УДК 37.016:51

Сьомкін В.С., Сьомкіна В.М.

[1] *канд. пед. наук, доцент кафедри геометрії та МВМ, СДПУ*

[2] *вчитель вищої категорії, старший вчитель ЗОШ № 8, м. Слов'янськ*

e-mail: vladimir-syomkin@yandex.ru

ОБЧИСЛЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТРИКУТНИКА ЧЕРЕЗ КООРДИНАТИ ЙОГО ВЕРШИН

В даній статті на прикладі основних елементів трикутника розглянуто застосування координатного методу для їх обчислення. В контексті зазначеного кола задач виділено низку ключових задач. Також запропоновано комп'ютерну реалізацію задач зазначеного типу та відповідні вимоги і поради користування розробленою програмою.

Ключові слова: *елементи трикутника, координатний метод.*

Вступ

Геометрія трикутника є найцікавішим розділом елементарної геометрії. Недарма одній з найпростіших фігур геометрії – трикутнику – присвятили свої дослідження великі математики всіх часів і народів: Піфагор, Евклід, Архімед, Чева, Менелай, Паскаль, Лейбніц, Ньютон, Ейлер, Лагранж та багато інших [3], [4], [5], [6]. Г.П. Бевз зазначає, що «виявлені й доведені ними теореми про властивості трикутника – справжні перлини математики і людського мислення взагалі» [1, с.3]. У результаті таких досліджень геометрія трикутника перетворилася в струнку наукову дисципліну. Такий зв'язок дисципліни з областю шкільної геометрії робить її містком у вищу геометрію [3, с.50] й тому викликає природній інтерес не тільки вчителів математики, але й учнів шкіл.

Протягом 70 – 80-х років XIX сторіччя Лемуан, Брокар, Вігар'є, Нейберг і ряд інших математиків опублікували багато цікавих робіт, присвячених геометрії трикутника. У цих роботах було показано, що із трикутником зв'язане ціле «сузір'я чудових точок», ряд чудових прямих, кіл та інших кривих.

Сьогодні в арсеналі будь-якого дослідника-вченого, методиста, вчителя або учня, що прагне піти далі, ніж цього потребує програма загальноосвітньої школи, – зібрано достатньо міцний геометричний апарат знань про трикутник і його основні елементи. Цей апарат дає змогу розв'язувати складні як теоретичні, так і практичні задачі, що виникають в процесі професійної діяльності.

Знаходження точок перетину медіан, бісектрис, висот трикутника, центрів вписаного та описаного кіл, довжин та рівнянь його сторін та інших елементів, обчислення периметру, площі тощо в багатьох задачах є необхідною умовою досягнення кінцевої мети.

Основна частина

У геометрії застосовуються різні методи розв'язування задач: синтетичний (суто геометричний) метод, векторний, метод координат та інші. Основним методом вважається синтетичний метод, але він потребує досить великої інтелектуальної роботи, у тому числі інтуїції, додаткових побудов, здогадок тощо. Якщо у процесі навчання це є найважливішими складовими самого процесу, то в практичній роботі кожен прагне досягти алгоритмізації обчислень, що найчастіше зустрічаються. Саме в цьому і полягає перевага методу координат перед синтетичним. Справді, координатний метод дуже часто спрощує пошук і самий розв'язок задачі, бо в таких випадках кожна геометрична задача зводиться до алгебраїчної, яку, безумовно, легше алгоритмізувати.

Повертаючись до трикутника як до базової конструкції багатьох геометричних фігур, що підлягають аналізу в процесі розв'язування різних задач, ми кожен раз переконуємося в необхідності мати в своєму арсеналі набір формул, що дають змогу за координатами вершин цього трикутника знайти розміри і рівняння основних його елементів, місце розташування основних точок. На жаль, такої систематизованої добірки формул нами не виявлено, і тому далі ми пропонуємо свої напрацювання в цьому процесі.

При виведенні і остаточному представленні формул і рівнянь ми виходили з трьох основних положень: по-перше, намагалися дотримуватися однотипності методів виведення, по-друге, остаточна формула мала легко читатися і по можливості запам'ятовуватися, по-третє, формула мала бути зручною для автоматизованих обчислень, тобто для програмування.

Отримані формули мають свою «математичну красу», вони, як правило, записані за допомогою одних і тих же математичних конструкцій і супроводжуються симетричністю цих конструкцій.

Нехай маємо трикутник ABC з координатами вершин: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Довжини сторін трикутника **a,b,c** обчислюються за відомими формулами, наприклад:

$$a = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}.$$

Рівняння основних елементів трикутника

Рівняння сторони a:

$$(y_3 - y_1)x - (x_3 - x_1)y + y_1x_3 - x_1y_3 = 0.$$

Рівняння медіани m_a :

$$(y_2 + y_3 - 2y_1)x - (x_2 + x_3 - 2x_1)y + (x_2 + x_3)y_1 - (y_2 + y_3)x_1 = 0.$$

Рівняння бісектриси l_a :

$$\big(b(y_1 - y_2) + c(y_1 - y_3)\big)x - \big(b(x_1 - x_2) + c(x_1 - x_3)\big)y + \\ + b(x_1y_2 - x_2y_1) + c(x_1y_3 - x_3y_1) = 0.$$

Рівняння висоти h_a :

$$(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y - (x_2 - x_3)x_1 - (y_2 - y_3)y_1 = 0.$$

Довжини основних лінійних елементів трикутника

Довжина медіани m_a :

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 + x_3 - 2x_1)^2 - (y_2 + y_3 - 2y_1)^2}.$$

Довжина бісектриси l_a :

$$l_a = \frac{\big(b(x_1 - x_2) + c(x_1 - x_3)\big)^2 + \big(b(y_1 - y_2) + c(y_1 - y_3)\big)^2}{b + c}.$$

Довжина висоти h_a :

$$h_a = \frac{\big|(x_2 - x_3)y_1 - (y_2 - y_3)x_1 + x_3y_2 - x_2y_3\big|}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}}.$$

Радіус вписаного кола:

$$r = \frac{\big|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)\big|}{2(a + b + c)}.$$

Радіус описаного кола:

$$R = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}\sqrt{(x_1 - x_3)^2 - (y_1 - y_3)^2}\sqrt{(x_2 - x_3)^2 - (y_2 - y_3)^2}}{2\big|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)\big|}.$$

Координати деяких точок трикутника

Точка перетину медіан (центр тяжіння):

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Точка перетину висот (ортоцентр):

$$x = \frac{(y_1 - y_2)(x_1x_2 + y_1y_2) + (y_2 - y_3)(x_2x_3 + y_2y_3) + (y_3 - y_1)(x_1x_3 + y_1y_3)}{x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)},$$

$$y = \frac{(x_2 - x_1)(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_3 - x_2)(x_2x_3 + y_2y_3) + (x_1 - x_3)(x_1x_3 + y_1y_3)}{x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)}.$$

Центр вписаного кола (точка перетину бісектрис, інцентр):

$$x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \quad y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}.$$

Центр описаного кола:

$$x = \frac{(y_1 - y_3)\big(x_2^2 + y_2^2\big) + (y_2 - y_1)\big(x_3^2 + y_3^2\big) + (y_3 - y_2)\big(x_1^2 + y_1^2\big)}{2\big(y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)\big)},$$

$$y = \frac{(x_3 - x_1)(x_2^2 + y_2^2) + (x_1 - x_2)(x_3^2 + y_3^2) + (x_2 - x_3)(x_1^2 + y_1^2)}{2\big(y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)\big)}.$$

Площа трикутника:

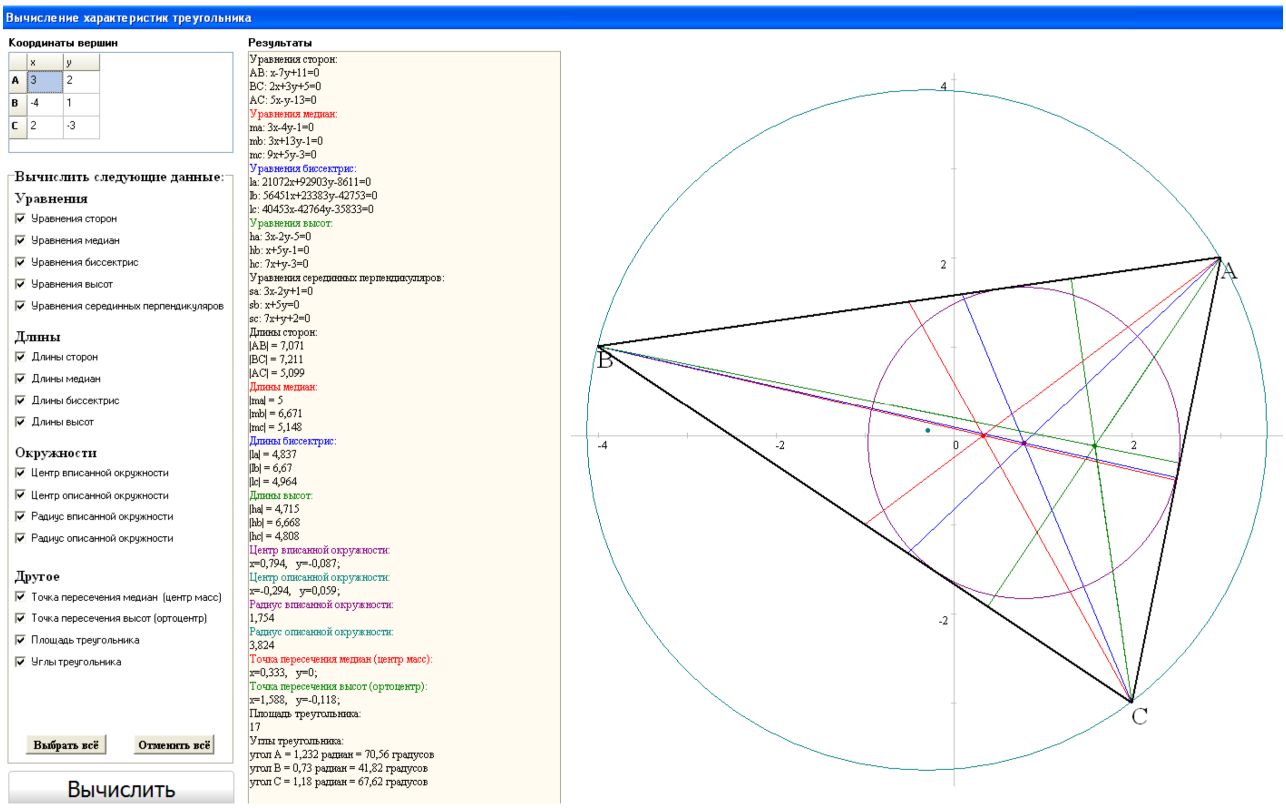
$$S = \frac{1}{2}\big|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)\big|.$$

Кути трикутника:

$$\cos\alpha = \frac{1}{bc}\big((x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)\big).$$

Комп'ютерна програма

Для демонстрації отриманих у роботі результатів нами була написана програма, що знаходить основні характеристики трикутника.



Програма видає результати як в аналітичному вигляді (рівняння, координати точок, числові значення обраних користувачем характеристик трикутника), так і графічно. Програма має інтуїтивно зрозумілий інтерфейс. Робоче вікно розділено на чотири області:

- У лівому верхньому куті знаходиться таблиця для введення координат вершин трикутника. Якщо користувач у якості вершин трикутника помилково ввів точки, що лежать на одній прямій, то програма виведе відповідне повідомлення.
- Нижче розташований блок вибору опцій, де користувач має можливість вибрати ті характеристики трикутника, що він має за мету знайти.
- Правіше розташоване поле для відображення знайдених характеристик трикутника в аналітичному вигляді.
- Праву сторону робочого вікна займає поле для графічного відображення результату роботи програми.

Для зручності блок вибору опцій поділено на чотири частини: «Рівняння», «Довжини», «Кола», «Інше».

Щоб обчислити та відобразити обрані характеристики, необхідно натиснути кнопку «Обчислити» у лівому нижньому куті робочого вікна.

Малюнок можна переміщувати у графічному вікні. Для цього потрібно зажати ліву клавішу миші й пересунути курсор у потрібному напрямку. Для зміни масштабу малюнка застосовується коліщатко миші (скролінг).

Висновки

Добірка наведених формул, а також програмний засіб «Калькулятор трикутника» можуть стати невеличким довідником по темі «Трикутник» і бути зручним посібником та засобом як в практичній роботі з математики, інформатики, так і для здійснення самоконтролю у процесі розв'язування задач учнями при вивченні теми «Координати на площині».

Література

[1] *Бевз Г.П.* Геометрія трикутника : навчально-методичний посібник для загальноосвітніх навчальних закладів / Г.П. Бевз. – К.: Генеза, 2005. – 120 с.

[2] *Боровик В.Н.* Гармонія і естетика трикутника / В.Н. Боровик, І.В. Зайченко, Л.М. Кобко. – К.: Освіта України, 2006. – С. 176.

[3] *Гайдук Ю.М.* Краткий обзор исследований по геометрии треугольника / Ю.М. Гайдук, А.Н. Хованский // Математика в школе. – 1958. – № 5. – С. 50.

[4] *Гельфанд И.М.* Метод координат / И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, А.А. Кириллов. – М.: Наука, 1973. – 88 с.

[5] *Ефремов Д.* Новая геометрия треугольника. – Одесса, 1903. – 351 с.

[6] *Зетель С.И.* Новая геометрия треугольника. – М., 1962. – 96 с.