УДК 37.016:51

Кадубовська В.М., Кадубовська О.Л., Кадубовський О.А.

[1] *вчитель математики вищої кваліфікаційної категорії, Олександрівська ЗОШ №1*

[2] *методист навчального відділу, СДПУ*

[3] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, СДПУ*

e-mail: kadubovs@ukr.net

НАВКОЛО ТЕОРЕМИ СТЮАРТА: НАСЛІДКИ, УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

Дана стаття присвячена методичним аспектам вивчення теореми Стюарта та її наслідків. Також розглядаються деякі узагальнення теореми Стюарта та їх застосування до розв'язування метричних задач планіметрії, зокрема до знаходження довжин відрізків з кінцями на сторонах трикутника.

Ключові слова: *теорема Стюарта, довжини основних відрізків трикутника.*

Вступ

Теорема Стюарта є одним з класичних тверджень геометрії трикутника і в певному розумінні повно представлена в навчальній літературі з елементарної геометрії [1], [6]. Найбільш відомими наслідками теореми Стюарта є формули для обчислення довжин медіан і бісектрис трикутника за його сторонами [2]. Менш відомі застосуванням теореми Стюарта можна знайти в [4], [7], [9].

Слід визнати, що формулювання теореми Стюарта є дещо «складним», і можливо тому це твердження майже не висвітлюється в шкільному курсі геометрії. Навіть в діючому підручнику з геометрії для класів із поглибленим вивченням математики [5] теорему Стюарта наведено лише в якості задачі.

Результати дослідження дозволяють стверджувати, що практичне значення теореми Стюарта та її наслідків, нажаль, залишаються недооціненими в навчальній літературі з геометрії для загальноосвітніх навчальних закладів.

В представленій статті наведено декілька способів доведення теореми Стюарта, як можливі підходи до її впровадження при вивченні відповідних тем шкільного курсу геометрії. Крім низки «ілюструючих» задач (на безпосереднє застосування зазначеного твердження) у статті також наведено і деякі узагальнення теореми Стюарта та їх застосування до обчислення: 1) довжини відрізка з кінцями на сторонах трикутника; 2) довжини відрізка, що сполучає вершину трикутника з внутрішньою його точкою, положення якої визначається відстанями до двох інших вершин трикутника.

Попередні відомості

1. Теорема Стюарта[1] та її наслідки

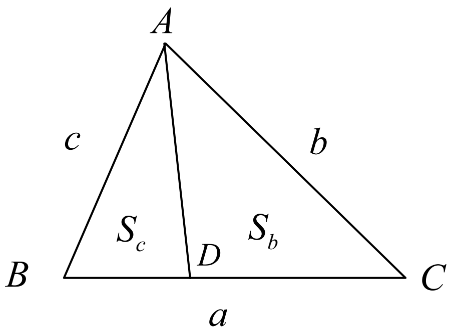
Теорема 1. (Стюарта) *Добуток квадрата відстані вершини трикутника до точки, що належить протилежній стороні, на довжину цієї сторони дорівнює сумі добутків квадратів інших сторін на несуміжні з ними відрізки першої сторони без добутку цих відрізків на довжину основи, тобто*

$$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - BD \cdot DC \cdot BC,$$

або ж

$$AD^2 = AB^2 \frac{DC}{BC} + AC^2 \frac{BD}{BC} - BD \cdot DC. \quad (1)$$

Якщо (1) записати у векторному вигляді (подати відрізки DC, BD і BC як вектори, а добуток $BD \cdot DC$ – як скалярний добуток $\langle \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DC} \rangle$), то твердження є вірним для будь-якої точки D прямої BC [7].



Як вже було зазначено раніше, формулювання теореми Стюарта є дещо складним, проте запис змісту цього твердження у символьному виді є досить наочним і не важким для запам'ятовування.

Введемо наступні позначення:

$$a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB,$$
$$S = S_{\Delta ABC}, \quad S_b = S_{\Delta ADC}, \quad S_c = S_{\Delta ABD}.$$

Оскільки мають місце відношення $\frac{BD}{BC} = \frac{S_c}{S}$, $\frac{DC}{BC} = \frac{S_b}{S}$, то формулу (1) можна подати у вигляді

$$AD^2 = c^2 \frac{DC}{BC} + b^2 \frac{BD}{BC} - a^2 \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{DC}{BC} = c^2 \cdot \frac{S_b}{S} + b^2 \cdot \frac{S_c}{S} - a^2 \cdot \frac{S_b \cdot S_c}{S^2}. \quad (2)$$

Зауваження 1. *Аналізуючи формулу* (1)*, не важко бачити, що якщо в* $\triangle ABC$ *відомими є довжини будь-яких чотирьох з п'яти відрізків* AB, BD, DC, CA, AD*, то довжину «п'ятого» не важко знайти, як корінь відповідного квадратного рівняння.*

[1] Теорему названо на честь англійського математика М.Стюарта (Mathew Stewart 1717-1785), який першим сформулював її в роботі «Деякі загальні теореми» у 1746 році. Формулювання теореми Стюарту сповістив його вчитель Р.Симсон, який опублікував доведення цього твердження лише у 1749 році.

Найбільш відомими наслідками з теореми Стюарта є наступні

Наслідок 1. *Нехай* a, b, c *– довжини сторін* BC , AC *і* AB $\triangle ABC$. *Тоді* довжину медіани m_a , *проведеної до сторони* a , *можна знайти за формулою*

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}; \qquad (3)$$

довжину бісектриси l_a *кута* A *— за формулою*

$$l_a^2 = b \cdot c \cdot \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right); \qquad (4)$$

довжину висоти h_a , *проведеної до сторони* a , *— за формулою*

$$h_a^2 = \frac{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(-a+b+c)}{4a^2}; \qquad (5)$$

якщо m_a' – ортогональна проекція медіани m_a на сторону a і $b \geq c$, *то*

$$b^2 - c^2 = 2m_a \cdot m_a'. \qquad (6)$$

якщо точка D співпадає з точкою дотику A_1 вписаного у $\triangle ABC$ кола, *то*

$$AD^2 = AA_1^2 = b^2 \cdot \frac{p-b}{a} + c^2 \cdot \frac{p-c}{a} - (p-b)\cdot(p-c), \quad p = \frac{a+b+c}{2}; \quad (7)$$

якщо точка D співпадає з точкою дотику A_2 зовнівписаного кола зі стороною BC $\triangle ABC$, *то*

$$AD^2 = AA_2^2 = b^2 \cdot \frac{p-c}{a} + c^2 \cdot \frac{p-b}{a} - (p-c)(p-b), \qquad (8)$$

$$AA_1^2 + AA_2^2 = b^2 + c^2 - 2(p-b)(p-c). \qquad (9)$$

З доведенням формул (3) – (6) , як наслідків з теореми Стюарта, можна ознайомитись, наприклад, в [1]. Для доведення (7) і (8) достатньо скористатися відомими формулами $BA_1 = p - b$, $CA_1 = p - c$, $BA_2 = p - c$, $CA_2 = p - b$ (напр., в [4], [6]). Формула (9) є наслідком формул (7) і (8) .

Зауваження 2. *Помноживши обидві частини рівності* (5) *на вираз* $\frac{1}{4}a^2$, *одержимо добре відому* **формулу Герона** *для обчислення площі трикутника за довжинами його сторін, а саме*

$$S_{\Delta ABC}^2 = \left(\frac{a \cdot h_a}{2}\right)^2 = \frac{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(-a+b+c)}{16},$$

або ж у більш звичному вигляді

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-c)(p-b)(p-a)}. \qquad (10)$$

Прикладом безпосереднього застосуванням формули (2) є наступна

Задача 3. *Нехай* D *– точка на стороні* BC *трикутника* ABC. *Відомо, що* $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ *і* $S_{\triangle ABD} = S^*$. *Тоді довжину відрізка* AD *можна визначити за формулою*

$$AD^2 = b^2 \cdot \frac{S^*}{S} + c^2 \cdot \frac{(S - S^*)}{S} - a^2 \cdot \frac{S^* \cdot (S - S^*)}{S^2}, \tag{11}$$

де $S = S_{\triangle ABC}$, *яку можна визначити за формулою Герона* (10).

Прикладами безпосереднього застосуванням формули (1) є наступні

Задача 4. *Нехай* D *– точка основи* BC *рівнобедреного* $\triangle ABC$. *Відомо, що* $AB = c$, $BD = m$, $DB = n$. *Тоді має місце рівність*

$$AD^2 = c^2 - mn. \tag{12}$$

Задача 5. *Нехай* X *– точка на гіпотенузі* AB *прямокутного* $\triangle ABC$. *Відомо, що* $AC = b$, $BC = a$, $AX = m$, $XB = n$. *Тоді довжину відрізка* CX *можна визначити за формулою*

$$CX^2 = \frac{a^2 \cdot m^2 + b^2 \cdot n^2}{(m+n)^2}. \tag{13}$$

Звідки довжини медіани CM, *бісектриси* CL *і висоти* CH, *які проведені з вершини прямого кута* $\triangle ABC$, *можна знайти за формулами*

$$CM = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad CL = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}, \quad CH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{14}$$

Задача 6. *Нехай* X *– точка на гіпотенузі* AB *прямокутного* $\triangle ABC$. *Відомо, що* $CX = d$, $AX = m$, $XB = n$ *і* $m > d > n$. *Тоді катети* AC *і* BC *цього трикутника можна визначити за формулами*

$$BC^2 = \frac{m+n}{m-n} \cdot \left(d^2 - n^2\right), \quad AC^2 = \frac{m+n}{m-n} \cdot \left(m^2 - d^2\right). \tag{15}$$

Задача 7. *Нехай* a, b, c *– довжини сторін* BC, AC *і* AB $\triangle ABC$. *На промені, доповняльному до променя* CB, *відклали відрізок* $CC_1 = q$, *а на промені, доповняльному до променя* BC, *— відрізок* $BB_1 = p$. *Тоді невідомі сторони трикутника* AB_1C_1 *можна знайти за формулами*

$$AB_1^2 = c^2\left(1 + \frac{p}{a}\right) - b^2\frac{p}{a} + p(a+p), \quad AC_1^2 = b^2\left(1 + \frac{q}{a}\right) - c^2\frac{q}{a} + q(a+q). \tag{16}$$

Задача 8. *Нехай* D *– точка на стороні* BC *трикутника* ABC. *Відомо, що* $AB = c$, $AC = b$, $AD = d$ *і* $BD : DC = m : n$. *Тоді невідому сторону* BC *трикутника* ABC *можна знайти за формулою*

$$BC^2 = b^2 \cdot \frac{m+n}{n} + c^2 \cdot \frac{m+n}{m} - d^2 \cdot \frac{(m+n)^2}{mn}. \qquad (17)$$

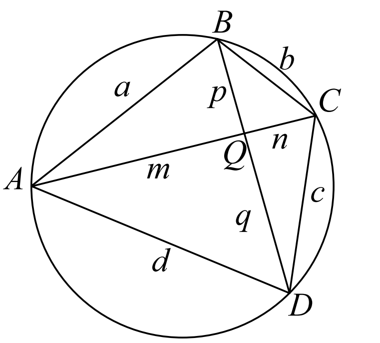
Задача 9. *Нехай* D *– точка на стороні* BC $\triangle ABC$. *Відомо, що:* $AB = c$, $AC = b$, $AD = d$ *a* $BD : DC = m : n$. *Тоді має місце рівність*

$$16S^2_{\triangle ABC} = 4b^2c^2 - \left(\frac{b^2m^2 + c^2n^2 - (m+n)^2 \cdot d^2}{mn}\right)^2. \qquad (18)$$

Справедливість (18) є наслідком застосування формули Герона у вигляді $16S^2_{\triangle ABC} = 4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2$ та теореми Стюарта.

Наслідок 2. (Теорема Птолемея) *Нехай* $ABCD$ *– вписаний у коло чотирикутник. Тоді добуток його діагоналей дорівнює сумі добутків його протилежних сторін, тобто*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD. \qquad (19)$$



Доведення. Нехай a, b, c, d – довжини сторін AB, BC, CD і DA відповідно, $AC \cap BD = Q$, $AQ = m$, $QC = n$, $BQ = p$, $QD = q$.

Тоді, згідно введених позначень, необхідно довести, що

$(m+n)(p+q) = ac+bd \Leftrightarrow (m+n)^2(p+q)^2 = (ac+bd)^2$.

З трикутників BAD і BDC за т. Стюарта маємо

$$m^2 + pq = a^2\frac{q}{p+q} + d^2\frac{p}{p+q}, n^2 + pq = b^2\frac{q}{p+q} + c^2\frac{p}{p+q}.$$

Оскільки $mn = pq$, то додавши останні рівності, матимемо

$$(m+n)^2 = (a^2+b^2)\tfrac{q}{p+q} + (d^2+c^2)\tfrac{p}{p+q}.$$

З іншого боку, оскільки $\frac{p}{q} = \frac{S_{\triangle CBA}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{ab\sin\angle CBA}{dc\sin\angle ADC} = \frac{ab}{cd}$, то $\frac{p}{p+q} = \frac{cd}{ab+cd}, \frac{q}{p+q} = \frac{ab}{ab+cd}$. Звідки

$$(m+n)^2 = (a^2+b^2)\tfrac{cd}{ab+cd} + (d^2+c^2)\tfrac{ab}{ab+cd} = \tfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

В аналогічний спосіб можна показати, що $(p+q)^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$. Отже,

$$(m+n)^2(p+q)^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \cdot \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc} = (ac+bd)^2.$$

□

Основна частина

1. Способи доведення теореми Стюарта

1.1. Доведення за допомогою теореми Піфагора

Якщо точка D співпадає з основою H висоти, опущеної з вершини A, то довжину відрізка $AD = AH$ не важко знайти за теоремою Піфагора. Тому доведення теореми стюарта проведемо для випадку, коли точка D сторони BC не співпадає з вказаною основою H.

Отже, нехай E і F – основи перпендикулярів, опущених на пряму AD з вершин B і C відповідно – рис. 1 a).

1) З ΔBED за *теоремою Піфагора* маємо рівність $BE^2 = BD^2 - ED^2$.

З ΔBEA за *теоремою Піфагора* маємо рівність

$BE^2 = AB^2 - AE^2 = AB^2 - (AD - ED)^2 = AB^2 - AD^2 + 2AD \cdot ED - ED^2$.

Звідки $2AD \cdot ED = AD^2 - AB^2 + BD^2$, або ж

$$ED = \frac{AD^2 - AB^2 + BD^2}{2AD}.$$

2) З ΔCFD за *теоремою Піфагора* маємо рівність $CF^2 = CD^2 - DF^2$.

З ΔCFA за *теоремою Піфагора* маємо рівність

$CF^2 = AC^2 - AF^2 = AC^2 - (AD + DF)^2 = AC^2 - AD^2 - 2AD \cdot DF - DF^2$.

Звідки $2AD \cdot DF = AC^2 - AD^2 - CD^2$, або ж

$$DF = \frac{AC^2 - AD^2 - CD^2}{2AD}.$$

3) Оскільки (за гострим кутом) ΔBED є подібним до ΔCFD, то має місце відношення $ED : DF = BD : DC$, або ж

$$\frac{AD^2 - AB^2 + BD^2}{AC^2 - AD^2 - CD^2} = \frac{BD}{DC}.$$

Звідки $\left(AD^2 - AB^2 + BD^2\right) DC = \left(AC^2 - AD^2 - CD^2\right) BD$. Таким чином

$$AD^2 (BD + DC) = AB^2 DC + AC^2 BD - BD^2 DC - DC^2 BD =$$
$$= AB^2 DC + AC^2 BD - BD \cdot DC (BD + DC).$$

Отже, $AD^2 = AB^2 \cdot \frac{DC}{BC} + AC^2 \cdot \frac{BD}{BC} - BD \cdot DC$. □

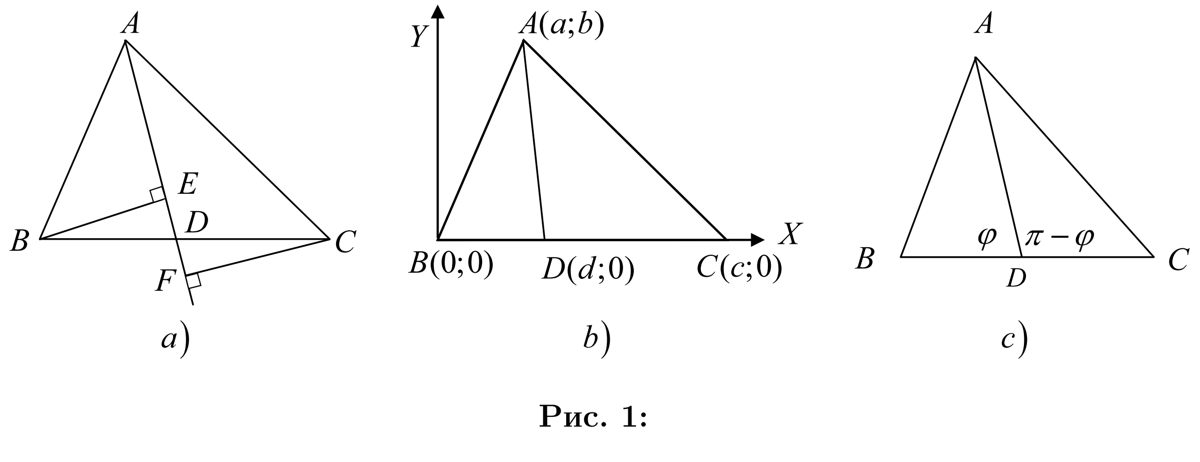


Рис. 1:

1.2. Координатний спосіб доведення

Введемо в площині ΔABC прямокутну систему координат XOY з початком у точці B так, як показано на рис. 1 b). Користуючись формулою для обчислення відстані між двома точками, заданих своїми координатами, знайдемо довжини відрізків, що входять у формулу (1):
$BD = d$; $DC = c - d$; $BC = c$; $AD^2 = (d-a)^2 + (0-b)^2 = (d-a)^2 + b^2$; $AB^2 = a^2 + b^2$; $AC^2 = (c-a)^2 + (0-b)^2 = (a-c)^2 + b^2$.

Підставивши наведені вирази у співвідношення (1), будемо мати

$$\frac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{BC} - BD \cdot DC =$$
$$= \frac{\left(a^2+b^2\right)\cdot(c-d) + \left((a-c)^2 + b^2\right)\cdot d}{c} - d\cdot(c-d) =$$
$$= \frac{a^2\,(c-d+d) + b^2\,(c-d+d) + c^2 d - 2acd}{c} - cd + d^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + cd - 2ad - cd + d^2 = a^2 - 2ad + d^2 + b^2 = (d-a)^2 + b^2 = AD^2\,.$$

□

1.3. Доведення за допомогою теореми косинусів

1 спосіб (рис. 1 c)). Нехай $\angle BDA = \varphi$, тоді $\angle ADC = \pi - \varphi$. З ΔBDA за теоремою косинусів маємо рівність $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD\cdot DB\cos\varphi$. Звідки

$$AB^2 \cdot DC = AD^2 \cdot DC + BD^2 \cdot DC - 2AD \cdot DB \cdot DC\cos\varphi. \tag{20}$$

З ΔADC за теоремою *косинусів* маємо, що
$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD\cdot DC\cos(\pi-\varphi) = AD^2 + DC^2 + 2AD\cdot DC\cos\varphi$. Звідки

$$AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BD + DC^2 \cdot BD + 2AD \cdot DC \cdot BD\cos\varphi. \tag{21}$$

Тоді з рівностей (20) і (21) маємо
$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = AD^2(BD + DC) + BD\cdot DC(BD+DC) =$
$= BC\cdot(AD^2 + BD\cdot DC)$. Звідки $AD^2 = \dfrac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{BC} - BD\cdot DC$.

□

2 спосіб (рис. 1 c)). Нехай $\angle ABC = \beta$. Тоді з ΔABD за теоремою косинусів маємо рівність $AD^2 = BA^2 + BD^2 - 2BA\cdot BD\cos\beta$.
З ΔABC за теоремою косинусів маємо рівність $\cos\beta = \frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA\cdot BC}$. Тому
$AD^2 = BA^2 + BD^2 - 2BA\cdot BD\cdot\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA\cdot BC} =$
$= BA^2 + BD^2 - BD\cdot\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{BC} = BA^2(1-\frac{BD}{BC}) + AC^2\frac{BD}{BC} + BD^2 - BD\cdot BC =$
$= BA^2\frac{DC}{BC} + AC^2\frac{BD}{BC} + BD^2 - BD(BD+DC) = BA^2\frac{DC}{BC} + AC^2\frac{BD}{BC} - BD\cdot DC$.

□

1.4. Векторний спосіб доведення

Нехай D – довільна точка на стороні BC трикутника ABC – рис. 2 a). Доведемо спочатку справедливість наступної векторної рівності

$$\overrightarrow{AD} = \frac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{BD}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}. \tag{22}$$

Для цього виконаємо елементарні перетворення у правій її частині

$$\tfrac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \tfrac{BD}{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \tfrac{DC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \tfrac{BD}{BC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) =$$

$$= \left(\tfrac{DC}{BC} + \tfrac{BD}{BC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \tfrac{BD}{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Помноживши обидві частини рівності (22) скалярно на вектор $\overrightarrow{AD}$, одержимо рівність $AD^2 = \left\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = \frac{DC}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right\rangle + \frac{BD}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle$.

Користуючись властивостями скалярного добутку векторів, виконаємо наступні перетворення у правій частині останньої рівності:

$$\tfrac{DC}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right\rangle + \tfrac{BD}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = \tfrac{DC}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \right\rangle +$$

$$+ \tfrac{BD}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \right\rangle = \tfrac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{BC} + \tfrac{DC}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD} \right\rangle - \tfrac{BD}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC} \right\rangle =$$

$$= \tfrac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{BC} + \tfrac{DC}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \right\rangle \cdot \tfrac{BD}{BC} - \tfrac{BD}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \right\rangle \cdot \tfrac{DC}{BC} =$$

$$= \tfrac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{BC} + \tfrac{BD}{BC} \cdot \tfrac{DC}{BC} \cdot \left(\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \right\rangle \right) =$$

$$= \tfrac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{BC} - \tfrac{BD}{BC} \cdot \tfrac{DC}{BC} \cdot \left\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \right\rangle = \tfrac{AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD}{BC} - BD \cdot DC. \qquad \square$$

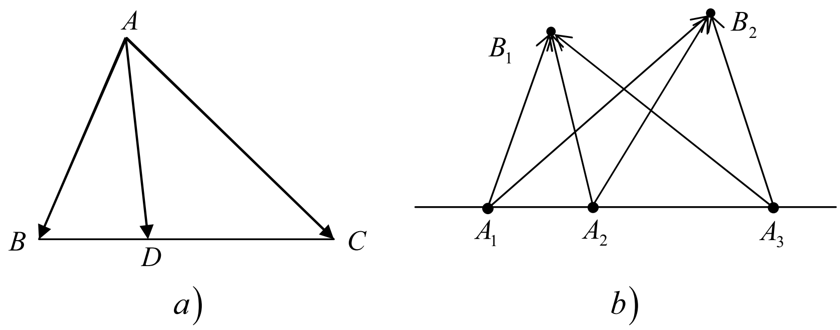


Рис. 2:

1.5. Теорема Стюарта, як наслідок з тотожності Стюарта

Твердження 1. *Нехай* A_1, A_2, A_3 *– впорядкована трійка різних точок на фіксованій прямій* l*, а* B_1 *і* B_2 *– довільні точки площини, що містить* l*. Тоді має місце векторна рівність*

$$\frac{\langle \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1B_2} \rangle}{\langle \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3} \rangle} + \frac{\langle \overrightarrow{A_2B_1}, \overrightarrow{A_2B_2} \rangle}{\langle \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_1} \rangle} + \frac{\langle \overrightarrow{A_3B_1}, \overrightarrow{A_3B_2} \rangle}{\langle \overrightarrow{A_3A_1}, \overrightarrow{A_3A_2} \rangle} = 1, \tag{23}$$

де $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle$ *– скалярний добуток векторів* $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$.

Спочатку покажемо, що теорема Стюарта є наслідком твердження 1. Дійсно, якщо на прямій задано впорядковану трійку різних точок $A_1 = B$, $A_2 = D$, $A_3 = C$, а точки B_1 і B_2 співпадають з точкою A, яка не належить прямій A_1A_3 (рис. 2 a, b)), то має місце рівність

$$\frac{\overrightarrow{BA}^2}{\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\rangle}+\frac{\overrightarrow{DA}^2}{\langle\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\rangle}+\frac{\overrightarrow{CA}^2}{\langle\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\rangle}=\frac{\overrightarrow{BA}^2}{\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\rangle}-\frac{\overrightarrow{DA}^2}{\langle\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BD}\rangle}+\frac{\overrightarrow{CA}^2}{\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}\rangle}=1\,.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{DC}$ є паралельними й співнапрямленими, то остання рівність набуває вид

$\frac{BA^2}{BD\cdot BC}-\frac{AD^2}{BD\cdot DC}+\frac{CA^2}{BC\cdot DC}=1$, або ж $AB^2\cdot\frac{DC}{BC}-AD^2+AC^2\frac{BD}{BC}=BD\cdot DC\,.$

Звідки маємо $AD^2=\frac{AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD}{BC}-BD\cdot DC.$ □

Тепер доведемо *твердження* 1. Для цього введемо наступні позначення: $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=m$, $\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right|=n$ $(m+n=c)$. Тоді рівність (23) можна подати у вигляді $\frac{\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle}{m\cdot c}-\frac{\left\langle\overrightarrow{A_2B_1},\overrightarrow{A_2B_2}\right\rangle}{n\cdot m}+\frac{\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle}{c\cdot n}=1$, або ж

$$n\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle-c\left\langle\overrightarrow{A_2B_1},\overrightarrow{A_2B_2}\right\rangle+m\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle=mnc. \tag{24}$$

З урахуванням (22) маємо наступні векторні рівності

$$\begin{cases}\overrightarrow{B_1A_2}=\frac{n}{c}\overrightarrow{B_1A_1}+\frac{m}{c}\overrightarrow{B_1A_3}\\ \overrightarrow{B_2A_2}=\frac{n}{c}\overrightarrow{B_2A_1}+\frac{m}{c}\overrightarrow{B_2A_3},\end{cases}\quad\text{звідки}\quad\begin{cases}\overrightarrow{A_2B_1}=\frac{n}{c}\overrightarrow{A_1B_1}+\frac{m}{c}\overrightarrow{A_3B_1}\\ \overrightarrow{A_2B_2}=\frac{n}{c}\overrightarrow{A_1B_2}+\frac{m}{c}\overrightarrow{A_3B_2}.\end{cases} \tag{25}$$

Підставимо праві частини рівностей (25) у ліву частину співвідношення (24) та, використовуючи властивості скалярного добутку векторів, виконаємо наступні перетворення

$$n\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle-c\left\langle\tfrac{n}{c}\overrightarrow{A_1B_1}+\tfrac{m}{c}\overrightarrow{A_3B_1},\tfrac{n}{c}\overrightarrow{A_1B_2}+\tfrac{m}{c}\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle+m\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle=$$
$$=n\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle-\tfrac{n^2}{c}\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle-\tfrac{mn}{c}\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle-\tfrac{mn}{c}\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle-$$
$$-\tfrac{m^2}{c}\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle+m\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle=\left(n-\tfrac{n^2}{c}\right)\cdot\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle-$$
$$-\tfrac{mn}{c}\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle-\tfrac{mn}{c}\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle+\left(m-\tfrac{m^2}{c}\right)\cdot\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle=$$
$$=\tfrac{mn}{c}\cdot\left[\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle-\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle-\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle\right]=$$
$$=\tfrac{mn}{c}\cdot\left[\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1B_2}-\overrightarrow{A_3B_2}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3B_2}-\overrightarrow{A_1B_2}\right\rangle\right]=$$
$$=\tfrac{mn}{c}\cdot\left[\left\langle\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_1A_3}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{A_3B_1},\overrightarrow{A_3A_1}\right\rangle\right]=\tfrac{mn}{c}\cdot\left\langle\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_3}\right\rangle=mnc.\qquad\square$$

Зауваження 3. Твердження 1. *є частинним випадком* тотожності Стюарта *при* $n = 3$ *(напр.* [*3*]*), доведення якої міститься в* [*10*]. *З доведенням цієї тотожності у випадку, коли всі точки* A_i $(i = 1, ..., n)$ *і* B_j $(j = 1, ..., n-1)$ *належать одній прямій, можна ознайомитися в* [*8*].

2. Деякі узагальнення теореми Стюарта та їх наслідки

2.1 Довжина відрізка з кінцями на сторонах трикутника

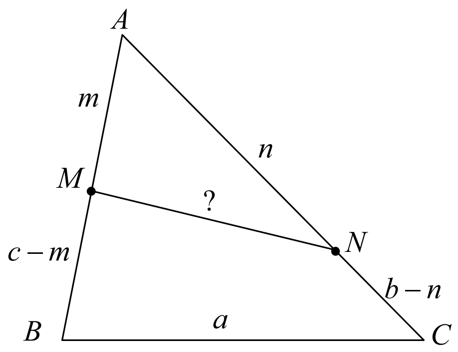
Задача 10. *Нехай a, b, c – довжини сторін BC, AC і AB $\triangle ABC$, а M і N такі точки на сторонах AB і AC, що $AM = m$, $AN = n$. Тоді довжину відрізка MN можна знайти за однією з наступних формул*

$$MN^2 = m^2 + n^2 - \frac{mn}{bc}\left(b^2 + c^2 - a^2\right) = \tag{26}$$

$$= \frac{m}{c}\left(a^2\frac{n}{b} + c^2\frac{b-n}{b} - n(b-n)\right) + \frac{c-m}{c}\left(n^2 - mc\right) = \tag{27}$$

$$= \frac{n}{b}\left(a^2\frac{m}{c} + b^2\frac{c-m}{c} - m(c-m)\right) + \frac{b-n}{b}\left(m^2 - nb\right) = \tag{28}$$

$$= a^2\frac{m}{c}\frac{n}{b} + (mc - nb)\left(\frac{m}{c} - \frac{n}{b}\right). \tag{29}$$



Доведення. З $\triangle AMN$ за теоремою косинусів маємо рівність

$$MN^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\angle A.$$

З ΔABC за теоремою косинусів маємо рівність

$$\cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Тому

$$MN^2 = m^2 + n^2 - 2mn\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = m^2 + n^2 - \frac{mn}{ab}\left(b^2 + c^2 - a^2\right).$$

Доведення формул (27) – (29) є звичайною перевіркою справедливості відповідних тотожностей.

Граничні випадки та наслідки

1.1) Якщо точка M співпадає з вершиною B трикутника ABC, то очевидно, що $m = c$, $c - m = 0$, а формула (27) набуває вид

$$MN^2 = a^2\frac{n}{b} + c^2\frac{b-n}{b} - n(b-n) = BN^2$$

та складає зміст *теореми Стюарта.*

Аналогічно, якщо точка N співпадає з вершиною C, то $n = b$, $b - n = 0$, а формула (28) набуває вид $MN^2 = a^2\frac{m}{c} + c^2\frac{c-m}{c} - m(c-m) = CM^2$ та складає зміст *теореми Стюарта* для знаходження відрізка CM $\triangle ABC$.

1.2) Якщо точка M або ж точка N співпадає з вершиною A, то відрізок MN буде співпадати з відрізком AN або ж AM відповідно. Тоді за формулою (26) довжина відрізка MN становить n або ж m відповідно, що співпадає з умовою твердження.

1.3) Нехай відрізок MN є паралельним до сторони BC. Тоді з подібності трикутників AMN і ABC (за кутами) випливає, що $\frac{m}{c} = \frac{n}{b}$. І тому за формулою (29) має місце рівність

$$MN^2 = a^2 \cdot \left(\frac{m}{c}\right)^2, \quad \text{звідки} \quad MN = a \cdot \frac{m}{c}. \tag{30}$$

Оскільки площі подібних трикутників AMN і ABC відносяться як квадрати довжин відповідних сторін, то останню рівність можна подати у вигляді

$$MN^2 = a^2 \cdot \frac{\overline{S}}{S}, \tag{31}$$

де $\overline{S}$ – площа $\triangle AMN$, а S – площа $\triangle ABC$. Як наслідок з (31) маємо справедливість наступного твердження:

якщо відрізок MN є паралельним до сторони BC трикутника ABC та розбиває його на трикутник і трапецію рівних площ, то довжину відрізка MN можна визначити за формулою

$$MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \tag{32}$$

1.3.1) Якщо відрізок MN є середньою лінією трикутника, тобто $2m = c$, $2n = b$, то за формулою (30) одержимо, що $MN = \frac{a}{2}$. Отже,

довжина середньої лінії трикутника вдвічі менша за сторону, до якої вона є паралельною.

1.4) Нехай відрізок MN є антипаралельним з відрізком BC відносно сторін кута BAC, тобто $\angle AMN = \angle ACB$ а $\angle ANM = \angle ABC$. Тоді з подібності трикутників AMN і ACB маємо рівність $\frac{m}{b} = \frac{n}{c}$. Звідки $mc = nb$ а формула (29) набуває вид

$$MN = a\frac{m}{b} = a\frac{n}{c}. \tag{33}$$

Крім того, *якщо відрізок MN є антипаралельним з відрізком BC відносно сторін кута BAC та розбиває $\triangle ABC$ на трикутник і чотирикутник рівних площ, то довжину відрізка MN також можна визначити за формулою* (32).

1.5) Якщо точки M і N є `основами бісектрис` кутів C і B відповідно, то з урахуванням рівностей $m = \frac{bc}{a+b}$, $n = \frac{bc}{a+c}$ та формули (26) маємо наступне співвідношення

$$MN^2 = \frac{4(p-a)^2(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{4(p-a)S^2_{\triangle ABC}}{pbc}. \tag{34}$$

1.6) Якщо точки M і N є `точками дотику вписаного` у $\triangle ABC$ кола, то, як відомо $AM = AN = p - a = \frac{b+c-a}{2}$. Тоді з урахуванням (26) довжину відрізка MN можна обчислити за формулою

$$MN^2 = (p-a)^2 \cdot \left(2 - \frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right) = (p-a)^2 \cdot \left(\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}\right) =$$

$$= \frac{4(p-a)^2(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{4(p-a)S^2_{\triangle ABC}}{pbc}. \tag{35}$$

1.7) Якщо точки M і N є `точками дотику зовнівписаних кіл` $\triangle ABC$ зі сторонами AB і AC відповідно, то, як відомо $AM = p-b$, $AN = p-c$. Тоді з урахуванням (26) довжину відрізка MN можна обчислити за формулою

$$MN^2 = (p-b)^2 + (p-c)^2 - \frac{(p-b)(p-c)}{bc} \cdot \left(b^2+c^2-a^2\right) =$$

$$= \left((p-b)+(p-c)\right)^2 - (p-b)(p-c) \cdot \left(2 + \frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right) =$$

$$= a^2 - \frac{(p-b)(p-c)4(p-a)p}{bc} = a^2 - \frac{4S^2_{\triangle ABC}}{bc}. \tag{36}$$

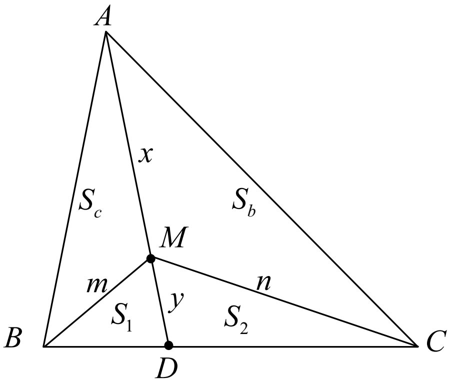
1.8) Якщо точки M і N є `основами висот` $\triangle ABC$, проведених до сторін AB і AC відповідно, то, як відомо $AM = \left|\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right|$, $AN = \left|\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right|$. Тоді з урахуванням (26) довжину відрізка MN можна обчислити за формулою

$$MN^2 = (b^2+c^2-a^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{4c^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{b^2+c^2-a^2}{4b^2c^2}\right) = (b^2+c^2-a^2)^2 \cdot \left(\frac{a^2}{4b^2c^2}\right).$$

Звідки

$$MN = \frac{a}{2bc} \cdot \left|b^2+c^2-a^2\right|. \tag{37}$$

2.2 Відстань від вершини до внутрішньої точки трикутника.



Фактично, теорема Стюарта дозволяє обчислювати відстань від вершини A трикутника ABC до точки D на протилежній стороні BC у випадках:

1) коли відомі відстані точки D до двох інших вершин трикутника та його сторони, або ж

2) якщо відомі сторони трикутника та відношення площі одного з трикутників (утворених шуканим відрізком AD) до площі даного трикутника – формула (2).

Природним чином виникає наступна задача, яка, на перший погляд, за своїм формулюванням мало чим відрізняється від теореми Стюарта.

Обмежимося розглядом випадку, коли фіксована точка M знаходиться строго всередині трикутника, є відомими відстані $MB = m$ і $MC = n$ та сторони a, b, c трикутника ABC.

Введемо наступні позначення: $S = S_{\triangle ABC}$; $S_a = S_{\triangle MBC}$, $S_b = S_{\triangle MCA}$, $S_c = S_{\triangle MAB}$; $S_1 = S_{\triangle MBD}$, $S_2 = S_{\triangle MDC}$.

Твердження 2. *Нехай задано довжини сторін a, b, c трикутника ABC та відомі відстані m і n від (внутрішньої) точки M до його вершин B і C відповідно. Тоді довжину відрізка MA можна знайти за допомогою наступних співвідношень*

$$AM^2 = b^2\frac{S_c\cdot(S-S_a)}{S^2} + c^2\frac{S_b\cdot(S-S_a)}{S^2} - a^2\frac{S_b\cdot S_c}{S^2}, \tag{38}$$

$$S_b = \frac{S\left(a^2-m^2+n^2\right) - S_a\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2a^2}, \tag{39}$$

$$S_c = \frac{S\left(a^2+m^2-n^2\right) - S_a\left(a^2-b^2+c^2\right)}{2a^2}, \tag{40}$$

де

$$16S_a^2 = 4m^2n^2 - \left(m^2+n^2-a^2\right)^2, \tag{41}$$

$$16S^2 = 4b^2c^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2. \tag{42}$$

Доведення. Продовжимо відрізок AM до перетину зі стороною BC у точці D та позначимо довжини відрізків AM і MD, як x і y відповідно.

Тоді, з урахуванням (2), довжину відрізка $AD = x + y$ можна визначити за допомогою формули

$$(x+y)^2 = b^2 \cdot \frac{S_c + S_1}{S} + c^2 \cdot \frac{S_b + S_2}{S} - a^2 \cdot \frac{S_b + S_2}{S} \cdot \frac{S_c + S_1}{S}. \qquad (43)$$

Оскільки $\frac{S_c+S_1}{S} = \frac{S_1}{S_a}$, то $\frac{S_c+S_1}{S} = \frac{S_c}{S-S_a}$. Аналогічно, оскільки $\frac{S_b+S_2}{S} = \frac{S_2}{S_a}$, то $\frac{S_b+S_2}{S} = \frac{S_b}{S-S_a}$. Тому рівність (43) набуває вид

$$(x+y)^2 = b^2 \cdot \frac{S_c}{S - S_a} + c^2 \cdot \frac{S_b}{S - S_a} - a^2 \cdot \frac{S_b}{S - S_a} \cdot \frac{S_c}{S - S_a}. \qquad (44)$$

З іншого боку, оскільки $\frac{x+y}{x} = \frac{S}{S-S_a}$, то $(x+y)^2 = x^2 \left(\frac{x+y}{x}\right)^2 = x^2 \left(\frac{S}{S-S_a}\right)^2$. Таким чином, (44) можна подати у вигляді

$$x^2 \left(\frac{S}{S - S_a}\right)^2 = b^2 \cdot \frac{S_c}{S - S_a} + c^2 \cdot \frac{S_b}{S - S_a} - a^2 \cdot \frac{S_b}{S - S_a} \cdot \frac{S_c}{S - S_a},$$

або ж

$$x^2 = b^2 \frac{S_c \cdot (S - S_a)}{S^2} + c^2 \frac{S_b \cdot (S - S_a)}{S^2} - a^2 \frac{S_b \cdot S_c}{S^2}, \qquad (45)$$

що і закінчує доведення формули (38).

Доведемо формулу (40). Для цього введемо наступні позначення $\angle ABM = \varphi$, $\angle MBC = \psi$, $\angle ABC = \beta$. Тоді мають місце рівності

$$S_c = \frac{1}{2} cm \sin\varphi = \frac{1}{2} cm \sin(\beta - \psi) = \frac{1}{2} cm (\sin\beta\cos\psi - \sin\psi\cos\beta). \qquad (46)$$

За теоремою косинусів з $\triangle MBC$ та $\triangle ABC$ маємо співвідношення

$$\cos\psi = \frac{m^2 + a^2 - n^2}{2ma}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}. \qquad (47)$$

З формул для обчислення площ $\triangle MBC$ та $\triangle ABC$ маємо наступні рівності

$$\sin\psi = \frac{2S_a}{ma}, \quad \sin\beta = \frac{2S}{ac} \qquad (48)$$

Підставивши вирази (47) і (48) в (46), одержимо формулу (40).

Для доведення формули (39) достатньо скористатися співвідношенням (40) та рівністю $S_b = S - S_a - S_c$.

Співвідношення (41) і (42) є іншим записом формули Герона для обчислення площ відповідних трикутників.

Граничні випадки та наслідки

2.1) Нехай точка M **належить одній зі сторін трикутника**, наприклад, стороні BC. Тоді очевидно, що трикутник BMC вироджується у відрізок BC, а площа $S_a \equiv 0$. І тому формула (38) набуває вид

$$MA^2 = b^2\frac{S_c}{S} + c^2\frac{S_b}{S} - a^2\frac{S_b \cdot S_c}{S^2} \qquad (49)$$

та складає зміст `теореми Стюарта`.

2.2) Нехай M **є точкою перетину медіан** (центром тяжіння) даного трикутника. Не важко перевірити, що в цьому випадку мають місце рівності $3S_a = 3S_b = 3S_c = S$. І тому формула (38) набуває вид

$$MA^2 = b^2\frac{S_c}{S}\left(1 - \frac{S_a}{S}\right) + c^2\frac{S_b}{S}\left(1 - \frac{S_a}{S}\right) - a^2\frac{S_b}{S}\cdot\frac{S_c}{S} =$$

$$= b^2\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + c^2\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) - a^2\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) \qquad (50)$$

та дає можливість за відомими сторонами трикутника обчислювати відстань від центра тяжіння до його вершин. Безпосереднім наслідком з формули (50) є наступна рівність

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right). \qquad (51)$$

Крім того, порівнюючи формулу (50) з формулою (3) для обчислення довжини медіани m_a за сторонами a, b, c $\triangle ABC$, маємо співвідношення $\frac{MA^2}{m_a^2} = \frac{4}{9}$, або ж $\frac{MA}{m_a} = \frac{2}{3}$. Звідки маємо ще одне доведенням того, що

точка перетину медіан трикутника ділить кожну з них у відношенні $2:1$, *рухаючись від вершини.*

2.3) Нехай M **є точкою перетину бісектрис** (інцентром) даного трикутника. Оскільки M в цьому випадку є центром I вписаного кола, то не важко перевірити справедливість наступних рівностей

$$\frac{S_a}{S} = \frac{a}{a+b+c}, \quad \frac{S_b}{S} = \frac{b}{a+b+c}, \quad \frac{S_c}{S} = \frac{c}{a+b+c}.$$

Тому формула (38) набуває вид
$IA^2 = b^2\frac{c}{a+b+c}\left(1 - \frac{a}{a+b+c}\right) + c^2\frac{b}{a+b+c}\left(1 - \frac{a}{a+b+c}\right) - a^2\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c} =$
$= \frac{b+c}{(a+b+c)^2}\cdot bc\cdot(b+c) - \frac{a^2bc}{(a+b+c)^2} = \frac{bc\left((b+c)^2 - a^2\right)}{(b+c+a)^2} = bc\frac{b+c-a}{b+c+a}$. Звідки

$$IA^2 = \frac{bc(p-a)}{p}. \qquad (52)$$

Порівнюючи формулу (52) з формулою (4) для обчислення довжини бісектриси l_a за сторонами $\triangle ABC$, маємо співвідношення $\dfrac{IA^2}{l_a^2} = \dfrac{(b+c)^2}{(b+c+a)^2}$. Звідки $\dfrac{l_a}{IA} = \dfrac{a+b+c}{b+c}$, $\dfrac{l_a - IA}{IA} = \dfrac{a}{b+c}$. І тому має місце твердження

інцентр ділить бісектрису l_a трикутника ABC у відношенні $\dfrac{b+c}{a}$, рухаючись від вершини.

Наступні результати не є безпосереднім наслідком *твердження* 2, проте в контексті зазначеної задачі автори вважають їх наведення доцільним.

2.4) Нехай M ***є точкою*** H ***перетину висот*** (ортоцентром) гострокутного $\triangle ABC$. Оскільки в цьому випадку відрізки AD і HD є висотами трикутників ABC і HBC зі спільною основою $BC = a$, то $AH = \frac{2(S-S_a)}{a}$.

З іншого боку, оскільки $\angle CHB = 180^0 - \angle A$, то точка H', яка є симетричною точці H відносно BC, належить описаному колу $\triangle ABC$. І тому за властивістю хорд кола має місце рівність $BD{\cdot}DC = AD{\cdot}DH' = AD{\cdot}HD$. Звідки $\frac{BC^2}{4} BD \cdot DC = \frac{AD\cdot BC}{2} \cdot \frac{HD \cdot BC}{2} = S \cdot S_a$, $S_a = \frac{a^2 \cdot BD \cdot DC}{4S}$.
Оскільки $BD = c \cdot \cos\beta$, $DC = b \cdot \cos\alpha$, то $S_a = \frac{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{16S}$.
Тому $AH = \frac{2(S-S_a)}{a} = \frac{2}{16aS}\left(16S^2 - (a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)\right)$. Звідки

$$AH = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{4S}. \tag{53}$$

Оскільки $h_a = \frac{2S}{a}$, то з урахуванням (42), маємо $AH \cdot (h_a - AH) =$
$= \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{4S}\left(\frac{2S}{a} - \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{4S}\right) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} - \frac{a^2}{16S^2}(4b^2c^2 - 16S^2) =$
$= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \left(\frac{abc}{2S}\right)^2 = const$. Звідки маємо твердження

ортоцентр трикутника ABC ділить кожну його висоту на відрізки, добуток яких є величина стала, що визначається рівністю

$$AH \cdot (h_a - AH) = BH \cdot (h_b - BH) = CH \cdot (h_c - CH) =$$
$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - \left(\frac{abc}{2S}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - 4R^2, \tag{54}$$

де R – радіус описаного навколо $\triangle ABC$ кола.

Крім того, з урахуванням формули (53), не важко встановити справедливість й наступної рівності

$$HA^2 + HB^2 + HC^2 = 12R^2 - \left(a^2+b^2+c^2\right). \tag{55}$$

4. Задачі на застосування теореми Стюарта

1. Сторони паралелограма дорівнюють a і b, діагоналі – e і f. Доведіть, що має місце рівність $e^2 + f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$.
2. Довжини основ трапеції дорівнюють a і b $(a < b)$, бічних сторін – c і d. Позначимо довжини діагоналей трапеції як e і f. Доведіть, що
   (a) $e = \sqrt{\frac{b(c^2-a^2)+a(b^2-d^2)}{b-a}}$, $f = \sqrt{\frac{b(d^2-a^2)+a(b^2-c^2)}{b-a}}$ (або навпаки);
   (b) $e^2 + f^2 = c^2 + d^2 + 2ab$;
   (c) $\frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2d^2 - (b-a)^2}$ – довжина відрізка, що сполучає середини основ трапеції;
   (d) $e^2 = c^2 + ab = f^2$, якщо $c = d$.
3. На відрізку AB, як на діаметрі побудовано коло. Точка C належить цьому відрізку, причому $AC = 2r_1$, $CB = 2r_2$. На відрізках AC і CB, як на діаметрах побудовано кола. Знайти радіус r четвертого кола, яке дотикається першого кола внутрішнім чином, а двох інших – зовнішнім.
   Відповідь: $r = \frac{r_1 \cdot r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2}$.
4. Два кола з центрами в точках O_1 і O_2 з радіусами r_1 і r_2 (відповідно) дотикаються ззовні. На відрізку O_1O_2, як на діаметрі, побудовано третє коло. Знайти радіус кола, що дотикається перших двох кіл ззовні, а третього кола внутрішнім чином.
   Відповідь: $r = \frac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2)}$.
5. Два кола з радіусами r_1 і r_2 $(r_1 > r_2)$ дотикаються внутрішнім чином. Знайти радіус r третього кола, що дотикається даних кіл та прямої, яка містить їх центри.
   Відповідь: $r = \frac{4r_1 r_2 (r_1 - r_2)}{(r_1 + r_2)^2}$.
6. На відрізку $AB = 2r_1$, як на діаметрі побудовано коло. Точки C і D належать цьому відрізку, причому $AC = 2r_2$, $DB = 2r_3$, $2r_2 + 2r_3 > 2r_1$. На відрізках AC і DB, як на діаметрах побудовано кола. Знайти радіус r четвертого кола, яке дотикається першого кола внутрішнім чином, а двох інших – зовнішнім.
   Відповідь: $r = \frac{r_1 (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)}{r_1^2 - r_2 r_3}$.
7. Нехай d – відстань між центром вписаного у $\triangle ABC$ кола та точкою перетину медіан цього трикутника. Доведіть, що має місце рівність $9d^2 = 9r^2 - 3p^2 + 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, де r – радіус вписаного у $\triangle ABC$ кола, a, b, c, p – сторони та півпериметр трикутника ABC.
8. Доведіть, що для $\triangle ABC$ має місце рівність $BI \cdot CI = 2r \cdot IW_a$, де I, r – центр та радіус вписаного у $\triangle ABC$ кола, W_a – точка перетину бісектриси кута A з описаним навколо $\triangle ABC$ колом.

Висновки

Наведені результати дозволяють стверджувати, що застосування теореми Стюарта та її незначних узагальнень є достатньо дієвим підходом до розв'язування широкого кола метричних задач планіметрії. Крім того, є всі підстави стверджувати, що, при знаходженні довжини відрізка з кінцями на сторонах трикутника, застосування теореми Стюарта дещо «прискорює» сам процес розв'язування у порівнянні із традиційними підходами.

На думку авторів цілком досяжним є встановлення аналогічних формул для обчислення довжин відрізків з кінцями на сторонах трапеції. Цікавим також здається дослідження просторового аналогу теореми Стюарта та його застосувань до розв'язування метричних задач на тетраедр. Дослідження питання щодо обчислення довжини відрізка, кінці якого є цілком визначеними відносно заданого трикутника, також привертає до себе увагу і може бути гарним матеріалом для учнівських пошукових робіт.

Література

[1] *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Ч. 1 : Планиметрия / Ж. Адамар [3-е изд]. – М.: УЧПЕДГИЗ, 1948. – 608с.

[2] *Бутузов В.Ф.* Планиметрия. Пособие для углубл. изучения математики. / В.Ф. Бутузов, С.В. Кадомцев и др. – М.: Физматлит, 2005. – 488с.

[3] *Колмогоров Н.А.* Аналог теоремы и тождества Стюарта / Н.А. Колмогоров // Математическое просвещение. – 1936. – Выпуск 7. – С. 22-25.

[4] *Кушнір І.А.* Геометричні формули, що не ввійшли до шкільних підручників: Довідник. / І.А. Кушнір. – К.: Факт, 2002. – 112с.

[5] *Мерзляк А.Г.* Геометрія: Підруч. для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики. / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2009. – 272с.

[6] *Перепелкин Д.И.* Курс элементарной геометрии. Ч. I : Геометрия на плоскости / Д.И. Перепелкин. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 348с.

[7] *Перехойда О.* Одна цікава геометрична тотожність / О. Перехойда, Р. Ушаков // Математика в школі. – 1999. – С. 41-42.

[8] *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии / В.В. Прасолов [4-е изд., доп.] – М.: МЦНМО, 2001. – 584с.

[9] *Сарбаш Р.* Теорема Стюарта, как ключ к отысканию всех основных целочисленных треугольников с углами 120^0 и 60^0 / Р. Сарбаш // Математика. – 2004. – №46. – С. 41-42.

[10] *Шаль М.* Руководство высшей геометрии / М. Шаль; пер. с фр. А. Безруков. – Москва: Типо-литогр. Т-ва И.Н. Кушнерев, 1910. – 551с.