УДК 512.623.314(091)

Рябухо О.М., Вороніна О.Л.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри алгебри, СДПУ*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: kafedra_algebry_sdpu@mail.ru

ПОБУДОВА ГРУП ҐАЛУА ДЕЯКИХ ТИПІВ РІВНЯНЬ

В роботі наведена основна теорема теорії Ґалуа, описана характеризація груп Ґалуа біквадратних многочленів, показано приклад побудови групи Ґалуа.

Ключові слова: *теорія Ґалуа, група Ґалуа, незвіний многочлен.*

Вступ

7 листопада 2011 року науковий математичний світ відзначив 200-ту річницю з дня народження Еваріста Ґалуа $(1811-1832)$, одного із найбільш видатних математиків 19-го століття. Ідеї Ґалуа протягом кількох десятиліть залишалися незрозумілими для математиків світу, але в подальшому вони одержали визнання і мали великий вплив на розвиток всієї математики. Свої ідеї Ґалуа залишив у прощальному листі для друга, написаному напередодні дуелі, яка трагічно обірвала його життя.

Основна проблема, над якою працював молодий математик — це проблема розв'язності загальних алгебраїчних рівнянь. Незнайомий з роботами П.Руфіні та Н.Абеля, він не тільки незалежно від них прийшов до того ж результату, але й знайшов критерій розв'язності загальних алгебраїчних рівнянь у радикалах. Створена ним теорія, відома як теорія Ґалуа, описана в термінах теорії груп. Тим самим геніальний математик заклав основи **теорії груп**. Він ввів поняття **розв'язної групи**, **простої групи**, **нормальної підгрупи**, які й донині залишаються найбільш використовуваними у загальній теорії груп. Він же ввів і сам термін **група**: (le groupe), хоча і не дав строгого визначення. В своїх дослідженнях Ґалуа довів простоту знакозмінної групи A_n, де $n \geq 5$, довів теореми про примітивні групи перестановок, про транзитивні групи простого степеня, які стали прообразом загальних класифікаційних результатів, одержаних через півтора століття потому.

Дана робота присвячена характеризації многочленів за їх групами Ґалуа.

Мета дослідження полягає у вивченні основних положень теорії Ґалуа та побудови груп Ґалуа для деяких типів рівнянь.

В роботі наводиться характеризація груп Ґалуа біквадратних многочленів, описується приклад побудови групи Ґалуа.

Основна теорема теорії Ґалуа

Нехай $p(x) = \prod\limits_{1\leq i\leq 4}(x-a_i) = x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ — многочлен з полем розкладу F над основним полем K і нехай $K^2 = \{k^2; k\in K\}$ позначає множину квадратів всіх елементів із K. Якщо $p(x)$ незвідний і сепарабельний (не має кратних коренів), то група Ґалуа $\mathrm{Gal}\,(F/K)$ діє транзитивно на множині його чотирьох коренів, отже ізоморфна одній із транзитивних підгруп S_4: четверній групі Кляйна K_4; циклічній групі четвертого порядку C_4; діедральній групі 8 порядку D_4, знакозмінній групі A_4 або дорівнює самій S_4. Ми припускаємо, що характеристика поля $K\neq 2$. Це гарантує нам, що незвідний многочлен $p(x)$ буде сепарабельним.

Теорема 1. *Нехай K — поле характеристики $\neq 2$. Припустимо, що $p(x)$ незвідний многочлен над K, $r(x)$ — його кубічна резольвента, поле розкладу якої дорівнює E, D — дискримінант $r(x)$. Тоді*

(1) *$Gal\,(F/K)\cong S_4$, тоді і тільки тоді, коли існує многочлен $r(x)$ незвідний над K і $D\notin K^2$;*

(2) *$Gal\,(F/K)\cong A_4$, тоді і тільки тоді, коли існує многочлен $r(x)$ незвідний над K і $D\in K^2$;*

(3) *$Gal\,(F/K)\cong V$, тоді і тільки тоді, коли многочлен $r(x)$ розкладається на лінійні множники над K;*

(4) *$Gal\,(F/K)\cong C_4$, тоді і тільки тоді, коли многочлен $r(x)$ має тільки один корінь t в K і $p(x) = (x^2-tx+d)(x^2+ax+(b-t))$ — розклад $g(x)$ на множники над E;*

(5) *$Gal\,(F/K)\cong D_4$, тоді і тільки тоді, коли многочлен $r(x)$ має тільки один корінь t в K і $g(x)$ не розкладається на множники над E.*

Дослідження груп Ґалуа біквадратних многочленів

Розглянемо незвідні многочлени виду

$$h(x) = x^4+bx^2+d;\quad b,d\in K,$$

де K – характеристики $\neq 2$. Спочатку сформулюємо наступний критерій незвідності для таких многочленів.

Теорема 2. *Нехай $h(x) = x^4+bx^2+d$ многочлен над полем K, причому характеристика $\neq 2$, і $\pm\alpha$, $\pm\beta$ корені. Тоді наступні умови еквівалентні*

(1) *$h(x)$ незвідний над K;*

(2) α^2, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta \notin K$;
(3) b^2-4d, $-b+2\sqrt{d}$, $-b-2\sqrt{d} \notin K^2$.

Теорема 3. *Нехай* $h(x)=x^4+bx^2+d$ *незвідний над* K, *характеристики* $K \neq 2$. *Нехай* $\pm\alpha$, $\pm\beta$ *корені із його поля розкладу* F. *Тоді:*
(1) $Gal(F/K) \cong V \longleftrightarrow d \in K^2 \leftrightarrow \alpha\beta \in K$;
(2) $Gal(F/K) \cong C_4 \longleftrightarrow d(b^2-4d) \in K^2; \ \ K(\alpha\beta) \in K(\alpha^2)$;
(3) $Gal(F/K) \cong D_4 \longleftrightarrow di\ d(b^2-4d) \notin K^2 \leftrightarrow \alpha\beta \notin K(\alpha^2)$.

Приклади знаходження групи Ґалуа

Приклад 1. *Нехай* k, j *– різні вільні від квадратів цілі числа і* $r \neq 0$, $s \in Q$. *Знайти групу Ґалуа многочлену* $r(x)=x^4-2(r^2k+s^2j)x^2+(r^2k-s^2j)^2$

Розв'язання. Нехай k, j — різні вільні від квадрата цілі числа і $r \neq 0$, $s \in Q$. Тоді

$$r(x)=x^4-2(r^2k+s^2j)x^2+(r^2k-s^2j)^2$$

незвідний над полем Q, тому, що

$$b^2-4d=16r^2s^2kj,$$

$$-b+2\sqrt{d}=4r^2k,$$

$$-b-2\sqrt{d}=4s^2j$$

не є квадратами в Q. З теореми 3. випливає, що $\mathrm{Gal}\ (F/Q) \cong V$, тому, що $d=(r^2k-s^2j) \in Q^2$.

Нормальне розширення Q має групу Ґалуа, ізоморфну V, тоді і тільки тоді, коли воно може бути представлене у вигляді $Q(\sqrt{k};\sqrt{j})$ для двох різних вільних від квадратів цілих чисел k і j. Так як корені $\pm(r\sqrt{k}+s\sqrt{j})$ і $\pm(r\sqrt{k}-s\sqrt{j})$ з $u(x)$ знаходяться в $Q(\sqrt{k};\sqrt{j})$, то кожне нормальне розширення з групою Ґалуа V можна одержати як поле розкладу многочлену цього виду.

Приклад 2. *Нехай* $m, n \in Z$, *де* $m^2+n^2 \in Q^2$. *Знайти групу Ґалуа многочлену* $v(x)=x^4-2(m^2+n^2)x^2+n^2(m^2+n^2)$.

Розв'язання. Нехай $m, n \in Z$, де $m^2+n^2 \in Q^2$. Тоді многочлен

$$v(x)=x^4-2(m^2+n^2)x^2+n^2(m^2+n^2)$$

незвідний над полем Q, тому, що з умови $m^2+n^2 \in Q$ випливає, що

$$b^2-4d=4m^2(m^2+n^2),$$

$$-b \pm 2\sqrt{d} = 2(m^2 + n^2) \pm 2m\sqrt{m^2 + n^2}$$

не є квадратами в Q. За теоремою 3. отримуємо, що Gal $(F/Q) \cong C_4$, тому, що

$$d(b^2 - 4d) = 4m^2n^2(m^2 + n^2) \in Q^2.$$

Приклад 3. *Знайти групу Ґалуа многочлену $w(x) = x^4 - px^2 + q$, де p, q довільні пари різних непарних чисел.*

Розв'язання. Для довільних пар різних непарних чисел p, q многочлен $w(x) = x^4 - px^2 + q$ є незвідним над Q. Це безпосередньо випливає із теореми 2. Звідки ми можемо вивести, що $b^2 - 4d = p^2 - 4q \notin Q^2$, так як $p \pm 2\sqrt{q} \notin Q^2$.

Без втрати загальності можна припустити, що $p^2 - 4q > 0$. Покладемо, що $p^2 - 4q = t^2$ для деякого цілого числа $t > 0$. Тоді t непарне і кожний із множників $4q = (p+t)(p-t)$ парний. Оскільки q просте число і $0 < p-t < p+t$, то $p - t = 2$ і $p + t = 2q$.

Однак звідси випливає, що $p = q + 1$, а це суперечить припущенню, що p і q непарні.

Відповідно, $d = q$ і $d(b^2 - 4d) = q(p^2 - 4q)$ не є квадратами в Q, значить, Gal $(F/Q) \cong D_4$ згідно теоремі 3.

Таким чином, більш загальні приклади многочленів з групою Ґалуа D_4 дають ті, що мають пару дійсних і пару комплексних коренів. Відмітимо, що многочлен $w(x)$ має всі дійсні корені, якщо $p^2 - 4q > 0$.

Висновки

В статті наведені основна теорема теорії Ґалуа, характеризація груп Ґалуа біквадратних многочленів та описані приклади побудови груп Ґалуа незвідних над полем Q біквадратних многочленів.

Література

[1] *Артін Е.* Теорія Галуа : [пер. з нім.] / Е. Артін. – К.: Радянська школа, 1963. – 220 с.

[2] *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра : [пер. с нем.] / Б.Л. Ван дер Варден. – М.: Наука, 1979. – 623 с.

[3] *Чеботарев Н.Г.* Основы теории Галуа : в 2-х т. / Н.Г. Чеботарев. – М.: ОНТИ, С. 1934 – 1937.

[4] *Постников М.М.* Теория Галуа / М.М. Постников. – М.: Физматлит, 1963. – 200 с.