УДК 512.53

**Величко В.Є.**

[1] *канд. фіз-мат. наук, доктор пед. наук, професор каф. МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: vladislav.velichko@gmail.com, ORCID 0000-0001-9752-0907

# ЕНДОМОРФІЗМИ ВІЛЬНОЇ ГРУПИ

В роботі за допомогою елементарного перетворення Нільсена рангу n на множені наборів слів вільної групи визначається автоморфізм або ендоморфізм вільної групи. Розглядається будова вербальної підгрупи вільної групи.

**Ключові слова:** *вільна група, ендоморфізм, автоморфізм, перетворення Нільсена*

## Вступ

Вільною групою $F=F(X)$ з системою вільних твірних $X$ називається група, елементами якої є нескоротні групові слова над алфавітом $X$, а добуток елементів-слів визначається як їх приписування з подальшою редукцією – скороченням символів вигляду $xx^{-1}$, $x^{-1}x$, які можуть появитися на стику двох слів при їх приписуванні. При цьому груповим словом називається слово вигляду

$$w=x_{i_1}^{\varepsilon_1}x_{i_2}^{\varepsilon_2}\dots x_{i_r}^{\varepsilon_r},\ \text{де}\ \varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_r\in\{-1,1\}.$$

Слово $w$ називається нескоротним, якщо воно не містить складів вигляду $xx^{-1}$ чи $x^{-1}x$. Потужність множини вільних твірних $X$ називається рангом вільної групи. Вільна група визначається своїм рангом однозначно: будь яка інша система твірних, яка є вільною, тобто такою, що довільне відображення цієї системи в групу $F$ продовжується до ендоморфізму, має таку ж потужність як і $X$. Це число є інваріантом вільної групи, який називається її рангом. Вільну групу рангу $n$ (з точністю до ізоморфізму вона лише одна) позначають символом $F_n$.

## Основна частина

Нехай $(x_i)_{i\in I}$ – система вільних твірних вільної групи $F$, де $I=\{1,2,\dots,n\}$ або $I=N$, $(w_i)_{i\in I}$ – система нескоротних слів - елементів $F$. Тоді відображення

$$x_i\to w_i,\ i\in I, \tag{1}$$

можна продовжити до ендоморфізму групи $F$. При цьому різним відображенням відповідатимуть різні ендоморфізми і кожен ендоморфізм визначає певне відображення виду (1). А тому довільний ендоморфізм $\alpha\in EndF$

однозначно задається набором елементів $(w_i)_{i\in I}$. Нехай $n$ – натуральне число, $n \geqslant 2$, тоді ендоморфізму $\alpha$ відповідає набір

$$[\alpha] =< w_1(x_1, x_2, \dots, x_n), w_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, w_n(x_1, x_2, \dots, x_n) > \qquad (2)$$

Якщо ендоморфізму $\beta$ відповідає набір

$$[\beta] =< w'_1(x_1, x_2, \dots, x_n), w'_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, w'_n(x_1, x_2, \dots, x_n) >, \qquad (3)$$

то добутку $\alpha\beta$ відповідає набір, який утворився при суперпозиції (2) і (3), тобто

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha\beta] =< w'_1(w_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, w_n(x_1, x_2, \dots, x_n)), \dots$$
$$\dots, w'_n(w_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, w_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) > \qquad (4)$$

Відповідності (1) називаються (див. [1], с.138) підстановками на твірних $x_i$, або просто підстановками. Якщо множина слів $\{w_i | i \in I\}$ вільно породжує вільну групу $F$, то підстановка називається вільною підстановкою на твірних $x_i$, $i \in I$. Вільні підстановки визначають автоморфізми вільної групи $F$, а всі інші – ендоморфізми, які не являються автоморфізмами. Пересвідчитись чи є підстановка $[\alpha]$ на твірних $x_i$ вільною чи ні можна використовуючи так звані елементарні перетворення над словами вільної групи. Вони визначаються таким чином.

**Означення 1.** *Елементарними перетвореннями Нільсена рангу $n$ називаються перетворення на множині наборів (інакше – кортежів)*

$$[\alpha] =< w_1, w_2, \dots, w_n >$$

*нескоротних слів в алфавіті $X$, які належать до одного з таких типів:*

1) *Перестановка слів у наборі. Нехай $\sigma$ – деяка перестановка з симетричної групи $S_n$. Тоді елементарним $\sigma$-перетворенням кортежа $[\alpha]$ називається таке його перетворення*

$$(w_1, w_2, \dots, w_n) \xrightarrow{\sigma} (w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, \dots, w_{\sigma(n)}) \qquad (5)$$

*Образ кортежа $[\alpha]$ при перетворенні (5) позначатимемо символом $[\alpha]^\sigma$.*

2) *Заміна компонент кортежа на обернені елементи вільної групи. Нехай $\overline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – деякий вектор, координати якого належать до множини $\{1, -1\}$. $a$-перетворенням кортежа $[\alpha]$ назвемо перетворення вигляду*

$$(w_1, w_2, \dots, w_n) \to (w_1^{a_1}, w_2^{a_2}, \dots, w_n^{a_n}). \qquad (6)$$

*Образ кортежа $\overline{a}$ при перетворенні (6) позначатимемо символом $[\alpha]^{\overline{a}}$.*

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079112021234824 

*3) Зміна компонент кортежа шляхом множення на інші компоненти. перетвореннями такого типу є наступні:*

*а)*

$$(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_n) \to$$
$$(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i \cdot w_j^{\varepsilon}, w_{i+1}, \ldots, w_n);$$

*б)*

$$(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_n) \to$$
$$(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_j^{\varepsilon} \cdot w_i, w_{i+1}, \ldots, w_n); \qquad (7)$$

*в)*

$$(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_n) \to$$
$$(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_j^{\varepsilon} \cdot w_i \cdot w_j^{-\varepsilon}, w_{i+1}, \ldots, w_n),$$

*де* $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \neq j$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$.

Якщо до набору $[\alpha] =< w_1, w_2, \ldots, w_n >$ застосувати нільсінєвське елементарне перетворення одного з типів 1)-3), то в результаті дістаємо новий кортеж, який породжує ту ж саму підгрупу групи $SF$, що й набір $[\alpha]$. Нехай $L_x(w)$ – число входжень літери $x$ в слово $w$, $L_x([\alpha]) = L_x(w_1) + \ldots + L_x(w_n)$.

**Лема 1.** *Нехай* $[\alpha]$ *– деякий набір елементів вільної групи* $F$. *Можна побудувати таку послідовність* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *нільсенівських елементарних перетворень кортежів довжини* $n$, *що для довільної літери* $x \in X$ *матимуть місце нерівності*

$$L_x([\alpha]) \geqslant L_x([\alpha]^{\lambda_1}) \geqslant L_x([\alpha]^{\lambda_1 \lambda_2}) \geqslant \ldots \geqslant L_x([\alpha]^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}),$$

*причому кортеж* $[\beta] = [\alpha]^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}$ *має вигляд*

$$[\beta] =< \widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w}_l, e, \ldots, e >,$$

*а* $\widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w}_l$ *є вільною системою твірних підгрупи* $< \widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w}_l >$, *породженої* $\widetilde{w_1}, \widetilde{w_2}, \ldots, \widetilde{w}_l$. *Число* $l$ *не залежить від вибору послідовності елементарних нільсеневських перетворень* $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_s$.

Доведення цієї леми див. ( [1], с.133-136.)

Число $l$, яке є інваріантом набору $[\alpha]$, називатимемо рангом цього набору і позначатимемо $r([\alpha])$. очевидно для довільного набору $[\alpha]$ неодиничних нескоротних слів справджується нерівності:

$$1 \leqslant r([\alpha]) \leqslant n.$$

З леми 1 як наслідок відразу ж дістаємо таке твердження

**Лема 2.** *Набір $[\alpha]$ задає автоморфізм вільної групи $F(X)$ тоді й лише тоді, коли $r([\alpha]) = n$. В противному разі цей набір задає ендоморфізм групи $F(X)$, який не буде її автоморфізмом.*

Д о в е д е н н я. Якщо $r([\alpha]) = n$, то за допомогою елементарних перетворень Нільсена $[\alpha]$ можна привести до вигляду $< \widetilde{w_1}, \widetilde{w_2}, \ldots, \widetilde{w}_l >$ такого, що $\widetilde{w_1}, \widetilde{w_2}, \ldots, \widetilde{w}_l$ є вільною системою твірних вільної групи $F(X)$. Звідси випливає, що й компоненти кортежа $[\alpha]$ породжують вільну групу $F(X)$. А тому відображення

$$f : x_i \to w_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

можна продовжити до автоморфізму $F(X)$ в себе. Якщо ж $r([\alpha]) = k < n$, то за допомогою елементарних перетворень Нільсена кортеж $[\alpha]$ можна привести до вигляду $< \widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w_k}, e, \ldots, e >$. Але компоненти кортежа перетвореного і початкового породжують ту ж саму підгрупу рангу $k$ в $F(X)$, тобто $< \widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w_k} >=< w_1, \ldots, w_n >$ звідси випливає, що відображення $f$ продовжується до гомоморфізму, який відображає $F(X)$ на власну підгрупу $< \widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w}_l >$, який може бути автоморфізмом. □

Наведемо тепер визначення вербальної підгрупи в групі. Нехай $G$ – довільна група, $\mathcal{V} \subset F$ – довільна множина слів у вільній групі зліченого рангу. Вербальною $\upsilon$-підгрупою групи $G$ називається підгрупа, що породжена всіма значеннями слів із $\mathcal{V}$ в групі $G$. Позначатимемо цю підгрупу символом $\upsilon(G)$. Таким чином

$$\upsilon(G) = \{\upsilon(g_1, g_2, \ldots, g_n) | \upsilon(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{V}, g_1, g_2, \ldots, g_n \in G\}$$

Вербальна підгрупа довільної групи $G$ є цілком характеристичною в ній, обернене взагалі кажучи є неправильним, але для вільних груп маємо таке твердження

**Лема 3.** *Кожна цілком характеристична підгрупа вільної групи є вербальною в ній.*

Доведення див. [2].

Враховуючи це твердження, вербальну підгрупу $\mathcal{V}(X)$ вільної групи $F$, яка задається деяким словом $\upsilon$ можна охарактеризувати таким чином

**Лема 4.** *Нехай $\upsilon(x_1, \ldots, x_n)$ – деяке незвідне слово з вільної групи зліченного рангу, $F$ – вільна група скінченного або зліченного рангу. Вербальна підгрупа $\upsilon(F)$ складається з наиможливіших суперпозицій виду*

$$\upsilon(g_1, g_2, \ldots, g_n),\ g_1, g_2, \ldots, g_n \in F$$

Доведення випливає безпосередньо з визначення вербальної підгрупи.

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079112021234824 

Прикладами власних вербальних підгруп вільної групи $F$ є

а) її комутант, який породжується словом $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ і складається з усіх незвідних слів, сума степенів всіх входжень кожної букви $x_i$ в які дорівнює нулю;

б) члени ряду комутантів, які визначаються рекурентно рівностями $F^{(0)} = F$, $F^{(k)} = \{[u,v]|u,v \in F^{(k-1)}\}$, $k = 1, 2, \ldots$;

в) члени нижнього центрального рядку, які визначаються рекурентно рівностями

$$\gamma_1(F) = F_1,\ \gamma_k(F) = [F, \gamma_{k-1}(F)],\ k = 2, 3, \ldots,$$

де $[U,V] =< [u,v]|u \in U, v \in V >$ – взаємний комутант підгруп $U, V$;

г) Підгрупа $m$-тих степенів $F^m =< u^m|u \in F >$.

Ми використали поняття вербальної підгрупи для певної характеризації лівих ідеалів кільця ендоморфізмів $End\,F$ вільної групи $F$ в роботі [3].

## Висновки

Вільна група є цікавим і корисним об'єктом вивчення в теорії груп на прикладі якої будуються різноманітні алгебраїчні конструкції. Результати дослідження вільної групи застосовуються і в теорії напівгруп, зокрема для опису ідеалів напівгрупи ендоморфізмів вільної групи.

## Література

1. *В.Магнус, А.Каррас, Д.Солитер.* Комбинаторная теория групп. Москва: Наука, 1974.
2. *Х. Нейман* Многообразия групп.М.:Мир, 1972, 192 с.
3. *В.Є. Величко* Ліві та праві ідеали напівгрупи ендоморфізмів вільної групи. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ, Випуск №9, Слов'янськ : ДДПУ, 2019, С. 19–24.

---

**V.Ye. Velychko**
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

### Free group endomorphisms

In this work, the automorphism or endomorphism of a free group is determined by means of the elementary Nielsen transformation of rank n by multiplied sets of words of a free group. The structure of the verbal subgroup of a free group is considered.

**Keywords:** *free group, endomorphism, automorphism, Nielson transformation.*