УДК 519.175

Кадубовський О.А., Ірза В.І.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, СДПУ*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: kadubovs@ukr.net, irza_v@ukr.net

k-КОЛЬОРОВІ ХОРДОВІ n-ДІАГРАМИ

В статті розглядається клас k-кольорових хордових діаграм з n хордами. Для натуральних $k > 2$ і $2n = k \cdot p$ встановлено формули для підрахунку як числа неізоморфних (з точністю до повороту), так і числа нееквівалентних (відносно дії діедральної групи) діаграм із зазначеного класу. Також наведено початкові значення числа неізоморфних k-кольорових n-діаграм для $1 < n \leq 15$.

Ключові слова: *хордова n-діаграма, дія групи на множині, група діедра.*

Вступ

Однією з основних задач багатьох галузей математики є задача про класифікацію досліджуваних об'єктів, яка, в свою чергу, вимагає побудову повних інваріантів. В більшості випадків для розв'язання останньої ефективно застосовують певні графи з додатковою інформацією. Конструкції, схожі до кола з відміченими точками, ефективно використовувались, наприклад, в роботах [2, 12, 13]. Добре відомо також, що хордові діаграми використовують і для описання інваріантів вузлів Васильєва.

Всюди нижче під хордовою діаграмою порядку n будемо розуміти конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ точок на ньому та n хорд, які сполучають вказані точки.

Питаннями переліку певних класів хордових діаграм займалась ціла низка відомих математиків, зокрема автори робіт [3, 4, 5, 6].

Задача про підрахунок числа неізоморфних (відносно дії циклічної групи) та нееквівалентних (відносно дії діедральної групи) n-діаграм була повністю розв'язана в роботах [3], [6].

Двокольорові хордові O- і N-діаграми були використані в роботі [8] при топологічній класифікації функцій певного класу на замкнених орієнтовних та відповідно не орієнтовних поверхнях фіксованого роду. В [9] встановлено формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних двокольорових O- і N-діаграм з n хордами. В [10] встановлено формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних двокольорових O-діаграм, які мають один чорний (або ж білий) цикл.

В роботі [7] підраховано число неізоморфних O-діаграм максимального роду (з одним чорним та одним білим циклом). Число неізоморфних та нееквівалентних планарних O-діаграм (роду 0) підраховано в роботі [1].

Результати, пов'язані з підрахунком числа неізоморфних та нееквівалентних k-кольорових n-діаграм, авторам є невідомими. Дослідженню та розв'язанню зазначених задач й присвячена дана стаття.

1. Основні поняття та попередні відомості

Означення 1. *Нехай на площині задано коло і $2n$ точок на ньому, які є вершинами правильного $2n$-кутника. Розіб'ємо ці точки на n пар і кожну пару з'єднаємо хордою. Отриману конструкцію будемо називати хордовою діаграмою з n хордами або, коротко, n-діаграмою – рис. 1 a).*

Означення 2. *Коло з $2n$ точками на ньому, які є вершинами правильного $2n$-кутника, і фіксованою нумерацією останніх за годинниковою стрілкою будемо називати $2n$-шаблоном – рис. 1 b).*

Надалі будемо вважати, що всі n-діаграми будуються на основі $2n$-шаблону, а множину діаграм, побудованих на ньому, позначати $\Im_n$.

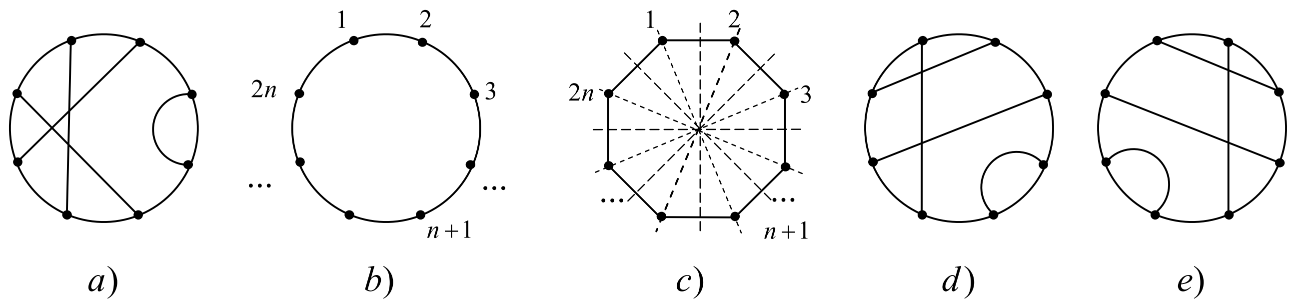

Рис. 1: a) 4-діаграма (O-діаграма); b) $2n$-шаблон; c) правильний $2n$-кутник та його вісі симетрії; d), e) еквівалентні, але не ізоморфні 4-діаграми (N-діаграми)

Означення 3. *Дві хордові n-діаграми будемо називати ізоморфними, якщо одну з них можна отримати в результаті повороту іншої (навколо спільного центру) на деякий кут $\varphi = i \cdot \frac{2\pi}{2n}$, $1 \le i \le 2n$.*

Означення 4. *Дві хордові n-діаграми будемо називати еквівалентними, якщо вони ізоморфні або суміщаються в результаті дзеркального відбиття чи композиції дзеркального відбиття і повороту на певний кут.*

Добре відомо (напр. [11]), що всі симетрії правильного $2n$-кутника (рухи площини, при яких він самосуміщується) вичерпуються:

$2n$ поворотами (навколо його центра) на кути, кратні куту $\varphi = \frac{2\pi}{2n}$;

n осьовими симетріями відносно прямих (осей симетрії), що проходять через протилежні вершини, та

n осьовими симетріями відносно прямих (осей симетрії), що проходять через середини протилежних сторін.

Нехай $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & \ldots & 2n & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, ..., 2n)$, а
$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n+1 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 2n & \ldots & n+1 & \ldots & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)\circ(2, 2n)\circ...\circ(n, n+2)\circ(n+1)$.

Тоді симетрії правильного $2n$-кутника можна описати в термінах зазначених перестановок на множині номерів його вершин. А саме:
1) поворот $2n$-кутника навколо його центра на кут $\varphi_j = \frac{j\pi}{n}$, $1 \leq j \leq 2n$ за годинниковою стрілкою визначається перестановкою σ^j і навпаки;
2) осьова симетрія відносно прямої s_1, що проходить через середини сторін $[1; 2]$ і $[n+1; n+2]$, визначається добутком $\tau \cdot \sigma^1$, а відносно прямої s_2, що проходить через середини сторін $[2; 3]$ і $[n+2; n+3]$, – добутком $\tau \cdot \sigma^3$;
3) осьова симетрія відносно прямої v_1, що проходить через вершини з номерами 1 і $n+1$, визначається перестановкою τ, а відносно прямої v_2, що проходить через вершини з номерами 2 і $n+2$, – добутком $\tau \cdot \sigma^2$ і т.д..

Очевидно, що симетрії $2n$-шаблону можна описати в аналогічний спосіб. Тому елементи σ^i і $\tau \cdot \sigma^i$ $(i = 1, ..., 2n)$ — всі $4n$ різних елементів групи $D_{2n} = \{\sigma^i,\ \tau \cdot \sigma^i\ |i = 1, 2, ..., 2n\}$ симетрій $2n$-шаблону.

Циклічну групу, породжену перестановкою σ, будемо називати групою циклічних перестановок порядку $2n$ і позначати $C_{2n} = \{\sigma^i \mid i = 1, 2, ..., 2n\}$.

Більш повну інформацію щодо наведених питань можна знайти, наприклад, в [11].

Нехай далі $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & \ldots & k_{2n-1} & k_{2n} \\ k_1 & 1 & \ldots & k_{2n} & k_{2n-1} \end{pmatrix}$ — підстановка (інволюція) на множині номерів n_j вершин $2n$-шаблону, яка визначає хорди, а тому і саму хордову n-діаграму $D = D(\alpha)$. Тоді кожну діаграму можна ототожнити з відповідною підстановкою, яку будемо називати склейкою. Множину склейок, що відповідають діаграмам з класу $\Im_n$, будемо позначати $\mathbf{B_{2n}}$.

Відомо (напр. [3, 8, 9]), що групи C_{2n} та D_{2n} діють на множині хордових діаграм (на множині $\mathbf{B_{2n}}$) як спряження. Тобто

Твердження 1. *Діаграма $D(\alpha_1)$ ізоморфна діаграмі $D(\alpha_2)$ тоді і лише тоді, коли $\exists i \in \{1, 2, ..., 2n\}: \quad \alpha_1 = \sigma^{-i} \circ \alpha_2 \circ \sigma^i$;*

діаграма $D(\alpha_1)$ еквівалентна діаграмі $D(\alpha_2)$ тоді і лише тоді, коли $\exists \gamma \in D_{2n}: \quad \alpha_1 = \gamma^{-1} \circ \alpha_2 \circ \gamma$.

2. Основна частина

Розглянемо деяку n-діаграму. Занумеруємо її дуги числами від 1 до $2n$, рухаючись за годинниковою стрілкою від деякої фіксованої дуги, і розфарбуємо їх в k різних кольорів ($k|2n$, $k>1$) так, щоб дуги, номери яких дають однакову остачу при діленні на k, були зафарбовані одним кольором.

В подальшому будемо вважати, що циклічний порядок k різних кольорів (кольорів дуг діаграми за годинниковою стрілкою) є строго фіксованим.

Означення 5. *Хордову n-діаграму, дуги кола якої пофарбовані в k різних кольорів зазначеним способом, будемо називати k-кольоровою n-діаграмою і позначати $D_{k,n}$ – рис. 2 a).*

Розглянемо $2n$-шаблон (рис. 2 *b*)). В якості номера дуги візьмемо номер вершини, яка є її початком (наприклад, дуга $(1,2)$ має номер 1; дуга $(2,3)$ має номер 2 і т.д.). Розфарбуємо дуги в k різних кольорів ($k|2n$, $k>1$) так, щоб дуги, номери яких дають однакову остачу при діленні на k, були зафарбовані одним кольором. $2n$-шаблон, дуги кола якого пофарбовано у вказаний спосіб, будемо називати **k-кольоровим $2n$-шаблоном** — рис. 2 *c*).

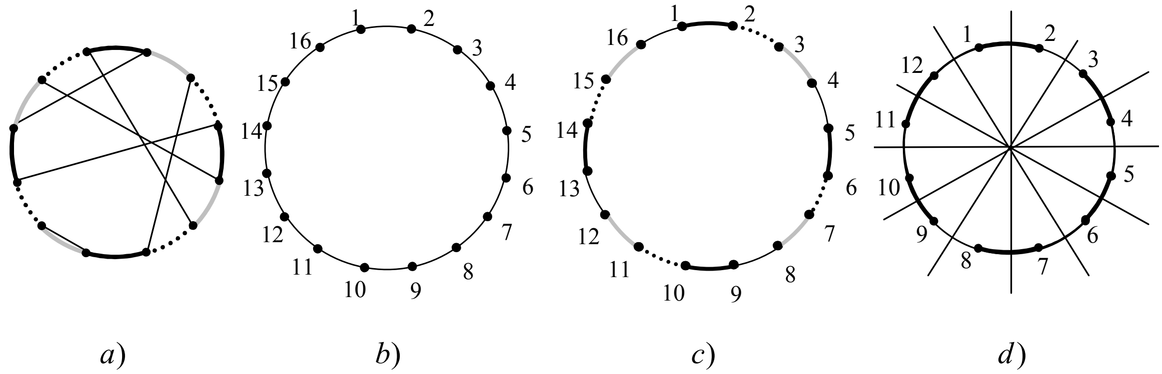

Рис. 2: *a*) 3-кольорова 6-діаграма; *b*) $2n$-шаблон ($n=8$); *c*) k-кольоровий $2n$-шаблон ($n=8$, $k=4$); *d*) вісі симетрії 2-кольорового 12-шаблону

2.1 Симетрії k-кольорового $2n$-шаблону

Група симетрій 2-кольорового $2n$-шаблону складається з n поворотів на «парні» кути (кути виду $\omega_i = 2i\frac{\pi}{n}$, $1 \le i \le n$) та n осьових симетрій відносно осей, що проходять через середини протилежних дуг шаблону [9]. В якості твірних зазначеної групи симетрій можна обрати перестановки

$$\xi = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & \ldots & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

І тому група симетрій 2-кольорового $2n$-шаблону може бути представлена у вигляді $D^*_{2n} = \left\{\xi^i, \lambda \circ \xi^i |\ i = 1, \ldots, n\right\}$.

Тепер дослідимо симетрії k-кольорового $2n$-шаблону.

Твердження 2. *Нехай $k > 2$ і k є дільником натурального числа $2n$. Тоді група симетрій k-кольорового $2n$-шаблону складається з $\frac{2n}{k}$ елементів – поворотів на кути виду $\varphi_j = kj \cdot \frac{\pi}{n}$, $j \in \{1, 2, ...\frac{2n}{k}\}$.*

Доведення. При обертаннях k-кольоровий $2n$-шаблон самосуміщується лише коли кут повороту є «кратним k», тобто лише при поворотах на кути $\varphi_k = km \cdot \frac{\pi}{n}$, $1 \le m \le \frac{2n}{k}$. Тому для доведення твердження достатньо показати, що при $k > 2$ k-кольоровий $2n$-шаблон не має осей симетрії.

Припустимо, що k-кольоровий $2n$-шаблон має вісь симетрії, яка проходить через протилежні вершини шаблону (наприклад, вершини з номерами i та $i+n$). Це означає, що дуги $(i-1, i)$ та $(i, i+1)$ зафарбовані однаково. Проте цього бути не може, оскільки номери цих дуг ($i-1$ та i відповідно) дають різні остачі при діленні на k ($k > 2$), і тому, за визначенням k-кольорового $2n$-шаблону, пофарбовані різними кольорами.

Припустимо тепер, що k-кольоровий $2n$-шаблон має вісь симетрії, яка проходить через середини протилежних дуг (наприклад, дуги $(i, i+1)$ та $(i+n, i+n+1)$). Це означає, що дуги $(i-1, i)$ та $(i+1, i+2)$ мають бути зафарбовані однаково. Але це неможливо, оскільки номери цих дуг ($i-1$ та $i+1$ відповідно) дають різні остачі при діленні на k ($k > 2$). □

Таким чином, група симетрій k-кольорового $2n$-шаблону складається з $\frac{2n}{k}$ елементів. Її будемо позначати $D^*_{\frac{2n}{k}} = \left\{\sigma^{k \cdot j} \middle| \, j = 1, ..., \frac{2n}{k}\right\}$ та називати групою діедра k-кольорового $2n$-шаблону.

Зауваження 1. *При натуральних k, що ділять $2n$, група $D^*_{\frac{2n}{k}}$ є групою $C^*_{\frac{2n}{k}}$ циклічних перестановок порядку $\frac{2n}{k}$, що породжується перестановкою*

$$\varsigma = \sigma^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 2n-k & 2n-k+1 & ... & 2n-1 & 2n \\ k+1 & k+2 & ... & 2n & 1 & & ... & k-1 & k \end{pmatrix}. \quad (2)$$

2.2 Ізоморфізм та еквівалентність k-кольорових n-діаграм

Добре відомо, що число хордових n-діаграм (побудованих на $2n$-шаблоні) становить $d_n = (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$. Як було зазначено раніше, циклічний порядок k різних кольорів (кольорів дуг діаграми у напрямку за годинниковою стрілкою) є строго фіксованим. Оскільки кожну n-діаграму можна розфарбувати k різними способами зі збереженням циклічного порядку кольорів, то, з урахуванням *означення* 5., в якості числа $d_{k,n}$ k-кольорових n-діаграм слід прийняти величину $d_{k,n} = k \cdot d_n$.

Проте, оскільки *кінцевою метою* є підрахунок числа саме неізоморфних k-кольорових n-діаграм, доведемо наступне допоміжне твердження.

Твердження 3. *Число неізоморфних k-кольорових n-діаграм з фіксованим циклічним порядком кольорів дуг співпадає з числом неізоморфних k-кольорових n-діаграм, побудованих на k-кольоровому $2n$-шаблоні з таким самим циклічним порядком кольорів.*

Доведення. Для доведення достатньо показати, що для кожної діаграми $D_{k,n}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{B_{2n}}$, побудованої на k-кольоровому $2n$-шаблоні (з фіксованим циклічним порядком кольорів), існують ще $k-1$ діаграм (побудованих на цьому ж шаблоні), які при відповідній циклічній зміні кольорів є ізоморфними з діаграмою $D_{k,n}(\alpha)$. Надалі множину діаграм, побудованих на фіксованому k-кольоровому $2n$-шаблоні, будемо позначати $\Im_{k,n}$.

Отже, нехай $\alpha = (a_1, b_1) \circ ... \circ (a_n, b_n)$ – довільна, але фіксована склейка з $\mathbf{B_{2n}}$, а $D_{k,n} = D_{k,n}(\alpha)$ – рис. 3 a).

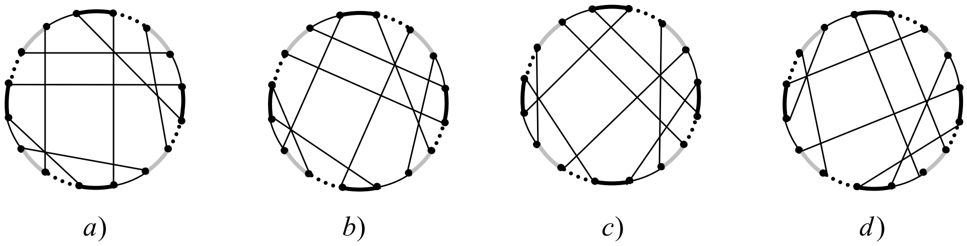

Рис. 3: $a)$ $D_{k,n}(\alpha)$; $b)$ $D_{k,n}(\alpha_1)$; $c)$ $D_{k,n}(\alpha_2)$; $d)$ $D_{k,n}(\alpha_3)$

Розглянемо склейку $\alpha_1 = \alpha + 1 \bmod(2n) =$
$= (a_1 + 1 \bmod(2n), b_1 + 1 \bmod(2n)) \circ ...$
$... \circ (a_n + 1 \bmod(2n), b_n + 1 \bmod(2n)) \in \mathbf{B_{2n}}$.
Очевидно, що діаграма $D_{k,n}(\alpha_1)$ належить множині $\Im_{k,n}$ (рис. 3 b)). Якщо дуги діаграми $D_{k,n}(\alpha_1)$ перефарбувати так, щоб кожна дуга «отримала» колір попередньої дуги (у напрямку за годинниковою стрілкою), то одержана в такий спосіб діаграма $D'_{k,n}(\alpha_1)$ буде ізоморфною діаграмі $D_{k,n}(\alpha)$.

Таким чином, склейки α_j ($j = 1, 2, ..., k-1$), що визначають шукані $k-1$ діаграм $D_{k,n}(\alpha_j)$, можна подати у вигляді $\alpha_j = \alpha + j \bmod(2n)$. При кожному фіксованому j циклічне перефарбування дуг діаграми $D_{k,n}(\alpha_j)$ відбувається за правилом: кожну дугу (діаграми $D_{k,n}(\alpha_j)$) під номером i слід пофарбувати у колір дуги шаблону під номером $(i - j \bmod(2n))$. □

Зауваження 2. *З урахуванням попереднього твердження в якості числа $d_{k,n}$ k-кольорових n-діаграм з фіксованим циклічним порядком кольорів дуг природно обрати число діаграм з класу $\Im_{k,n}$, що побудовані на фіксованому k-кольоровому $2n$-шаблоні (з відповідним циклічним порядком кольорів дуг шаблону). Тобто, в якості числа $d_{k,n}$ можна прийняти число d_n. Отже*

$$|\Im_{k,n}| = d_{k,n} = d_n = (2n-1)!!. \tag{3}$$

З урахуванням *твердження* 1., має місце наступний критерій ізоморфності діаграм з класу $\Im_{k,n}$.

Наслідок 1. *Діаграма* $D_{k,n}(\alpha_1)$ *ізоморфна діаграмі* $D_{k,n}(\alpha_2)$ *тоді і лише тоді, коли* $\exists j \in \left\{1, 2, ..., \frac{2n}{k}\right\}: \quad \alpha_1 = \sigma^{-j\cdot k} \circ \alpha_2 \circ \sigma^{j\cdot k}$.

2.3 Число неізоморфних та нееквівалентних діаграм з класу $\Im_{k,n}$

Теорема 1. *Для довільного натурального* $n \geq 2$ *число* $d^*_{k,n}$ *неізоморфних діаграм з класу* $\Im_{k,n}$ *можна обчислити за допомогою наступних формул*

$$d^*_{k,n} = \frac{k}{2n}\left((2n-1)!! + \sum_{kj|2n,\ kj\neq 2n} \phi\left(\frac{2n}{kj}\right)\rho(n,kj)\right), \tag{4}$$

$$\rho(n,kj) = \begin{cases} (kj-1)!! \cdot \left(\frac{2n}{kj}\right)^{\frac{kj}{2}}, & \frac{2n}{kj} = 2l+1 \\ \sum\limits_{r=0}^{[kj/2]} C^{2r}_{kj} \cdot (2r-1)!! \cdot \left(\frac{2n}{kj}\right)^r, & \frac{2n}{kj} = 2l, \end{cases} \tag{5}$$

де $\phi(q)$ *— арифметична функція Ейлера.*

Доведення. З урахуванням *зауваження* 1. і *наслідку* 1. число $d^*_{k,n}$ співпадає з числом орбіт дії групи $C^*_{\frac{2n}{k}}$ на множині діаграм з класу $\Im_{k,n}$ (на множині $\mathbf{B_{2n}}$). І тому за лемою Бернсайда (напр. [11]) та з урахуванням результатів роботи [3], шукане число $d^*_{k,n}$ можна обчислити за формулою

$$d^*_{k,n} = \frac{1}{|C^*_{\frac{2n}{k}}|}\left(|\Im_{k,n}| + \sum_{kj|2n\ kj\neq 2n} \phi\left(\frac{2n}{kj}\right)\cdot\rho(n,kj)\right), \tag{6}$$

де $\rho(n,kj)$ – число діаграм з класу $\Im_{k,n}$, які самосуміщуються при повороті на кут $\varphi_{k,j} = kj\cdot\frac{\pi}{n}$ за годинниковою стрілкою. Не важко бачити, що $\rho(n,kj)$ співпадає з числом звичайних n-діаграм (з класу $\Im_n$), які самосуміщуються при повороті на кут $\varphi_{k,j}$ за годинниковою стрілкою.

В роботах [3] і [6] було встановлено, що для кожного дільника i числа n величину $\rho(n,i)$ можна обчислити за формулами

$$\rho(n,i) = \begin{cases} (i-1)!! \cdot \left(\frac{2n}{i}\right)^{i/2}, & \frac{2n}{i} = 2l+1 \\ \sum\limits_{r=0}^{[i/2]} C^{2r}_{i} \cdot (2r-1)!! \cdot \left(\frac{2n}{i}\right)^r, & \frac{2n}{i} = 2l. \end{cases} \tag{7}$$

Поклавши в (7) $i = kj$, одержимо формули (5). □

Зауваження 3. *При* $k = 1$ *і* $k = 2$ *співвідношення* $(4), (5)$ *також визначають число неізоморфних хордових* n*-діаграм* $(\Im_n \equiv \Im_{1,n})$ *та число неізоморфних двокольорових* n*-діаграм (з класу* $\Im_{2,n}$*) відповідно. Крім того, у випадку* $k = 2n$ *кожна діаграма з класу* $\Im_{2n,n}$ *може суміститися виключно із собою і лише при повороті на кут* 2π*. Це означає, що будь-які дві діаграми з класу* $\Im_{2n,n}$ *не є ізоморфними, тобто що* $d^*_{2n,n} = d_{2n,n} = (2n-1)!!$*. При* $k = 2n$ *співвідношення* $(4), (5)$ *дають такий самий результат.*

Твердження 4. *При* $k > 2$ *число нееквівалентних діаграм з класу* $\Im_{k,n}$ *дорівнює числу неізоморфних діаграм з класу* $\Im_{k,n}$*.*

Справедливість твердження є наслідком *твердження* 2. та *зауваження* 1.

Всюди вище циклічний порядок k (різних) кольорів (кольорів дуг n-діаграм за годинниковою стрілкою) був чітко фіксованим. Очевидно, що на $2n$-шаблоні у напрямку за (або проти) годинниковою стрілкою можна зафіксувати $(k-1)!$ різних циклічних порядків кольорів. Крім того, при $k > 2$ дві k-кольорові n-діаграми з різними циклічними порядками кольорів дуг не можуть бути ізоморфними. Тому має місце

Наслідок 2. *Нехай* $k > 2$ *є дільником числа* $2n$*. Тоді число* $\overline{d^*_{k,n}}$ *неізоморфних* k*-кольорових* n*-діаграм можна визначити за формулою*

$$\overline{d^*_{k,n}} = (k-1)! \cdot d^*_{k,n}. \tag{8}$$

Нижче на рисунках 4, 5, 6, 7, 8 і 9 зображено всі неізоморфні діаграми з класів $\Im_{3,3}$, $\Im_{2,3}$, $\Im_{1,3}$, $\Im_{1,4}$, $\Im_{2,4}$ та $\Im_{4,4}$ відповідно.

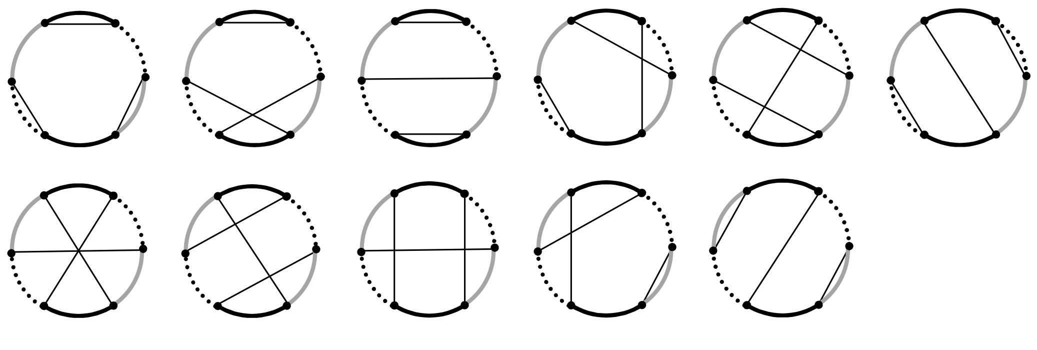

Рис. 4: Всі 11 неізоморфних діаграми з класу $\Im_{3,3}$

Рис. 5: Всі 7 неізоморфних діаграми з класу $\Im_{2,3}$

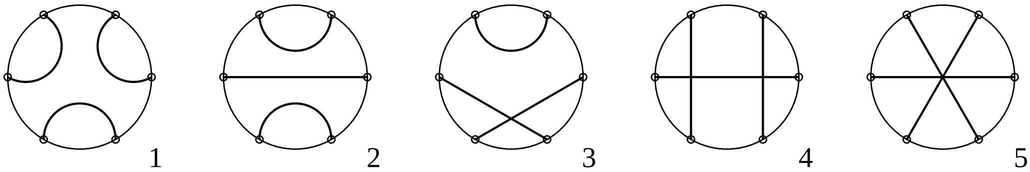

Рис. 6: Всі неізоморфні діаграми з класу $\Im_{1,3}$

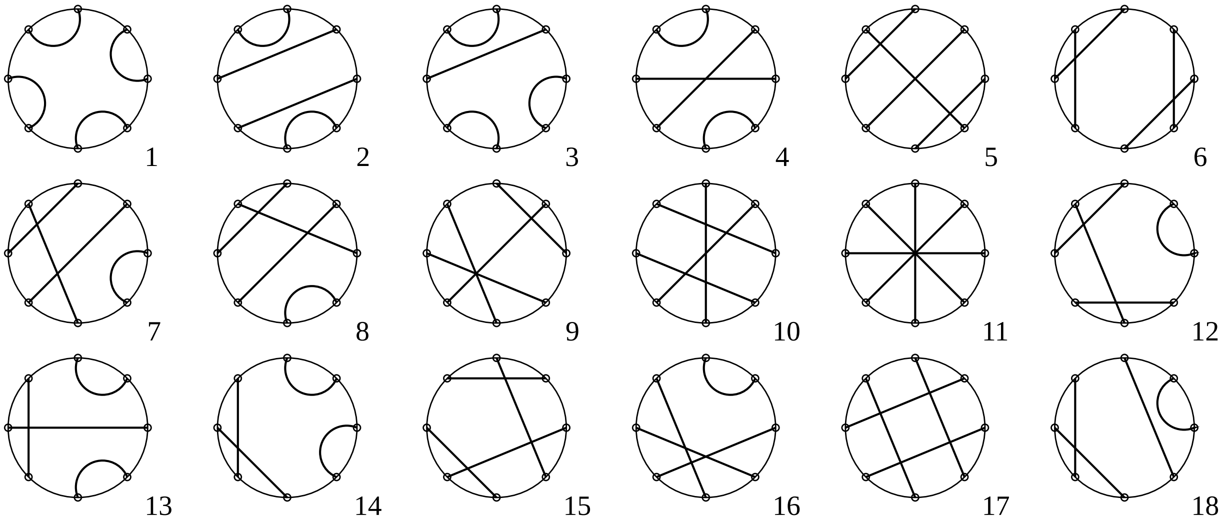

Рис. 7: Всі неізоморфні діаграми з класу $\Im_{1,4}$

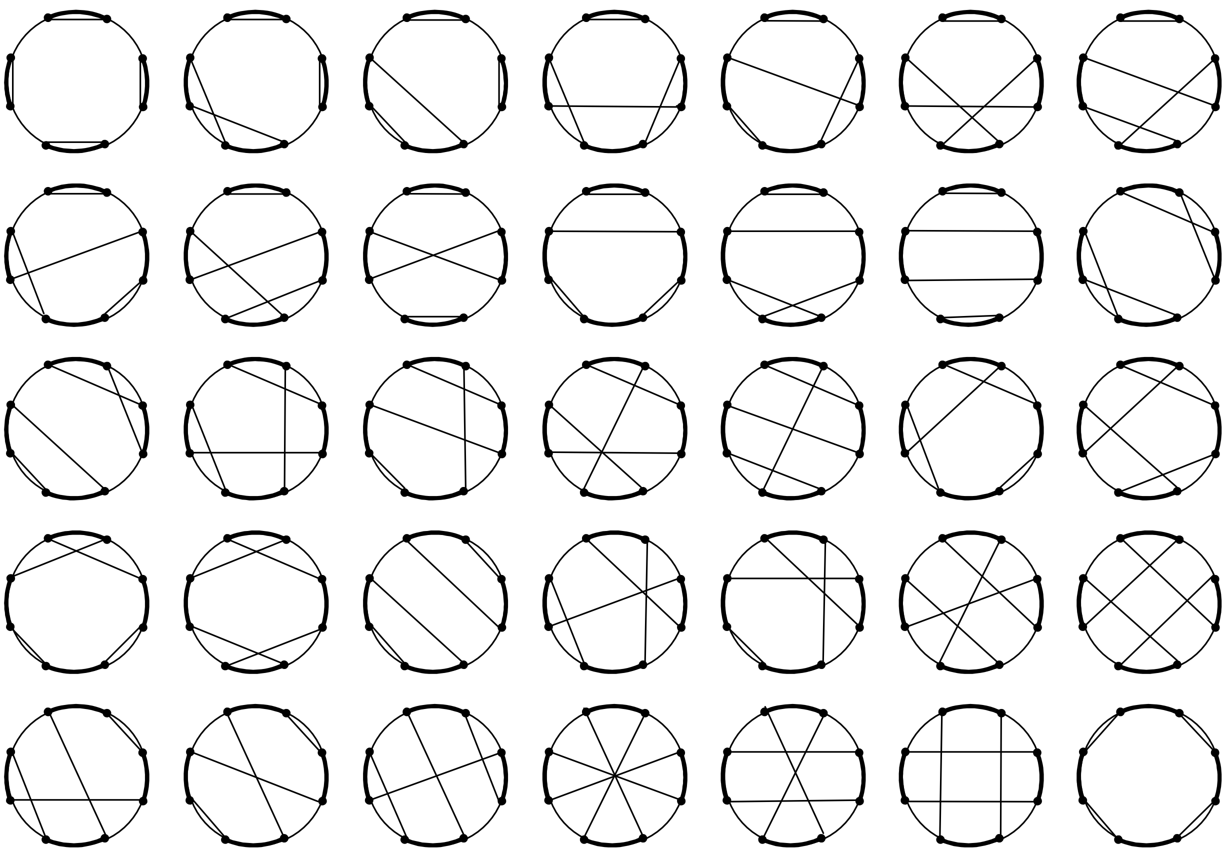

Рис. 8: Всі 35 неізоморфних діаграм з класу $\Im_{2,4}$

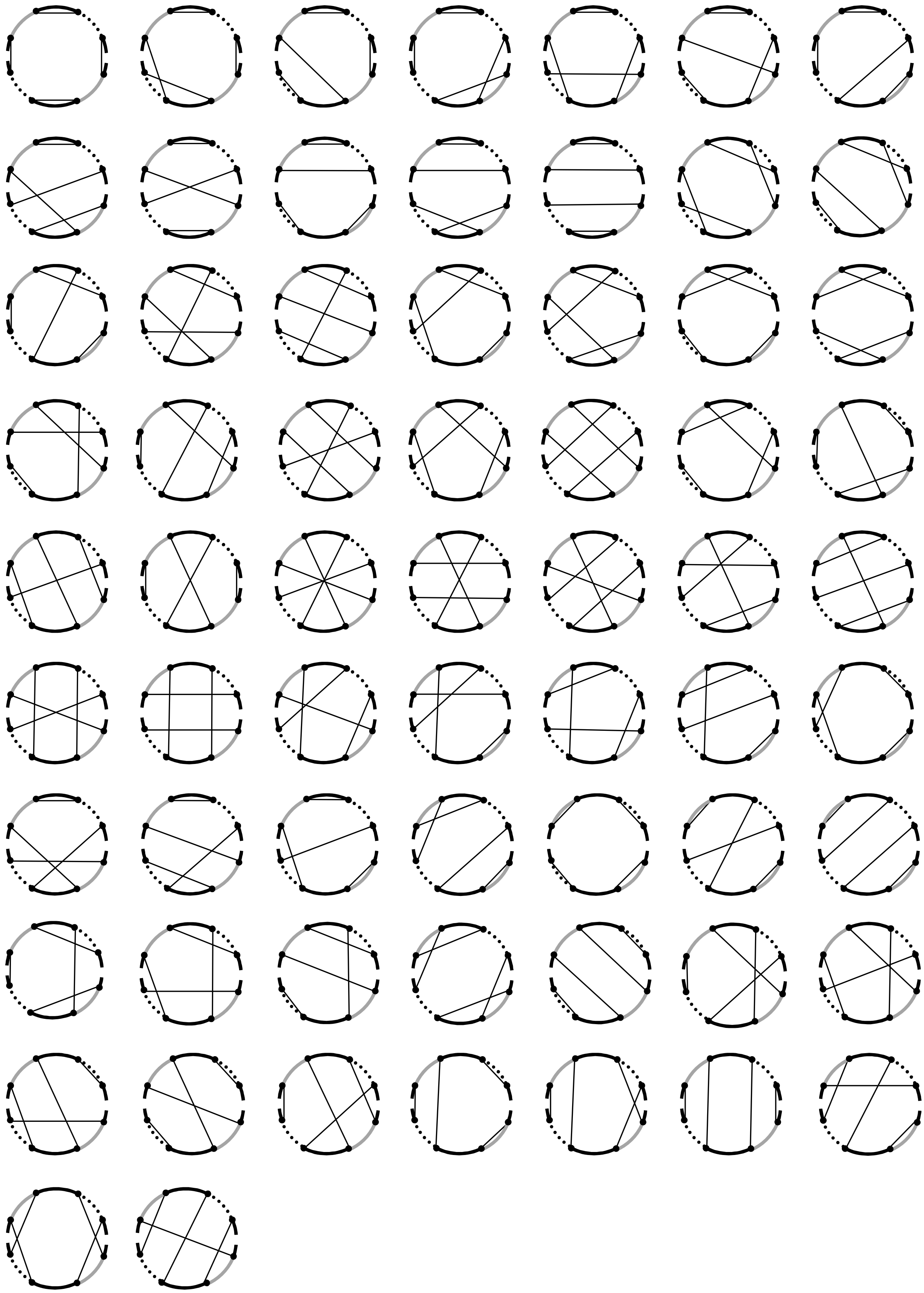

Рис. 9: Всі 65 неізоморфних діаграм з класу $\Im_{4,4}$

n	$2n$	$k\|2n$	$d^*_{k,n}$		n	$2n$	$k\|2n$	$d^*_{k,n}$
2	4	1	2		10	20	1	32 743 182
2	4	2	3		10	20	2	65 486 307
2	4	4	3		10	20	4	130 945 875
3	6	1	5		10	20	5	163 715 822
3	6	2	7		10	20	10	327 431 363
3	6	3	11		10	20	20	654 729 075
3	6	6	15		11	22	1	624 999 093
4	8	1	18		11	22	2	1 249 937 335
4	8	2	35		11	22	11	6 874 989 963
4	8	4	65		11	22	22	13 749 310 575
4	8	8	105		12	24	1	13 176 573 910
5	10	1	105		12	24	2	26 353 147 811
5	10	2	193		12	24	3	39 529 719 560
5	10	5	513		12	24	4	52 706 295 033
5	10	10	945		12	24	6	79 059 439 095
6	12	1	902		12	24	8	105 411 386 745
6	12	2	1 799		12	24	12	158 118 876 449
6	12	3	2 688		12	24	24	316 234 143 225
6	12	4	3 483		13	26	1	304 072 048 265
6	12	6	5 363		13	26	2	608 142 583 137
6	12	12	10 395		13	26	13	3 952 936 627 361
7	14	1	9 749		13	26	26	7 905 853 580 625
7	14	2	19 311		14	28	1	7 623 505 722 158
7	14	7	68 219		14	28	2	15 247 011 443 103
7	14	14	135 135		14	28	4	30 494 006 668 251
8	16	1	127 072		14	28	7	53 364 540 054 860
8	16	2	254 143		14	28	14	106 729 080 101 235
8	16	4	508 277		14	28	28	213 458 046 676 875
8	16	8	1 016 481		15	30	1	206 342 800 616 597
8	16	16	2 027 025		15	30	2	412 685 556 939 751
9	18	1	1 915 951		15	30	3	619 028 401 803 731
9	18	2	3 828 921		15	30	5	1 031 714 003 081 693
9	18	3	5 747 843		15	30	6	1 238 056 670 727 375
9	18	6	11 486 745		15	30	10	2 063 427 784 696 215
9	18	9	17 243 105		15	30	15	3 095 142 009 014 843
9	18	18	34 459 425		15	30	30	6 190 283 353 629 375

Табл. 1: Початкові значення числа неізоморфних діаграм з класів $\Im_{k,n}$ $(1 < n \leq 15,\ k|2n)$

Висновки

Встановлені в роботі формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних діаграм з класу $\Im_{k,n}$ є узагальненням аналогічних результатів для хордових, зокрема двокольорових n-діаграм. Проте залишається нез'ясованим питання про підрахунок числа $\overline{d^{**}_{k,n}}$ нееквівалентних k-кольорових n-діаграм при $k > 2$.

На думку авторів, цілком досяжним є одержання аналогічних узагальнень й для більш специфічних класів хордових n-діаграм.

Література

[1] *Callan D.* Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection [Electronic resource] / D. Callan, L. Smiley // Arxiv: math. – 2000. – 15 p. – Access mode: http://arxiv.org/abs/math.CO/0510447.

[2] *Fleitas G.* Classification of Gradient like flows on dimensions two and three / G. Fleitas // Bol. Soc. Brasil. Mat. – 1975. – Vol. 6. – P. 155 – 183.

[3] *Gori R.* Counting non-isomorphic chord diagrams / R. Gori, M. Marcus // Theoretical Computer Science. – 1998. – No. 204. – P. 55 – 73.

[4] *Harer J.* The Euler characteristic of the moduli space of curves / J. Harer, D. Zagier // Inventiones mathematical. – 1986. – No. 85. – P. 457 – 485.

[5] *Riordan J.* The distribution of crossings of chords joining pairs of $2n$ points on a circle / J. Riordan // Math. Comp. – 1975. – No. 29 – P. 215 – 222.

[6] *Stoimenov A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants / A. Stoimenov // Journal of Knot and its Ramifications. – 1998. – Vol. 7, No. 1. – P. 93 – 114.

[7] *Кадубовський О.А.* Про один клас хордових діаграм максимального роду / О.А. Кадубовський // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 17 – 27.

[8] *Кадубовський О.А.* Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях / О.А. Кадубовський // Укр. мат. жур. – 2006. – Т. 58, № 3. – С. 343 – 351.

[9] *Кадубовський О.А.* Двокольорові O- і N-діаграми / О.А. Кадубовський, О.В. Сторожилова, Н.В. Сторожилова // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – Т. 1, Вип. 1. – С. 41 – 50.

[10] *Кадубовський О.А.* Двокольорові O-діаграми з одним чорним циклом / О.А. Кадубовський, Ю.С. Саприкіна, С.Ю. Мазур // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – Т. 1, Вип. 1. – С. 51 – 60.

[11] *Калужнин Л.А.* Преобразования и перестановки / Л.А. Калужнин. В.И. Сущанский // М.: Наука, 1979. – 112 с.

[12] *Ошемков А.А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей / А.А. Ошемков // Труды МИРАН. – 1994. – Т. 205. – С. 131 – 140.

[13] *Шарко В.В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях / В.В. Шарко // Укр. мат. жур. – 2003. – Т. 55, № 5. – С. 687 – 700.