УДК 519.652+519.653

Волков С.В.

[1] *ст. викладач кафедри «Природничих наук», КІІ ДВНЗ «ДонНТУ»*

e-mail: sergey.v.volkov@mail.ru

УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ПОБУДОВИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО МНОГОЧЛЕНА ЛАГРАНЖА-СИЛЬВЕСТРА

В роботі запропоновано новий, універсальний, найбільш лаконічний метод розв'язання задачі інтерполяції функції алгебраїчними поліномами. Суттєво скорочено шлях отримання необхідних співвідношень, записаних компактно – через визначник Вандермонда, що дає можливість спростити відповідні розрахунки.

Ключові слова: *інтерполяція, інтерполяція Ерміта, визначник Вандермонда, многочлен Лагранжа–Сильвестра.*

Вступ

Найпростіша задача інтерполяції полягає в апроксимації деякої неперервної функції $f\left(x\right)$ поліномом $W_n(x) = \sum\limits_{l=0}^{n} c_l x^l$, що приймає в заданих точках $x_k \in X$, $X : \left\{x_k,\ k=\overline{0,s},\ n \le s,\ x_k = x_l \Leftrightarrow k = l\right\}$ ті ж значення, що і функція $f\left(x\right)$, тобто $W_n(x_k) = f(x_k)$.

Для загального випадку, довільно заданих вузлів інтерполяції, цей розв'язок визначається формулою Лагранжа. Як частинні випадки, з неї можна отримати відомі інтерполяційні формули: Ньютона, Гаусса, Стирлінга та ін. $[1,3,5,6]$.

Якщо $f\left(x\right)$ неперервна разом зі своїми похідними то узагальнена задача інтерполяції (інтерполяція Ерміта), полягає в побудові многочлена $W\left(x\right)$, що фіксує не тільки значення функції, а й довільне число послідовних похідних. Очевидно, $W\left(x\right)$ є розв'язком системи рівнянь

$$W^{(i_k)}\left(x_k\right) - f^{(i_k)}\left(x_k\right) = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} k = \overline{0,s}\ , \\ i_k = \overline{0, m_k - 1}\ . \end{array} \right. \tag{1}$$

Зрозуміло, що коли $m_k \equiv 1$ та під $f^{(0)}\left(x\right)$ розуміємо значення самої функції, ми маємо найпростіший випадок розв'язку системи (1), а саме, многочлен Лагранжа. У випадку $m_k \equiv 2$, (1) може бути розв'язана за допомогою многочленна Ерміта.

В інших випадках розв'язок системи (1) значно ускладнюється, і задачу на його відшукання називають загальною інтерполяцією Ерміта, при цьому $W(x)$ називають інтерполяційним многочленом Лагранжа–Сильвестра $[2, 4, 6]$.

Відоме загальне правило знаходження та побудови розв'язків системи (1), сенс якого полягає у застосуванні, так званих, базисних многочленів $l_{ki}(x)$, які володіють відповідними базисними інтерполяційними властивостями. Враховуючи $l_{ki}(x)$, можемо скласти інтерполяційний многочлен, але їх структура та спосіб побудови є громіздкими $[2, 4, 6]$.

Основна частина

В роботі пропонується нова конструкція побудови розв'язків системи (1), яка основана на визначнику Вандермонда.

Твердження 1. *Розв'язок системи* (1)*, многочлен Лагранжа-Сильвестра, знаходиться у вигляд визначника* (2), (3)

$$W(x) = \begin{vmatrix} Z_0(x) & . & Z_k(x) & . & Z_s(x) \\ (x-x_0)^{m_0} & . & (x-x_k)^{m_k} & . & (x-x_s)^{m_s} \\ (x-x_0)^{1+m_0} & . & (x-x_k)^{1+m_k} & . & (x-x_s)^{1+m_s} \\ . & . & . & . & . \\ (x-x_0)^{s+m_0-1} & . & (x-x_k)^{s+m_k-1} & . & (x-x_s)^{s+m_s-1} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

або в спрощеному позначенні

$$W(x) = \det\left[Z_k(x)\,;(x-x_k)^{i+m_k-1}\right]_{i=1,\,k=0}^{s}, \qquad (3)$$

де

$$Z_k(x) = \sum_{i=0}^{m_k-1} \frac{\overline{f}^{(i)}(x_k)}{i!}(x-x_k)^i, \quad \overline{f}(x) = \frac{f(x)}{\det\left[1\,;(x-x_k)^{i+m_k-1}\right]_{i=1,\,k=0}^{s}}.$$

Доведення. Встановимо, по перше, що $W(x)$ є многочлен степені не більш за $\sum_{k=0}^{s} m_k - 1$ (забезпечить однозначність розв'язку системи (1)) і, по друге, задовольняє системі (1).

Перше встановити неважко. Застосовуючи теорему Лапласа, розкладемо визначник (2) за першим рядком і винесемо спільні множники з кожного алгебраїчного доповнення

$$W(x) = \sum_{i=0}^{s}(-1)^i Z_i(x)\prod_{k\neq i=0}^{s}(x-x_k)^{m_k}\det\left[1;(x-x_k)^{l-1}\right]_{\substack{k\neq i\\ k=0,\ l=2}}^{s}, \qquad (4)$$

останні множники в (4) є не що інше, як визначники Вандермонда

$$\det\left[1;(x-x_k)^{l-1}\right]^{s}_{\substack{k\neq i\\ k=0,\, l=2}}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & . & 1 & 1 & . & 1\\ (x-x_0) & . & (x-x_{i-1}) & (x-x_{i+1}) & . & (x-x_s)\\ (x-x_0)^2 & . & (x-x_{i-1})^2 & (x-x_{i+1})^2 & . & (x-x_s)^2\\ . & . & . & . & . & .\\ (x-x_0)^{s-1} & . & (x-x_{i-1})^{s-1} & (x-x_{i+1})^{s-1} & . & (x-x_s)^{s-1} \end{vmatrix},$$

а, отже,

$$\det\left[1;(x-x_k)^{l-1}\right]^{s}_{\substack{k\neq i\\ k=0,\, l=2}}=\prod_{\substack{k<l=0\\ l,k\neq i}}^{s}(x_k-x_l)$$

не залежить від змінної x і на степінь $W(x)$ не впливає [1], [3]. Враховуючи це, маємо рівність

$$\deg W(x)=\max_i\left(\deg Z_i(x)+\deg\prod_{k\neq i=0}^{s}(x-x_k)^{m_k}\right)=$$

$$=m_i-1+\sum_{k=0,\,k\neq i}^{s}m_k=\sum_{k=0}^{s}m_k-1,$$

яку й треба було встановити.

Для перевірки другого, зауважимо, що многочлен $W(x)$ буде розв'язком системи (1) коли:

$$W(x)-f(x)=\prod_{k=0}^{s}(x-x_k)^{m_k}\cdot F(x)\,, \tag{5}$$

де $F(x_k)\neq 0,\quad k=\overline{0,s}\,.$

Виходячи із твердження, різницю (5) запишемо у вигляді визначника

$$W(x)-f(x)=\det\left[\left(Z_k(x)-\overline{f}\right);(x-x_k)^{i+m_k-1}\right]^{s}_{i=1,\,k=0}, \tag{6}$$

з першим рядком, у вигляді

$$Z_k(x)-\overline{f}=Z_k(x)-\sum_{i=0}^{m_k-1}\frac{\overline{f}^{(i)}(x_k)}{i!}(x-x_k)^i=\frac{\overline{f}^{(m_k)}(\xi_k)}{m_k!}(x-x_k)^{m_k}\,. \tag{7}$$

Враховуючи (6) та (7), маємо

$$W(x) - f(x) = \det\left[\frac{\overline{f}^{(m_k)}(\xi_k)}{m_{k!}}(x - x_k)^{m_k}\ ; (x - x_k)^{i+m_k-1}\right]_{\substack{i=1\\k=0}}^{s} \Rightarrow$$

$$W(x) - f(x) = \prod_{k=1}^{s}(x - x_k)^{m_k}\det\left[\frac{\overline{f}^{(m_k)}(\xi_k)}{m_k!}; (x - x_k)^{i-1}\right]_{\substack{i=1\\k=0}}^{s} \Rightarrow$$

$$W(x) - f(x) = \prod_{k=0}^{s}(x - x_k)^{m_k}F(x) \Rightarrow$$

$$W^{(i_k)}(x_k) - f^{(i_k)}(x_k) = 0,\ \left\{\begin{array}{l} k = \overline{0, s}\ , \\ i_k = \overline{0, m_k - 1}\ . \end{array}\right.$$

Отже, визначник (2) буде інтерполяційним многочленом Лагранжа–Сильвестра. □

Спираючись на доведену формулу (2) можна отримати ряд наслідків.

Наслідок 1. *Розв'язок системи* (1) *за умови* $m_k \equiv 1$, *многочлен Лагранжа, має вид:*

$$W_n(x) = \frac{1}{\prod\limits_{i<j}^{n}(x_i - x_j)}\left|\begin{array}{cccc} f(x_0) & f(x_1) & . \ . & f(x_n) \\ x - x_0 & x - x_1 & . \ . & x - x_n \\ (x - x_0)^2 & (x - x_1)^2 & . \ . & (x - x_n)^2 \\ . & . & . \ . & . \\ (x - x_0)^n & (x - x_1)^n & . \ . & (x - x_n)^n \end{array}\right|. \tag{8}$$

Наслідок 2. *Розв'язок системи* (1) *за умови* $m_k \equiv 1$ *і рівновіддалених вузлів інтерполяції, формула Ньютона, має вид:*

$$W_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\prod\limits_{j=0}^{n} j!}\left|\begin{array}{cccc} f(x_0) & f(x_1) & . \ . & f(x_n) \\ q & q - 1 & . \ . & q - n \\ q^2 & (q - 1)^2 & . \ . & (q - n)^2 \\ . & . & . \ . & . \\ q^n & (q - 1)^n & . \ . & (q - n)^n \end{array}\right|, \tag{9}$$

де $q = \frac{x - x_0}{h}$, $\quad h = x_{i+1} - x_i$, $\ i = \overline{0, n}$.

Наслідок 3. *Похідна* k*-го порядку* $\left(k=\overline{1,n}\right)$ *многочлена Лагранжа має вид:*

$$W_n^{(k)}(x)=\frac{k!}{\prod\limits_{i<j}^{n}(x_i-x_j)}\begin{vmatrix} f(x_0) & f(x_1) & . & . & f(x_n)\\ 1 & 1 & . & . & 1\\ x-x_0 & x-x_1 & . & . & x-x_n\\ . & . & . & . & .\\ (x-x_0)^{k-1} & (x-x_1)^{k-1} & . & . & (x-x_n)^{k-1}\\ (x-x_0)^{k+1} & (x-x_1)^{k+1} & . & . & (x-x_n)^{k+1}\\ . & . & . & . & .\\ (x-x_0)^{n} & (x-x_1)^{n} & . & . & (x-x_n)^{n} \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

Враховуючи формулу (10), конструкцію визначника Вандермонда можна застосувати і для обчислення (не рекурентно) скінченних різниць довільного порядку.

Наслідок 4. *За умови, що* $[x_i,\ x_{i+1}]=\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$, *для* $\forall i=\overline{0,n-k}$, *має місце формула:*

$$[x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,x_{i+k}]=\frac{[x_{i+1},\ \ldots,x_{i+k}]-[x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}=$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{\prod\limits_{i<j}^{k}(x_i-x_j)}\begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} & . & . & y_{i+k}\\ 1 & 1 & . & . & 1\\ x_0 & x_1 & . & . & x_k\\ . & . & . & . & .\\ x_0^{k-1} & x_1^{k-1} & . & . & x_n^{k-1} \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

Наслідок 5. *За умови, що* $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$, *а* $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=const$, *для* $\forall i=\overline{0,n-k}$, *має місце формула:*

$$\Delta^k y_0=\frac{(-1)^k}{\prod\limits_{j=0}^{k-1}j!}\begin{vmatrix} y_i & y_{i+1} & . & . & y_{i+k}\\ 1 & 1 & . & . & 1\\ 0 & 1 & . & . & k\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 1 & . & . & k^{k-1} \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Висновки

Запропонована конструкція побудови інтерполяційних многочленів є універсальною. На її базі можлива побудова інтерполяційних многочленів, навіть, для функцій багатьох змінних.

Найпростіший випадок такої реалізації всім відомий як рівняння площини через три задані точки, що не лежать на одній прямій. Очевидно, рівняння площини, є розв'язком задачі інтерполяції функції двох змінних $f(x;y)$ многочленом першого порядку $z = ax + by + c$. Тобто, за умови, що $z_i = f(x_i; y_i)$, $i = 0, 1, 2$, можна записати:

$$z = W(x;y) = \frac{1}{v_3} \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ x - x_0 & x - x_1 & x - x_2 \\ y - y_0 & y - y_1 & y - y_2 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

де v_3 – двомірний аналог визначника Вандермонда.

У межах запропонованих узагальнень вже отримані рівняння інтерполяційних многочленів функції двох змінних. На теперішній час узагальнюється задача Ермітової інтерполяції на функції двох (багатьох) змінних.

Література

[1] *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций / В.Л. Гончаров – М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1954. – 328 с.

[2] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 576 с.

[3] *Демидович Б.П.* Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 368 с.

[4] *Ланкастер П.* Теория матриц : [пер. с англ.] / П. Ланкастер. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 272 с.

[5] *Мусіяка В.Г.* Основи чисельних методів механіки / В.Г. Мусіяка – К.: Вища освіта, 2004. – 240 с.

[6] *Хемминг Р.В.* Численные методы / Р.В. Хемминг – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972. – 400 с.