гладкости. В частности, найдены асимптотические равенства, которые обеспечивают решение задачи Колмогорова–Никольского (см. [5, С. 8]) на этих классах для прямоугольных операторов Фурье классических, обобщенных операторов Зигмунда, Валле Пуссена и Рисса.

Для дальнейшего изложения введем ряд обозначений и определений.

Пусть R^m – пространство m-мерных векторов $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_m)$, $T^m=\prod\limits_{i=1}^{m}[-\pi;\pi]$ – m-мерный куб с ребром 2π,

$$N^m=\left\{\vec{x}\in R^m | x_i\in N,\ i=1,2,...,m\right\},$$

$$N_*^m = \big\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N_* = N \cup \{0\},\ \ i = 1, 2, ..., m\big\},$$

$$N_i^m = \big\{\vec{x} \in R^m | x_i \in N,\ \ x_j \in N_*,\ \ i \neq j\big\}.$$

Через E^m обозначим множество точек из R^m, координаты которых принимают одно из двух значений: 0 или 1.

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной, суммируемых на кубе периодов T^m, функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Пусть $f \in L(T^m)$. Следуя [1], каждой паре точек $\vec{s} \in E^m$, $\vec{k} \in N_*^m$, поставим в соответствие коэффициент Фурье функции f

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i.$$

Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие гармонику функции $f(\vec{x})$

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right).$$

Следуя [3], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}), \tag{1}$$

где $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $\overline{m} = \{1, 2, ..., m\}$ и μ – какое-либо подмножество из $\overline{m}$, обозначим через $|\mu|$ количество элементов множества μ и через $\mu(r)$ – всякое r-элементное подмножество из $\overline{m}$ ($|\mu(r)| = r$).

По аналогии с одномерным случаем, гармоникой, сопряженной с $A_{\vec{k}}(f; \vec{x})$ по переменной x_r, будем называть величину

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_r}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i \in \overline{m} \setminus \{r\}} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) \cos\left(k_r x_r - \frac{(s_r + 1)\pi}{2}\right).$$

Будем вводить понятие (ψ, β)-производных функций многих переменных, используя схемы введения (ψ, β)-производных функций одной переменной (см. [1]) и обыкновенных частных производных функций многих переменных.

Пусть $\psi_{i,r}(k_i), i = 1, 2, ..., m, r = 1, 2, ..., m,\ \ k_i \in N_*$ — фиксированные наборы функций натурального аргумента, $\vec{\beta_r} = (\beta_{1,r}, \beta_{2,r}, ..., \beta_{m,r})$ – фиксированные векторы ($\beta_{ir} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$). Если для фиксированного $r \in \overline{m}$

существует функция $\varphi_i^{(1)} \in L(T^m)$ такая, что

$$S[\varphi_i^{(1)}] = \sum_{\vec{k} \in N_r^m} \frac{1}{2^{q(\vec{k})} \psi_{i,1}(k_i)} \left[A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) \cos \frac{\beta_{i,1}\pi}{2} - A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f; \vec{x}) \sin \frac{\beta_{i,1}\pi}{2} \right], \qquad (2)$$

то будем считать, что $f(\vec{x})$ имеет в качестве частной $(\psi_{i,1}; \beta_{i,1})$–производной по переменной x_i, функцию $\varphi_i^{(1)}(\vec{x})$, которую будем обозначать $f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})$.

Для фиксированного r–элементного множества $\mu(r) \subset \overline{m}$, $\mu = \{i_1, ..., i_r\}$, смешанной $(\psi_{\mu(r)}; \beta)$–производной по переменным x_i, $i \in \mu(r)$, будем называть функцию $f_\beta^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})$, рядом Фурье которой является результат последовательного применения формулы (2), однако с использованием для определения производной по переменной x_i вместо функций $\psi_{i,1}(k_i)$ и чисел $\beta_{i,1}$ соответственно, $\psi_{i,r}(k_i)$ и чисел $\beta_{i,r}$, $i \in \mu(r), r = 2, 3, ..., m$.

$$f_\beta^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x}) = \frac{\partial_{\beta_{i_r,r}}^{\psi_{i_r,r}} \partial_{\beta_{i_{r-1},r}}^{\psi_{i_{r-1},r}} ... \partial_{\beta_{i_1,r}}^{\psi_{i_1,r}} f(\vec{x})}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} ... \partial x_{i_1}}.$$

Множество функций $f \in L(T^m)$ таких, что для любых $i \in \overline{m}$ существуют производные $f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})$ и для всех $r = 2, 3, ..., m, \mu(r) \subset \overline{m}$ существуют смешанные $(\psi_{\mu(r)}; \beta)$–производные $f_\beta^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})$, будем обозначать $L_\beta^{m\psi}$, а подмножество непрерывных функций из $L_\beta^{m\psi}$ будем обозначать $C_\beta^{m\psi}$. Множество функций из $C_\beta^{m\psi}$, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{esssup} |f_{\beta_{i,1}}^{\psi_{i,1}}(\vec{x})| \leq 1, \ \operatorname{esssup} |f_\beta^{\psi_{\mu(r)}}(\vec{x})| \leq 1, \ i \in \overline{m}, \ \mu \subset \overline{m},$$

будем обозначать $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$.

Следуя [1], введем множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0'$, $\mathfrak{M}_C$. Будем полагать, что функции $\psi_{i,r}(v)$, $i, r = 1, 2, ..., m;$ являются функциями непрерывного аргумента $v \geq 0$, совпадающими при $v \in N$ с элементами одноименных систем чисел $\psi_{i,r}(k)$, которые использовались выше для определения (ψ, β)–производных.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество функций $\psi(x)$, непрерывных при $x \geq 0$, монотонно убывающих, выпуклых вниз при $x \geq 1$ и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{x \to \infty} \psi(x) = 0$.

Через $\mathfrak{M}'$ обозначим подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} dx < \infty.$$

Функции $\psi(x)$ поставим в соответствие функцию $\eta(x) = \eta(\psi, x)$, связанную при $x \geq 1$ с $\psi(x)$ соотношением $\psi(\eta(x)) = \frac{1}{2}\psi(x)$.

Положим

$$\mu(t) = \mu(\psi, t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Через $\mathfrak{M}'_0$ обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}'$, для которых величина $\mu(\psi, t)$ ограничена сверху. Через $\mathfrak{M}_C$ обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых найдутся константы K_1, K_2 такие, что при всех $x \geq 1$

$$0 < K_1 \leq \mu(\psi, t) \leq K_2 < +\infty.$$

Если для $i = 1, 2, ..., m,$ выполнено $\psi_{i,r} \in \mathfrak{M}'_0 \setminus \mathfrak{M}_C,$ то функции $f \in C_{\infty}^{m\overline{\psi}}$ по аналогии с одномерным случаем естественно называть функциями с малой гладкостью.

Следуя [6] (см. также [1], [2]), прямоугольные линейные средние рядов Фурье определим следующим образом.

Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m\}$ – фиксированный набор бесконечных треугольных числовых матриц, $\Lambda_i = \{\lambda_{k_i}^{(n_i)}\}$, $i = 1, 2, ..., m$, $\vec{n} \in N^m$, $\vec{k} \in N_*^m$, $\lambda_0^{(n_i)} = 1$ и $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 0$ для $k_i \geq n_i$. Пусть далее $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = \prod\limits_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^{(n_i)}$ и $G_{\vec{n}} = \prod\limits_{i=1}^{m} [0; n_i - 1]$ – прямоугольный параллелепипед, соответствующий вектору $\vec{n} \in N^m$. Понятно, что $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} = 0$ для любых $\vec{k} \notin G_{\vec{n}}$.

Функции $f \in L(T^m)$, имеющей ряд Фурье (1), поставим в соответствие семейство тригонометрических полиномов

$$U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = \sum_{\vec{k} \in G_{\vec{n}}} 2^{-q(\vec{k})} \lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}). \tag{3}$$

Если $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 1$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, то соотношение (3) задает прямоугольные частные суммы ряда Фурье $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = S_{\vec{n}}(f; \vec{x})$. Пусть $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$, где $p_i \in N_*$, $p_i \leq n_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Если величины $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, $\vec{n} \in N^m$, задаются соотношениями

$$\lambda_{k_i}^{(n_i)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq k_i \leq n_i - p_i, \\ 1 - \frac{k_i - n_i + p_i}{p_i}, & n_i - p_i \leq k_i \leq n_i - 1, \, p_i \in N, \, p_i \leq n_i, \, i \in \{\overline{1, m}\}, \end{cases}$$

то многочлены $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) \stackrel{\mathrm{df}}{=} V_{\vec{n}, \vec{p}}(f; \vec{x})$ являются суммами Валле Пуссена порядка $\vec{p}$.

При $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = k_i^2 / n_i^2$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, многочлены $U_{\vec{n}}(f; \vec{x}; \Lambda) = R_{\vec{n}}(f; \vec{x})$ будем называть прямоугольными суммами Рисса.

При $\lambda_{k_i}^{(n_i)} = k_i^{s_i}/n_i^{s_i}$, $s_i > 0$, $i = 1, 2, ..., m$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, многочлены $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = Z_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ будем называть прямоугольными суммами Зигмунда.

Пусть $\varphi_i(x), i = 1, 2, ..., m$ – непрерывные, монотонно возрастающие при $x \geq 0$ такие, что $\varphi_i(0) = 0$. Если величины $\lambda_{\vec{k}}^{(\vec{n})}$, $\vec{k} \in G_{\vec{n}}$, $\vec{n} \in N^m$, задаются соотношениями

$$\lambda_{k_i}^{(n_i)} = 1 - \frac{\varphi_i(k_i)}{\varphi_i(n_i)},$$

то многочлены $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\Lambda) = Z_{\vec{n}}^{\varphi}(f;\vec{x})$ будем называть обобщенными прямоугольными суммами Зигмунда.

Суммами Фавара порядка $\vec{r} = (r_1, r_2, ..., r_m)$ будем называть полиномы $U_{\vec{n}}(f;\vec{x};\tilde{\Lambda}) = \Phi_{\vec{n},\vec{r}}(f;\vec{x})$, которые определяются треугольными матрицами $\tilde{\Lambda}_i$, $i = 1, 2, ..., m$, с элементами

$$\tilde{\lambda}_{k_i,r_i}^{(n_i)} = \begin{cases} 1 - k_i^{r_i} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \left(\frac{1}{(2\nu n_i - k_i)^{r_i}} + \frac{1}{(2\nu n_i + k_i)^{r_i}} \right), & r_i = 2l, \ l \in N, \\ 1 - k_i^{r_i} \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\nu n_i - k_i)^{r_i}} - \frac{1}{(2\nu n_i + k_i)^{r_i}} \right), & r_i = 2l - 1, \ l \in N. \end{cases}$$

Величины $\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = f(\vec{x}) - U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ являются уклонениями многочленов $U_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, $\vec{n} \in N^m$, от функции $f(\vec{x})$.

Целью данной работы является получение асимптотических равенств для величин

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^{m\psi}; U_{\vec{n}}) = \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{m\psi}} ||\delta_{\vec{n}}(f;\vec{x})||_C$$

при $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$.

Основная часть

Теорема 1. *Пусть* $\psi_{i,j} \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta_{i,j} \in R$ *функции* $\psi_{i,j}(x)\varphi_i(x)$, $i, j = 1, ..., m$; *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при* $x \geq 1$. *Тогда при* $n_i \to \infty$, $i = 1, 2, ..., m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{m\psi}; Z_{\vec{n}}^{\varphi}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\varphi_i(n_i)} \int_1^{n_i} \frac{\psi_{i,1}(x)\varphi_i(x)}{x} dx +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2} \int_{n_i}^{\infty} \frac{\psi_{i,1}(x)}{x} dx + O(1) \left(\sum_{i=1}^{m} \psi_{i,1}(n_i) + \right.$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\left\{\psi_{j,r}(n_j)+\sin\frac{\beta_{j,r}\pi}{2}\left[\int\limits_{1}^{n_j}\frac{\psi_{j,r}(x)\varphi_j(x)}{x\varphi_j(n_j)}dx+\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right]\right\}\Bigg). \tag{4}$$

Доказательство. Через $\{\lambda_{n_i}(v)\}$, $\vec{n}=(n_1,n_2,...,n_m)\in N^m$, обозначим семейство заданных и непрерывных на [0;1] функций таких, что $\lambda_{k_i}^{(n_i)}=\lambda_{n_i}(\frac{k_i}{n_i})$, $\vec{k}\in G_{\vec{n}}$.

Введем функции

$$\tau_{i,r}(v)=\begin{cases}(1-\lambda_{n_i}(v))\psi_{i,r}(n_i v), & \frac{1}{n_i}\le v\le 1;\\ \psi_{i,r}(n_i v), & 1\le v, i=1,2,...,m;\end{cases} \tag{5}$$

которые на $[0;\frac{1}{n_i}]$ заданы так, что $\tau_{i,r}(v)$ непрерывны на положительной полуоси и выполнено условие $\tau_{i,r}(0)=0$, $i,r=1,2,...,m$.

В работе [7] показано, что для функций $\tau_{i,r}$, $i,r=1,2,...,m$, заданных соотношенем (5), и имещих суммируемые на R преобразования Фурье:

$$A(\tau_{i,r})=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,r}(x)\cos(xt+\frac{\beta\pi}{2})dx\right|dt<\infty,$$

при $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, справедливо равенство:

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{m\psi};U_{\vec{n}}\right)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\pi}\int\limits_{|t|\le1}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\psi_{i,1}(n_i x)\sin xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt+O(1)\Bigg(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{|t|\le1}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos xtdx\right|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{|t|\le1}\left|\int\limits_{0}^{1}\tau_{i,1}(x)\sin xtdx\right|dt+\sum_{i=1}^{m}a(\tau_{i,1})+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}A(\tau_{j,r})\Bigg), \tag{6}$$

где

$$a(\tau_{i,1})=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\frac{\pi n_i}{2}}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt.$$

Таким образом, изучение величин $\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{m\psi};Z_{\vec{n}}^{\varphi}\right)$ сводится к вычислению соответствующих одномерных несобственных интегралов.

Функции $\tau_{i,r}(x)$, $i,r=1,2,...,m$, $j=1,2$, которые определены соотношением (5), для обобщенных сумм Зигмунда представим в следующем виде

$$\tau_{i,r}(x)=\begin{cases}\psi_{i,r}(1)\varphi_i(1)nx, & 0\le x\le \frac{1}{n_i},\\ \psi_{i,r}(n_ix)\varphi(n_ix), & \frac{1}{n_i}\le x\le 1,\\ \psi_{i,r}(n_ix), & 1\le x,\ i=1,2,...,m.\end{cases}$$

Применяя рассуждения работы [8], получаем асимптотические формулы

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le 1}\left|\int\limits_1^{\infty}\psi_{i,1}(n_ix)\sin xtdx\right|dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge 1}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_{i,1}(x)\cos(xt+\frac{\beta_{i,1}\pi}{2})dx\right|dt=\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{\varphi_i(n_i)}\int\limits_1^{n_i}\frac{\psi_{i,1}(x)\varphi_i(x)}{x}dx+O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$a(\tau_{i,1})=O(1)\psi_{i,1}(n_i),$$

$$A(\tau_{i,r})=O(1)\left(\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,r}(x)}{x}dx+\frac{\sin\frac{\beta_{i,r}\pi}{2}}{\varphi_i(n_i)}\int\limits_1^{n_i}\frac{\psi_{i,r}(x)\varphi_i(x)}{x}dx+\psi_{i,r}(n_i)\right),$$

$$\int\limits_{|t|<1}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau_{i,1}(v)\cos vtdv\right|dt=O(1)\psi_{i,1}(n_i).$$

Подставляя эти соотношения в формулу (6), получаем асимптотическую формулу (4). □

Применяя аналогичные рассуждения, получаем следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $\psi_{i,r}\in\mathfrak{M}_0'$, $\beta_{i,r}\in R$ *функции* $\psi_{i,r}(x)x^{s_i}$, $i,r=1,2,...,m$; *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при* $x\ge 1$. *Тогда при* $n_i\to\infty$, $i=1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty};Z^{\vec{s}}_{\vec{n}}\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^{s_i}}\int\limits_1^{n_i}\psi_{i,1}(x)x^{s_i-1}dx+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i)+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\left[\frac{1}{n_j^{s_j}}\int\limits_1^{n_j}\psi_{j,r}(x)x^{s_j-1}dx+\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx+\psi_{j,r}(n_j)\right]\right).$$

Теорема 3. *Пусть* $\psi_{i,j} \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta_{i,j} \in R$ *функции* $\psi_{i,j}(x)x^2$, $i,j = 1,2,...,m$; *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости при* $x \geq 1$. *Тогда при* $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; R_{\vec{n}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^2}\int_1^{n_i}\psi_{i,1}(x)xdx + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx + O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i) +\right.$$

$$\left. + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\left[\frac{1}{n_j^2}\int_1^{n_j}\psi_{j,r}(x)xdx + \int_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx + \psi_{j,r}(n_j)\right]\right). \qquad (3)$$

Теорема 4. *Пусть* $\psi_{i,j} \in \mathfrak{M}_C$, $\beta_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,2,...,m$, $\lim_{n_i\to\infty} p_i/n_i = 0$, $i = 1,2,...,m$. *Тогда при* $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\infty}; V_{\vec{n},\vec{p}}\right) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i)\ln\frac{n_i}{p_i} +$$

$$+ O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i) + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\psi_{j,r}(n_j)\ln\frac{n_j}{p_j}\right).$$

Теорема 5. *Пусть* $\psi_{i,r} \in \mathfrak{M}_C$, $i,r = 1,2,...,m$, $\beta_{i,r} \in \mathbb{R}$. *Тогда при* $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\infty}; S_{\vec{n}}\right) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i)\ln n_i +$$

$$+ O(1)\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i) + \sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\psi_{j,r}(n_j)\ln n_j\right).$$

Повторяя рассуждения работы [1] верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фавара первого порядка, $r_i = 1, i = 1,2,...,m$, получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $\psi_{i,r} \in \mathfrak{M}'_0$, $i,r = 1,2,...,m$, *функции* $x^2\psi_{i,r}(x)$, *для* $x \geq 1$ *монотонно возрастают и сохраняют характер выпуклости. Тогда при* $n_i \to \infty$, $i = 1,2,...,m$, *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{m\psi}_{\beta,\infty}; \Phi_{\vec{n},1}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\sum_{i=1}^{m}\frac{\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}}{n_i^2}\int\limits_{1}^{n_i}\psi_{i,1}(x)xdx+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_{i,1}\pi}{2}\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i,1}(x)}{x}dx+O(1)\Bigg(\sum_{i=1}^{m}\psi_{i,1}(n_i)+$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\overline{m}}\prod_{j\in\mu(r)}\left\{\sin\frac{\beta_{j,r}\pi}{2}\left[\frac{1}{n_j^2}\int\limits_{1}^{n_j}\psi_{j,r}(x)xdx+\int\limits_{n_j}^{\infty}\frac{\psi_{j,r}(x)}{x}dx\right]+\psi_{j,r}(n_j)\right\}\Bigg).$$

Литература

[1] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / *В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая* // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 4. – С. 564 – 570.

[2] *Рукасов В.И.* Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций двух переменных линейными методами / *В.И. Рукасов, О.А. Новиков, В.И. Бодрая* // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2004. – Т. 1, № 1. – С. 250 – 269.

[3] *Степанец А.И.* Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций / *А.И. Степанец, Н.Л. Пачулиа* // Укр. мат. журнал. – 1991. – 43, № 4. – С. 545 – 555.

[4] *Ласурия Р.А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций / *Р.А. Ласурия* // Укр. мат. журнал. – 2003. – 55, № 7. – С. 911 – 918.

[5] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций / *А.И. Степанец.* – К.: Наук. думка, 1987. – 268 с.

[6] *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / *А.И. Степанец* . – К.: Наук. думка, 1981. – 340 с.

[7] *Рукасов В.И.* Приближение функций с небольшой гладкостью из классов $C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ линейными методами / *В.И. Рукасов, О.А. Новиков* // Теорія наближень та гармонічний аналіз : праці Українського математичного конгресу. – Київ, 2002. – С. 184 – 193.

[8] *Бодрая В.И.* Приближение классов периодических функций многих переменных с малой гладкостью прямоугольными линейными средними их рядов Фурье / *В.И. Бодрая* // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2005. – Т. 2, № 2. – С. 7 – 26.