УДК 512.53(091)

Рябухо О.М., Парконєна Н.С.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри алгебри, СДПУ*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: kafedra_algebry_sdpu@mail.ru

ДОСЛІДЖЕННЯ А.К. СУШКЕВИЧА З ТЕОРІЇ НАПІВГРУП ПЕРЕТВОРЕНЬ НАД НЕСКІНЧЕННИМИ МНОЖИНАМИ

Наводиться коротка характеризація наукових досліджень професора А.К. Сушкевича з теорії напівгруп перетворень над нескінченними множинами. Описано відношення еквівалентності на напівгрупі перетворень над зліченною множиною, яке узагальнює відношення спряженості на ній.

Ключові слова: *А.К. Сушкевич, напівгрупа перетворень, симетрична група, спряжені перетворення.*

Вступ

50 років тому пішов з життя видатний український математик, професор Харківського університету Антон Казимирович Сушкевич, який заслужено вважається одним з фундаторів сучасної теорії напівгруп. Антон Казимирович Сушкевич був одним з ініціаторів дослідження напівгруп перетворень над нескінченними множинами. Цій проблематиці присвячені, зокрема, його праці [2–5] і розділ монографії [1]. А.К.Сушкевич уперше ввів до розгляду напівгрупи ін'єктивних і сюр'єктивних перетворень над нескінченними множинами, охарактеризував їх основні властивості і показав, яку роль відіграють ці напівгрупи при вивченні будови всієї напівгрупи перетворень даної множини [2–4].

Метою нашої замітки є коротка характеризація наукових досліджень професора А.К. Сушкевича з теорії напівгруп перетворень над нескінченними множинами та опис відношення еквівалентності на напівгрупі перетворень над зліченною множиною, яке узагальнює відношення спряженості на ній.

Життєвий шлях А.К. Сушкевича

Сушкевич Антон Казимирович народився 10 (22) січня 1889 року в Борисоглебську Тамбовської губернії. В 1906-1911 роках навчався в Берліні, слухав лекції І. Шура, Л. Шварца, М. Бланка та ін. Повернувшись на Батьківщину (1913), здав екстерном державні іспити в Петербурзькому університеті, а в

1917 році склав магістерські екзамени в Харківському університеті. В 1925 році він захистив докторську дисертацію в м.Харкові.

Свою педагогічну діяльність А.К.Сушкевич розпочав у 1916 році, коли він викладав математику у різних гімназіях міста Харкова. З початку 1918 року він працює приват-доцентом Харківського університету, з 1920 року — ад'юнкт-професором. З 1921 по 1929 рік А.К.Сушкевич — професор Воронежського університету. Наприкінці 1929 року А.К.Сушкевич був обраний дійсним членом Українського Науково Дослідного інституту математики і механіки та переїхав до Харкова.

Водночас А.К.Сушкевич працював професором Харківського геодезичного інституту. З 1933 року і до кінця свого життя він працював в Харківському державному університеті імені М.А.Горького (зараз це Харківський державний університет імені Н.К. Каразіна), де очолював кафедру алгебри та теорії чисел. З 1937 року А.К.Сушкевич — незмінний керівник харківського математичного товариства.

Дослідження А.К. Сушкевича з теорії напівгруп

Наукові інтереси А.К.Сушкевича пов'язані з різноманітними галузями алгебри. Найбільша кількість робіт, і зокрема найвизначніші [1], відносяться до теорії узагальнених груп, тобто до теорії множин з однією алгебраїчною операцією. Він поклав початок систематичному вивченню цієї галузі. Виділив і розглянув основні властивості дій, вивчив зв'язок між ними. Накреслив ряд напрямків в загальній теорії алгебраїчних дій, визначених наявністю тих чи інших властивостей. Працями А.К.Сушкевича покладено початок дослідження деяких типів скінчених квазігруп, встановив їх зв'язок зі скінченними групами, а саме, розглянув дію, обернену до дії множення у групі.

Дослідження Сушкевичем напівгруп підстановок започаткували інший важливий напрямок в теорії напівгруп — напівгрупи перетворень. Було доведено, що кожна скінчена абстрактна напівгрупа може бути ізоморфно представленою напівгрупою однозначних відображень в себе деякої множини. Наступне розповсюдження цього результату на довільні напівгрупи показало, що кожну асоціативну дію можна розглядати як суперпозицію загальних (оборотних або необоротних) перетворень. Сушкевич вперше розглянув напівгрупи відображень зліченної множини в себе (так звані нескінченні підстановки). Він побудував представлення деяких класів напівгруп скінченими та нескінченими підстановками. Пізніше напівгрупи перетворень та представлення напівгруп перетвореннями розглядалися В.Вагнером (Саратовська алгебраїчна школа), Л.Глускіним (Харків), Є.Ляпіним (Ленінград), А.Мальцевим

(Новосибірськ). Серед досліджень Сушкевича конкретних напівгруп, крім підстановок, слід згадати ряд результатів, які стосуються напівгруп особливих та нескінченних матриць і представлень напівгруп такими матрицями. Матричні напівгрупи пізніше розглядали А.Мальцев, Є.Халезов, Л.Глускін, І.Понизовський та інші алгебраїсти.

Необхідні визначення і допоміжні результати

Ми ототожнюватимемо зліченну множину з множиною натуральних чисел N. Нехай $T(N)$ — напівгрупа всіх (скрізь визначених) перетворень множини N, $In(N)$ — її піднапівгрупа ін'єктивних перетворень, а $Sur(N)$ — піднапівгрупа сюр'єктивних перетворень. Перетином напівгруп $In(N)$ і $Sur(N)$ є, очевидно, симетрична група $S(N)$, а напівгрупою, що ними породжується, є вся $T(N)$.

Далі ми скрізь вважатимемо, що композиція (добуток) перетворень із $T(N)$ діє на числа із N зліва направо, тобто для довільних $f, g \in T(N)$ та $x \in N$

$$(f \cdot g)(x) = g(f(x)).$$

У роботі [3] доведено таке твердження:

Лема 1. *Для довільної підстановки $f \in S(N)$ існують перетворення $g \in In(N)$ та $h \in Sur(N)$ такі, що має місце рівність*

$$f = g \cdot h, \tag{1}$$

причому перетворення g можна вибрати довільним чином, а перетворення h при фіксованому g — кількома способами.

З леми 1 випливає, що для кожної підстановки $f \in S(N)$ існує безліч розкладів вигляду (1). Зокрема, це буде правильно і для тотожної підстановки $e \in S(N)$.

Означення 1. *Пару перетворень (g, h), $g \in In(N)$, $h \in Sur(N)$ назвемо допустимою парою, якщо виконується умова допустимості*

$$g \cdot h = e.$$

Нехай U — множина допустимих пар перетворень із напівгрупи $T(N)$. Тоді множина U має потужність континуум, оскільки перша компонента допустимої пари може бути довільним перетворенням з $In(N)$, а напівгрупа $In(N)$ має потужність континуум. Введемо на множині U дію множення згідно з правилом

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_2 \cdot h_1), \tag{2}$$

де $g_1, g_2 \in In(N)$, $h_1, h_2 \in Sur(N)$.

Лема 2. *Множина U відносно дії множення, визначеної рівністю* (2), *утворює моноїд.*

Нагадаємо, що два перетворення $g, h \in T(N)$ називаються спряженими, якщо існує підстановка $u \in S(N)$ така, що має місце рівність

$$g = u^{-1} \cdot h \cdot u.$$

Відношення спряженості є відношенням еквівалентності на всій напівгрупі $T(N)$. Його класи еквівалентності називаються класами спряженості.

Лема 3. *Перетворення, спряжене до перетворення з $In(N)$, міститься в $In(N)$, а перетворення, спряжене до перетворення з $Sur(N)$, міститься в $Sur(N)$.*

Доведення — безпосередня перевірка.

Спряженість у сенсі Сушкевича

Використовуючи поняття допустимої пари перетворень можна природним чином визначити нове відношення спряженості елементів у напівгрупі $T(N)$, яке є узагальненням звичайної спряженості, визначеної вище в п. .

Означення 2. *Перетворення f, $g \in T(N)$ назвемо спряженими за Сушкевичем (позначимо $f \sim_S g$), якщо існують допустимі пари (g_1, h_1), $(g_2, h_2) \in U$ такі, що мають місце рівності*

$$f = g_1 \cdot g \cdot h_1, \;\; g = g_2 \cdot f \cdot h_2. \tag{3}$$

Теорема 1. *Спряженість за Сушкевичем є відношенням еквівалентності на $T(N)$.*

Доведення. Пересвідчимось, що спряженість за Сушкевичем $\sim_S$ є рефлексивним, симетричним і транзитивним відношенням. Позаяк пара $(\varepsilon, \varepsilon)$ є допустимою, то відношення $\sim_S$ є рефлексивним. Якщо $f \sim_S g$, де f, $g \in T(N)$, то існують пари (g_1, h_1), $(g_2, h_2) \in U$ такі, що виконуються рівності (3). А оскільки ці рівності симетричні щодо заміни f та g, то також маємо $g \sim_S f$.

Нехай $f \sim_S g$ та $g \sim_S h$. Це означає, що існують допустимі пари (g_1, h_1), (g_2, h_2) та (g_1', h_1'), (g_2', h_2') такі, що

$$f = g_1 \cdot g \cdot h_1, \;\; g = g_2 \cdot f \cdot h_2, \;\; g = g_1' \cdot h \cdot h_1', \;\; h = g_2' \cdot g \cdot h_2'.$$

Звідси дістаємо рівності

$$f = g_1 \cdot g_1' \cdot h \cdot h_1' \cdot h_1, \;\; h = g_2' \cdot g_2 \cdot f \cdot h_2 \cdot h_2'.$$

Оскільки $In(N)$ та $Sur(N)$ — напівгрупи, то перетворення $g_1 \cdot g_1'$, $g_2' \cdot g_2$ містяться в $In(N)$, а $h_1' \cdot h_1$, $h_2 \cdot h_2'$ належать до $Sur(N)$. Крім того,

$$g_1 \cdot g_1' \cdot h_1' \cdot h_1 = g_1 \cdot e \cdot h_1 = g_1 \cdot h_1 = e.$$

Аналогічно $g_2' \cdot g_2 \cdot h_2 \cdot h_2' = e$, тобто пари $(g_1 \cdot g_1', h_1' \cdot h_1)$ та $(g_2' \cdot g_2, h_2 \cdot h_2')$ є допустимими. Це означає, що $f \sim_S h$, і відношення $\sim_S$ транзитивне. Таким чином, $\sim_S$ є еквівалентністю. □

Висновки

Кожні два перетворення з $T(N)$, спряжені в звичайному сенсі, будуть спряженими в сенсі Сушкевича.

Справді, якщо перетворення $u, v \in T(N)$ є спряженими, то існує підстановка $f \in S(N)$ така, що $u = f^{-1}vf$, а отже, $v = fuf^{-1}$. Тому допустимі пари (f^{-1}, f) та (f, f^{-1}) будуть визначати спряженість перетворень u та v в сенсі Сушкевича. Обернене не є правильним, а саме, із спряженості перетворень у сенсі Сушкевича не випливає їх спряженість у звичайному розумінні.

Література

[1] *Сушкевич А.К.* Теория обобщенных групп / А.К. Сушкевич. – К.: ДНТВУ, 1937. – 176 с.

[2] *Сушкевич А.К.* Исследования о бесконечных подстановках / А.К. Сушкевич // Записки НО і ІМ ХДУ і Харківського математичного товариства. – Харків, 1940. – № 18. – С. 27 – 37.

[3] *Сушкевич А.К.* Исследования о бесконечных подстановках / А.К. Сушкевич // Сборник посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве / под. ред. О.Ю. Шмидта, Б.Н. Делоне, Н.Г. Чеботарева. – М.; Ленинград, 1940. – С. 245 – 255.

[4] *Suschkewitsch A.K.* Uber einen merkurdigen Typus der verallgemeinerten unendlichen Gruppen / A.K. Suschkewitsch // Записки Харківського Математичного товариства. – Х., 1934. – Т. 9, сер. 4. – С. 39 – 44.

[5] *Suschkewitsch A.K.* Uber suchungen uber verallgemeinerten Substitutionen / A.K. Suschkewitsch // Atti del Congresso Internaz. del Hatem. – Bologna, 1928. – T. 2. – P. 147 – 157.