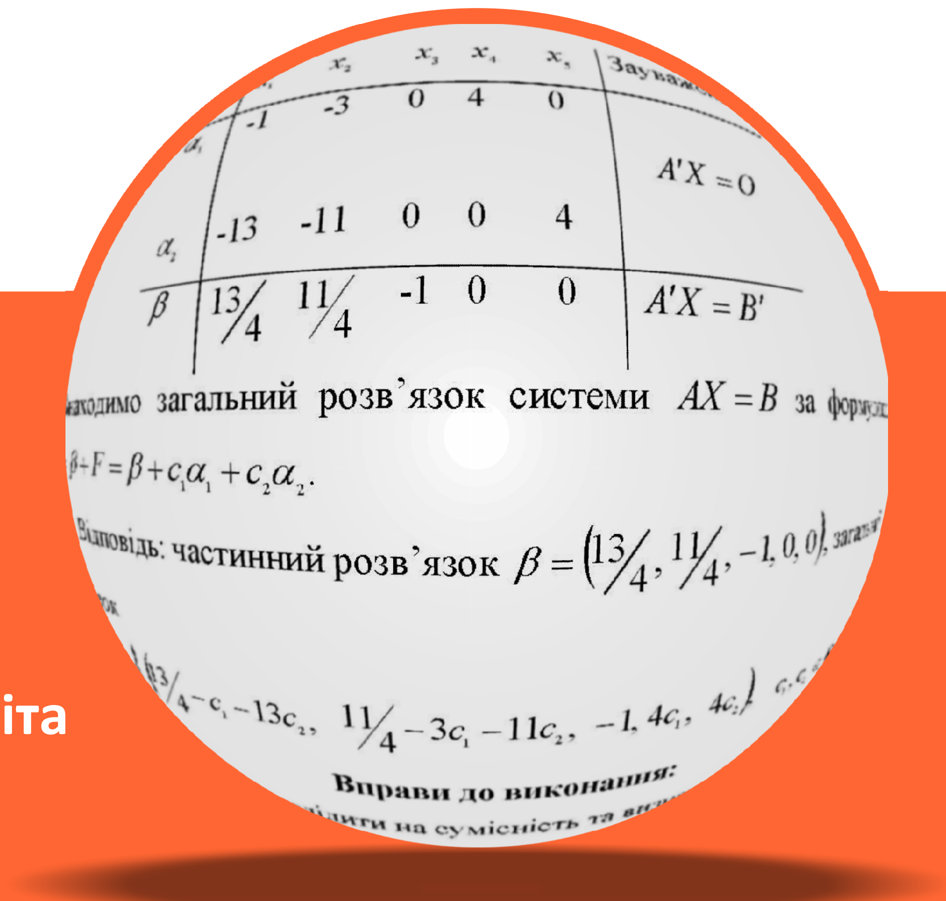
З. Д. Пащенко
Т. В. Турка

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Лінійна алгебра»



для студентів
спеціальності
014 Середня освіта
(Інформатика)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»
кафедра методики навчання математики та методики навчання інформатики

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Лінійна алгебра» для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика)

Слов’янськ – 2021

УДК 378.016:512.64(072)
М54

Затверджено на засіданні Вченої ради
Протокол № 1 від 30.08.2021 р.

Рецензенти:

Решетова І.В., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри менеджменту ДВНЗ «ДДПУ»

Стьопкін А.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики ДВНЗ «ДДПУ»

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Лінійна алгебра» для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика) / З.Д. Пащенко, Т.В. Турка. – Слов'янськ: ДВНЗ «ДДПУ», 2021. – 143 с.

Даний навчальний посібник розроблено для практичних занять вивчення дисципліни «Лінійна алгебра». Кожен параграф відповідає одному практичному заняттю і має наступну структуру: тема заняття, мета заняття, необхідні теоретичні відомості, приклади розв'язування задач та вправи для аудиторної роботи та задачі для самостійної. Два практичних заняття відводиться для контрольних робіт, зміст яких наведено разом з критеріями оцінювання. Також у посібнику містяться індивідуальні завдання, питання до колоквіуму та список рекомендованої літератури.

Рекомендовано для студентів математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

ЗМІСТ

Заняття 1. Дії з комплексними числами в арифметичній формі. Геометрична форма комплексного числа.

Мета: *Опанувати поняттям комплексного числа та операціями над ними в алгебраїчній формі. Навчитись зображати комплексні числа на комплексній площині, знаходити геометричне місце комплексних чисел, які задовольняють певним умовам.*

Необхідні теоретичні матеріали

Комплексним числом називається вираз виду $a+bi$, де a і b – дійсні числа, i – ***уявна одиниця***, а саме $i^2=-1$. $\mathbf{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbf{R}\}$ – множина комплексних чисел в алгебраїчному вигляді.

Введемо функції Re та Im, що діють із $\mathbf{C}$ в $\mathbf{R}$: якщо $z=a+bi$, то $\mathrm{Re}\,z=a$ (дійсна частина z), $\mathrm{Im}\,z=b$ (уявна частина z). Два комплексні числа ***рівні***, якщо рівні їх дійсні та уявні частини. Число $\bar{z}=a-bi$ називається ***спряженим*** до z.

Введемо арифметичні дії над комплексними числами в алгебраїчному вигляді. Нехай $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$.

$$\mathbf{z_1\pm z_2=(a\pm c)+(b\pm d)i}.$$

$$\mathbf{z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i}.$$

$$\mathbf{\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot \overline{z_2}}{z_2\cdot \overline{z_2}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i}.$$

Кожному комплексному числу $z=a+bi$ поставимо у відповідність точку (a,b) на координатній площині. Цю площину називають ***комплексною площиною***. Її вісь абсцис називається дійсною віссю, вісь ординат – уявною віссю. Точка перетину O цих осей має координати (0,0) і відповідає комплексному числу $z=0+0i$. Також довільній точці на комплексній площині з координатами (a_1,b_1) відповідає комплексне число $z_1=a_1+b_1i$.

Кожному комплексному числу $z=a+bi$ відповідає радіус-вектор $\vec{r}$, що утворюється з'єднанням точок O і (a,b). Навпаки, кожному радіус-вектору $\vec{r}_1$ відповідає комплексне число $z_1=a_1+b_1i$, де (a_1,b_1) – координати кінця радіус-вектору $\vec{r}_1$.

Зберігається відповідність між алгебраїчною сумою та різницею комплексних чисел і векторною сумою та різницею відповідних радіус-векторів.

Модуль комплексного числа z (позначається $|z|$) – це відстань від початку координат комплексної площини до точки, яка зображає це число.

Геометричне місце точок z на комплексній площині, які задовольняють умові $|z| = r$, знаходиться на колі з центром в початку координат і радіусом r.

Модуль різниці двох комплексних чисел дорівнює відстані між цими числами, зображеними на комплексній площині.

Точки z, що задовольняють рівності $|z - z_0| = r$, знаходяться на колі з центром в точці z_0 і радіусом r.

Геометричне місце точок z на комплексній площині, які задовольняють умові $|z - z_1| = |z - z_2|$, де z_1, z_2 – деякі задані числа, знаходиться на серединному перпендикулярі, проведеному до відрізка з кінцями в точках z_1 і z_2.

Величина кута, виміряного проти годинникової стрілки, від додатного напряму дійсної осі до ненульового вектору $\vec{r}$, що відповідає числу z, називається ***аргументом*** числа z і позначається $\arg z$. (Аргумент $z = 0$ не визначається).

Аудиторна робота

Приклад 1.1. Знайти суму, добуток та частку чисел

$z_1 = -2 + 3i, \quad z_2 = 1 - 4i$.

Розв'язання. Суму знайдемо за правилом додавання:

$z_1 + z_2 = (-2 + 1) + (3 - 4)i = -1 - i$.

Для знаходження добутку не обов'язково пам'ятати правило множення. Достатньо виконати множення двох виразів за правилами розкриття дужок:

$$z_1 \cdot z_2 = (-2 + 3i)(1 - 4i) = -2 + 8i + 3i - 12i^2 = (-2 + 12) + (8 + 3)i = 10 + 11i$$

Також не обов'язково пам'ятати правило ділення. Частку можна знайти у вигляді дробу, в якому чисельник і знаменник помножається на число, спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2 + 3i}{1 - 4i} = \frac{(-2 + 3i)(1 + 4i)}{(1 - 4i)(1 + 4i)} = \frac{-2 - 8i + 3i + 12i^2}{1 + 16} = -\frac{14}{17} - \frac{5}{17}i. \ \blacktriangle$$

Приклад 1.2. Знайти $\sqrt{5+12i}$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{5+12i} = x + yi$. Тоді $5+12i = (x+yi)^2 = = x^2 - y^2 + 2xyi$. За означенням рівності двох комплексних чисел (рівність дійсних та уявних частин), отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases}.$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{36}{x^2} = 5 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \overset{t=x^2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t^2 - 5t - 36 = 0 \\ t = x^2 \geq 0 \\ y = 6/x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ x = \pm 3. \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

Відповідь: $\sqrt{5+12i} = \{\, 3+2i,\ -3-2i \,\}$. ▲

Приклад 1.3. Розв'язати рівняння $z^2 + 5z + 5 - 3i = 0$.

Розв'язання. Скористаємося відомим алгоритмом розв'язку квадратного рівняння:

1. $D = b^2 - 4ac = 25 - 4(5-3i) = 5 + 12i$.

2. $\sqrt{D} = \sqrt{5+12i} = \pm(3+2i)$ (це значення обчислене в попередньому прикладі).

3. $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-5 \pm (3+2i)}{2}$.

Відповідь: $z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -4 - i$. ▲

Приклад 1.4. Розв'язати рівняння: $z^2 + z \cdot \bar{z} = 8 - 4i$.

Розв'язування: Нехай $z = x + yi$, де $x, y \in \mathbf{R}$. Тоді дане рівняння має вигляд:

$$(x+yi)^2 + (x+yi)\cdot(x-yi) = 8 - 4i,$$

$$2x^2 + 2xyi = 8 - 4i.$$

Застосуємо умову рівності комплексних чисел, записаних в алгебраїчній формі: прирівняємо дійсні і уявні частини лівої і правої сторін рівняння. Матимемо:

$$\begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = -\dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = -\dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \mp 1 \end{cases}.$$

Отже, задане рівняння має два розв'язки.

Відповідь: $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$. ▲

Приклад 1.5. Знайти геометричне місце точок, що зображують комплексні числа z, які задовольняють умови:

а) $|z + i| \geq 2$; б) $\log_{\frac{1}{2}} |z - 2| > \log_{\frac{1}{2}} |z + 2 - 3i|$;

в) $\dfrac{\pi}{6} < \arg(z \cdot (1+i)) \leq \dfrac{2\pi}{3}$.

Розв'язання. а) І спосіб. Модуль різниці двох комплексних чисел дорівнює відстані між цими числами, зображеними на комплексній площині. Тому $|z + i|$ – це відстань між точками z і $-i$.

Так як точки z, що задовольняють рівності $|z - z_0| = r$, знаходяться на колі з центром в точці z_0 і радіусом r, то точки що задовольняють нерівності $|z + i| \geq 2$ знаходяться на колі та за межами кола з центром в точці $-i$ і радіусом 2.

ІІ спосіб. На відміну від попереднього способу геометричного, існує алгебраїчний спосіб розв'язування. Позначимо $z = x + yi$. Тоді

$$|z + i| \geq 2 \Leftrightarrow |x + yi + i| \geq 2 \Leftrightarrow |x + (y+1)i| \geq 2 .$$

За алгебраїчною формулою модуля

$$|x + (y+1)i| \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 \geq 2^2.$$

Зі шкільного курсу математики відомо, що $x^2+(y+1)^2=2^2$ – рівняння кола з центром в точці $(0,-1)$ і радіусом 2. Точки, що задовольняють нерівності $x^2+(y+1)^2>4$ знаходяться за межами цього кола. Якщо врахувати, що точці $(0,-1)$ на комплексній площині відповідає число $0+(-1)i=-i$, то ми одержали таку ж відповідь. ▲

б) I спосіб (геометричний). Функція логарифму за основою, меншою 1, є спадною, тому дана нерівність еквівалентна нерівності $|z-2|<|z+2-3i|$. В лівій і правій частині цієї нерівності стоять вирази, геометричним змістом яких є відстані від точки z до точок $z_1=2$ і $z_2=-2+3i$. Тоді цю останню нерівність можна прочитати як множина точок z, відстань від яких до точки $z_1=2$ менша, ніж до точки $z_2=-2+3i$. Так як геометричне місце точок, рівновіддалених від z_1 і z_2, знаходиться на серединному перпендикулярі, проведеному до відрізка з кінцями в точках z_1 і z_2, то геометричне місце точок, які задовольняють нерівності $|z-2|<|z+2-3i|$ (а значить і нерівності $\log_{\frac{1}{2}}|z-2|>\log_{\frac{1}{2}}|z+2-3i|$), знаходиться у тій півплощині такого серединного перпендикуляру, в якій знаходиться точка $z_1=2$.

II спосіб (алгебраїчний). Позначимо $z=x+yi$. Тоді

$$|z-2|<|z+2-3i| \Leftrightarrow |(x-2)+yi|<|(x+2)+(y-3)i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}<\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+-4x+4+y^2<x^2+4x+4+y^2-6y+9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6y<8x+9 \Leftrightarrow y<\frac{4}{3}x+\frac{3}{2}.$$

Точки, що задовольняють рівності $y=\frac{4}{3}x+\frac{3}{2}$, є пряма, а ті, що задовольняють нерівності $y<\frac{4}{3}x+\frac{3}{2}$ і еквівалентній їй заданій нерівності $\log_{\frac{1}{2}}|z-2|>\log_{\frac{1}{2}}|z+2-3i|$, знаходяться нижче цієї прямої.

Незважаючи на те, що відповіді в цих двох способах виглядають по різному, ми маємо одну й ту ж область (впевніться в цьому). Переваги першого способу в тому, що ми практично без обчислень можемо зобразити шукану область, причому знаємо її геометричний зміст, пов'язаний з серединним перпендикуляром. ▲

в) Очевидно, що геометричним місцем точок z подвійної нерівності $\varphi_1<\arg z<\varphi_2$ є сектор кута між променями під кутами φ_1 і φ_2. Приведемо дану нерівність до такого вигляду.

Врахуємо, що аргумент добутку дорівнює сумі аргументів співмножників, тоді $\arg\left(z\cdot(1+i)\right)=\arg z+\arg(1+i)=\arg z+\frac{\pi}{4}$. Таким чином

$$\frac{\pi}{6}<\arg\left(z\cdot(1+i)\right)\le\frac{2\pi}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\pi}{6}<\arg z+\frac{\pi}{4}\le\frac{2\pi}{3} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}<\arg z\le\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{12}<\arg z\le\frac{5\pi}{12}.$$

Отже, геометричним місцем точок z, які задовольняють умову $\frac{\pi}{6}<\arg\left(z\cdot(1+i)\right)\le\frac{2\pi}{3}$, є сектор кута між променями під кутами $-\frac{\pi}{12}$ і $\frac{\pi}{12}$ (проти годинникової стрілки від меншого до більшого). ▲

Вправи до виконання:

Вправа 1.1. Знайти дійсну та уявну частини комплексних чисел

$$\text{а) } \frac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\frac{(1-i)(2-i)}{2+i};\ \text{б) } \frac{3+2i}{4-5i},\ \text{в) } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2009}.$$

Вправа 1.2. Розв'язати рівняння: а) $\bar{z}=5-z$, б) $z^2+\bar{z}=1$.

Вправа 1.3. Знайти необхідну і достатню умови того, щоб сума комплексних чисел z_1 і z_2 була дійсним числом.

Вправа 1.4. Зобразити числа та визначити їх модуль і аргумент: $\pm 3 \pm 2i$, 1, 5, –3, i, $3i$, $-3i$, $\pm 2+2i$.

Вправа 1.5. Знайти геометричне місце точок, що зображують комплексні числа z, які задовольняють умови:

а) $1 \le \operatorname{Re} z < 2$; б) $|\operatorname{Im} z| < 1$; в) $1 < |z| \le 3$;

д) $0 \le \arg z < \dfrac{\pi}{3}$; г) $|z-3+i| = |z+2-2i|$.

Самостійна робота

Задача 1.1. Знайти дійсну та уявну частини комплексних чисел

$$\text{а) } \left(\frac{i^7+2}{1+i^{11}}\right)^2;\ \text{б) } \frac{(1+2i)^3-(1+3i)^2}{(3-i)^3+(1+5i)^2}.$$

Задача 1.2. Розв'язати рівняння:

а) $z^2-2z\cdot\bar{z}-3=3i$, б) $2z-3\bar{z}=3+5i$.

Задача 1.3. Розв'язати рівняння $z^2(1+i)-z+1+2i=0$.

Задача 1.4. Знайти геометричне місце точок, що зображують комплексні числа z, які задовольняють умови:

а) $|z-2i| \le 2$, б) $\dfrac{\pi}{4} \le \arg zi \le \dfrac{\pi}{2}$, в) $|z| = \left|z+\dfrac{3}{i}\right|$ та $|z| \le 2$.

Заняття 2. Модуль, аргумент. Тригонометрична форма комплексного числа. Степені, корені комплексних чисел.

Мета: *Опанувати поняття модуля, аргументу комплексного числа, переведення комплексного числа в тригонометричну форму, навчитись ділити та множити в тригонометричній формі. Навчитись знаходити степені комплексних чисел за допомогою формули Муавра та корені комплексних чисел* n*-го степеня.*

Необхідні теоретичні матеріали

Якщо $\arg z = \varphi$, $|z| = r$, то можна писати $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Така форма запису комплексного числа називається ***тригонометричною формою комплексного числа***.

Якщо $z = a + bi$, то $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ формула модуля ***комплексного числа***, а $\arg z$ – це такий кут φ, який задовольняє системі залежностей.

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}.$$

Правило множення комплексних чисел **в тригонометричній формі** виражається формулою: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

З неї маємо геометричний зміст модуля і аргументу:

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2| -$$

модуль добутку дорівнює добутку модулів,

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2 -$ *аргумент добутку дорівнює сумі аргументів.*

Правило ділення комплексних чисел **в тригонометричній формі** виражається формулою: $\dfrac{z_1}{z_2} = = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Степінь комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в тригонометричній формі обчислюється за ***формулою Муавра:***

$$z^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),\ \forall k \in \mathbf{Z}.$$

Теорема. (Про корені n-го степеня) *Існує рівно* n *різних значень кореня* n*-го степеня відмінного від нуля комплексного числа* $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Їх дає формула*

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}),\ k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

Так як $1=\cos 0+i\sin 0$, то корені степеня n із одиниці мають вигляд:

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=0,\ 1,\ 2,...,\ n-1.$$

Очевидно, що одиниця є коренем з одиниці довільного степеня. При зображенні коренів n-го степеня з одиниці на комплексній площині ми отримаємо правильний n-кутник з центром в точці 0 і однією із вершин в точці 1.

Твердження. (Про добуток коренів із одиниці) *Добуток двох коренів із одиниці степеня n є корінь із одиниці степеня n.*

Твердження. *Всі значення $\sqrt[n]{\alpha}$ ($\alpha\in\mathbf{C}$, $\alpha\neq 0$) утворюються із якогось одного значення $\sqrt[n]{\alpha}$ множенням на всі корені степеня n із одиниці.*

Аудиторна робота

Приклад 2.1. Знайти модуль, аргумент, та тригонометричну форму комплексних числа $z=-2\sqrt{3}-2i$.

Розв'язання. Дійсна частина числа z дорівнює $a=-2\sqrt{3}$, а уявна частина $b=-2$. Знайдемо модуль z за формулою:

$$|z|=r=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=4.$$

Знайдемо аргумент z за відповідними залежностями:

$$\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{-2\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad\varphi=\pm\arccos\left(-\sqrt{3}\big/2\right)+2\pi n,\ n\in$$

$$\mathbf{Z}\Rightarrow\quad\Rightarrow\quad\varphi=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\varphi=\frac{5\pi}{6}+2\pi k\ \text{або}\quad\varphi=-\frac{5\pi}{6}+2\pi(k+1)=\frac{7\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\varphi=(-1)^n\arcsin\left(-1\big/2\right)+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\varphi=-\frac{\pi}{6}+2\pi k\quad\text{або}\quad\varphi=\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi=\frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Спільним розв'язком цих залежностей є лише кут

$$\varphi = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z} \text{ або просто } \quad \varphi = \frac{7\pi}{6}.$$

Цей аргумент можна знайти і з однієї залежності, але тоді необхідно враховувати місце знаходження даного числа на комплексній площині.

Так як точка z з координатами $(-2\sqrt{3}, -2)$ знаходиться в третьому координатному куті, то кут $\varphi = \arg z$ також знаходиться в третьому координатному куті. Враховуючи, що $\varphi = \pm\arccos\left(-\sqrt{3}/2\right)$ знаходяться в другому і третьому координатних кутах, приходимо до висновку, що $\varphi = -\arccos\left(-\sqrt{3}/2\right) = -\frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$. Тригонометрична форма числа z має вигляд: $z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

Відповідь: $|z| = 4$, $\arg z = \frac{7\pi}{6}$, $z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$. ▲

Приклад 2.2. Знайти добуток і частку чисел $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$ та $z_2 = 1 - i$ у тригонометричній формі.

Розв'язання. У даного числа z_1 дійсна частина $a_1 = -2\sqrt{3}$, а уявна частина $b_1 = 2$. Знайдемо модуль z_1: $|z_1| = r_1 = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = 4$.

Знайдемо аргумент z_1:

$$\cos\varphi_1 = \frac{a_1}{r_1} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \pm\arccos\left(-\sqrt{3}/2\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{b_1}{r_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = (-1)^n \arcsin 1/2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Один із кутів φ_1, що задовольняє попереднім умовам, це кут $\varphi_1 = \frac{5\pi}{6}$ Тому тригонометрична форма числа z_1 має вигляд: $z_1 = 4(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$.

У числа z_2 дійсна частина $a_2 = 1$, а уявна частина $b_2 = -1$. Знайдемо модуль z_2: $|z_2| = r_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Знайдемо аргумент z_2:

$$\cos\varphi_2 = \frac{a_2}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4} \text{ або } \varphi_2 = -\frac{\pi}{4},$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{b_2}{r_2} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{4} \text{ або } \varphi_2 = -\frac{3\pi}{4}.$$

Один із кутів φ_2, що задовольняє попереднім умовам, це кут $\varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$. Тому тригонометрична форма числа z_2 має вигляд:

$$z_2 = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right).$$

Скористаємося формулами множення і ділення в тригонометричній формі і одержимо:

$$z_1\cdot z_2 = 4\cdot\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + (-\frac{\pi}{4})\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + (-\frac{\pi}{4})\right)\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$z_1 : z_2 = \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} - (-\frac{\pi}{4})\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} - (-\frac{\pi}{4})\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right).$$

Приклад 2.3. Обчислити $(-2+2\sqrt{3}i)^{10}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою Муавра. Для цього число z запишемо в тригонометричному вигляді:

$$z=-2+2\sqrt{3}i \quad \Rightarrow \qquad |z|=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4,$$

$$\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \ \varphi=\arg z=\frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Тепер за формулою Муавра

$$\left(-2+2\sqrt{3}i\right)^{10}=z^{10}=4^{10}\left(\cos\left(10\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(10\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=4^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3}\right)=$$

$$4^{10}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 3\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot 3\right)\right)=$$

$$=2^{20}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2^{20}\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2^{19}+2^{19}\sqrt{3}i.$$

Відповідь: $(-2+2\sqrt{3}i)^{10}=-2^{19}+2^{19}\sqrt{3}i$. ▲

Приклад 2.4. Обчислити $\sqrt[4]{\alpha}$, якщо $\alpha=-1-\sqrt{3}i$.

Розв'язання. Знайдемо модуль α :$|\alpha|=r=\sqrt{1+3}=2$. Знайдемо аргумент α із умов: $\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $\arg\alpha=\varphi=\dfrac{4\pi}{3}$.

Тоді $\alpha = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$ – тригонометрична форма числа α.

Формула коренів в нашому випадку має вигляд:

$$\sqrt[4]{\alpha} = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{{}^{4\pi}\!/_{3} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{{}^{4\pi}\!/_{3} + 2k\pi}{4}),\ k = 0, 1, 2, 3.$$

А саме

$$\beta_0 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{{}^{4\pi}\!/_{3}}{4} + i\sin\frac{{}^{4\pi}\!/_{3}}{4}) = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2},$$

$$\beta_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{{}^{4\pi}\!/_{3} + 2\pi}{4} + i\sin\frac{{}^{4\pi}\!/_{3} + 2\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) =$$
$$= -\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{2}}{2},$$

$$\beta_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{{}^{4\pi}\!/_{3} + 4\pi}{4} + i\sin\frac{{}^{4\pi}\!/_{3} + 4\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) =$$
$$= -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2},$$

$$\beta_3 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{{}^{4\pi}\!/_{3} + 6\pi}{4} + i\sin\frac{{}^{4\pi}\!/_{3} + 6\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) =$$
$$= \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{2}}{2}.$$

Одержимо відповідь: $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i} =$

$$= \left\{\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2},\quad -\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{2}}{2},\quad -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2},\quad \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\right\}.$$

Приклад 2.5. Знайти всі корені 8-го степеня із числа α, якщо відомо, що один з його коренів $\beta = -1 + \sqrt{3}i$.

Розв'язання. За твердженням про зв'язок коренів комплексного числа і всіх коренів з одиниці такого ж степеня, всі $\sqrt[8]{\alpha}$ можна знайти, помноживши β на всі

$$\sqrt[8]{1}=\left\{1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}.$$

Отже,

$$\sqrt[8]{\alpha}=\left\{\beta,\ \beta\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right),\ \beta\cdot i, \beta\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right),\ -\beta,\ \beta\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right),\right.$$

$$\left.-\beta\cdot i, \beta\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right\}=$$

$$=\left\{-1+\sqrt{3}i,\ \beta\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right),\ -\sqrt{3}-i, \beta\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right),\right.$$

$$\left.1-\sqrt{3}i,\ -\beta\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right),\ \sqrt{3}+i, \beta\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right\}.\ \blacktriangle$$

Зауваження. Зображення всіх коренів цього числа α на комплексній площині будуть утворювати правильний восьмикутник з центром в точці 0 і однією із вершин в точці $\beta=-1+\sqrt{3}i$.

Приклад 2.6. Вивести формули для $\cos 2\alpha$ і $\sin 2\alpha$, застосувавши формулу Муавра.

Розв'язання. За формулою Муавра

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha.$$

З іншого боку

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2=\cos^2\alpha+2i\cos\alpha\sin\alpha-\sin^2\alpha.$$

Прирівняємо дійсні та уявні частини правих частин одержаних рівностей: $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha=2\cos\alpha\sin\alpha$. ▲

Вправи до виконання:

Вправа 2.1. Записати в тригонометричній формі числа:

а) 5; б) $-2i$; в) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$; г) $-\sqrt{3}+i$; д) $-\sqrt{3}i+1$, е) $-\cos\alpha+i\sin\alpha$

Вправа 2.2. Знайти в тригонометричній формі.

а) $(\sqrt{3}-i)\cdot(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)$, б) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$.

Вправа 2.3. Обчислити: а) $(-1-i)^6$, б) $(-\sqrt{3}+i)^{15}$,

в) $\frac{2(-\sqrt{3}+i)^8(-\cos\alpha+i\sin\alpha)}{(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^5}$.

Вправа 2.4. Знайти корені: а) $\sqrt[5]{-\sqrt{3}+i}$, б) $\sqrt[8]{-2-2\sqrt{3}i}$.

Самостійна робота

Задача 2.1. Знайти модуль та аргумент чисел:

а) $-1-i$, б) $-2+2\sqrt{3}i$, в) –9.

Задача 2.2. Записати в тригонометричній формі числа:

а) (-1-i)(-2+2$\sqrt{3}i$), б) $\frac{(-1-i)}{(-2-2\sqrt{3}i)}$, в) $(-3+i\sqrt{27})(1+i)^2$

Задача 2.3 Обчислити: а) $(-2+i\sqrt{12})^{2009}$, б) $\frac{(-1+i)^5}{(-2-2\sqrt{3}i)^7}$.

Задача 2.4. Знайти корені: а) $\sqrt[6]{64}$, б) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}+\frac{i\sin 60^0}{4}}$, в) $\sqrt[5]{\frac{-2i}{1-i\sqrt{3}}}$

Заняття 3. Дії над матрицями. Приведення матриці до східчастої за допомогою елементарних перетворень матриць.

Мета: *Засвоїти дії над матрицями. Закріпити поняття елементарних перетворень матриць. Дослідити вплив множення матриці на елементарні матриці різних типів з різних сторін. Навчитися приводити матрицю до східчастої форми та знаходити обернену матрицю за допомогою елементарних перетворень рядків.*

Необхідні теоретичні матеріали

Матрицею розміром m на n $(m \times n)$ називається прямокутна таблиця дійсних чисел, що має m рядків і n стовпців. Дві $m \times n$-матриці $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називаються ***рівними*** $(A = B)$, якщо їх елементи відповідно рівні: $a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n.$ На множині матриць $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ одного розміру $(m \times n)$ можна визначити операції **додавання** двох матриць і **множення** матриці **на число**.

Нехай $A, B \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Операція ***додавання*** задається за таким правилом: $A + B = C \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$, де $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всіх $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Операція ***множення на число*** $\alpha \in \mathbf{R}$ задається за таким правилом: $\alpha \cdot A = C \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$, де $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ для всіх $1 \le i \le m$ $1 \le j \le n$.

Для будь-яких матриць $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ та $B = (b_{ij}) \in M_{n\times p}(\mathbf{R})$ існує операція ***множення*** за правилом:

$$A \cdot B = C \in M_{m\times p}(\mathbf{R}),\ \text{де}\ C = (c_{ij}),\ c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

для всіх $1 \le i \le m$, $1 \le j \le p$. Матриця C називається ***добутком*** матриць A і B. Через A^n позначається добуток n матриць A: $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$.

Існує три види ***елементарних перетворень*** рядків матриці:

1) перестановка двох рядків місцями;

2) множення рядка на число, відмінне від нуля;

3) додавання до одного рядка іншого, помноженого на деяке число.

Такі ж елементарні перетворення існують і для стовпчиків.

Матриця розміром $m \times n$ виду

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_{1s_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{2s_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{rs_r} & \dots & c_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $c_{is_i} \neq 0$, $i = 1,2,\dots,r$, $r \leq m,n$, $1 \leq s_i \leq n$ називається ***східчастою матрицею***.

Теорема. (Про приведення до східчастої матриці) *За допомогою елементарних перетворень рядків кожну матрицю можна привести до східчастої матриці.*

Одиничною матрицею n-го порядку називається матриця $E = (\delta_{ij})_{n \times n}$, де δ_{ij} – символи Кронекера. Її також позначають E_n.

Квадратна матриця, яку можна одержати з одиничної матриці одним із елементарних перетворень, називається ***елементарною***. Множення на таку матрицю зліва виконує елементарні перетворення рядків, а справа – стовпчиків.

Згідно трьох видів елементарних перетворень існує три типи елементарних матриць, які будемо позначати наступним чином:

1. E_{ij} – матриця, яка одержується з одиничної матриці перестановкою i-го та j-го рядків (стовпчиків);

2. $E_i(k)$ – матриця, яка одержується з одиничної матриці множенням i-го рядка (стовпчика) на дійсне число $k \neq 0$.

3. $E_{ij}(k)$ – матриця, яка одержується додаванням до i-го рядка (j -го стовпчика) одиничної матриці її j-го рядка (i-го стовпчика), помноженого на дійсне число k.

Матриця A^{-1} є оберненою до матриці A, якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця. Відомо, що обернена матриця існує тільки для квадратної матриці.

Існує метод знаходження оберненої матриці, якщо вона існує, за допомогою елементарних перетворень рядків. Опишемо його.

Якщо A – матриця n-го порядку, то складаємо матрицю розміру $(n \times 2n)$ виду $(A \mid E)$. Елементарними перетвореннями рядків ліву частину цієї матриці приводимо до східчастої матриці C. Тоді права частина набуде змін і утворить деяку матрицю B. Якщо східчаста матриця C має нульові рядки, то матриця A не має оберненої, якщо матриця C не має нульових рядків, то продовжуємо елементарні перетворення матриці $(C \mid B)$ з метою одержання в лівій частині одиничної матриці. Після цих елементарних перетворень в правій частині отримаємо шукану обернену матрицю A^{-1}. Схема цього методу виглядає так: $(A \mid E) \to (C \mid B) \to (E \mid A^{-1})$.

Аудиторна робота

Приклад 3.1. Обчислити

$$X = 4\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. За правилами множення на число та додавання матриць маємо

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -8 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -3 \\ 16 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.2. Знайти добуток AB, а також BA, якщо він існує. Порівняти ці добутки:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. а) За правилом множення добуток матриць існує, якщо кількість стовпчиків першого співмножника дорівнює кількості рядочків другого. Так як матриця A має три стовпчики, а матриця B має три рядочки, то добуток AB існує і це є матриця C розміру (2×1). За умовним правилом «множення першого рядка на перший стовпчик» знайдемо

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = (-1)\cdot 2 + (-2)\cdot(-2) + (-4)\cdot(-1) =$$
$$= -2 + 4 + 4 = 6.$$

За допомогою «множення другого рядка на перший стовпчик» знайдемо $c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 0\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) + 3\cdot(-1) =$

$$= 0 + 2 - 3 = -1.$$

Таким чином $AB = C = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Добуток BA не існує, так як кількість стовпчиків першого співмножника не дорівнює кількості рядочків другого ($1 \neq 2$), тому порівняти добуток AB та BA не можливо.

б) Так як матриця A має два стовпчики, а матриця B має два рядочки, то добуток AB існує і це є матриця C розміру (2×2).

Знайдемо $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 2\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3$;

$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 3\cdot 1 + 2\cdot 1 = 5$;

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 = -1$;

$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 3\cdot(-1) + 2\cdot 1 = -1$.

Таким чином $AB = C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Добуток BA також існує, оскільки матриця B має два стовпчики, а матриця A має два рядочки. Це буде матриця D розміру (2×2).

Знайдемо $d_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} = 1\cdot 2 + (-1)\cdot 3 = -1$;

$d_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 = 5$;

$d_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} = 1\cdot(1) + (-1)\cdot 2 = -1$;

$d_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 = 3$.

Таким чином $BA = D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Добутки AB і BA мають однаковий розмір (2×2), тому їх можна порівнювати. За правилом рівності двох матриць одержуємо $AB\neq BA$ бо, наприклад, $c_{11}\neq d_{11}$. ▲

Приклад 3.3. Знайти значення виразу $(A+2\sqrt{3}E)(A-2\sqrt{3}E)$, де $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Враховуючи властивості операцій над матрицями, даний вираз можна розглядати як добуток суми і різниці, тобто він тотожний виразу $A^2-(2\sqrt{3}E)^2=A^2-12E^2$. Обчислимо A^2 і E^2:

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 0\\ 0 & 13\end{pmatrix},\qquad E^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тоді $A^2-12E^2=\begin{pmatrix}13 & 0\\ 0 & 13\end{pmatrix}-12\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 0\\ 0 & 13\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Відповідь: $(A+2\sqrt{3}E)(A-2\sqrt{3}E)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$. ▲

Приклад 3.4. Знайти $A^3=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^3$.

Розв'язання. Обчислимо третю степінь матриці A поступово:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{pmatrix},$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -14\\ 21 & -22\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^3=\begin{pmatrix}13 & -14\\ 21 & -22\end{pmatrix}$.

Приклад 3.5. Привести дану матрицю до східчастої форми за допомогою елементарних перетворень рядків:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & -8 & -7 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Перший стовпчик даної матриці ненульовий і в ньому є число 1, яке належить першому рядочку. Тому найзручніше першим рядочком подібної матриці залишити цей же рядок. Для решти рядочків підберемо елементарні перетворення третього типу так, щоб в їх перших стовпчиках утворилися нулі. Підібрані елементарні перетворення можна позначати справа від матриці, вказуючи відповідний множник до обраного рядка та стрілку, яка показує, до якого рядка додається помножений. Наприклад, щоб на місці (41) утворився 0, можна перший рядок помножити на 5 і додати до четвертого рядка, що і позначено на наступному зображенні.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & -8 & -7 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{lll} (-2) & (2) & (5) \\ \hookleftarrow + & & \\ & \hookleftarrow + & \\ & & \hookleftarrow + \end{array} \approx$$

Далі показано результат вказаних елементарних перетворень та наступні елементарні перетворення рядків, що приводять до східчастої матриці:

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 3 & 14 \\ 0 & 2 & 8 & 9 & -3 & 27 \end{pmatrix} \begin{array}{lll} & & \\ \updownarrow & (1) & (2) \\ & \hookleftarrow + & \\ & & \hookleftarrow + \end{array} \approx$$

$$\approx\begin{pmatrix}1&2&3&2&0&5\\0&1&4&6&3&14\\0&0&0&6&8&4\\0&0&0&9&7&7\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ (-3)\\ (2)\hookleftarrow+\end{array}\approx\begin{pmatrix}1&2&3&2&0&5\\0&1&4&6&3&14\\0&0&0&6&8&4\\0&0&0&0&10&2\end{pmatrix}.$$

Приклад 3.6 Знайти обернену матрицю A^{-1} за допомогою елементарних перетворень:

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\2&-5&4\\3&-7&5\end{pmatrix}$$

Розв'язання. Скористаємося описаним в теоретичних матеріалах способом. Складемо матрицю $\left(A\mid E\right)$ і приведемо елементарними перетвореннями рядків її ліву частину до східчастої матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&2&1&0&0\\2&-5&4&0&1&0\\3&-7&5&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}(-2)(-3)\\ \hookleftarrow+\\ \quad\hookleftarrow+\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&2&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&2&-1&-3&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ (-2)\\ \hookleftarrow+\end{array}\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&2&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&-1&1&-2&1\end{array}\right).$$

Одержану матрицю приведемо елементарними перетвореннями рядків до виду $\left(E\mid A^{-1}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&2&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&-1&1&-2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow\\ \uparrow\\ (2)(-1)\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&0&3&-4&2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-1&2&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow\\ (3)\\ \\ \end{array}\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&-1&2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-1&2&-1\end{array}\right).$$

Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$. ▲

Приклад 3.7. Як зміниться матриця $\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$, якщо помножити її зліва на елементарну матрицю $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. А справа?

Розв'язання. Обчислимо добуток зліва:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix}.$$

Очевидно, що таке множення міняє другий і третій рядки місцями. Помножимо на цю матрицю справа:

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & c_1 & b_1\\ a_2 & c_2 & b_2\\ a_3 & c_3 & b_3\end{pmatrix}.$$

Таке множення міняє другий і третій стовпчики місцями. ▲

Приклад 3.8. Розкласти дану матрицю на добуток елементарних матриць:

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Одержимо дану матрицю поступовими елементарними перетвореннями із одиничної п'ятого порядку:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\\ \\(2)\\ \\ \\ \end{matrix}\approx\quad X_1=\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\\ \\ \\(3)\\ \\ \end{matrix}\approx$$

$$\approx\quad X_2=\begin{pmatrix}1&0&2&3&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\\ \\ \\ \\(-1)\end{matrix}\approx$$

$$X_3=\begin{pmatrix}1&0&2&3&-1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \leftarrow\\ \\(7)\\ \\ \end{matrix}\approx\approx\quad X=\begin{pmatrix}1&0&2&3&-1\\0&1&0&7&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Використаним елементарним перетворенням відповідають елементарні матриці $E_{13}(2), E_{14}(3), E_{15}(-1), E_{23}(7)$. Множення довільної матриці на елементарну матрицю зліва виконує елементарне перетворення рядків, тому маємо: $X_1=E_{13}(2)\cdot E$, $X_2=E_{14}(3)\cdot X_1$, $X_3=E_{15}(-1)\cdot X_2$, $X=E_{23}(7)\cdot X_3$. З цього одержуємо відповідь:

$$X=E_{23}(7)\cdot E_{15}(-1)\cdot E_{14}(3)\cdot E_{13}(2)\cdot E=E_{23}(7)\cdot E_{15}(-1)\cdot E_{14}(3)\cdot E_{13}(2)\ .$$

Вправи до виконання:

Вправа 3.1 Знайти добуток AB, а також BA, якщо він існує. Порівняти ці добутки:

а) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 0 & -4 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

в) $A=\begin{pmatrix}-3 & -6 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$,

г) $A=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 6 & 8\\ -5 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Вправа 3.2 Як зміниться матриця $\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$, якщо помножити її зліва на елементарну матрицю $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$? А справа?

Вправа 3.3 Привести матрицю до східчастої форми за допомогою елементарних перетворень рядків.

а) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 4 & 4\end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 4\end{pmatrix}$.

Вправа 3.4 Знайти обернену матрицю за допомогою елементарних перетворень та виконати перевірку за означенням оберненої матриці: $\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$.

Самостійна робота

Задача 3.1. Знайти добуток AB, а також BA, якщо він існує. Порівняти ці добутки:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ 3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}0 & -4 & 1\\ 1 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

Задача 3.2. Привести матрицю до східчастої форми за допомогою елементарних перетворень рядків.

а) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & -1\\ 3 & 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5\\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Задача 3.3. Знайти обернену матрицю за допомогою елементарних перетворень та виконати перевірку.

а) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Заняття 4. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.

Мета: *Закріпити поняття системи лінійних рівнянь і всі поняття, які пов'язані з нею. Засвоїти використання методу Гауса у визначеному та невизначеному випадках. Навчитись використовувати метод Гауса при розв'язанні матричних рівнянь.*

Необхідні теоретичні матеріали

Система m ***лінійних рівнянь з*** n невідомими має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

де a_{ij}, b_i – дійсні числа, x_j – невідомі змінні, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$.

Числа a_{ij} утворюють ***матрицю систем***и $A = (a_{ij})$, а числа b_i – ***стовпчик вільних членів*** $B = (b_i)$. Матриця розміру $m \times (n+1)$, яка утворюється приєднанням до матриці A стовпчика вільних членів, називається ***розширеною матрицею системи*** $(A|B)$.

Нехай X – стовпчик невідомих $x_1, x_2,...,x_n$. Тоді існує добуток AX матриці системи (1) та стовпчика невідомих, бо $A \in M_{m\times n}$, $X \in M_{n\times 1}$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Кожен елемент цього добутку – це ліва частина одного з рівнянь системи (1), яка дорівнює елементу стовпчика вільних членів, тому можна говорити що система (1) в матричній формі має вигляд $AX = B$

Розв'язком системи називають такий набір чисел $(l_1, l_2,...,l_n)$, що при відповідній підстановці замість невідомих $x_1, x_2,...,x_n$ кожне рівняння системи перетворюється в числову рівність. Всі такі набори утворюють ***множину розв'язків системи***.

Система, яка має хоч один розв'язок, називається с***у***місною, в протилежному випадку – ***несумісною***. Сумісна система, яка має єдиний розв'язок, називається ***визначеною***. Сумісна система, що має більше одного розв'язку, називається ***невизначеною***. Система називається ***однорідною***, якщо її стовпчик вільних членів є нульовим: $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, і ***неоднорідною*** – в протилежному випадку.

Дві системи називаються ***еквівалентними***, якщо вони несумісні або їх множини розв'язків співпадають.

Елементарними перетвореннями системи вважають:

1) перестановку рівнянь системи місцями;

2) множення обох частин довільного рівняння системи на одне й те ж саме число, відмінне від нуля;

3) додавання до довільного рівняння системи іншого, помноженого на деяке число.

Твердження. *Система, одержана за допомогою елементарних перетворень даної, еквівалентна їй.*

Аудиторна робота

Приклад 4.1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}.$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю даної системи і приведемо матрицю системи до східчастої форми разом із стовпчиком вільних членів:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & -9 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & 3 & -2 \end{array}\right)(-4)(-3)(-1) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & -4 \end{array}\right)(2)(-3)(-1) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ (1):14 \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (I) \\ \\ (II) \end{array}$$

Аналіз характеристичної частини (II) говорить про сумісність системи, а розв’язок слід шукати в розв’язуючій частині (I). Східчаста матриця цієї частини має три сходинки, тому головних змінних – три (x_1, x_2, x_3), незалежні змінні відсутні. Для одержання розв’язку виконаємо такі елементарні перетворення рядків розширеної матриці (I), щоб в усіх рядочках, крім одного, коефіцієнти при головних змінних дорівнювали нулю (додамо третій рядок до першого та помножений третій рядок на 6 додамо до другого, а потім одержаний другий рядок помножимо на 2 та додамо до першого):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \leftarrow \\ (2) \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Відтворюючи відповідну до одержаних рядків систему рівнянь, знаходимо значення головних змінних: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$.

Відповідь. Система визначена, її розв’язок $(1, 0, -1)$. ▲

Приклад 4.2. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_6 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 4 \end{cases}.$$

Розв’язання. Складемо розширену матрицю даної системи і приведемо матрицю системи до східчастої форми разом із стовпчиком вільних членів:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 0 & 5 & 2\\ 3 & -6 & 2 & 4 & 5 & 0 & 4\\ 2 & -4 & -1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{ll}(-3) & (-2)\\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow\end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 0 & 5 & 2\\ 0 & 0 & -7 & -2 & 5 & -15 & -2\\ 0 & 0 & -7 & -2 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l}\\ (-1)\\ \hookleftarrow\end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 0 & 5 & 2\\ 0 & 0 & -7 & -2 & 5 & -15 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 9 & 2 \end{array}\right).$$

Характеристична частина системи відсутня, тому система сумісна і вся одержана матриця буде відповідати розв'язуючій частині системи. Виберемо головні змінні „з кожної сходинки по одній": x_1, x_4, x_5, тоді змінні x_2, x_3, x_6 будуть незалежними. Далі виконаємо такі елементарні перетворення рядків останньої розширеної матриці, щоб в усіх рядочках, крім одного, коефіцієнти при головних змінних дорівнювали нулю (помножимо третій рядок на $5/2$ та додамо до другого, а потім одержаний другий рядок додамо до першого):

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 & 0 & 25/2 & 5\\ 0 & 0 & -7 & -2 & 0 & 15/2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 9 & 2 \end{array}\right).$$

Щоб коефіцієнти при всіх головних змінних дорівнювали 1, поділимо другий і третій рядки на (–2):

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 & 0 & 25/2 & 5\\ 0 & 0 & 7/2 & 1 & 0 & -15/4 & -3/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9/2 & -1 \end{array}\right).$$

Відтворюючи відповідні до одержаних рядків рівняння (наприклад, другому рядку відповідає рівняння $\frac{7}{2}x_3 + x_4 - \frac{15}{4}x_6 = -\frac{3}{2}$), знаходимо значення головних змінних:

$$x_1 = 2x_2 + 4x_3 - \frac{25}{2}x_6 + 5;$$

$$x_4 = -\frac{7}{2}x_3 + \frac{15}{4}x_6 - \frac{3}{2};$$

$$x_5 = \frac{9}{2}x_6 - 1.$$

Відповідь. Система невизначена. Загальний розв'язок має вигляд: $F = \{(2x_2 + 4x_3 - \frac{25}{2}x_6 + 5, \quad x_2, \quad x_3, \quad -\frac{7}{2}x_3 + \frac{15}{4}x_6 - \frac{3}{2}, \quad \frac{9}{2}x_6 - 1, \quad x_6),$

$x_2, x_3, x_6 \in \mathbf{R} \quad \}.$ ▲

Приклад 4.3. Розв'язати матричне рівняння $AX = B$ за допомогою елементарних перетворень: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

Розв'язання. Для того, щоб матриця X була розв'язком даного рівняння, вона повинна мати розмір (3×2) і мати вигляд $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$

Тоді матричне рівняння приймає вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 & y_1 + 3y_2 + 2y_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & y_1 + 2y_2 + y_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 & 2y_1 + 4y_2 + 4y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

і перетворюється на систему шести лінійних рівнянь з шістьма невідомими. Рівняння, що утворюються з перших стовпчиків, мають невідомі x_1, x_2, x_3 і не залежать від рівнянь, що утворюються з других стовпчиків, які мають невідомі y_1, y_2, y_3. Отже, така система шести лінійних рівнянь з шістьма невідомими перетворюється на сукупність двох систем трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 0 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 1 \\ 2y_1 + 4y_2 + 4y_3 = 4 \end{cases}.$$

Причому матриці цих систем не відрізняються, а відрізняються вони тільки стовпчиком вільних членів: системі з невідомими x_1, x_2, x_3 із першого стовпчика шуканої матриці відповідає перший стовпчик матриці B, а системі з невідомими y_1, y_2, y_3 із другого стовпчика шуканої матриці відповідає другий стовпчик матриці B. Таким чином, нічого не заважає для розв'язання цих систем створити об'єднану таблицю $(A \mid B)$ та приводити ліву її частину до східчастої, а потім, якщо це можливо, до одиничної матриці. В усякому випадку, значення змінних першого стовпчика матриці знаходиться як розв'язок системи з першим стовпчиком правої частини, а другого – з другим:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} (-1)(-2) \\ \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :(-2) \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (1) \\ (-1) \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow \\ \\ (-2) \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftarrow \\ (-3) \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Так як в лівій частині одержано одиничну матрицю, то в правій частині утворилася шукана матриця.

Відповідь. $X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Вправи до виконання:

Вправа 4.1. Розв'язати систему рівнянь методом Гауса

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$,

в) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 \qquad + 7x_5 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = -2 \end{cases}$, г) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$,

д) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = 0 \end{cases}$, е) $\begin{cases} 7x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$,

є) $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$, ж) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 6 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3 = 0 \end{cases}$

з) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 \qquad - x_4 = -2 \end{cases}$, і) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 6 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = -4 \end{cases}$

Вправа 4.2. Розв'язати матричне рівняння $AX = B$ за допомогою елементарних перетворень: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Самостійна робота

Задача 4.1. Розв'язати систему рівнянь методом Гауса.

а) $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_2-7x_3+2x_4=0 \\ x_1-x_2-3x_3 \qquad\qquad =0 \\ 2x_1+x_2-4x_3-x_4=0 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1 \qquad -x_3+2x_4=-4 \\ 4x_1 \qquad -x_3+2x_4=-1 \end{cases}$,

в) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+2x_4=2 \\ \quad -x_2-x_3+2x_4=7 \\ -x_1+2x_2-2x_4=-7 \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=1 \end{cases}$, г) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-2x_4+4x_5=-1 \\ 4x_1-2x_2+5x_3+x_4+3x_5=2 \\ 2x_1-x_2+x_3+8x_4-6x_5=4 \end{cases}$

Задача 4.2. Розв'язати матричні рівняння $AX=B$ за допомогою елементарних перетворень.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Заняття 5. Підстановки. Кількість інверсій. Методи знаходження визначника.

Мета: *Оволодіти поняттям визначника, навчитись обчислювати кількість інверсій підстановки, визначати знак довільного доданку визначника, здобути навички знаходження визначників другого та третього порядків. Опанувати метод розкладання визначника по рядку чи стовпчику для обчислення визначників довільного порядку.*

Необхідні теоретичні матеріали

Перестановкою із n ***елементів*** називається будь-яка упорядкована множина n перших натуральних чисел. В загальному вигляді перестановку p із n елементів можна записати

$$p = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n),\ \alpha_i \in \{1, 2, ..., n\};\ \alpha_i \neq \alpha_j,\text{якщо } i \neq j.$$

Якщо у перестановці p має місце нерівність $\alpha_i > \alpha_j$ при $i < j$, то говорять, що числа α_i та α_j складають ***інверсію***. Загальна кількість інверсій перестановки p позначається $\nu(p)$.

Кожне взаємно однозначне відображення множини перших n натуральних чисел на себе називається ***підстановкою*** n***-го степеня***. Підстановка n-го степеня α може бути записана у наступному вигляді:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \end{pmatrix},$$

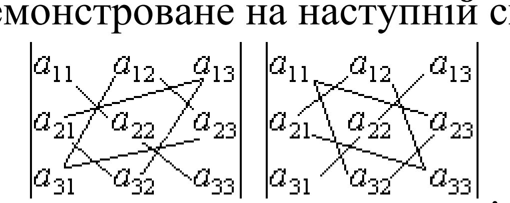
де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – різні натуральні числа від 1 до n, якщо $\alpha:\ \ i \to \alpha_i$.

Кількістю інверсій $\nu(\alpha)$ ***підстановки*** α називається сума кількостей інверсій її верхнього і нижнього рядків.

Визначником квадратної матриці n-го порядку називається алгебраїчна сума $n!$ доданків $(-1)^{\nu} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... a_{n\alpha_n}$, які складаються із добутків її елементів, взятих по одному і тільки одному із кожного рядка і кожного стовпчика, причому знак кожного такого доданка визначається множником $(-1)^{\nu}$, де $\nu = \nu(\alpha)$ – число інверсій у підстановці α індексів його елементів.

Очевидно, якщо $A = (a_{11})$, то $|A| = a_{11}$, якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Для простоти обчислення визначника 3-го порядку існує *правило трикутників*, яке продемонстроване на наступній схемі:



«+» «–»

Всі множники добутків, які входять до визначника із знаком «+» знаходяться на головній діагоналі та трикутниках із стороною, паралельною їй; всі множники добутків, які входять до визначника із знаком «–», знаходяться на бічній діагоналі та трикутниках із стороною, паралельною їй.

Якщо $|A| = \|a_{ij}\|$, то мінор *першого порядку* $M_s^k = a_{sk}$. Алгебраїчне доповнення такого мінору позначають $A_{sk} = (-1)^{s+k} M_s'^k$ і називають ***алгебраїчним доповненням елементу*** a_{sk}. При цьому мінор $M_s'^k$ – це визначник, що утворюється із матриці A викреслюванням s-го рядочка та k-го стовпчика.

Визначник $\Delta = \|a_{ij}\|$ *n-го порядку дорівнює сумі всіх добутків елементів i-го рядка або k-го стовпця на їх алгебраїчні доповнення, тобто*

Формула ***розкладу визначника за елементами*** i***-го рядка:***

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Формула ***розкладу визначника за елементами*** k***-го стовпця***:

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}.$$

Теорема. *Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць:* $|AB| = |A| \cdot |B|, \ \forall A, B \in M_n\ (\mathbf{R})$.

Аудиторна робота

Приклад 5.1. Визначити парність підстановки:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо кількість інверсій підстановки, яка дорівнює сумі інверсій верхнього і нижнього рядків. Інверсію можна розглядати як випадок, коли в перестановці більше число стоїть раніше меншого. Випишемо всі інверсії верхнього рядка:

$(2,1)$, $(3,1)$, $(7,1)$, $(7,6)$, $(7,5)$, $(7,4)$, $(6,5)$, $(6,4)$, $(5,4)$.

Цих інверсій 9. Аналогічно випишемо всі інверсії нижнього рядка:

$(3,2)$, $(3,1)$, $(7,6)$, $(7,2)$, $(7,4)$, $(7,1)$, $(7,5)$, $(6,2)$, $(6,4)$,.

$(6,1)$, $(6,5)$, $(2,1)$, $(4,1)$.

Цих інверсій – 13. Загальна кількість інверсій даної підстановки $9+13=22$, тому ця підстановка парна. ▲

Приклад 5.2. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Розв'язання. а) Обчислимо як різницю добутку елементів головної діагоналі та бічної діагоналі: $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 1\cdot 7 = -1.$

б) Обчислимо за правилом трикутників:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 2 + 7\cdot 0\cdot(-3) + 2\cdot 4\cdot(-1) - (-3)\cdot 5\cdot(-1) - 0\cdot 4\cdot 1 - 7\cdot 2\cdot 2 = \\ = 10 + 0 - 8 - 15 - 0 - 28 = -41.$$ ▲

Приклад 5.3. Обчислити визначник розкладанням по рядку чи по стовпчику.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Легко помітити, що даний визначник у другому рядку має два нульові елементи. Тому розкладати цей визначник і будемо по другому рядку. Формула цього розкладу

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} =$$

$$= 5\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot A_{22} + (-1)\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot A_{24} =$$

$$= (-5)\cdot(-4) + (-2) = 18.$$

Відповідь: $\Delta = 18$.

Вправа 5.1. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Вправа 5.2. Обчислити визначники розкладанням по рядку (стовпчику): а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Вправа 5.3 Обчислити визначник добутку матриць A і B, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вправа 5.4 Обчислити квадрат визначника $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$, користуючись теоремою про визначник добутку.

Самостійна робота

Задача 5.1. Визначити парність підстановки:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 8 & 6 & 3 & 1 & 7 \\ 8 & 5 & 7 & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 5.2. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Задача 5.4. Обчислити визначники розкладанням по рядку (стовпчику): а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$.

Задача 5.5. Знайти визначник:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -7 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Задача 5.6. Обчислити визначник добутку матриць A і B, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5.7. Обчислити квадрат визначника, користуючись теоремою про визначник добутку $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Заняття 6. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Крамера та матричним методом. Знаходження оберненої матриці.

Мета: *Опанувати метод Крамера, знаходження оберненої матриці за допомогою формули, матричний метод розв'язування системи лінійних рівнянь.*

Необхідні теоретичні матеріали

Метод Крамера застосовується для розв'язування систем лінійних рівнянь $AX = B$, якщо матриця A – квадратна і $|A| \neq 0$ (A – невироджена матриця).

Введемо такі позначення:

$$\Delta = |A|; \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, i = 1,2,\dots,n.$$

Очевидно, що визначник Δ_i отримується із визначника Δ заміною i–го стовпчика стовпчиком вільних членів B.

Розв’язок системи $AX = B$ знаходиться за наступними *формулами Крамера:* $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1,2,\ldots,n.$

Знаходження розв’язку системи лінійних рівнянь за цими формулами називається ***методом Крамера.***

Кожна невироджена матриця $A \in M_n(\mathbf{R})$ *має обернену* A^{-1}*, яка обчислюється за формулою:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & & \ldots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} *– алгебраїчні доповнення до елементів* a_{ij} *матриці* A.

Якщо у системи $AX = B$ матриця A – невироджена, то розв’язок такої системи можна знайти як $X = A^{-1}B$.

Знаходження розв’язку системи за цією формулою називається ***матричним методом*** розв’язування системи.

Зауважимо, що для матричного рівняння $AX = B$, де $A = (a_{ij})_m^n$, $B = (bij)_m^p$ –дані матриці, а $X = (x_{ij})_n^p$ – невідома матриця та матриця A – невироджена, розв’язком також буде $X = A^{-1}B$.

Аудиторна робота

Приклад 6.1. Розв’язати систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -3. \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Розв’язання. Матриця цієї системи квадратна, тому знайдемо значення визначника цієї матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 24 + 8 + 30 - 8 + 16 = 2 \neq 0.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то дану систему можна розв’язувати методом Крамера. Знайдемо значення визначників Δ_i, $i = 1,2,3$, які одержуються із визначника Δ заміною відповідного стовпчика на стовпчик вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 59;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -26;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

За формулами Крамера одержуємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{59}{2}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -13; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{2}.$$

Відповідь: $\left(59/2,\ -13,\ 3/2 \right)$. ▲

Приклад 6.2. Знайти матрицю, обернену до даної: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Розв'язання. Так як $|A| = 2 \neq 0$, то матриця A невироджена, тому має обернену. Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} матриці A. Для їх обчислення скористаємось формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_i'^{\,j}$. Маємо

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

За формулою оберненої матриці одержуємо:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -4 & 7\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3{,}5\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0{,}5\end{pmatrix}.$$

Приклад 6.3. Знайти обернену матрицю до матриць

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця A невироджена, оскільки $|A|=5+12+8-6-8-10=1\neq 0$, тому має обернену. Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-3;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-2;\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -5\end{vmatrix}=-1;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & -5\end{vmatrix}=1;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-2;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=1.$$

За формулою оберненої матриці одержуємо: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

Приклад 6.4. Розв'язати систему матричним методом:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=-1\\ -x_1-x_2+2x_3=-2\\ 2x_1+4x_2-5x_3=-2\end{cases}.$$

Розв'язання. У матричному вигляді ця система має вигляд

$$AX=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -2\end{pmatrix}=B.$$

Для знаходження розв'язку X матричним методом необхідно знайти матрицю A^{-1} і помножити її на стовпчик вільних членів B. Обернена матриця до матриці цієї системи знайдена в попередньому прикладі 6.3 і $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Отже $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $(5, -3, 0)$

Вправи до виконання:

Вправа 6.1. Розв'язати системи методом Крамера:

а) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 = 8 \\ 5x_1 + 3x_2 = 19 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$,

в) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \\ 8x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$, г) $\begin{cases} 3x_1 + x_3 = -3 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$.

Вправа 6.2. Знайти обернену матрицю за допомогою формули.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вправа 6.3. Розв'язати лінійну систему матричним методом.

а) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -2 \end{cases}$.

Вправа 6.4. Розв'язати рівняння матричним методом.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, б) $X \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Самостійна робота

Задача 6.1. Розв'язати системи методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 21, \\ 7x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \\ 4x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$, г) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases}$.

Задача 6.2. Знайти обернену матрицю за допомогою формули.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & -2 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 6.3. Розв'язати лінійну систему матричним методом.

а) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$.

Заняття 7. Контрольна робота № 1

Контрольна робота охоплює теми: «Система лінійних рівнянь», «Метод Гауса», «Операції на матрицями», «Елементарні перетворення матриць», «Елементарні матриці», «Визначники та їх властивості», «Методи знаходження визначника», «Метод Крамера та матричний метод розв’язування систем лінійних рівнянь».

Метою даної контрольної роботи є перевірка степені оволодіння навичками розв’язування систем лінійних рівнянь двома способами, запису загального розв’язку системи у вигляді вектора, обчислення визначника, оберненої матриці.

Завдання дають можливість оцінити основні навички з вивченого матеріалу.

Зміст роботи:

1. Розв’язати систему методом Гаусса. (4 бали)
2. Розв’язати систему методом Крамера. (4 бали)
3. Знайти матрицю, обернену до даної. (4 бали)
4. Обчислити визначник 4-го порядку. (4 бали)

Заняття 8. Дії над векторами. Лінійна залежність векторів. Обчислення рангу матриці. Базисний мінор. Застосування критерію сумісності та критерію визначеності.

Мета*:* *Опанувати навички дій над векторами, знаходження лінійної комбінації. Засвоїти означення лінійної залежності та лінійної незалежності векторів, поняття рангу. Навчитись визначати ЛЗ та ЛНЗ через означення та через поняття рангу. Навчитись знаходити ранг приведенням до східчастої матриці.*

Необхідні теоретичні матеріали

Вектором розміру n називається упорядкований набір з n чисел $a=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$. Два вектори називаються ***рівними***, якщо їх відповідні компоненти рівні.

На множині векторів задаються операції *додавання* і *множення* на число: $\forall a=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n), b=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\in\mathbf{R}^n$, $\forall\lambda\in\mathbf{R}$

$$a+b=(\alpha_1+\beta_1,...,\alpha_n+\beta_n),\ \lambda a=(\lambda\alpha_1,...,\lambda\alpha_n).$$

Лінійною комбінацією векторів $a_1,a_2,...,a_s\in\mathbf{R}^n$ з дійсними коефіцієнтами $k_1,k_2,...k_s$ називається вектор $y\in\mathbf{R}^n$, що дорівнює сумі

$$y=k_1a_1+k_2a_2+...+k_sa_s=\sum_{i=1}^{s}k_ia_i.$$

Лінійна комбінація довільних векторів з нульовими коефіцієнтами дорівнює θ. Вектори $a_1,a_2,...,a_s$ називаються ***лінійно залежними (ЛЗ),*** якщо для них існують не всі рівні нулю коефіцієнти $k_1,k_2,...,k_s$ такі, що лінійна комбінація $\sum_{i=1}^{s}k_ia_i=\theta$. В протилежному випадку, якщо лінійна комбінація векторів дорівнює нулю тільки при нульових коефіцієнтах, ці вектори називаються ***лінійно незалежними (ЛНЗ).***

Властивості системи векторів.

1. *Система, що складається з одного нульового вектора, лінійно залежна*.

2. *Система, що складається з одного ненульового вектора, лінійно незалежна.*

3. *Якщо вектори* a,b *пропорційні* $(a=\lambda b)$, *то система векторів* a,b *– лінійно залежна*:

4. *Кожна підсистема лінійно незалежної системи векторів лінійно незалежна*.

5. *Якщо підсистема векторів лінійно залежна, то вся система лінійно залежна*.

Теорема. (Критерій лінійної залежності.) *Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли один з векторів можна виразити через лінійну комбінацію решти векторів системи.*

Ранг матриці – це максимальна кількість лінійно незалежних рядків або стовпчиків. Якщо ранг матриці A дорівнює r, то позначають $rg\ A = r$.

Наслідок. *Для того, щоб рядки матриці були лінійно залежні, необхідно і достатньо, щоб її ранг був менший числа рядків.*

Наслідок. *Для того, щоб рядки матриці були лінійно незалежні, необхідно і достатньо, щоб її ранг дорівнював числу рядків.*

Твердження. *Елементарні перетворення рядків і стовпчиків не змінюють рангу матриці.*

Теорема. *Ранг східчастої матриці дорівнює кількості її ненульових рядків.*

Аудиторна робота

Приклад 8.1. Перевірити, чи лінійно залежні вектори

а) $a_1 = (1, -3,\ -1, 2)$, $a_2 = (3, -7, -1, 5)$, $a_3 = (1, -2, 0, 3)$;

б) $a_1 = (1, -3,\ -1, 2)$, $a_2 = (3, -7, -1, 8)$, $a_3 = (1, -2, 0, 3)$.

Розв'язання. а) Складемо з цих векторів лінійну комбінацію з невідомими коефіцієнтами та прирівняємо її до нульового вектора:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = \theta.$$

Підставимо значення даних векторів та виконаємо дії:

$$x_1(1,-3,-1,2) + x_2(3,-7,-1,5) + x_3(1,-2,0,3) =$$
$$= (x_1 + 3x_2 + x_3, -3x_1 - 7x_2 - 2x_3, -x_1 - x_2, 2x_1 + 5x_2 + 3x_3,) = (0,0,0,0).$$

За означенням рівності векторів отримаємо однорідну систему чотирьох рівнянь: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$.

Приведемо матрицю цієї системи до східчастої форми:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -7 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З неї видно, що система сумісна і не має вільних змінних. В такому випадку система має єдиний розв'язок. Для однорідної системи це означає єдиний нульовий розв'язок. Тобто, лінійна комбінація векторів a_1, a_2, a_3 дорівнює нулю тільки при нульових коефіцієнтах x_1, x_2, x_3. Тоді, за означенням, вектори a_1, a_2, a_3 є ЛНЗ.

б) Виконуючи аналогічні дії з даними векторами, отримаємо однорідну систему чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Приведемо матрицю цієї системи до східчастої форми:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -7 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З неї видно, що система сумісна і має одну вільну зміну. В такому випадку система має безліч розв'язків, серед яких безліч ненульових. Тобто, лінійна комбінація векторів a_1, a_2, a_3 дорівнює нулю не тільки при нульових коефіцієнтах x_1, x_2, x_3. Тоді, за означенням, вектори a_1, a_2, a_3 є ЛЗ.

Зауваження. На практиці, для вирішення питання про ЛЗ чи ЛНЗ заданих векторів, складають матрицю стовпчиків із цих векторів, приводять її до східчастої форми та роблять висновок про наявність ненульових коефіцієнтів чи їх відсутність, а складати лінійну комбінацію векторів та знаходити однорідну систему, що їй відповідає, немає необхідності.

Приклад 8.2. Знайти ранг даної матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & -4 & -1 & 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Приведемо дану матрицю елементарними перетвореннями рядків до східчастої матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & -4 & -1 & 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{lll} (-3) & (-2) & 2 \\ \hookleftarrow & & \\ & \hookleftarrow & \\ & & \hookleftarrow \end{array} \approx$$

$$\approx\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & -3 & 12 \end{pmatrix}\begin{array}{ll} & \\ (-1) & 9 \\ \hookleftarrow & \\ & 7\hookleftarrow \end{array} \approx$$

$$\approx\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 66 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так як елементарні перетворення не змінюють рангу матриці, а одержана східчаста матриця має три ненульових рядочки, тому $rg\ A = 3$.

Приклад 8.3. З'ясувати, чи є лінійно залежною, чи лінійно незалежною система векторів (застосувати означення рангу):

$$a = (1,2,3),\ b = (3,2,1),\ c = (4,1,1).$$

Розв'язання. Складемо з даних трьох векторів матрицю і знайдемо її ранг:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -7 & -11 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ненульових рядків три, таким чином, $rg\,A = 3$ і дорівнює кількості векторів. Отже, за наслідком із означення рангу, вектори a, b, c є ЛНЗ.

Приклад 8.4. Знайти ранг матриці A в залежності від параметру:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця A ненульова, має 3 рядки і 4 стовпчики, тому її ранг може дорівнювати 1, 2 або 3. Будемо виконувати елементарні перетворення матриці A, які наближають до східчастої матриці: поміняємо місцями перший і третій рядки та застосуємо наступні елементарні перетворення:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & a & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2)(-1) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & 12+a & 3 \\ 0 & -10+a & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (1) \\ (-3)\hookleftarrow \end{matrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & 12+a & 3 \\ 0 & 9-3a & a-3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так як елементарні перетворення не змінюють рангу матриці, то rgA дорівнює рангу останньої матриці. При $a=3$ ця матриця має східчасту форму і два ненульових рядки: $\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, значить $rgA=2$ при $a=3$.

Якщо $a \neq 3$, то для приведення до східчастої форми можна другий рядок останньої матриці помножити на $\frac{9-3a}{21} = \frac{3-a}{7}$ і додати до третього рядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & 12+a & 3 \\ 0 & 9-3a & a-3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \left(\frac{3-a}{7}\right) \\ \hookleftarrow \end{matrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & 12+a & 3 \\ 0 & 0 & (5+a)(3-a)/7 & \frac{3(3-a)}{7} \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку матриця буде мати три ненульових рядки (наприклад, $\frac{3(3-a)}{7} \neq 0$), значить, при $a \neq 3$ $rgA=3$.

Відповідь: $rgA=2$ при $a=3$; $rgA=3$ при $a \neq 3$.

Вправи до виконання:

Вправа 8.1. Знайти лінійну комбінацію векторів $a_1, a_2, ..., a_s$ з коефіцієнтами $l_1, l_2, ..., l_s$.

а) $a_1 = (1,0,0,-1)$, $a_2 = (1,2,3,4)$, $a_3 = (2,2,3,3)$, $l_1 = 3,\ l_2 = -4$, $l_3 = 5$;	б) $a_1 = (1,0,0,-1)$, $a_2 = (1,2,3,4)$, $a_3 = (2,2,3,3)$, $l_1 = 1,\ l_2 = 1$, $l_3 = -1$;	в) $a_1 = (1,0,3)$, $a_2 = (2,5,1)$, $l_1 = -4,\ l_2 = 2$.

Вправа 8.2. Виразити вектор a_4 через лінійну комбінацію векторів a_1, a_2, a_3: $a_1 = (1,-1,0,0)$, $a_2 = (0,1,0,2)$, $a_3 = (1,0,3,0)$, $a_4 = (2,1,3,4)$.

Вправа 8.3. Перевірити, чи лінійно залежні вектори.

а) $a_1 = (1,2,3)$, $a_2 = (3,6,7)$;	б) $a_1 = (2,-3,1)$, $a_2 = (3,-1,5)$, $a_3 = (1,-4,3)$;	в) $a_1 = (2,-3,-1)$, $a_2 = (3,-2,-5)$, $a_3 = (1,-4,3)$;
г) $a_1 = (2,0,0)$, $a_2 = (0,1,0)$;	д) $a_1 = (1,3)$, $a_2 = (0,5)$, $a_3 = (2,6)$, $a_4 = (3,5)$;	е) $a_1 = (2, -3, 1, 2)$, $a_2 = (3, 2, -1, 5)$, $a_3 = (1,-4, 0, 3)$;

Вправа 8.4. Користуючись властивостями лінійної залежності, визначити усно, чи будуть лінійно залежними вектори? Чому?

а) 1) $a, b, 2a, b, c$; 2) $a, 2a, b, c$; 3) $a, 3a - c, b, c$; 4) $b, c, 2a - b + c$

де a, b, c – лінійно незалежні вектори одного простору R^n.

б) 1) (0,0,0), (7,5,1), (11,6,4); 2) (0,1,2), (4,3,1), (0,3,6);

3) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1); 4) (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0);

5) $a=(0,1,2)$; 6) (0,1,2), (0,0,1);

7) (0,1,2), (0,0,1), (0,1,3); 8) (0,1,2), (0,1,3).

Вправа 8.5. Знайти ранг матриці:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \text{ в) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вправа 8.6. З'ясувати, чи є лінійно залежною, чи лінійно незалежною система векторів (застосувати означення рангу):

$$a=(1,2,1,1),\ b=(1,1,1,0),\ c=(1,0,1,0),\ d=(0,3,0,1).$$

Вправа 8.7 Усно по зовнішньому вигляду системи векторів визначити, чи є ця система лінійно залежною?

а) $a=(1,3,2)$, $b=(2,-1,3)$, $c=(3,-5,4)$ $d=(1,17,4)$;	б) $a=(1,5)$, $b=(0,3)$, $c=(2,6)$, $d=(4,4)$;	в) $a=(0,0,2,3)$, $b=(1,1,3,4)$, $c=(0,3,0,-1)$.

Самостійна робота

Задача 8.1. Знайти лінійну комбінацію векторів $a_1,a_2,...,a_s$ з коефіцієнтами $l_1,l_2,...,l_s$.

а) $a_1=(1,3,5)$, $a_2=(4,3,1)$, $l_1=2,\ l_2=-1$;	б) $a_1=(0,1,1)$, $a_2=(0,0,1)$, $a_3=(1,0,0)$, $l_1=1,\ l_2=-2,\ l_3=3$;

Задача 8.2. Виразити вектор a_4 через вектори a_1, a_2, a_3:

а) $a_1 = (2,-1,3,5)$, $a_2 = (4,-3,1,3)$, $a_3 = (4,-1,1,3)$, $a_4 = (4,-1,15,17)$,

б) $a_1 = (2,-2,1,3)$, $a_2 = (6,-3,-3,9)$, $a_3 = (4,-5,2,6)$, $a_4 = (4,-1,5,6)$

Задача 8.3. Перевірити, чи лінійно залежні вектори.

а) $a_1 = (4,-5,2,6)$, $a_2 = (2,-2,1,3)$, $a_3 = (6,-3,-3,9)$, $a_4 = (4,-1,5,6)$;	б) $a_1 = (1,0,0,0)$, $a_2 = (0,1,0,0)$, $a_3 = (0,0,1,0)$, $a_4 = (0,0,0,1)$;	в) $a_1 = (1,2,3,2)$, $a_2 = (-2,1,-2,-5)$, $a_3 = (1,-1,-1,1)$, $a_4 = (-1,2,1,-2)$;

Задача 8.4. Знайти ранг матриці:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ в) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 8.5. З’ясувати, чи є лінійно залежною, чи лінійно незалежною система векторів (застосувати означення рангу).

а) $a = (1,0,3)$, $b = (4,7,-11)$, $c = (8,7,1)$;

б) $a = (1,0,1,2)$, $b = (1,3,0,1)$, $c = (1,-3,2,0)$, $d = (0,1,-1,-2)$.

Задача 8.6. Знайти ранг матриці в залежності від параметрів

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & b & 3 \\ 3 & b & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & a & 7 & b \end{pmatrix}.$$

Заняття 9. Однорідні системи лінійних рівнянь. Знаходження фундаментальної системи розв'язків за алгоритмом.

Мета: *Навчитись знаходити ФСР однорідної системи та загальний розв'язок через ФСР.*

Необхідні теоретичні матеріали

Система лінійних рівнянь називається ***однорідною***, якщо її стовпчик вільних членів складається з нулів.

В матричній формі така система має вигляд $AX = O$. Вона завжди сумісна, бо нульовий розв'язок завжди є розв'язком цієї системи.

Теорема. (Про розв'язки однорідної системи)

1. *Сума двох довільних розв'язків однорідної системи є розв'язком цієї системи.*

2. *Довільний розв'язок однорідної системи, помножений на число, є розв'язком цієї системи.*

Наслідок. *Кожна лінійна комбінація розв'язків однорідної системи є розв'язком цієї системи.*

Максимальна лінійно незалежна сукупність розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь називається ***фундаментальною сукупністю розв'язків (ФСР)*** цієї системи.

Теорема. (Про фундаментальну сукупність розв'язків)

Нехай r *– ранг матриці однорідної системи лінійних рівнянь з* n *невідомими. Якщо* $r < n$, *то кожна фундаментальна сукупність розв'язків однорідної системи складається з* $(n-r)$ *розв'язків* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-r}$ *однорідної системи.*

Алгоритм знаходження фундаментальної сукупності розв'язків

1. Матриця системи $AX = O$ приводиться до східчастої форми A' яка має r ненульових рядків $(rg\ A = rg\ A' = r)$. Отримаємо систему $A'X = O$.

2. За допомогою нескладного аналізу матриці A' вибираємо „з кожної сходинки по одній" r головних та решту $n-r$ незалежних змінних. Нехай $x_1, ..., x_r$ – головні, а $x_{r+1}, ..., x_n$ – незалежні змінні системи.

3. Складається таблиця з $n-r$ рядків:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	x_{r+2}	$\dots$	x_n
α_1			$\dots$		1	0	$\dots$	0
α_2			$\dots$		0	1	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
α_{n-r}					0	0	$\dots$	1

де під $n-r$ незалежними змінними вписується одинична матриця.

4. Значення незалежних змінних $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, що відповідають першому рядку попередньої таблиці – $1,0,0,\dots 0$, підставляємо в систему $A'X = O$. З неї, починаючи з останнього рівняння, почергово знаходяться і вносяться в перший рядок таблиці значення головних змінних

$$x_r = x_r^1, \dots, x_2 = x_2^1, x_1 = x_1^1.$$

Вектор $\alpha_1 = \left(x_1^1, x_2^1, \dots, x_r^1, 1, 0, 0, \dots, 0\right)$ буде першим розв'язком ФСР.

Потім замість незалежних змінних в систему $A'X = O$ підставляються відповідні значення другого рядка таблиці: $0, 1, 0, \dots, 0$ і аналогічно знаходимо і вносимо в таблицю другий розв'язок ФСР:

$$\alpha_2 = \left(x_1^2, x_2^2, \dots, x_r^2, 0, 1, 0, \dots, 0\right).$$

Так продовжуємо до $(n-r)$-го розв'язку α_{n-r}.

Таблиця буде мати вигляд:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	x_{r+2}	$\dots$	x_n
α_1	x_1^1	x_2^1	$\dots$	x_r^1	1	0	$\dots$	0
α_2	x_1^2	x_2^2	$\dots$	x_r^2	0	1	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
α_{n-r}	x_1^{n-r}	x_2^{n-r}	$\dots$	x_r^{n-r}	0	0	$\dots$	1

Одержані вектори $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ утворюють ФСР однорідної системи $AX = O$.

5. Якщо необхідно знайти загальний розв'язок системи $AX = O$ через ФСР, то його можна записати у наступному вигляді :

$$F = \sum_{i=1}^{n-r} c_i \alpha_i = \{\ (c_1 x_1^1 + c_2 x_1^2 + \dots + c_{n-r} x_1^{n-r},\ c_1 x_2^1 + c_2 x_2^2 + \dots + c_{n-r} x_2^{n-r}, \dots,$$
$$c_1 x_r^1 + c_2 x_r^2 + \dots + c_{n-r} x_r^{n-r}, c_1, c_2, \dots, c_{n-r}), \quad c_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\dots,n-r\ \}.$$

Аудиторна робота

Приклад 9.1. Знайти ФСР і загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 0, \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & + & 7x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 8x_4 & + & 2x_5 & = & 0. \end{cases}$$

▼ Скористаємося вказаним алгоритмом знаходження ФСР.

1. Матрицю системи приведемо до східчастої форми:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} (-2)(-1) \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} (2) \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A', \; r = rg\ A = rg\ A' = 2.$$

2. З кожної сходинки матриці A' вибираємо дві головних та 5 – 2 = 3 незалежних змінних. Нехай x_2, x_3 – головні (так як на першій і другій сходинці коефіцієнти при них дорівнюють –1), а x_1, x_4, x_5 – незалежні змінні системи.

3. Складемо таблицю з трьох рядків, де під незалежними змінними вписується одинична матриця:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
α_1	1			0	0
α_2	0			1	0
α_3	0			0	1

(1)

Випишемо систему $A'X = O$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ - x_3 + 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Значення незалежних змінних x_1, x_4, x_5, що відповідають першому рядку таблиці (1) – $1,0,0$, підставляємо в цю систему. З неї, починаючи з останнього рівняння, почергово знаходяться значення головних змінних x_3, x_2 і вносяться в перший рядок таблиці (1):

$$x_3 = 5x_4 - x_5 = 5 \cdot 0 - 0 = 0,$$

$$x_2 = 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 2.$$

Вектор $\alpha_1 = (1, 2, 0, 0, 0)$ буде першим розв'язком фундаментальної сукупності.

Потім замість незалежних змінних x_1, x_4, x_5 в систему $A'X = O$ підставляються відповідні значення другого рядка таблиці (1) – $0, 1, 0$ і аналогічно знаходимо і вносимо в таблицю другий розв'язок фундаментальної сукупності:

$$x_3 = 5x_4 - x_5 = 5 \cdot 1 - 0 = 5,$$

$$x_2 = 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 13.$$

Вектор $\alpha_2 = (0, 13, 5, 1, 0)$ буде другим розв'язком фундаментальної сукупності.

Третій розв'язок фундаментальної сукупності знаходиться аналогічно, підставляючи замість незалежних змінних x_1, x_4, x_5 в систему $A'X = O$ значення третього рядка таблиці (1) $-0, 0, 1$:

$$x_3 = 5x_4 - x_5 = 5 \cdot 0 - 1 = -1,$$

$$x_2 = 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 1.$$

І в третьому рядку таблиці (1) буде записано розв'язок фундаментальної сукупності $\alpha_3 = (0, 1, -1, 0, 1)$. Таблиця (1) буде мати вигляд:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
α_1	1	2	0	0	0
α_2	0	13	5	1	0
α_3	0	1	–1	0	1

Отже, ФСР, яка складається із розв’язків $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, побудована. Запишемо тепер загальний розв’язок даної однорідної системи:

$$F = \{\, c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\} =$$

$$= \{(c_1,\quad 2c_1 + 13c_2 + c_3,\quad 5c_2 - c_3,\quad c_2,\quad c_3),\quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\}. \ \blacktriangle$$

Вправи до виконання:

Вправа 9.1. Знайти фундаментальну систему розв’язків та загальний розв’язок однорідних систем.

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 \qquad - x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 - 11x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 - 14x_5 = 0. \end{cases}$,

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$, е) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$,

Самостійна робота

Задача 9.1. Знайти фундаментальну систему розв’язків та загальний розв‘язок однорідних систем.

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0, \\ 3x_1 - 12x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 - x_6 = 0, \\ 5x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 0, \\ 3x_2 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$, г) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

Заняття 10. Критерії сумісності та визначеності. Неоднорідні системи лінійних рівнянь

Мета: *Навчитись визначати сумісність та визначеність системи за допомогою відповідних критеріїв. Навчитись знаходити загальний розв'язок неоднорідної системи через частинний розв'язок та ФСР відповідної однорідної.*

Необхідні теоретичні матеріали

Теорема 1. (Критерій сумісності). *Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці дорівнює рангу матриці системи.*

Твердження. (Критерій визначеності). *Система лінійних рівнянь визначена тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці і кількості невідомих.*

Неоднорідну систему лінійних рівнянь з n невідомими $AX = B$ можна розв'язати, використовуючи фундаментальну систему ***відповідної однорідної системи*** $AX = O$.

Теорема. *Нехай* β *– частинний розв'язок системи* $AX = B$. *Для довільного розв'язку* α *відповідної однорідної системи* $AX = O$ *сума* $\beta + \alpha$ *також є розв'язком системи* $AX = B$.

Теорема. *Нехай* β *– частинний розв'язок системи* $AX = B$. *Для довільного розв'язку* γ *системи* $AX = B$ *існує такий розв'язок* α *відповідної однорідної системи* $AX = O$, *що* $\gamma = \beta + \alpha$.

З цих теорем випливає, що загальний розв'язок Φ системи $AX = B$ є сумою деякого її частинного розв'язку β і загального розв'язку F відповідної однорідної системи $AX = O$: $\Phi = \beta + F$.

Алгоритм знаходження загального розв'язку неоднорідної системи через ФСР відповідної однорідної

1. Розширена матриця системи $(A \mid B)$ приводиться до матриці $(A' \mid B')$, де A' – східчаста матриця рангу r.

2. Якщо виконуються умови критерію сумісності, то вибираємо головні і незалежні змінні. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – головні , $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – незалежні змінні.

3. Складаємо і заповнюємо таблицю:

X	x_1	x_2	...	x_r	x_{r+1}	x_{r+2}	...	x_n	Зауваження
α_1	x_1^1	x_2^1	...	x_r^1	1	0	...	0	
α_2	x_1^2	x_2^2	...	x_r^2	0	1	...	0	$A'X=O$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	
α_{n-r}	x_1^{n-r}	x_2^{n-r}	...	x_r^{n-r}	0	0	...	1	
β	x_1^0	x_2^0	...	x_r^0	0	0	...	0	$A'X=B'$

Ця таблиця має $(n-r)+1$ рядків. Перші $n-r$ рядків заповнюються так, як у алгоритмі знаходження ФСР, застосовуючи обчислення до системи $A'X=O$.

Щоб знайти частинний розв’язок β та заповнити останній рядок таблиці, замість незалежних змінних можна взяти довільні значення і записати їх у стовпчиках під відповідними змінними, а потім із системи $A'X=B'$ знайти $x_r=x_r^0,\ldots,x_2=x_2^0,x_1=x_1^0$ аналогічно тому, як це робилось в попередньому пункті. Якщо покласти $x_{r+1}=x_{r+2}=\ldots=x_n=0$ (а так найчастіше і робиться на практиці), то, починаючи з останнього рівняння системи $A'X=B'$, почергово знаходяться і вносяться в останній рядок даної таблиці значення головних змінних $x_r=x_r^0,\ldots,x_2=x_2^0,x_1=x_1^0$, а частинний розв’язок буде мати вигляд: $\beta=\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_r^0,0,0,\ldots,0\right)$.

4. Знаходимо загальний розв’язок системи: $\Phi=\beta+F=$
$=\left\{\left(x_1^0+c_1x_1^1+c_2x_1^2+\ldots+c_{n-r}x_1^{n-r};\ \ldots;\ x_r^0+c_1x_r^1+\ldots+c_{n-r}x_r^{n-r};\ c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_{n-r}\right),\right.$
$\left.c_i\in\mathbf{R},\ i=1,2,\ldots,n-r\ \right\}.$

Аудиторна робота

Приклад 10.1. Дослідити на сумісність та визначеність системи:

$$\text{а) }\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+2x_2+x_3+2x_4=2,\\ 2x_1+3x_2+2x_3+3x_4=3;\end{cases}\qquad \text{б) }\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3+4x_4=0,\\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=2,\\ 7x_1-4x_2\qquad+9x_4=3.\end{cases}$$

Розв’язання. а) Складемо розширену матрицю даної системи та приведемо її до східчастої форми:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\1&2&1&2&2\\2&3&2&3&3\end{array}\right)\begin{array}{cc}(-1)&(-2)\\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow\end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1\end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-1)\\ \hookleftarrow\end{array}\approx .$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Ранг цієї матриці, а значить і розширеної матриці системи, дорівнює 2. Ліва частина цих матриць відповідає матриці системи. Її ранг також дорівнює 2. За критеріями сумісності та визначеності ця система є сумісною (ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці), але є невизначеною (бо ці ранги не дорівнюють кількості невідомих, яких 4)

Відповідь: система сумісна, невизначена.

б) Складемо розширену матрицю даної системи та приведемо її до східчастої форми:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&-3&1&4&0\\3&2&-2&1&2\\7&-4&0&9&3\end{array}\right)\begin{array}{cc}(-3)&(-7)\\ (2)\hookleftarrow & \\ & (2)\hookleftarrow\end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c}2&-3&1&4&0\\0&13&-7&-10&4\\0&13&-7&-10&6\end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-1)\\ \hookleftarrow\end{array}\approx .$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c}2&-3&1&4&0\\0&13&-7&-10&4\\0&0&0&0&2\end{array}\right)$$

Ранг цієї матриці, а значить і розширеної матриці системи, дорівнює 3. Ліва частина цих матриць відповідає матриці системи. Її ранг дорівнює 2. За критеріями сумісності та визначеності ця система не є ні сумісною, ні визначеною.

Взагалі кажучи, якщо система не є сумісною, то мова про її визначеність чи невизначеність не може йти за означенням визначеності та невизначеності.

Відповідь: система несумісна. ▲

Приклад 10.2. Знайти частинний та загальний розв‘язки систем рівнянь, користуючись фундаментальною системою розв‘язків відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_5 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_4 - 4x_5 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємося алгоритмом знаходження загального розв'язку неоднорідної системи через ФСР відповідної однорідної.

1. Розширену матрицю даної системи приведемо до східчастої матриці:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -3 & -2 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 7 & 2 \\ 3 & -5 & 0 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -3 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 8 & 14 & 6 & 22 & 8 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & 11 & 2 \end{array}\right) \approx \approx \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -3 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & 7 & 3 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) = (A'|B'),$$

$$r = rg\ A = rg\ A' = 3.$$

2. Так як $rg\ (A|B) = rg\ (A'|B') = 3$ і $rg\ A = 3$, то система сумісна. Тут зручно обрати x_1, x_2, x_3 – головні змінні, а x_4, x_5 – незалежні змінні системи.

3. Складаємо і заповнюємо таблицю з $n-r+1=5-3+1=3$ рядків. Перші $n-r=2$ рядки заповнюються значеннями ФСР відповідної однорідної системи: $\begin{cases} x_1-3x_2-3x_3-2x_4-5x_5 &=0, \\ 4x_2+5x_3+3x_4+11x_5 &=0, \\ 2x_3 &=0. \end{cases}$

Цей процес нам відомий із попереднього заняття.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Зауваження
α_1	-1	-3	0	4	0	
						$A'X=O$
α_2	-13	-11	0	0	4	
β						$A'X=B'$

Щоб знайти частинний розв'язок β та заповнити останній рядок таблиці, замість незалежних змінних x_4, x_5 можна взяти довільні значення і записати їх у стовпчиках під відповідними змінними, а потім із системи $A'X=B'$: $\begin{cases} x_1-3x_2-3x_3-2x_4-5x_5 &=-2, \\ 4x_2+5x_3+3x_4+11x_5 &= \ 4, \\ 2x_3 &=-2, \end{cases}$

починаючи з останнього рівняння, знайти x_3, x_2, x_1. Якщо покласти $x_4=x_5=0$, то

1. $2x_3=-2 \quad \Rightarrow x_3=-1$, значення x_3 вноситься в таблицю;

2. $4x_2+7x_3+3x_4+11x_5=4 \quad \Rightarrow \quad 4x_2-7+0+0=4 \quad \Rightarrow \quad x_2={}^{11}\!/_{4}$, в таблицю вноситься значення x_2;

3. $x_1-3x_2-3x_3-2x_4-5x_5=-2 \Rightarrow x_1-{}^{33}\!/_{4}+3+0+0=-2 \Rightarrow x_1={}^{13}\!/_{4}$, в

таблицю вноситься значення x_1, і в таблиці в останньому рядку виявляється записаним частинний розв'язок $\beta = \left(\frac{13}{4}, \frac{11}{4}, -1, 0, 0\right)$.

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Зауваження
α_1	-1	-3	0	4	0	$A'X = O$
α_2	-13	-11	0	0	4	
β	$\frac{13}{4}$	$\frac{11}{4}$	-1	0	0	$A'X = B'$

4. Знаходимо загальний розв'язок системи $AX = B$ за формулою: $\Phi = \beta + F = \beta + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$.

Відповідь: частинний розв'язок $\beta = \left(\frac{13}{4}, \frac{11}{4}, -1, 0, 0\right)$, загальний розв'язок

$$\Phi = \left\{ \left(\frac{13}{4} - c_1 - 13c_2,\ \frac{11}{4} - 3c_1 - 11c_2,\ -1, 4c_1,\ 4c_2\right),\quad c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Вправи до виконання:

Вправа 10.1. Дослідити на сумісність та визначеність системи:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 = -2, \\ 2x_1 + x_2 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 2. \end{cases}$

Вправа 10.2. Дослідити на сумісність та визначеність системи в залежності від параметру: $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

Вправа 10.3. Знайти частинний та загальний розв‘язки систем рівнянь, користуючись фундаментальною системою розв‘язків відповідної однорідної системи:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$
б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$

Самостійна робота.

Задача 10.1. Дослідити на сумісність та визначеність системи:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$, б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 1, \\ x_3 + 5x_4 + x_5 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 4, \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 8. \end{cases}$

Задача 10.2. Дослідити на сумісність та визначеність системи в залежності від параметру:

а) $\begin{cases} -x_1 + (1+\lambda)x_2 + (2+\lambda)x_3 + \lambda x_4 = 3, \\ \lambda x_1 - x_2 + (2-\lambda)x_3 + \lambda x_4 = 2, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (2-\lambda)x_3 + \lambda x_4 = 2, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (2-\lambda)x_3 + \lambda x_4 = 2. \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$

Задача 10.3. Знайти частинний та загальний розв‘язки систем рівнянь, користуючись фундаментальною системою розв‘язків відповідної однорідної системи:

а) $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = -6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 + 2x_5 = -6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

Заняття 11. Задачі лінійного простору. Лінійна залежність та лінійна незалежність. Базис, координати. Розмірність. Перетворення базису.

Мета: *Засвоїти поняття числового поля. Засвоїти поняття лінійного простору, лінійного підпростору, базису та розмірності лінійного простору. Навчитись знаходити координати елементу в заданому базисі. Засвоїти теореми про зв'язок різних базисів і координат в різних базисах. Навчитись знаходити координати елементу в новому базисі.*

Необхідні теоретичні матеріали

Бінарною алгебраїчною операцією на множині M називається закон, по якому кожним двом елементам a і b цієї множини, що беруться у певному порядку, ставиться у відповідність однозначно визначений елемент c цієї множини.

Операція $*$ на множині M називається ***комутативною***, якщо $\forall a,b \in M \;\; \big| \; a*b = b*a$. Операція $*$ на множині M називається ***асоціативною***, якщо $\forall a,b,c \in M \;\; \big| \; (a*b)*c = a*(b*c)$. Елемент $e \in M$ називається ***нейтральним*** відносно операції $*$, якщо $\forall a \in M$ виконуються рівності $a*e = a$ і $e*a = a$. Елемент $a' \in M$ називається ***симетричним*** для $a \in M$ відносно операції $*$, якщо $a*a' = a'*a = e$.

Непорожня множина P, на якій задано операцій додавання (+) і множення ($\cdot$) називається ***полем***, якщо виконуються наступні умови:

1) (+) – асоціативне,
2) (+) – комутативне,
3) нейтральний відносно (+) $0 \in P$,
4) $\forall a \in P$ існує симетричний відносно (+) $-a \in P$,
5) ($\cdot$) – асоціативне,
6) ($\cdot$) – комутативне,
7) нейтральний відносно ($\cdot$) $1 \in P$,
8) $\forall a \neq 0 \in P$, $\exists a^{-1} \in P$ симетричний відносно ($\cdot$) ,
9) $\forall a,b,c \in P \quad (a+b)c = ac + bc$ – виконується дистрибутивний закон.

Лінійним простором L над полем P називається множина з бінарною алгебраїчною операцією (+) ($\forall l_1, l_2 \in L \mid (l_1 + l_2) \in L$) і зовнішньою бінарною операцією ($\cdot$) на елемент поля P ($a \cdot l \in L \mid \forall a \in P, \forall l \in L$), які задовольняють наступним умовам:

I. $(L,+)$ – комутативна група:
1) операція (+) – асоціативна;
2) операція (+) – комутативна;
3) $\exists \theta \in L$ – нульовий елемент: $\forall l \in L \quad l + \theta = l$;
4) $\forall l \in L, \exists l' \in L$ – протилежний елемент: $l + (l') = \theta$;

II. операція ($\cdot$) унітарна і асоціативна:
5) $1 \cdot l = l \mid \forall l \in L$, де 1 – одиниця поля P;
6) ($\cdot$) $a(bl) = (ab)l \quad \mid \forall a,b \in P, \forall l \in L$;

III. (+) і ($\cdot$) пов'язані дистрибутивними законами:
7) $(a+b) \cdot l = al + bl \quad \mid \forall a,b \in P, \forall l \in L$;
8) $a(l_1 + l_2) = al_1 + al_2 \quad \mid \forall a \in P, \forall l_1, l_2 \in L$.

В цьому означенні P – довільне поле. У випадку, коли P – числове поле ($\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$), то простір називається *числовим*. В загальному випадку лінійний простір L над полем P позначається L_P.

Властивості лінійного простору.

Нехай L_P – довільний лінійний простір над полем P. Нагадаємо, що довільне поле містить 0 і 1 (нейтральні відносно додавання і множення), а також -1 (протилежний до 1).

1. *Нульовий елемент* $\theta \in L$ *у лінійному просторі єдиний.*

2. *Нульовий елемент* $\theta \in L$ *дорівнює добутку довільного елементу* $x \in L$ *на* $0 \in P$ ($\theta = 0 \cdot x$).

3. $\forall x \in L$ *протилежний елемент* x' *єдиний*.
4. $\forall x \in L$ *протилежний елемент* x' *дорівнює добутку* x *на* -1.

Різницею елементів x і y називається такий елемент z, що $y+z=x$. Позначається: $z=x-y$.

5. *Різниця елементів* x *і* y *дорівнює сумі* x і $-y$: $x-y=x+(-y)$.
6. *При множенні нульового елементу отримується нульовий елемент* ($\forall a \in P: \quad a \cdot \theta = \theta$).
7. $\forall a \in P \; \forall x \in L_P$ *із рівності* $ax=\theta$ *випливає, що або* $a=0$, *або* $x=\theta$.

Нехай $L \subset V$, V_P – лінійний простір над полем P. Множина L називається ***підпростором*** простору V, якщо L_P – лінійний простір.

Критерій підпростору. *Кожна підмножина* L *лінійного простору* V_P *утворює підпростір тоді і тільки тоді, якщо вона задовольняє наступним умовам:*

1°. $\forall x, y \in L, \quad x+y \in L$;

2°. $\forall x \in L, \quad \forall \lambda \in P, \; \lambda x \in L.$

Лінійною комбінацією елементів $x, y, ..., z \in L_P$ називається сума добутків цих елементів на довільні елементи $a, b, ..., c$ поля P. Елементи $x, y, ..., z \in L_P$ називаються ***лінійно залежними (ЛЗ)***, якщо існує їх лінійна комбінація рівна нулю, в якій не всі коефіцієнти рівні нулю. Елементи $x, y, ..., z \in L_P$ називаються ***лінійно незалежними*** (***ЛНЗ)***, якщо лінійна комбінація $ax+by+...+cz=\theta$ тоді і тільки тоді, коли $a=b=...=c=0$.

Всі властивості ЛЗ та ЛНЗ елементів такі ж, як і властивості ЛЗ та ЛНЗ векторів.

Далі будемо розглядати дійсний лінійний простір L_R.

Сукупність ЛНЗ елементів $e_1, e_2, ..., e_n$ простору L_R називається ***базисом*** цього простору, якщо $\forall x \in L$ знайдуться такі дійсні числа $x_1, x_2, ..., x_n$, що виконується рівність $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$. Ця рівність називається ***розкладенням елементу*** x ***по базису*** $e_1, e_2, ..., e_n$, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ – ***координатами елементу*** x відносно базису $e_1, e_2, ..., e_n$.

Твердження. (Про однозначність розкладення по базису) *Довільний елемент лінійного простору однозначно розкладається по базису.*

Теорема. (Про додавання і множення елементів лінійного простору в базисі). *При додаванні довільних елементів лінійного простору їх координати додаються. При множенні довільного елементу на число всі координати множаться на це число.*

Два простори L_P та F_P називаються ***ізоморфними (*** $L \cong F$***)***, якщо існує взаємно однозначне відображення $\varphi : L \to F$ таке, що виконуються наступні умови

1) $\forall x, y \in L \quad | \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y);$

2) $\forall x \in L, \forall \lambda \in P \quad | \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x).$

При цьому відображення φ називається ***ізоморфізмом*** просторів L_P та F_P.

Властивості ізоморфізмів.

1. *Ізоморфний образ нульового елементу і тільки його дорівнює нульовому елементу.*

2. *Елементи* $a_1, a_2, ..., a_t \in L$ *лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли лінійно залежні їх ізоморфні образи.*

3. *Нехай* $\varphi : L \to F$ *– ізоморфізм простору* L_P. *Елементи* $a_1, a_2, ..., a_t \in L$ *лінійно незалежні тоді і тільки тоді, коли* $\varphi(a_1), \varphi(a_2), ..., \varphi(a_t) \in F$ *лінійно незалежні.*

4. *Якщо* $\varphi : L \to F$ *– ізоморфізм, то* $\varphi^{-1} : F \to L$ *також ізоморфізм.*

5. *Якщо* $L \cong F$, $F \cong W$, *то* $L \cong W$.

Наслідок. *Кожний лінійний простір* L_R, *базис якого складається із* n *елементів, ізоморфний векторному простору* V_n.

Лінійний простір L називається n***-мірним***, якщо в ньому існує n ЛНЗ елементів, а довільні $(n+1)$ елементів ЛЗ. Число n при цьому називається ***розмірністю*** простору L. Іншими словами говорять, що ***розмірність*** простору – це максимальна кількість ЛНЗ елементів простору. Позначається $\dim L = n$.

Теорема. (Про зв'язок розмірності і базису) *Якщо лінійний простір* L *має базис із* n *елементів, то* $\dim L = n$.

Теорема. (Обернена) *Якщо* $\dim L = n$, *то довільні* n *ЛНЗ елементів цього простору утворюють його базис.*

Наслідок. *Якщо відомо один базис* $e_1, e_2, ..., e_n$ *простору, то довільні* n *ЛНЗ елементів* $f_1, f_2, ..., f_n$ *цього простору теж утворюють його базис.*

Матрицею переходу від базису e ***до базису*** e' називається матриця U, яка складається із стовпчиків a^i координат елементів базису e' в базисі e. Позначають $e \xrightarrow{U} e'$. Зв'язок між базисами описується формулою $e' = eU$.

Твердження. *Якщо перехід від базису* e *до* базису e' *простору* L *задається матрицею* U, *то перехід від* e' *до* e *задається оберненою матрицею* U^{-1}: $e' \xrightarrow{U^{-1}} e$.

Твердження. *Якщо перехід від базису* e *до* базису e' *простору* L *задається матрицею* U, *то перехід від координат в базисі* e *до координат в базисі* e' *задається матрицею* $(U^{-1})^T$, *транспонованою до оберненої.*

Зв'язок між координатами описується формулами

$$x_{e'}^T = U^{-1}x_e^T \text{ або } x_{e'} = x_e(U^{-1})^T.$$

Аудиторна робота.

Приклад 11.1. Довести, що всі квадратні матриці порядку n з дійсними елементами (або елементами з будь-якого поля P) утворюють лінійний простір над полем дійсних чисел (відповідно над полем P), якщо за операції взяти додавання матриць і множення матриці на число.

Розв'язання. Нехай $M_n(\mathbf{R})$ – множина всіх квадратних матриць порядку n з дійсними елементами. Покажемо спочатку, що операція додавання на $M_n(\mathbf{R})$ є бінарна алгебраїчна операція, а операція множення на число на $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ є зовнішньою бінарною операцією.

1) Операція додавання матриць замкнена, тобто для будь-яких матриць $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ $A+B \in M_n(\mathbf{R})$.

Справді, нехай $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, де $a_{ij}, b_{ij} \in R$, $i, j = 1,2,...,n$. Тоді за означенням додавання матриць

$$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}).$$

Оскільки $a_{ij}+b_{ij} \in R$, то $A+B \in M_n(\mathbf{R})$.

2) Операція множення на число замкнена, тобто для будь-якої матриці $A \in M_n(\mathbf{R})$ та довільного дійсного числа k: $k \cdot A \in M_n(\mathbf{R})$.

Справді, нехай $A=(a_{ij})$, де $k,a_{ij}\in\mathbf{R}$, $i,j=1,2,...,n$. Тоді за означенням множення матриць на число $k\cdot A=k\cdot(a_{ij})=(k\cdot a_{ij})$.Оскільки $k\cdot a_{ij}\in\mathbf{R}$, то $k\cdot A\in M_n(\mathbf{R})$.

Далі перевіримо аксіоми лінійного простору.

1. Операція додавання матриць асоціативна, тобто для будь-яких матриць $A,B,C\in M_n(\mathbf{R})$

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

Справді, нехай $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$, де $a_{ij},b_{ij},c_{ij}\in R$, $i,j=1,2,...,n$. Тоді за означенням додавання матриць

$$(A+B)+C=((a_{ij})+(b_{ij}))+(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij})=([a_{ij}+b_{ij}]+c_{ij}),$$

$$A+(B+C)=(a_{ij})+((b_{ij})+(c_{ij}))=(a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij})=(a_{ij}+[b_{ij}+c_{ij}]).$$

Оскільки a_{ij},b_{ij},c_{ij} – дійсні числа, то $[a_{ij}+b_{ij}]+c_{ij}=a_{ij}+[b_{ij}+c_{ij}]$, і тому $(A+B)+C=A+(B+C)$.

2. Операція додавання матриць комутативна, тобто для будь-яких матриць $A,B\in M_n(\mathbf{R})$

$$A+B=B+A.$$

Нехай, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, де $a_{ij},b_{ij}\in R$, $i,j=1,2,...,n$. За означенням додавання матриць

$$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}),$$

$$B+A=(b_{ij})+(a_{ij})=(b_{ij}+a_{ij}).$$

Оскільки для додавання дійсних чисел справедливий комутативний закон, то $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$, тому $(a_{ij}+b_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})$, тобто $A+B=B+A$.

3. У множині матриць $M_n(\mathbf{R})$ є матриця N, яка є нейтральним елементом відносно операції додавання матриць (нульовим елементом), тобто для довільної матриці $A \in M_n(\mathbf{R})$,

$$A + N = N + A = A.$$

Очевидно, такою матрицею N є нульова матриця $O = (O_{ij})$.

4. У множині матриць $M_n(\mathbf{R})$ для кожної матриці A існує протилежна матриця $\overline{A}$, тому $A + \overline{A} = \overline{A} + A = O$.

Очевидно, протилежною для даної матриці $A = (a_{ij})$ є матриця $-A = (-a_{ij})$.

Покажемо тепер, що для множини $M_n(\mathbf{R})$ виконується також решта аксіом векторного простору.

5. Для будь-якої матриці $A \in M_n(\mathbf{R})$ і дійсного числа 1 маємо

$$1 \cdot A = A.$$

Це випливає з означення множення матриці на число.

6. Операція множення матриць на число асоціативна в тому розумінні, що для будь-якої матриці $A \in M_n(\mathbf{R})$ і довільних дійсних чисел k, l $[kl]A = k[lA]$.

Нехай $A = (a_{ij})$, де $a_{ij} \in R$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тоді за означенням множення матриці на число

$$[kl]A = [kl](a_{ij}) = ([kl]a_{ij}),$$

$$k[lA] = k[l(a_{ij})] = k(la_{ij}).$$

Оскільки $(kla_{ij}) = (k(la_{ij}))$, а k, l, a_{ij} – дійсні числа, то $[kl]a_{ij} = k[la_{ij}]$, тому $[kl]A = k[lA]$.

7. Операція множення матриці на число дистрибутивна відносно додавання чисел, якщо

$$\underset{\alpha,\beta\in R}{\forall}\ \underset{A\in M}{\forall}\left[(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A\right].$$

Справді, якщо $A=(a_{ij})$, де $a_{ij}\in R$, $i,j=1,2,...,n$, то за означенням множення матриці на число

$$[\alpha+\beta]A=[\alpha+\beta](a_{ij})=([\alpha+\beta]a_{ij}),$$

$$\alpha A+\beta A=\alpha(a_{ij})+\beta(a_{ij})=(\alpha a_{ij})+(\beta a_{ij})=(\alpha a_{ij}+\beta a_{ij}).$$

Оскільки α, β, a_{ij} – дійсні числа, то $[\alpha+\beta]a_{ij}=\alpha a_{ij}+\beta a_{ij}$, тому $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A.$

8. Операція множення матриці на число дистрибутивна відносно додавання матриць, тобто $\underset{\alpha\in R}{\forall}\ \underset{A,B\in M}{\forall}\left[\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B\right].$

Справді, якщо $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, де $a_{ij},b_{ij}\in R$, $i,j=1,2,...,n.$, то за означенням множення матриці на число

$$\alpha(A+B)=\alpha[(a_{ij})+(b_{ij})]=\alpha(a_{ij}+b_{ij})=(\alpha[a_{ij}+b_{ij}]),$$

$$\alpha A+\alpha B=\alpha(a_{ij})+\alpha(b_{ij})=(\alpha a_{ij})+(\alpha b_{ij})=(\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}).$$

Оскільки α, a_{ij}, b_{ij} – дійсні числа, $\alpha[a_{ij}+b_{ij}]=\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}$, тому

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B.$$

Усі аксіоми лінійного простору виконуються. Отже, $M_n(\mathbf{R})$ – лінійний простір над полем дійсних чисел $\mathbf{R}$. Якщо в наших міркуваннях замість поля $\mathbf{R}$ взяти довільно вибране поле P, то всі міркування залишаться без змін.

Приклад 11.2. Довести, що всі симетричні матриці порядку n з дійсними елементами (або елементами з будь-якого поля P) утворюють лінійний простір над полем дійсних чисел (відповідно над полем P), якщо за операції взяти додавання і множення матриці на число.

Розв'язання. Нехай C_n – множина всіх квадратних симетричних матриць порядку n з дійсними елементами. Зрозуміло, що $C_n \subset M_n(\mathbf{R})$, де $M_n(\mathbf{R})$ – множина всіх матриць порядку n з дійсними елементами. Як було показано, $M_n(\mathbf{R})$ – лінійний простір над полем дійсних чисел. Оскільки довільний підпростір є лінійним простором, то нам досить показати, що C_n – лінійний підпростір лінійного простору $M_n(\mathbf{R})$. Для цього досить довести:

1) замкненість операції додавання симетричних матриць;

2) замкненість операції множення на число симетричних матриць.

1) Нехай $A, B \in C_n$. Доведемо, що $A+B \in C_n$. Припустимо, що $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$. Оскільки A, B – симетричні матриці, то $a_{ij}=a_{ji}$, $b_{ij}=b_{ji}$. Тоді $A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(c_{ij})$, де $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Зрозуміло, $c_{ij}=c_{ji}$, оскільки $c_{ji}=a_{ji}+b_{ji}$, а $a_{ij}=a_{ji}$, $b_{ij}=b_{ji}$. Отже, $A+B \in C_n$.

2) Нехай $A \in C_n$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Доведемо, що $\alpha A \in C_n$. Нехай $A=(a_{ij})$, де $a_{ij} \in \mathbf{R}$. Оскільки A – симетрична матриця, то $a_{ij}=a_{ji}$. Тоді $\alpha A=\alpha(a_{ij})=(c_{ij})$, де $c_{ij}=\alpha a_{ij}$. Зрозуміло, що $c_{ij}=c_{ji}$, оскільки $c_{ji}=\alpha a_{ji}$, а $a_{ij}=a_{ji}$. Отже, $\alpha A \in C_n$.

Таким чином, C_n – підпростір лінійного простору $M_n(\mathbf{R})$, тому C_n – лінійний простір над полем $\mathbf{R}$.

Приклад 11.3. Знайти базис і розмірність підпростору L арифметичного векторного простору V_n, що складається з усіх векторів простору V_n, у кожного з яких перша і остання координати рівні між собою.

Розв'язання. Зауважимо спочатку, що як при відшуканні базису простору матриць, так і у випадку знаходження базису всіх підпросторів арифметичного векторного простору V_n швидкість виконання завдання залежить від нашого вміння змушувати «бігати одиничку». Пояснимо докладніше цей вислів. Відомо, що найдоцільніше за базис простору V_n брати набір так званих одиничних векторів: $\overrightarrow{e_1}=(1,0,0,\ldots,0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,1,0,\ldots,0)$, $\overrightarrow{e_3}=(0,0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $\overrightarrow{e_n}=(0,0,0,..,1)$.

Легко довести, що система векторів

$\overrightarrow{c_1}=(1,0,0,.,0,1)$, $\overrightarrow{c_2}=(0,1,0,\ldots,0,0)$, $\overrightarrow{c_3}=(0,0,1,\ldots,0,0)$,..., $\overrightarrow{c_{n-1}}=(0,0,0,..,1,0)$ є базисом розглядуваного підпростору L.

Розмірність підпростору L, як видно з базису, дорівнює $n-1$.

Приклад 11.4. Як відомо, поле комплексних чисел $\mathbf{C}$ утворює векторний простір відносно операцій додавання і множення комплексних чисел (та званий комплексний векторний простір). Знайти базис і розмірність цього простору.

Розв'язання. Зрозуміло, що елемент $1\in\mathbf{C}$ є, з одного боку, лінійно незалежною системою векторів з $\mathbf{C}$. З другого боку, довільний елемент $z\in\mathbf{C}$ лінійно виражається через 1, а саме $z=1\cdot z$. Отже, за означенням базису векторного простору, $B=\{1\}$ – базис комплексного простору $\mathbf{C}$. При цьому розмірність простору $\mathbf{C}$ дорівнює 1.

Зауваження. Цілком очевидно, що замість елемента 1 можна брати довільне комплексне число α, відмінне від 0, оскільки для будь-якого комплексного числа β маємо $\beta = \frac{\beta}{\alpha}\alpha$.

Приклад 11.5. Вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$ і $\vec{x}$ задано своїми координатами в деякому базисі. Довести, що вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\vec{x}$ у цьому базисі, якщо: $\overrightarrow{a_1} = (1,1,-1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1,-1,0)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1,2,0)$, $\vec{x} = (2,-1,3)$.

Розв'язання. В даному прикладі вектори належать простору $\mathbf{R}^3$. За означенням розмірності, $\dim \mathbf{R}^3 = 3$, так як, 1) наприклад, три вектори $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$ лінійно незалежні, бо, очевидно, складають матрицю рангу три; 2) довільні чотири вектори будуть лінійно залежними, бо складатимуть матрицю з трьох стовпчиків, ранг якої не може перевищувати 3, значить не дорівнює 4. Отже, за оберненою теоремою про зв'язок розмірності і базису, три вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ будуть утворювати базис, якщо вони будуть лінійно незалежними. Це питання легко вирішується, якщо з цих векторів скласти матрицю (не залежно рядками чи стовпчиками) та знайти її ранг. Вирішення цього питання ми об'єднаємо з другою частиною завдання цього прикладу.

За означенням, координати вектора $\vec{x}$ у базисі $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ знаходяться з рівності $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{x}$. Така рівність є векторною формою системи лінійних рівнянь. Матриця цієї системи складається з векторів-стовпчиків $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, а стовпчиком вільних членів буде вектор-стовпчик $\vec{x}$. Розв'яжемо цю систему, склавши її розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Матриця системи приведена до східчастої форми, тому ми можемо визначити її ранг (він дорівнює 3). Так як ранг дорівнює кількості векторів, то ці *вектори* $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ є лінійно незалежні, а це тепер означає, що в просторі $\mathbf{R}^3$ вони *утворюють базис* a.

Продовжуючи виконувати елементарні перетворення розширеної матриці системи, одержуємо $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$

Розв'язок цієї системи є координатами вектора $\vec{x}$ *у базисі* $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$, *тобто* $x = (-3, 12, 7)_a$.

Зауваження. Розв'язок отриманої системи можна також знаходити методом Крамера. Тоді лінійна незалежність векторів $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ буде випливати із нерівності нулю визначника матриці системи.

Приклад 11.6. У дійсному векторному просторі квадратних матриць другого порядку $M_n(\mathbf{R})$ з дійсними елементами знайти координати матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}$ в базисі B, що складається з матриць

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Відомо, що коли матрицю A зобразити у вигляді

$$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 \qquad 1)$$

то числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ будуть шуканими координатами матриці A в базисі B. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ можна знайти усно, звичайними підбором. Очевидно, $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -2, \alpha_4 = 6$. Ці самі числа можна знайти, користуючись загальним методом. Для цього у правій частині рівності (1) виконують відповідні операції, а потім використовують умову рівності двох матриць (елементів простору)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & \alpha_1 \\ -4\alpha_3 & 3\alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Звідси, $\begin{cases} -\alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = -2 \\ -4\alpha_3 = 8 \\ 3\alpha_4 = 18 \end{cases}$, $\begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = -2 \\ \alpha_4 = 6 \end{cases}$

Отже, $[-2, -1, -2, 6]$ – координатний рядок матриці A в базисі B: $A = (-2, -1, -2, 6)_B$.

Приклад 11.7. Вектор $a = (3, -1, 0)_e$ заданий координатами в базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Знайти координати вектора $\vec{a}$ в базисі $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$, якщо:

$$\overrightarrow{e_1'} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3};$$

$$\overrightarrow{e_2'} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3};$$

$$\overrightarrow{e_3'} = 2\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_2}$$

Розв'язання. Матриця $T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ є матрицею переходу від базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ до базису $\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \vec{e'_3}$. Нехай, $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ – координати вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \vec{e'_3}$. Тоді

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{bmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Так як, $T^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, то

$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}$, звідки $a=(5,-7,-4)_{e'}$.

Вправи до виконання:

Вправа 11.1. Перевірити, чи лінійно залежні елементи лінійного простору $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Вправа 11.2. Знайти базис і розмірність дійсного векторного простору квадратних матриць $M_n(\mathbf{R})$ порядку $n=3$ з дійсними елементами.

Вправа 11.3. В просторі $\mathbf{R}^3$ задано вектор $x=(3,7,-2)$ і базис e: $e_1=(1,3,-2)$, $e_2=(-2,-5,6)$, $e_3=(3,8,-4)$. Знайти координати вектору x в базисі e.

Вправа 11.4. Знайти координати матриці $A=\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ в базисі

$$B\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Вправа 11.5. Знайти матрицю переходу від базису $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ до базису $\vec{e_1'},\vec{e_2'},\vec{e_3'}$:

$$\vec{e_1'}=\vec{e_1}+3\vec{e_2}-4\vec{e_3},\ \vec{e_2'}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}+5\vec{e_3},\ \vec{e_3'}=4\vec{e_1}+5\vec{e_2}+3\vec{e_3}.$$

Вправа 11.6. Дана матриця $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ переходу від базису $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ до базису $\vec{e_1'},\vec{e_2'},\vec{e_3'}$. Знайти координати $\vec{e_2'}$ в базисі $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ та координати $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ в базисі $\vec{e_1'},\vec{e_2'},\vec{e_3'}$.

Вправа 11.7. За координатами вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ знайти його координати в базисі $\vec{e_1'},\vec{e_2'},\vec{e_3'}$: $\vec{x}=(2;1;1)_e$; $\vec{e_1'}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}-\vec{e_3}$; $\vec{e_2'}=-\vec{e_1}-\vec{e_2}+3\vec{e_3}$; $\vec{e_3'}=-2\vec{e_1}-\vec{e_2}+2\vec{e_3}$.

Вправа 11.8. Дано два базиси:

e: $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,-1,2)$, $e_3=(1,3,-1)$;

e': $e_1'=(1,-1,1)$, $e_2'=(1,2,-1)$, $e_3'=(2,2,-1)$.

Знайти координати елементу $x=(4,2,4)$ в обох базисах, використовуючи матрицю переходу від базису e до e'?

Самостійна робота.

Задача 11.1. В просторі $\mathbf{R}^3$ задано вектор $x=(-2,4,5)$ і базис e: $e_1=(-2,-2,3)$, $e_2=(1,2,-1)$, $e_3=(3,5,-4)$. Знайти координати вектору x в базисі e.

Задача 11.2. Вектори $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, ..., \vec{a_n}$ і $\vec{x}$ задано своїми координатами в деякому базисі. Довести, що вектори $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, ..., \vec{a_n}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\vec{x}$ у цьому базисі, якщо:

а) $\vec{a_1} = (1,1,-1)$, $\vec{a_2} = (1,2,1)$, $\vec{a_3} = (3,2,1)$, $\vec{x} = (1,7,-1)$;

б) $\vec{a_1} = (1,1,0,1)$, $\vec{a_2} = (2,1,3,1)$, $\vec{a_3} = (1,1,0,0)$, $\vec{a_4} = (0,1,-1,-1)$, $\vec{x} = (0,0,0,1)$.

Задача 11.3. Знайти матрицю переходу від базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ до базису $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}$: $\vec{e_1} = \vec{e_1'} + \vec{e_2'} + 3\vec{e_3'}$, $\vec{e_2} = 2\vec{e_1'} - \vec{e_2'} + 4\vec{e_3'}$, $\vec{e_3} = 3\vec{e_1'} + 5\vec{e_3'}$.

Задача 11.4. Знайти матрицю переходу від базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}$ до базису $\vec{e_3}, \vec{e_4}, \vec{e_1}, \vec{e_2}$.

Задача 11.5. Дана матриця $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ переходу від базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ до базису $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}$. Знайти координати $\vec{e_2'}$ в базисі $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ та координати $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ в базисі $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}$.

Задача 11.6. За координатами вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ знайти його координати в базисі $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}$: $\vec{x} = (1;2;3)$; $\vec{e_1'} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$; $\vec{e_2'} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}$; $\vec{e_3'} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 5\vec{e_3}$.

Заняття 12. Лінійна оболонка. Базис і розмірність перетину і суми

Мета: *На основі теореми про розмірність лінійної оболонки навчитись знаходити базис і розмірність лінійних оболонок, їх сум і перетинів.*

Необхідні теоретичні матеріали

Лінійною оболонкою L елементів $x, y, ..., z \in V$ називається сукупність всіх лінійних комбінацій цих елементів:

$$L = \langle x, y, ..., z \rangle = \{\alpha x + \beta y + ... + \gamma z \mid \alpha, \beta, ..., \gamma \in \mathbf{R}\}$$

Теорема (Про розмірність лінійної оболонки). *Розмірність лінійної оболонки* $\langle x, y, ..., z \rangle$ *дорівнює максимальному числу ЛНЗ елементів в системі елементів* $x, y, ..., z$, *а самі ці ЛНЗ елементи утворюють базис.*

Зауваження. *Нехай* $e_1, e_2, ..., e_n$ *– базис простору* V. *Тоді*

$$V = \langle e_1, e_2, ..., e_n \rangle.$$

Твердження (Про перетин підпросторів) *Перетин підпросторів* L_1 *і* L_2 *утворює підпростір*.

Сумою підпросторів L_1 і L_2 називається множина $L = \{\, x + y \mid x \in L_1, y \in L_2 \,\}$. Позначається $L = L_1 + L_2$.

Твердження (про суму підпросторів) *Сума підпросторів* L_1 *і* L_2 *утворює підпростір в* V.

Теорема (Про суму розмірностей) *Сума розмірностей довільних підпросторів скінченномірного лінійного простору дорівнює сумі розмірностей перетину і суми цих підпросторів:*

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 \cap L_2) + \dim(L_1 + L_2)$$

Нехай L_1 і L_2 – підпростори n - мірного простору V. Простір L називається ***прямою сумою*** підпросторів L_1 і L_2, якщо кожний елемент x простору L може бути однозначно утворений сумою $x_1 + x_2 = x$, де $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$. Позначається $L = L_1 \oplus L_2$.

Теорема (Критерій прямої суми) *Для того, щоб простір* L *представляв собою пряму суму підпросторів* L_1 *і* L_2, *необхідно і достатньо, щоб виконувались наступні умови*

1) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, 2) $\dim L = \dim L_1 + \dim L_2$.

Аудиторна робота.

Приклад 12.1. Знайти розмірність і базис лінійного підпростору $L = \langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}, \overrightarrow{a_5} \rangle$, де $\overrightarrow{a_1} = (1,0,0,-1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1,2,3,4)$, $\overrightarrow{a_3} = (2,2,3,3)$, $\overrightarrow{a_4} = (4,2,3,1)$, $\overrightarrow{a_5} = (0,2,3,5)$.

Розв'язання. Відомо, що розмірність лінійної оболонки векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_m}$ збігається з рангом матриці, яка містить координати даних векторів у довільному базисі цього простору, а за базис простору $L = \langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_m} \rangle$ можна взяти довільну максимальну лінійно незалежну підсистему системи $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_m}$. Відповідно до цього складаємо матрицю A з координат векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}, \overrightarrow{a_5}$ і знаходимо її ранг:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{I_p(-1)+II \\ I_p(-2)+III \\ I_p(-4)+IV}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{II_p(-1)+III \\ II_p(-1)+IV \\ II_p(-1)+V}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З останньої матриці видно, що ранг матриці A дорівнює числу 2, а також те, що однією з максимальних лінійно незалежних підсистем системи $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}, \overrightarrow{a_5}$ є підсистема $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$. Отже, розмірність розглядуваної лінійної оболонки дорівнює числу 2, а за базис її можна взяти підсистему $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$.

Приклад 12.2. Знайти базиси суми і перетину підпросторів $\left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \right\rangle$ і $\left\langle \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3} \right\rangle$, якщо $\overrightarrow{a_1} = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{a_2} = (0,1,1,0)$, $\overrightarrow{a_3} = (0,0,1,1)$, $\overrightarrow{b_1} = (1,0,1,0)$, $\overrightarrow{b_2} = (0,2,1,1)$, $\overrightarrow{b_3} = (1,2,1,2)$.

Розв'язання. Відомо, що коли розглядається сума лінійних оболонок $U = \left\langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k} \right\rangle$ і $V = \left\langle \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_l} \right\rangle$, то базисом B суми $S = U + V$ є кожна максимально лінійно незалежна підсистема системи векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_l}$, або системи векторів $\overrightarrow{a_{j1}}, \overrightarrow{a_{j2}}, ..., \overrightarrow{a_{js}}, \overrightarrow{b_{i1}}, \overrightarrow{b_{i2}}, ..., \overrightarrow{b_{im}}$, де $\overrightarrow{a_{j1}}, \overrightarrow{a_{j2}}, ..., \overrightarrow{a_{js}}$ – базис U, а $\overrightarrow{b_{i1}}, \overrightarrow{b_{i2}}, ..., \overrightarrow{b_{im}}$ – базис V.

Знайдемо спочатку базиси просторів U і V. Для цього (див. приклад 12.1) складемо матриці A і C з координат даних векторів $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ і $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ та знайдемо їх ранги

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко побачити, що ранг матриці A дорівнює 3.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{I_p(-1)+III} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці C дорівнює також 3.

Отже, базисом простору U є система векторів $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$, а базисом простору V є система векторів $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$. Знайдемо тепер базис B простору $S = U + V$. Для цього складемо матрицю D з координат векторів $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ і знайдемо її ранг

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{I_p(-1)+IV} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{II_p+IV} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Легко бачити, що ранг матриці D дорівнює числу 4. За базис простору S можна взяти такі вектори: $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{b_1}$. Знайдемо тепер базис перетину $P = U \cap V$. Оскільки $\dim U = 3$, $\dim V = 3$, $\dim S = 4$, то, за теоремою про суму розмірностей, $\dim P = 3 + 3 - 4 = 2$.

Отже, базис простору P складається з двох векторів. Знайдемо їх. Оскільки простір P складається з тих і тільки тих векторів , які належать, як до простору U, так і до простору V, то можна припустити, що

$$\vec{p} = x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + x_3\vec{a_3} = y_1\vec{b_1} + y_2\vec{b_2} + y_3\vec{b_3} \qquad (1)$$

Ця рівність еквівалентна системі чотирьох лінійних однорідних рівнянь з шістьма невідомими $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ рангу 4:

$$\begin{cases} x_1 - y_1 - y_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2y_2 - 2y_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - y_1 - y_2 - y_3 = 0 \\ x_3 - y_2 - 2y_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Знайдемо фундаментальну сукупність розв’язків цієї системи. Для цього скористаємося відомим алгоритмом, привівши матрицю системи до східчастої форми.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \approx$$

За вільні невідомі можна взяти останні y_2 і y_3. Узявши послідовно $y_2 = 1$, $y_3 = 0$ і $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, заповнимо табличку фундаментальних розв’язків:

x	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
f_1	1	1	1	1	1	0
f_2	2	0	2	1	0	1

$$\overrightarrow{f_1} = (1,1,1,1,1,0)\,,\ \overrightarrow{f_2} = (2,0,2,1,0,1)$$

Базис простору P дістанемо, якщо в рівності (1) замість x_1, x_2, x_3, (або замість y_1, y_2, y_3) підставимо їх значення з $\overrightarrow{f_1}$ і $\overrightarrow{f_2}$. Матимемо

$$\overrightarrow{p_1} = 1\cdot\overrightarrow{a_1} + 1\cdot\overrightarrow{a_2} + 1\cdot\overrightarrow{a_3} = 1\cdot\overrightarrow{b_1} + 1\cdot\overrightarrow{b_2} + 0\cdot\overrightarrow{b_3}\,,$$

$$\overrightarrow{p_2} = 2\cdot\overrightarrow{a_1} + 0\cdot\overrightarrow{a_2} + 2\cdot\overrightarrow{a_3} = 1\cdot\overrightarrow{b_1} + 0\cdot\overrightarrow{b_2} + 1\cdot\overrightarrow{b_3}$$

і остаточно, підставляючи значення $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ або $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$, отримаємо $\overrightarrow{p_1} = (1,2,2,1)$, $\overrightarrow{p_2} = (2,2,2,2)$ – базис перетину $P = U \cap V$.

Зауваження. Остання рівність умови (1) може бути представлена як векторний вигляд однорідної системи з невідомими $x_1, x_2, x_3, -y_1, -y_2, -y_3$:

$$x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} + x_3\overrightarrow{a_3} + (-y_1)\overrightarrow{b_1} + (-y_2)\overrightarrow{b_2} + (-y_3)\overrightarrow{b_3} = \vec{0}\,.$$

Стовпчиками матриці цієї системи будуть вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$.

Зауваження. Для обчислення базису перетину немає необхідності повністю знаходити ФСР системи (2). Достатньо для кожного фундаментального розв'язку знайти значення останніх змінних (у нашому випадку це y_1, y_2, y_3, причому дві з них вільні) та обчислити $\vec{p} = y_1\overrightarrow{b_1} + y_2\overrightarrow{b_2} + y_3\overrightarrow{b_3}$. Якщо деяке $\overrightarrow{p_i} = \vec{0}$, то воно не може входити до базису перетину.

Приклад 12.3. Довести, що арифметичний векторний простір V_n є прямою сумою $U \oplus V$ векторних підпросторів U і V, де U – підпростір всіх векторів, сума координат кожного з яких дорівнює нулю і V – підпростір усіх векторів, у кожного з яких усі координати рівні між собою.

Розв'язання. Відомо, що сума $U \oplus V$ підпросторів U і V є ***прямою***, якщо простори U і V мають своїм спільним елементом лише нульовий вектор. Нагадаємо також, що простір L є сумою підпросторів U і V, якщо кожен вектор $\vec{x} \in L$ можна подати як суму $\vec{u} + \vec{v}$, де $\vec{u} \in U$, $\vec{v} \in V$.

Те, що задані півпростори U і V, перетинаються лише по нульовому вектору, очевидно з їх задання. Покажемо, що довільний вектор простору V_n можна подати у вигляді суми векторів U і V. Для цього досить показати, що так само можна зобразити будь-який вектор базису простору V_n. Нехай $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_k}$ – базис простору V_n, де $\overrightarrow{e_1} = (1{,}0{,}0{,}\ldots{,}0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0{,}1{,}0{,}\ldots{,}0)$, $\overrightarrow{e_3} = (0{,}0{,}1{,}\ldots{,}0)$, $\overrightarrow{e_n} = (0{,}0{,}0{,}..{,}1)$. Тоді $\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{u_i} + \overrightarrow{v_i}$, $i = 1{,}2{,}\ldots{,}n$, де $\overrightarrow{u_i}$ – вектор з U, з якого i-а координата дорівнює $\dfrac{n-1}{n}$, а кожна інша координата дорівнює $-\dfrac{1}{n}$; $\overrightarrow{v_i}$ – вектор з V, кожна координата якого дорівнює $\dfrac{1}{n}$.

Вправи до виконання.

Вправа 12.1. Знайти розмірність s суми і розмірність d перетину векторних підпросторів $U = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ і $V = \langle b_1 \rangle$, заданих як лінійні оболонки векторів $\overrightarrow{a_1} = (4{,}3{,}2{,}1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1{,}0{,}-1{,}2)$, $\overrightarrow{a_3} = (3{,}3{,}1{,}3)$, $\overrightarrow{b_1} = (-2{,}0{,}-2{,}4)$.

Порада: Використовуйте те, що: 1) сума лінійних оболонок є також лінійною оболонкою, причому твірними елементами її є об'єднання твірних елементів доданків, 2) розмірність перетину двох підпросторів є різницею між сумою розмірностей підпросторів-доданків і розмірністю суми цих підпросторів.

Вправа 12.2. Знайти базиси суми і перетину векторних підпросторів U і V, заданих як лінійні оболонки векторів $\overrightarrow{a_1} = (1,2,1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1,1,-1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1,3,3)$ і $\overrightarrow{b_1} = (2,3,-1)$, $\overrightarrow{b_2} = (1,2,2)$, $\overrightarrow{b_3} = (1,1,-3)$.

Самостійна робота.

Задача 12.1. Знайти базис і розмірність векторних просторів, які є лінійними оболонками таких векторів: $\overrightarrow{a_1} = (1,0,0,-1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2,1,1,0)$, $\overrightarrow{a_3} = (1,1,1,1)$, $\overrightarrow{a_4} = (1,2,3,4)$, $\overrightarrow{a_5} = (0,1,2,3)$.

Задача 12.2. Знайти розмірність s суми і розмірність d перетину векторних підпросторів U і V, заданих як лінійні оболонки векторів $\overrightarrow{a_1} = (1,1,1,1,1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1,1,0,-1,1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1,3,2,1,3)$, $\overrightarrow{a_4} = (1,5,3,1,5)$, $\overrightarrow{b_1} = (1,2,-2,-2,-2)$, $\overrightarrow{b_2} = (0,0,1,0,0)$, $\overrightarrow{b_3} = (3,6,-5,-6,-6)$, $\overrightarrow{b_4} = (2,4,-3,-4,-4)$.

Задача 12.3. Знайти базиси суми і перетину векторних підпросторів U і V, заданих як лінійні оболонки векторів $\overrightarrow{a_1} = (1,2,1,-2)$, $\overrightarrow{a_2} = (2,3,1,0)$, $\overrightarrow{a_3} = (1,2,2,-3)$ і $\overrightarrow{b_1} = (1,1,1,1)$, $\overrightarrow{b_2} = (1,0,1,-1)$, $\overrightarrow{b_3} = (1,3,0,-4)$.

Задача 12.4. Знайти базис і визначити розмірність простору розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

Заняття 13. Лінійний оператор. Матриця лінійного оператора. Матриці лінійного оператора в різних базисах

Мета: *Засвоїти поняття лінійного оператора та його матриці. Навчитись будувати матрицю лінійного оператора в заданому базисі. Засвоїти зв'язок між матрицями лінійних операторів в різних базисах*.

Необхідні теоретичні матеріали

Нехай V і W – числові лінійні простори. Відображення $\widetilde{A}$, що діє із V в W називається ***лінійним оператором***, якщо $\forall\, x, y \in V$ і для довільного числа λ виконуються наступні співвідношення.

1^0. $\widetilde{A}(x+y) = \widetilde{A}(x) + \widetilde{A}(y)$;

2^0. $\widetilde{A}(\lambda x) = \lambda \widetilde{A} x$.

Якщо $W = V$, то $\widetilde{A}: V \to V$ називають ***лінійним перетворенням***. ***Матрицею лінійного перетворення в базисі*** e буде матриця, стовпчики якої є координатами образів базисних елементів в базисі e.

Теорема. *Матриці A_e і $A_{e'}$ лінійного перетворення $\widetilde{A}$ в базисах e та e' відповідно пов'язані співвідношенням $A_{e'} = U^{-1} A_e U$, де U – матриця переходу від e до e'.*

Наслідок. *Визначники матриць лінійного оператору в різних базисах рівні.*

Аудиторна робота.

Приклад 13.1. Координати векторів $\vec{x}$, $f(\vec{x})$ та $\varphi(\vec{x})$ задані в одному і тому ж базисі простору $\mathbf{R}^2$. З'ясувати, чи є лінійними наступні відображення:

а) відображення f, яке переводить будь-який вектор $\overrightarrow{x_1} = (\alpha_1, \alpha_2)$ у вектор $f(\overrightarrow{x_1}) = (\alpha_1 - 2\alpha_2; 3\alpha_2 - \alpha_1)$;

б) відображення φ, яке переводить будь-який вектор $\overrightarrow{x_1} = (\alpha_1, \alpha_2)$ у вектор $\varphi(\overrightarrow{x_1}) = (2\alpha_1 + \alpha_2; \alpha_2^2)$.

Розв'язання. а) Щоб з'ясувати, чи є дане відображення лінійним, перевіримо, чи виконуються умови:

1) $f(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}) = f(\overrightarrow{x_1}) + f(\overrightarrow{x_2})$;   2) $f(\lambda \overrightarrow{x_1}) = \lambda f(\overrightarrow{x_1})$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^2, \forall x \in \mathbf{R}$.

Нехай $\overrightarrow{x_2} = (\beta_1, \beta_2)$ – будь-який вектор даного простору. Так як

$$\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}=(\alpha_1+\beta_1;\alpha_2+\beta_2);$$

$$f(\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2})=(\alpha_1+\beta_1-2(\alpha_2+\beta_2);3(\alpha_2+\beta_2)-(\alpha_1+\beta_1));$$

$$f(\overrightarrow{x_1})+f(\overrightarrow{x_2})=(\alpha_1-2\alpha_2+\beta_1-2\beta_2;3\alpha_2-\alpha_1+3\beta_2-\beta_1),$$

то $f(\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2})=f(\overrightarrow{x_1})+f(\overrightarrow{x_2})$ і перша умова виконується.

Друга умова також виконується. Дійсно, так як $\lambda x_1=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2)$,

то $f(\lambda\overrightarrow{x_1})=(\lambda\alpha_1-2\lambda\alpha_2,3\lambda\alpha_2-\lambda\alpha_1)=(\lambda(\alpha_1-2\alpha_2);\lambda(3\alpha_2-\alpha_1))=$

$$=\lambda(\alpha_1-2\alpha_2;3\alpha_2-\alpha_1)=\lambda f(\overrightarrow{x_1}).$$

Значить, відображення f є лінійним.

б) Для відображення φ маємо

$$\varphi(\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2})=(2(\alpha_1+\beta_1)+\alpha_2+\beta_2;(\alpha_2+\beta_2)^2)=$$

$$=(2\alpha_1+2\beta_1+\alpha_2+\beta_2,\alpha_2^2+2\alpha_2\beta_2+\beta_2^2)$$

$$\varphi(\overrightarrow{x_1})+\varphi(\overrightarrow{x_2})=(2\alpha_1+\alpha_2+2\beta_1+\beta_2;\alpha_2^2+\beta_2^2),$$

звідки випливає, що $\varphi(\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2})\neq\varphi(\overrightarrow{x_1})+\varphi(\overrightarrow{x_2})$ і відображення φ не є лінійним.

Приклад 13.2. Нехай у базисі $B\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}\}$ простору V_n лінійний оператор $\mathbf{A}$ задано матрицею A. І нехай дано координатний рядок $[\vec{x}]$ вектора $\vec{x}$ в цьому самому базисі. Знайти координатний рядок вектора $\mathbf{A}\vec{x}$ в базисі B, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&4&1\\-3&0&-1\end{pmatrix},\ \vec{x}=(2,-1,1)_B.$$

Розв'язання. Якщо $\mathbf{A}x=y$, то зв'язок координат образу та прообразу через матрицю оператору в одному базисі має наступний вигляд: $y_B^T = A_B x_B^T$. Отже, при заданій умові $y_B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Відповідь. $\mathbf{A}\vec{x} = (3,-1,-7)_B$.

Приклад 13.3. Лінійний оператор **A** тривимірного простору переводить вектори a_1, a_2, a_3 у b_1, b_2, b_3 відповідно. Знайти матрицю A цього оператора в тому самому базисі, в якому задано координати всіх векторів, якщо $a_1 = (2,3,5)$, $b_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (0,1,2)$, $b_2 = (1,1,-1)$, $a_3 = (1,0,0)$, $b_3 = (2,1,2)$.

Розв'язання. Нехай координати згаданих векторів задано в базисі $e = (e_1, e_2, e_3)$. Оскільки $\mathbf{A}a_1 = b_1$, $\mathbf{A}a_2 = b_2$, $\mathbf{A}a_3 = b_3$, то, враховуючи зв'язок координат через матрицю, маємо

$$\begin{cases} A_e (a_1)_e^T = (b_1)_e^T \\ A_e (a_2)_e^T = (b_2)_e^T \\ A_e (a_3)_e^T = (b_3)_e^T \end{cases}$$

Якщо позначити $A = ((a_1)_e^T (a_2)_e^T (a_3)_e^T)$, $B = ((b_1)_e^T (b_2)_e^T (b_3)_e^T)$, то дану систему можна записати у вигляді матричного рівняння $A_e \cdot A = B$ (рівняння типу $XA = B$). Очевидно, що при умові невиродженості матриці A, розв'язок знаходиться за формулою $A_e = B \cdot A^{-1}$ (або за допомогою елементарних перетворень стовпчиків за схемою $\left(\frac{A}{B}\right) \to \left(\frac{E}{X}\right)$, $X = B \cdot A^{-1}$). Якщо A – вироджена матриця, то задача може не мати розв'язку, або розв'язків буде безліч.

Почнемо з аналізу вродженості матриці A, яка еквівалентна лінійній залежності векторів a_1, a_2, a_3: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ранг даної матриці дорівнює кількості векторів (3), тому a_1, a_2, a_3 – ЛНЗ, а матриця A – невироджена. Задача має розв'язок:

$$\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ \hline 2 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси одержуємо, *відповідь*: $A_e = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 13.4. Лінійний оператор $\mathbf{A}$ тривимірного простору переводить вектори a_1, a_2, a_3 у b_1, b_2, b_3 відповідно. Знайти матрицю A цього оператора в базисі a_1, a_2, a_3, якщо

$a_1 = (1,2,1)$, $b_1 = (1,4,1)$, $a_2 = (1,1,1)$, $b_2 = (-1,3,-2)$, $a_3 = (-1,0,1)$, $b_3 = (3,2,5)$.

Розв'язання. Оскільки $\mathbf{A}a_1 = b_1$, $\mathbf{A}a_2 = b_2$, $\mathbf{A}a_3 = b_3$, то матриця A_a оператору $\mathbf{A}$ в базисі a_1, a_2, a_3 буде складатися із стовпчиків координат векторів b_1, b_2, b_3 в базисі a_1, a_2, a_3. Розв'язання цієї задачі має наступну схему: $(A|B) \to (E\;|A_a)$: записуємо вектори a_1, a_2, a_3 і b_1, b_2, b_3 в стовпчики через риску, елементарними перетвореннями ліву частину приводимо до одиничної матриці, тоді в правій частині будуть записані по стовпчиках координати векторів b_1, b_2, b_3 в базисі a_1, a_2, a_3, тобто це і буде шукана матриця.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&-1&3\\2&1&0&4&3&2\\1&1&1&1&-2&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&-1&3\\0&-1&2&2&5&-4\\0&0&2&0&-1&2\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&-3/2&4\\0&-1&0&2&6&-6\\0&0&1&0&-1/2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&9/2&-2\\0&1&0&-2&-6&6\\0&0&1&0&-1/2&1\end{array}\right)$$

Відповідь: $A_a=\begin{pmatrix}3&9/2&-2\\-2&-6&6\\0&-1/2&1\end{pmatrix}.$

Приклад 13.5. Дано два базиси $\vec{e_1},\vec{e_2}$ і $\vec{e_1}',\vec{e_2}'$ та матриця $A=\begin{pmatrix}-1&-2\\5&0\end{pmatrix}$ лінійного відображення f в базисі $\vec{e_1},\vec{e_2}$. Знайти матрицю B цього відображення в базисі $\vec{e_1}',\vec{e_2}'$, якщо

$$\vec{e_1}'=2\vec{e_1}-\vec{e_2},\ \vec{e_2}'=-3\vec{e_1}+2\vec{e_2} \qquad (1)$$

Розв'язання. Матриця T переходу від базису $\vec{e_1},\vec{e_2}$ до базису $\vec{e_1}',\vec{e_2}'$ має вид $T=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$, а обернена до неї матриця $T^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$. Значить, за формулою $B=T^{-1}AT$:

$$B=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2\\5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-4\\9&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30&-47\\20&-31\end{pmatrix}.$$

Дану задачу можна розв'язати і без використання формули $B=T^{-1}AT$. Для цього, щоб знайти матрицю B, треба знайти координати векторів $f(\vec{e_1}')$ та $f(\vec{e_2}')$ в базисі $\vec{e_1}',\vec{e_2}'$, тобто коефіцієнти у розкладі $f(\vec{e_1}')$ та $f(\vec{e_2}')$ за векторами $\vec{e_1}',\vec{e_2}'$. Із означення лінійного відображення випливає

$$f(\overrightarrow{e_1'}) = f(2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}) = 2f(\overrightarrow{e_1}) - f(\overrightarrow{e_2});$$

$$f(\overrightarrow{e_2'}) = f(-3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}) = -3f(\overrightarrow{e_1}) + 2f(\overrightarrow{e_2}).$$

За означенням матриці відображення в даному базисі

$$f(\overrightarrow{e_1}) = -\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2};\ f(\overrightarrow{e_2}) = -2\overrightarrow{e_1}.$$

Тому

$$f(\overrightarrow{e_1'}) = 2(-\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}) + 2\overrightarrow{e_1} = 10\overrightarrow{e_2};$$

$$f(\overrightarrow{e_2'}) = -3(-\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}) - 4\overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_1} - 15\overrightarrow{e_2}.$$

Виражаючи $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ із (1), отримаємо $\overrightarrow{e_1} = 2\overrightarrow{e_1'} + \overrightarrow{e_2'}$, $\overrightarrow{e_2} = 3\overrightarrow{e_1'} + 2\overrightarrow{e_2'}$. Значить,

$$f(\overrightarrow{e_1'}) = 10(3\overrightarrow{e_1'} + 2\overrightarrow{e_2'}) = 30\overrightarrow{e_1'} + 20\overrightarrow{e_2'};$$

$$f(\overrightarrow{e_2'}) = -(2\overrightarrow{e_1'} + \overrightarrow{e_2'}) - 15(3\overrightarrow{e_1'} + 2\overrightarrow{e_2'}) = -47\overrightarrow{e_1'} - 31\overrightarrow{e_2'},$$

отже, відображення f має в базисі $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}$ матрицю $B = \begin{pmatrix} 30 & -47 \\ 20 & -31 \end{pmatrix}$.

Приклад 13.6. Як зміниться матриця лінійного оператора **A** векторного простору L_n, якщо в базисі $B\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ поміняти місцями два вектори $\overrightarrow{e_1}$ і $\overrightarrow{e_2}$?

Розв'язання. Нехай оператор **A** переводить вектори базису $B\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ у вектори $\vec{n}_1, \vec{n}_2, ..., \vec{n}_n$ простору L_n. Кожний вектор $\vec{c}_i$ єдиним способом лінійно виражається через вектори базису $B\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$:

$$\mathbf{A}\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{c_1} = \alpha_{11}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{12}\overrightarrow{e_2} + \alpha_{13}\overrightarrow{e_3} + ... + \alpha_{1n}\overrightarrow{e_n},$$

$$\mathbf{A}\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{c_2} = \alpha_{21}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{22}\overrightarrow{e_2} + \alpha_{23}\overrightarrow{e_3} + ... + \alpha_{2n}\overrightarrow{e_n},$$

$$\mathbf{A}\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{c_3} = \alpha_{31}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{32}\overrightarrow{e_2} + \alpha_{33}\overrightarrow{e_3} + ... + \alpha_{3n}\overrightarrow{e_n},$$

………………………………………………..

$$\mathbf{A}\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{c_n} = \alpha_{n1}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{n2}\overrightarrow{e_2} + \alpha_{n3}\overrightarrow{e_3} + ... + \alpha_{nn}\overrightarrow{e_n}.$$

Матриця $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

і є матрицею оператора $\mathbf{A}$ в базисі $B\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$. Нехай тепер $B'\{\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ – базис простору L_n, який дістаємо з попереднього перестановкою в ньому першого і другого векторів. Зрозуміло, що тоді виконуються рівності:

$$\mathbf{A}\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{c_2} = \alpha_{22}\overrightarrow{e_2} + \alpha_{21}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{23}\overrightarrow{e_3} + ... + \alpha_{2n}\overrightarrow{e_n},$$

$$\mathbf{A}\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{c_1} = \alpha_{12}\overrightarrow{e_2} + \alpha_{11}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{13}\overrightarrow{e_3} + ... + \alpha_{1n}\overrightarrow{e_n},$$

$$\mathbf{A}\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{c_3} = \alpha_{32}\overrightarrow{e_2} + \alpha_{31}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{33}\overrightarrow{e_3} + ... + \alpha_{3n}\overrightarrow{e_n},$$

…………………………………………………..

$$\mathbf{A}\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{c_n} = \alpha_{n2}\overrightarrow{e_2} + \alpha_{n1}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{n3}\overrightarrow{e_3} + ... + \alpha_{nn}\overrightarrow{e_n}.$$

Матриця

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{12} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & \alpha_{31} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{23} & \alpha_{13} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2n} & \alpha_{1n} & \alpha_{3n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є матрицею оператора $\mathbf{A}$ в базисі $B'\{\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$. Порівнюючи матриці A і A', бачимо, що перестановка першого і другого векторів базису привела до перестановки в матриці лінійного оператора першого і другого рядків та першого і другого стовпців.

Зауваження. Зрозуміло, що надалі такі задачі слід виконувати усно, враховуючи лише, що стовпчиками матриці A є координатні рядки векторів $\mathbf{A}\overrightarrow{e_1}$, $\mathbf{A}\overrightarrow{e_2}$, $\mathbf{A}\overrightarrow{e_3}$, …, $\mathbf{A}\overrightarrow{e_n}$ в базисі $B\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}\}$, а стовпчиками матриці A' є координатні рядки векторів $\mathbf{A}\overrightarrow{e_2}$, $\mathbf{A}\overrightarrow{e_1}$, $\mathbf{A}\overrightarrow{e_3}$, …, $\mathbf{A}\overrightarrow{e_n}$ в базисі $B'\{\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3},...,\overrightarrow{e_n}\}$.

Приклад 13.7. Лінійний оператор **A** в базисі $\overrightarrow{a_1}=(2,2,3)$, $\overrightarrow{a_2}=(1,-1,0)$, $\overrightarrow{a_3}=(-1,2,1)$ має матрицю $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. Знайти його матрицю в базисі $\overrightarrow{b_1}=(1,2,-3)$, $\overrightarrow{b_2}=(0,1,2)$, $\overrightarrow{b_3}=(0,0,1)$.

Розв'язання. Відомо, що коли лінійний оператор **A** в базисі $a=(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3})$ має матрицю A, то в базисі $b=(\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_3})$ він задається матрицею $A'=T^{-1}AT$, де T – матриця переходу від базису a до базису b. Щоб знайти матрицю T, використаємо базис $e=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$, в якому задано координати всіх векторів. Очевидно, $a=eA_0$, $b=eB_0$, де $A_0=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ – матриці переходу від базису e до базисів a, b відповідно, причому матриці A_0, B_0 є невиродженими. З останніх рівностей дістанемо $e=aA_0^{-1}$. Тоді $b=eB_0=(aA_0^{-1})B_0=a(A_0^{-1}B_0)$. Зрозуміло, що $A_0^{-1}B_0=T$ – матриця переходу від базису a до базису b. Знаходимо послідовно

$$A_0^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -4 & -5 & 6\\ -3 & -3 & 4\end{pmatrix}, \qquad T=A_0^{-1}B_0=\begin{pmatrix}6 & -1 & -1\\ -32 & 7 & 6\\ -21 & 5 & 4\end{pmatrix},$$

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -2 & -3 & 4\\ 13 & 9 & -10\end{pmatrix}, \text{ і, нарешті, } A' = T^{-1}AT=\begin{pmatrix}12 & -33 & 100\\ -1 & 2 & -7\\ -2 & 5 & -16\end{pmatrix}.$$

Вправи до виконання:

Вправа 13.1. З'ясувати, чи є лінійним наступне відображення f, яке переводить будь-який вектор $\vec{x}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ у вектор $(2\alpha_1-\alpha_2;\alpha_3-\alpha_2;\alpha_1)$, заданий координатами в тому ж базисі, що і вектор $\vec{x}$

Вправа 13.2. Знайти матрицю лінійного відображення, яке переводить кожний вектор $\vec{x}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ у вектор $\vec{y}(2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3;3\alpha_1-\alpha_3;\alpha_2)$, заданий координатами в тому ж базисі, що і вектор $\vec{x}$.

Вправа 13.3. Довести, що множення кожної квадратної матиці другого порядку: а) зліва, б) справа на дану матрицю $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ є лінійним оператором простору всіх квадратних матриць другого порядку. Знайти матриці A і B цих операторів у базисі, що складається з матриць: $E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Самостійна робота.

Задача 13.1. Перевірити, чи є лінійним відображення. Знайти матрицю лінійного відображення, яке переводить кожний вектор $\vec{x}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ у вектор $\vec{y}$, заданий координатами в тому ж базисі, що і вектор $\vec{x}$:

а) $\vec{y}=(\alpha_2+5\alpha_3;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3;\alpha_1-\alpha_2)$, б) $\vec{y}=(2\alpha_3;\alpha_1;\alpha_2)$,

в) $\vec{y}=(3\alpha_2+2\alpha_3;\alpha_2^2;\alpha_1)$ г) $\vec{y}=(0;\alpha_1-\alpha_3;3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)$.

Задача 13.2. Лінійний оператор **A** тривимірного простору переводить вектори a_1, a_2, a_3 у b_1, b_2, b_3 відповідно. Знайти матрицю A цього оператора в базисі a_1, a_2, a_3, якщо $\overrightarrow{a_1} = (2,0,3)$, $\overrightarrow{b_1} = (1,2,-1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1,1,-1)$ $\overrightarrow{b_2} = (-2,1,3)$, $\overrightarrow{a_3} = (2,1,0)$, $\overrightarrow{b_3} = (1,-1,1)$.

Задача 13.3. Нехай у базисі $B\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ простору V_n лінійний оператор A задано матрицею A. І нехай дано координатний рядок x_B вектора x в цьому самому базисі. Знайти координатний рядок $(\mathbf{A}x)_B$ вектора $\mathbf{A}x$ в базисі B, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $x_B = (1,-8,4,3)$.

Задача 13.4. Дано два базиси $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ і $\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', ..., \overrightarrow{e_n}'$ лінійного простору і матриці A лінійного відображення в базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$. Знайти матрицю цього відображення в базисі $\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', ..., \overrightarrow{e_n}'$:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_1}' = \overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}' = 2\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_1}' = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_2}' = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_3}' = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}$

Задача 13.5. Лінійний оператор **A** в базисі $B\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A' цього самого оператора в базисі $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}$.

Задача 13.6. Лінійний оператор **A** в базисі $B\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\}$ має матрицю A. Знайти його матрицю A' в базисі $B'\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}\}$, якщо $\overrightarrow{a_1} = (0,-1,0)$, $\overrightarrow{a_2} = (0,1,-1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{b_1} = (1,3,2)$, $\overrightarrow{b_2} = (-1,0,0)$, $\overrightarrow{b_3} = (1,1,1)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заняття 14. Задачі на знаходження власних значень та власних векторів

Мета: *Засвоїти поняття власних значень та власних векторів лінійного оператору та навчитись їх знаходити.*

Необхідні теоретичні матеріали

Число $\lambda \in P$ називається ***власним значенням*** оператору $\tilde{A} \in L(V,V)$ (P – поле, над яким розглядається даний векторний простір V), якщо існує ненульовий елемент $x \in V$ такий, що $\tilde{A}x = \lambda x$. При цьому вектор x називають ***власним вектором*** оператору $\tilde{A}$, що відповідає власному значенню λ.

Якщо лінійний оператор $\tilde{A}$ задано в деякому базисі матрицею A_e, то матриця виду $A_e - \lambda E$ називається ***характеристичною матрицею*** оператора $\tilde{A}$, відповідною матриці A_e (тут E – одинична матриця того самого порядку, що й A_e, а λ – деяке невідоме). Многочлен $\det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I})$ де $\tilde{I} \in L(V,V)$ – тотожній оператор, відносно λ називається ***характеристичним многочленом*** оператору $\tilde{A}$. Зауважимо, що $\det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) = |A_e - \lambda E|$. Рівняння $|A_e - \lambda E| = 0$ відносно невідомого λ називається ***характеристичним рівнянням*** оператора $\tilde{A}$, а корені цього рівняння – ***характеристичними коренями*** оператора $\tilde{A}$. Зрозуміло, що значення характеристичної матриці неоднозначне, проте всі характеристичні матриці лінійного оператора подібні між собою. У зв'язку з цим характеристичне рівняння і характеристичні корені лінійного оператора визначаються однозначно.

Теорема. (критерій власного значення) *Нехай оператор $\tilde{A} \in L(V,V)$ (P – поле, над яким розглядається даний векторний простір V). Для того, щоб число λ було власним значенням оператору $\tilde{A}$, необхідно і достатньо, щоб це число було коренем характеристичного рівняння оператору $\tilde{A}$, який належить P.*

Зауважимо, що співвідношення $\tilde{A}x = \lambda x$ еквівалентне співвідношенню $(\tilde{A} - \lambda\tilde{I})x = \theta$, яке в свою чергу еквівалентне співвідношенню $(A_e - \lambda E)x_e^T = 0$, де A_e – матриця оператора $\tilde{A}$ в деякому базисі e, x_e^T – стовпчик координат вектора x в базисі e. Отже, для кожного відомого власного значення $\lambda_0 \in P$ знаходження відповідних власних значень зводиться до знаходження множини ненульових розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $(A_e - \lambda_0 E)x_e^T = 0$.

Аудиторна робота.

Приклад 14.1. Знайти характеристичну матрицю, характеристичний многочлен, характеристичні корені, власні значення і власні вектори лінійного оператора **A** векторного простору L_3 над полем дійсних чисел **R**, який у деякому базисі $B\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ цього простору задано матрицею $A = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 3 \\ 12 & 5 & -6 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. **I.** Знайдемо характеристичну матрицю, характеристичне рівняння та характеристичні корені оператора **A**:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 3 \\ 12 & 5 & -6 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7-\lambda & -3 & 3 \\ 12 & 5-\lambda & -6 \\ -6 & -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} -$$

характеристична матриця,

$$|A - \lambda E| = 0, \quad \begin{vmatrix} -7-\lambda & -3 & 3 \\ 12 & 5-\lambda & -6 \\ -6 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ – характеристичне рівняння.}$$

Перш ніж обчислювати визначник, що стоїть зліва в останній рівності, зробимо таке зауваження. У визначників третього порядку перший член визначника $A - \lambda E$ є добутком трьох лінійних двочленів, решта мають степені менший або рівний 2 (відносно λ, коли визначник обчислюють за так званим правилом трикутника). Тому доцільно спочатку звести в лінійний двочлен усі члени визначника, крім першого. Іноді цей двочлен може мати спільний множник з першим членом визначника. Тоді ми вже знатимемо один з характеристичних коренів, а далі знайдемо корені квадратного тричлена. Цей факт має місце і в розглянутому випадку:

характеристичний многочлен

$$|A-\lambda E| = (-7-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda)+12(-3)3+(-3)(-6)(-6)-$$
$$-[(-6)(5-\lambda)3+(-6)(-3)(-7-\lambda)+12(-3)(2-\lambda)]=$$
$$= (-7-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda)+36(2-\lambda) = (2-\lambda)[(-7-\lambda)(5-\lambda)+36].$$

Тоді характеристичне рівняння $(2-\lambda)[(-7-\lambda)(5-\lambda)+36]=0$ розпадається на рівняння $(2-\lambda)=0$ і $(-7-\lambda)(5-\lambda)+36=0$. Розв'язавши їх, знайдемо характеристичні корені : $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$ (число -1 є коренем характеристичного рівняння кратності 2).

II. У нашому випадку $P=\mathbf{R}$ і $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{R}$. Тому, за критерієм власного значення, всі характеристичні корені розглядуваного оператора $\mathbf{A}$ є одночасно і його власними значеннями.

III. Для знаходження власного вектора $\vec{b}$, який відповідає власному значенню λ, треба розглянути таку систему лінійних рівнянь: $(A-\lambda E)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$,

де A – матриця лінійного оператора $\mathbf{A}$, n – порядок матриці A. Кожен ненульовий вектор підпростору, який є лінійною комбінацією фундаментальної сукупності розв'язків цієї системи, є власним вектором оператора $\mathbf{A}$, що відповідає власному значенню λ. У розглядуваному випадку для $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ відповідно маємо

$$\lambda_1 = 2 \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

$$\begin{cases} -9x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 12x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \\ \quad -6x_1 - 3x_2 \qquad = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 12x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0 \\ \quad -6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Знаходимо фундаментальні системи розв'язків Φ_1 і Φ_2 цих систем відповідно:

1. $\begin{pmatrix} -9 & -3 & 3 \\ 12 & 3 & -6 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ранг цієї матриці $r = 2$, тоді

$n - r = 3 - 2 = 1$тому одна незалежна змінна, наприклад, x_3.

x	x_1	x_2	x_3
f_1	1	-2	1

$\Phi_1 = \langle f_1 \rangle = \langle (1,-2,1) \rangle$. Множину власних векторів b_1, які відповідають власному значенню $\lambda_1 = 2$, можна зобразити так:

$\{b_1 = \tilde{n}_1 f_1$, де $c_1 \in \mathbf{R}$, $c_1 \neq 0\}$

2. $\begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 12 & 6 & -6 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ранг цієї матриці $r = 1$, тоді

$n - r = 3 - 1 = 2$, тому дві незалежні змінні, наприклад, x_1, x_2.

x	x_1	x_2	x_3
f_2	1	0	2
f_3	0	1	1

$\Phi_2 = \langle f_2, f_3 \rangle = \langle (1,0,2), (0,1,1) \rangle$.

Множину власних векторів b_2, які відповідають власному значенню $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, можна зобразити так: $\{b_2 = c_2 f_2 + c_3 f_3$, де c_2, $c_3 \in \mathbf{R}$, c_2, c_3 не дорівнюють нулю одночасно$\}$.

Приклад 14.2. Знайти характеристичне рівняння та характеристичні числа матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння даної матриці має вигляд

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 5\\ 0 & 2-\lambda & 4\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \text{ або } -\lambda^3+4\lambda^2=0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо характеристичні корені: $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=4$.

Приклад 14.3. В деякому базисі e дана матриця $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 3 & -2\end{pmatrix}$ лінійного оператору дійсного лінійного простору. Знайти власні вектори цього оператору.

Розв'язання. Характеристичне рівняння даного оператору

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 5 & 3 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0, \text{ тобто } (1-\lambda)^2(-2-\lambda)=0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

Так як всі характеристичні корені дійсні, то власними значеннями даного лінійного оператору є: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

Для знаходження власних векторів X лінійного оператору $\mathbf{A}$, що відповідають власному значенню λ, скористаємося матричним рівнянням $(A-\lambda E)X=\Theta$, де X – стовпчик невідомих $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$. Дане рівняння відповідає однорідній системі лінійних рівнянь з невідомими

x_1, x_2, x_3. Для розв'язування цієї системи будемо приводити матрицю $(A-\lambda E)$ до східчастої форми та знаходити ФСР системи.

Знайдемо власні вектори X, що відповідають власному значенню

$$\lambda_1=-2:\ (A-\lambda_1 E)=\begin{pmatrix}1+2 & 1 & 0\\ 0 & 1+2 & 0\\ 5 & 3 & -2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Матричне рівняння $(A-\lambda_1 E)X=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$

відповідає системі $\begin{cases}3x_1+x_2=0\\ 3x_2=0\\ 5x_1+3x_2=0\end{cases}$.

Розв'язуючи цю систему, маємо: $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ – східчаста матриця, x_3 – незалежна змінна,

x_1	x_2	x_3
0	0	1

Загальний розв'язок $F=\{(0,0,t), t\in\mathbf{R}\}$.

Власними векторами даного оператору, що відповідають власному значенню $\lambda_1=-2$, є $(0,0,t)_e$, де $t\in\mathbf{R}, t\neq 0$.

Аналогічно знайдемо власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_2=1$. Матрицю системи $(A-\lambda_2 E)X=0$ приведемо до східчастої форми:

$$(A-\lambda_2 E)=\begin{pmatrix}1-1 & 1 & 0\\ 0 & 1-1 & 0\\ 5 & 3 & -2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 5 & 3 & -3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}5 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$ x_3 –

незалежна змінна,

x_1	x_2	x_3
3	0	5

Маємо: $F=\{(3s,0{,}5s),\ s\in\mathbf{R}\}$. Значить, власними векторами даного оператору, що відповідають власному числу $\lambda_2=1$, є $(3s,0{,}5s)_e$, де $s\in\mathbf{R},\ s\neq 0$.

Приклад 14.4. Знайти власні вектори відображення f лінійного простору V, яке задано матрицею $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ в деякому базисі, якщо:

а) V – дійсний, б) V – комплексний.

Розв'язання. а) Характеристичним рівнянням даного відображення буде $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$ або $\lambda^2+1=0$.

Корені даного рівняння $\lambda_{1,2}=\pm i$ – комплексні числа. Значить, відображення f дійсного простору V власних значень і власних векторів не має.

б) В комплексному просторі власними значеннями відображення f є $\lambda_{1,2}=\pm i$.

Знайдемо власні вектори $x=(x_1,x_2)$, що відповідають власному значенню $\lambda=i$ із умови $\mathbf{A}x=\lambda x$, яка еквівалентна умові $(A-\lambda E)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$

отримаємо систему: $\begin{cases}(1-i)x_1+2x_2=0\\ -x_1+(-1-i)x_2=0\end{cases}$.

Розв'язуючи цю систему, маємо, що ФСР цієї системи є $\alpha=(-1-i,1)$:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1-i & 2\\ -1 & -1-i\end{pmatrix}_{IIp*(1-i)+Ip}\approx\begin{pmatrix}1 & 1+i\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}x_1-\text{головна змінна}\\ x_2-\text{незалежна змінна}\end{matrix}$$

x_1	x_2
$-(1+i)$	1

Отже, власними векторами даного відображення в комплексному просторі V, що відповідають власному значенню i, є $\left(-(1+i)\beta, \beta\right), \quad \forall\, \beta \in \mathbf{C}, \beta \neq 0$.

Знайдемо власні вектори, що відповідають власному значенню $(-i)$, отримаємо систему: $\begin{cases}(1+i)x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + (-1+i)x_2 = 0\end{cases}$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо, що власними векторами даного відображення комплексного простору V, що відповідають власному числу $(-i)$ будуть $((-1+i)\gamma, \gamma), \quad \forall\, \gamma \in \mathbf{C}, \gamma \neq 0$.

Вправи до виконання:

Вправа 14.1. В деякому базисі задана матриця $A = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ відображення f та вектори $\overrightarrow{x_1} = (-1, 1, -3)$, $\overrightarrow{x_2} = (1, 0, 5)$, $\overrightarrow{x_3} = (-4, 1, 0)$. Визначити, які з даних векторів є власними векторами відображення f

Вправа 14.2. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора $\mathbf{A}$, який є диференціюванням многочленів, степінь яких менший або дорівнює n, з дійсними коефіцієнтами.

Самостійна робота.

Задача 14.1 Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора $\mathbf{A}$ дійсного векторного простору V_n, заданого в деякому базисі $B\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ цього простору матрицею A, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, г) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

д) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, е) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 14.2. В деякому базисі дана матриця $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, відображення f та вектори $\overrightarrow{x_1}=(1{,}0{,}2)$, $\overrightarrow{x_2}=(2{,}6{,}-6)$, $\overrightarrow{x_3}=(3{,}5{,}0)$. Визначити, які з даних векторів є власними векторами відображення f

Заняття 15. Діагональна форма. Канонічний базис

***Мета**: Засвоїти критерій діагональності матриці лінійного оператора та теорему про ЛНЗ власних векторів, що відповідають різним власним значенням для знаходження діагональної форми та відповідного канонічного базису. Розглянути поняття інваріантності та інваріантні підпростори.*

Необхідні теоретичні матеріали

Зручним виглядом матриці лінійного оператору є ***діагональна матриця***, у якої всі елементи, що не стоять на головній діагоналі, є нульовими. Базис, в якому матриця лінійного оператору має діагональний вид, називається ***канонічним базисом.***

Теорема. (критерій діагональності матриці лінійного оператору) *Для того, щоб матриця A лінійного оператору $\tilde{A}$ в даному базисі $e_1, e_2, ..., e_n$ була діагональною, необхідно і достатньо, щоб базисні вектори $e_1, e_2, ..., e_n$ були власними векторами цього оператору.*

Нехай $V_{\tilde{A}}^{\lambda}$ – множина власних векторів оператору $\tilde{A}$, що відповідає власному значенню λ. Ця множина утворює лінійний підпростір простору V, інваріантний відносно оператора $\tilde{A}$.

Теорема. (про різні власні значення) *Нехай власні значення лінійного оператору $\tilde{A}$ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ – різні. Тоді відповідні їм власні вектори $e_1, e_2, ..., e_p$ – ЛНЗ.*

Наслідок. *Якщо характеристичний многочлен оператору $\tilde{A} \in L(V,V)$ має n різних коренів ($n = \dim V$), то в деякому базисі матриця A лінійного оператору $\tilde{A}$ має діагональний вид.*

Більш глибока теорія лінійних операторів надає нам наступні відомості.

Матриця лінійного оператору $\tilde{A} \in L(V,V)$ може приводиться до діагонального виду і у випадку, коли не всі корені характеристичного многочлену різні. Але кількість цих коренів з урахуванням їх кратності повинна дорівнювати n ($n = \dim V$) і повинен виконуватись критерій діагональності матриці лінійного оператору. Якщо кількість коренів характеристичного многочлену з урахуванням їх кратності менша n, то матриця лінійного оператору $\tilde{A} \in L(V,V)$ не приводиться до діагонального виду.

Нехай $f : X \to X$ – перетворення, $X_1 \subset X$. Підмножина X_1 називається ***інваріантною*** відносно перетворення f, якщо $\forall x \in X_1 \quad \Rightarrow \quad f(x) \in X_1$.

$V_{\tilde{A}}^{\lambda}$ – множина власних векторів оператору $\tilde{A}$, що відповідає власному значенню λ, є лінійним підпростором простору V, інваріантним відносно оператора $\tilde{A}$.

Аудиторна робота.

Приклад 15.1. Які з наступних матриць лінійних операторів векторного простору L_3 над полем дійсних чисел **R** можна звести до діагонального виду в результаті переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому діагональну матрицю при позитивній відповіді, якщо

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця A лінійного оператора $\mathbf{A}$ векторного простору L_3 над полем P у деякому базисі є діагональною тоді і тільки тоді, коли цей базис складається з власних векторів даного оператора.

I. Достатньою умовою для зведення матриці лінійного оператора векторного простору розмірності n до діагонального виду є наявність у даного оператора n різних власних значень (такий оператор називають лінійним оператором з простим спектром), причому на діагоналі будуть саме ці всі власні значення.

II. Якщо лінійний оператор має менш як n власних значень, причому враховується їх кратність як коренів характеристичного рівняння, то матриця такого оператора не зводиться до діагонального виду.

III. Якщо лінійний оператор має менш як n різних власних значень, причому з урахуванням їх кратності як коренів характеристичного рівняння оператора їх рівно n, то треба дослідити ще, яке число k лінійно незалежних власних векторів визначає кожен корінь λ кратності s, то:

а) матриця не зводиться до діагонального виду, коли хоча б для одного λ виконується нерівність $k < s$ (тоді не набереться стільки власних векторів, скільки їх повинно бути в базисі);

б) матриця зводиться до діагонального виду, коли для всіх λ виконується рівність $k = s$, причому діагональними елементами є власні значення оператора, що повторюються стільки разів, яка їх кратність.

Звідси побудова шуканих базисів у випадках II і III, а) неможлива, а випадках I і III, б) – формальна, оскільки вже все, що цікавило, з'ясовано. Зазначимо тільки, що число k збігається з різницею $n-r$, де r – ранг матриці $A-\lambda E$ (A – матриця заданого лінійного оператора $\mathbf{A}$

Знайдемо спочатку характеристичні корені операторів, заданих матрицями A_i, $i=1,2,3,4$. Розв'язуючи характеристичні рівняння $|A_i-\lambda E|=0$, $i=1,2,3,4$ дістанемо послідовно

для A_1: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$;

для A_2: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3+2i$, $\lambda_3=3-2i$;

для A_3: $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$;

для A_4: $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-2$.

Усі характеристичні корені матриць A_1, A_3, A_4 є одночасно їх власними значеннями, оскільки вони є дійсними числами. У матриці A_2 тільки одне власне значення $\lambda_1=1$ кратності 1, тому матриця A_2 до діагонального виду звести не можливо (випадок II).

У матриці A_1 усі власні значення різні і їх три. Отже, матриця A_1 зводиться до діагональної матриці $D_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ (випадок I).

Знаходимо тепер число k власних векторів, що відповідають характеристичному кореню $\lambda=0$ кратності $s=2$ матриці A_3.

$$A_3-0\cdot E=\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&-4\end{pmatrix}^{\substack{(-5)*Ip+II(4)\\(-6)*Ip+III(4)}}\approx\begin{pmatrix}4&-5&2\\0&3&-2\\0&-6&4\end{pmatrix}^{IIp*(2)+III}\approx\begin{pmatrix}4&-5&2\\0&3&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Зрозуміло, що $r=r(A_3-0\cdot E)=2$. Тоді $k=n-r=3-2=1$. Оскільки при цьому $k=1<s=2$, то матрицю A_3 до діагонального виду звести неможливо (випадок III, а)).

Знаходимо число k для характеристичного кореня $\lambda = 1$ кратності $s = 2$ матриці A_4:

$$A_4 - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що $r = r(A_4 - 1 \cdot E) = 1$ і тому $k = n - r = 3 - 1 = 2 = s$. Оскільки в матриці A_4 кратних характеристичних коренів більше немає, то робимо висновок, що матриця A_4 зводиться до діагональної матриці $D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (випадок III, б)).

Визначимо ще базиси, в яких матриці заданих операторів мають діагональний вид D_1 і D_4. Оскільки цей процес зводиться до знаходження власних векторів операторів, заданих матрицями A_1 і A_4, то зробивши так, як у пункті III прикладу 7.1, матимемо такі базиси:

для матриці D_1: $\overrightarrow{f_1} = (-1,0,1)$, $\overrightarrow{f_2} = (-2,-1,2)$, $\overrightarrow{f_3} = (0,0,1)$;

для матриці D_4: $\overrightarrow{f_1} = (-2,1,0)$, $\overrightarrow{f_2} = (0,0,1)$, $\overrightarrow{f_3} = (-1,1,1)$.

Приклад 15.2. Знайти всі підпростори дійсного векторного простору V_3, інваріантні щодо лінійного оператора $\mathbf{A}$, який у деякому базисі $B\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ цього простору задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 3 \\ 12 & 5 & -6 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Задача знаходження всіх інваріантних щодо оператора $\mathbf{A}$ одновимірних підпросторів простору L рівносильна задачі знаходження власних векторів оператора $\mathbf{A}$.

Образ лінійної комбінації довільного набору власних векторів оператора $\mathbf{A}$ є лінійною комбінацією цих векторів. Отже довільна лінійна оболонка власних векторів оператора $\mathbf{A}$ є інваріантною відносно оператора $\mathbf{A}$.

Якщо базис простору L складається з власних векторів оператора $\mathbf{A}$, то всі підпростори векторного простору L, інваріантні щодо оператора $\mathbf{A}$, дістанемо, утворюючи лінійні оболонки всіх можливих підсистем системи власних векторів. Весь простір L і нульовий підпростір $\{\vec{0}\}$ є інваріантними підпросторами відносно будь-якого лінійного оператора. Оскільки в розглянутому випадку всі власні вектори оператора $\mathbf{A}$ відомі (див. приклад 7.1), а саме $\overrightarrow{b_1} = \tilde{n}_1 \overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{b_2} = \tilde{n}_2 \overrightarrow{f_2} + \tilde{n}_3 \overrightarrow{f_3}$, $\overrightarrow{f_1} = (1,-2,1)$, $\overrightarrow{f_2} = (1,0,2)$, $\overrightarrow{f_3} = (0,1,1)$; c_1, c_2, c_3 – такі довільні дійсні числа, що c_1 відмінне від нуля, а c_2, c_3 одночасно не дорівнюють нулю, то інваріантними підпросторами простору L_3 щодо оператора $\mathbf{A}$ є такі лінійні оболонки векторів $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$: $\langle\overrightarrow{f_1}\rangle, \langle\overrightarrow{f_2}\rangle, \langle\overrightarrow{f_3}\rangle, \langle\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}\rangle, \langle\overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\rangle, \langle\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_3}\rangle, \langle\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\rangle = V_3$ і нульовий підпростір $\{\vec{0}\}$. У цьому разі $V_3 = \langle\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\rangle$, оскільки вектори $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$ утворюють лінійно незалежну систему, їх кількість співпадає з розмірністю V_3, і тому вони є базисом простору V_3.

Вправи до виконання:

Вправа 15.1. Чи можна звести матрицю $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ лінійного оператора векторного простору L_3 над полем дійсних чисел $\mathbf{R}$ до діагонального виду в результаті переходу до нового базису. Якщо так то знайти цей базис і відповідну йому діагональну матрицю.

Самостійна робота.

Задача 15.1. Які з наступних матриць лінійних операторів дійсного векторного простору L можна звести до діагонального виду за допомогою переходу до нового базису? Знайти цей базис і відповідну йому діагональну матрицю при позитивній відповіді, якщо

а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 15.2. Знайти всі підпростори дійсного векторного простору V_3, інваріантні щодо лінійного оператора $\mathbf{A}$, який у деякому базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ цього простору задано матрицею

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Заняття 16. Контрольна робота № 2

Контрольна робота № 2 охоплює теми: «Вектори. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів»; «Ранг матриці. Базисний мінор. Критерій сумісності. Критерій визначеності»; «Однорідні системи лінійних рівнянь. Фундаментальна система розв’язків»; «Поняття лінійного простору. Лінійна залежність та лінійна незалежність. Базис, координати. Розмірність. Перетворення базису»; «Лінійна оболонка. Базис і розмірність перетину і суми»; «Лінійний оператор. Матриця лінійного оператора»; «Матриця лінійного оператора в різних базисах»; «Власні значення. Власні вектори»; «Діагональна форма. Канонічний базис».

Метою даної контрольної роботи є перевірка оволодіння основними навичками теорії лінійних просторів та теорії лінійних операторів.

Завдання дають можливість оцінити основні навички з вивченого матеріалу.

Зміст роботи:

1. Перевірити, чи ЛЗ чи ЛНЗ задані вектори (2 бали).
2. Знайти загальний розв'язок системи через фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи (4 бали).
3. Чи утворюють вектори x, y, z базис в R^3? (2 бали)
4. Знайти координати вектора x в базисі $e: e_1, e_2, e_3$ (2 бали).
5. Знайти матрицю переходу від базису e_1, e_2, e_3 до базису x, y, z. (4 бали)
6. Лінійний оператор **A** тривимірного простору переводить вектори a_1, a_2, a_3 у b_1, b_2, b_3 відповідно. Знайти матрицю A цього оператора в базисі a_1, a_2, a_3. (4 бали)
7. Знайти канонічний базис та діагональну форму лінійного оператора, заданого матрицею. (4 бали)

Заняття 17. Білінійні, симетричні та квадратичні форми. Метод Лагранжа

Мета*: Засвоїти поняття білінійної форми, її матриці та рангу. Навчитись знаходити зв'язок між матрицею квадратичної форми та її загальним видом. Засвоїти метод Лагранжа для приведення квадратичної форми до канонічного виду та визначення канонічного базису.*

Необхідні теоретичні матеріали

Числова функція $A(x, y)$, аргументами якої є довільні вектори x і y дійсного лінійного простору L, називається ***білінійною формою***, якщо $\forall x, y, z \in L, \forall \lambda \in R$ виконуються рівності:

$$1.\ A(x+z, y) = A(x, y) + A(z, y)$$

$$2.\ A(x, y+z) = A(x, y) + A(x, y)$$

3. $A(\lambda x, y) = \lambda A(x, y)$

4. $A(x.\lambda y) = \lambda A(x, y)$.

(Тобто числова функція $A(x, y)$ лінійна по кожному аргументу).

Теорема. (Про загальний вид білінійної форми) *Білінійна форма $A(x, y)$ в лінійному просторі L з базисом e: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ може бути однозначно представлена у загальному вигляді:*

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \eta_j ,$$

де $a_{ij} = A(e_i, e_j)$, а ξ_i, η_j – координати елементів x і y в базисі e.

Матриця $A_e = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, де $a_{ij} = A(e_i, e_j)$, називається ***матрицею білінійної форми*** $A(x, y)$ в базисі e. Очевидно, що вона визначається однозначно.

Дія білінійної форми $A(x, y)$ з матрицею A в базисі e на елементи x і y дорівнює добутку $x_e A y_e^T$, де x_e – вектор-рядок координат елементу x в базисі e, y_e^T – вектор-стовпчик координат елементу y в базисі e.

Теорема. *Матриці A_e і A_f білінійної форми $A(x, y)$ в базисах $e: e_1, e_2, ..., e_n$ і $f: f_1, f_2, ..., f_n$ пов`язані співвідношенням*

$$A_f = U^T A_e U ,$$

де U – матриця переходу від базису e до базису f, а U^T – транспонована матриця до U.

Наслідок. *Ранг матриці A_f дорівнює рангу матриці A_e.*

Рангом білінійної форми, заданої в скінченномірному лінійному просторі L, називається ранг матриці цієї форми в довільному базисі простору L.

Білінійна форма $A(x, y)$ називається ***симетричною***, якщо $\forall x, y \in L$ виконується співвідношення $A(x, y) = A(y, x)$.

Зауваження. *Білінійна форма $A(x, y)$ симетрична тоді і тільки тоді, коли її матриця A в довільному базисі e симетрична.*

Квадратичною формою називається числова функція $A(x, x)$ одного аргументу $x \in L$, яка одержується із симетричної форми $A(x, y)$ при $x = y$. Симетрична форма $A(x, y)$ при цьому називається ***полярною*** до квадратичної форми $A(x, x)$.

Зауваження. *Полярна білінійна форма $A(x, y)$ і квадратична форма $A(x, x)$ пов`язані співвідношенням*

$$A(x,y)=\frac{1}{2}\left[A(x+y,x+y)-A(x,x)-A(y,y)\right]$$

Матрицею квадратичної форми $A(x,x)$ ***в базисі*** e називається матриця відповідної полярної форми.

Говорять, що квадратична форма має ***канонічний вид*** в базисі f, якщо $A(x,x)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$, де $(y_1,y_2,...,y_n)=x_f$ – координати $x\in L$ в базисі f.

Коефіцієнти $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ називаються ***канонічними коефіцієнтами квадратичної форми***, базис $f: f_1,f_2,...,f_n$ називається ***канонічним базисом квадратичної форми***.

В канонічному виді квадратичної форми $A(x,x)=\lambda_1 y_1^2+...+\lambda_n y_n^2$, взагалі кажучи, не всі коефіцієнти λ_i відмінні від нуля.

Залишивши тільки ненульові коефіцієнти і зробивши відповідну перенумерацію, одержимо: $A(x,x)=\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+...+\lambda_k z_k^2$. Ясно, що $k\le n$. Матриця цієї квадратичної форми в деякому базисі

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}, \text{ очевидно, } rgA=k.$$

Ранг квадратичної форми, за означенням, дорівнює рангу матриці в довільному базисі, тому ранг квадратичної форми дорівнює k, а саме:

Зауваження. *Ранг квадратичної форми дорівнює числу відмінних від нуля канонічних коефіцієнтів.*

Теорема.(Лагранжа) *Довільна квадратична форма* $A(x,x)$, *яка задана в n-мірному лінійному просторі L, за допомогою невиродженого перетворення координат може бути приведена до канонічного виду.*

Опишемо ***метод Лагранжа*** приведення до канонічного виду. Нехай квадратична форма в базисі $e: e_1, e_2 .... e_n$ має загальний вигляд

$$A(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

Крок 1. 1.1. Нехай $a_{11}\ne 0$. У загальному вигляді $A(x,x)$ виберемо всі доданки з x_1, доповнимо їх до повного квадрату з одержанням рівнозначного виразу. Одержимо наступне перетворення координат:

$$\begin{cases} y_1 = x_1+\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ y_2=x_2, \quad \ldots \quad , \quad y_n=x_n \end{cases}$$

Після цього перетворення загальний вид $A(x,x)$ матиме вигляд $A(x,x) = a_{11}y_1^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}^* y_i y_j$, де одна частина – це доданок, що є квадратом від першої змінної, помноженим на коефіцієнт, а друга частина – решта доданків, що має вид квадратичної форми без першої змінної. До цієї другої частини ми можемо застосувати перетворення, аналогічні кроку 1. Це буде крок 2 і т.д.. Цей процес скінчиться, так як кожний раз друга частина матиме, як мінімум, на одну змінну менше, а їх загальна кількість скінченна.

1.2. Якщо в $A(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ всі $a_{ii} = 0, i = 1,...,n$, то, нехай $a_{12} \neq 0$. Застосуємо невироджене перетворення координат:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \\ x_3' = x_3 \\ \ldots\ldots \\ x_n' = x_n \end{cases}$$

Воно рівносильне перетворенню

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2' \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2' \\ x_3 = x_3' \\ \ldots\ldots \\ x_n = x_n' \end{cases},$$

Після цього перетворення $A(x,x)$ матиме вигляд: $A(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}' x_i' x_j'$, де доданок $2\grave{a}_{12}x_1x_2 = 2a_{12}\left(\frac{1}{4}x_1'^2 - \frac{1}{4}x_2'^2\right) = \frac{\grave{a}_{12}}{2}x_1'^2 - \frac{a_{12}}{2}x_2'^2$, тобто коефіцієнт при першій змінній $\grave{a}_{11}' = \frac{\grave{a}_{12}}{2} \neq 0$, і ми можемо використовувати далі процес, описаний у випадку 1.1.

Канонічний вид, в якому канонічні коефіцієнти дорівнюють 0 або ± 1, називається ***нормальним видом*** квадратичної форми $A(x,x)$.

Зауваження. За допомогою деякого невиродженого перетворення координати $x_1, x_2, ..., x_n$ вектора x в базисі e довільну квадратичну форму можна привести до нормального виду.

Якщо у канонічному вигляді квадратичної форми $A(x,x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ коефіцієнти $\lambda_1, ...\lambda_q > 0,\ \lambda_{q+1}, \ldots, \lambda_k < 0,$ $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0,$ то невироджене перетворення, що приведе до нормального виду $A(x,x) = z_1^2 + \ldots + z_q^2 - z_{q+1}^2 \cdots - z_k^2$ є наступним:

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{\lambda_1} y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_q = \sqrt{\lambda_q} y_q \\ z_{q+1} = \sqrt{-\lambda_{q+1}} y_{q+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_k = \sqrt{-\lambda_k} y_k \\ z_{k+1} = y_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = y_n \end{cases},$$

Аудиторна робота.

Приклад 17.1. Дана білінійна форма в деякому базисі:

$$A(x,y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 5x_1y_3 + 3x_2y_1 + x_2y_2 - 6x_3y_1 + 4x_3y_2 - x_3y_3.$$

Знайти матрицю A в цьому базисі та ранг цієї білінійної форми.

Розв'язання. За теоремою про загальний вид білінійної форми та означенням її матриці, одразу отримуємо шукану матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг білінійної форми – це ранг її матриці в довільному базисі (за означенням). Приведемо матрицю A до східчастої форми:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 3 & 1 & 0\\ -6 & 4 & -1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 5 & -15\\ 0 & 1 & 14\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 14\\ 0 & 0 & -85\end{pmatrix}$$

Ранг матриці, а значить і білінійної форми, дорівнює 3.

Приклад 17.2. Знайти матрицю і ранг кожної квадратичної форми

$$L_1(x_1,x_2)=2x_1^2+3x_2^2-5x_1x_2,$$

$$L_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_3^2+2x_1x_2-3x_1x_3.$$

Розв'язання. Для квадратичної форми $L_1(x_1,x_2)$ полярною буде симетрична форма $\mathbf{A}_1(x,y)=2x_1y_1-\frac{5}{2}x_1y_2-\frac{5}{2}x_2y_1+3x_2y_2$, так як $\mathbf{A}_1(x,x)=L_1(x_1,x_2)$. Оскільки матрицею квадратичної форми є матриця полярної до неї форми (за означенням), то матрицею квадратичної форми L_1 є матриця $\begin{pmatrix}2 & -\frac{5}{2}\\ -\frac{5}{2} & 3\end{pmatrix}$. Ранг цієї матриці дорівнює 2, значить, і ранг L_1 рівний 2.

Матриця $\begin{pmatrix}1 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{2} & 0 & -1\end{pmatrix}$ є матрицею квадратичної форми L_2, оскільки полярною до L_2 буде $\mathbf{A}_2(x,y)=x_1y_1+x_1y_2-\frac{3}{2}x_1y_3+x_2y_1-\frac{3}{2}x_3y_1-x_3y_3$. Ранг L_2 дорівнює 3.

Приклад 17.3. Записати квадратичну форму $L(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+5x_2^2-x_3^2+2x_1x_2$ в матричному вигляді.

Розв'язання. Знаходимо матрицю цієї квадратичної форми $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, тоді в матричному вигляді

$$L(x_1,x_2,x_3)=x\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}x^T.$$

Приклад 17.4. Дана матриця $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 6\\ 1 & 6 & -4\end{pmatrix}$ квадратичної форми $L(x_1,x_2,x_3)$. Записати цю квадратичну форму у загальному вигляді $L(x_1,x_2,...,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$.

Розв'язання. Так як $a_{11}=-1$, $a_{22}=2$, $a_{33}=-4$, $a_{12}=a_{21}=0$, $a_{13}=a_{31}=1$, $a_{23}=a_{32}=6$, то $L(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+2x_2^2-4x_3^2+2x_1x_3+12x_2x_3$, бо $\forall\, i\neq j$ $a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i=2a_{ij}x_ix_j$.

Зверніть увагу, що коефіцієнти загального виду утворюються із сум елементів, що стоять на симетричних місцях (або подвоєння одного з таких елементів, якщо вони не стоять на головній діагоналі).

Приклад 17.5. Знайти матрицю xAx^T, де A–матриця білінійної форми із вправи 10.1.

Розв'язання. $xAx^T=2x_1^2+2x_1x_2+11x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$, її матриця

$$A'=\begin{pmatrix}2 & 1 & \frac{11}{2}\\ 1 & 1 & 2\\ \frac{11}{2} & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $a'_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})$, де $(a_{ij})=A$, $(a'_{ij})=A'$.

Приклад 17.6. Методом Лагранжа знайти канонічний вигляд квадратичної форми $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ та відповідний канонічний базис. Знайти ранг цієї квадратичної форми.

Розв'язання. Крок 1. У загальному вигляді квадратичної форми $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ коефіцієнт при x_1^2 дорівнює $1 \neq 0$. Виділимо доданки з x_1 і повний квадрат з цієї суми:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3$$

Замість перших трьох доданків f підставимо праву частину одержаної рівності, зведемо подібні доданки, зробимо заміну координат:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{array}\right], \quad f = y_1^2 - 3y_2^2 - 2y_2y_3 + 2y_3^2.$$

Крок 2. У одержаному вигляді квадратичної форми f коефіцієнт при y_2^2 дорівнює $-3 \neq 0$. Виділимо доданки з y_2, повний квадрат з цієї суми, підставимо праву частину одержаної рівності в f, зведемо подібні доданки, зробимо заміну координат:

$$-3y_2^2 - 2y_2y_3 = -3(y_2^2 + \frac{2}{3}y_2y_3) = -3\left[(y_2 + \frac{1}{3}y_3)^2 - \frac{1}{9}y_3^2\right] = -3(y_2 + \frac{1}{3}y_3)^2 + \frac{1}{3}y_3^2;$$

$$\left[\begin{array}{l} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ z_3 = y_3 \end{array}\right], \quad f = z_1^2 - 3z_2^2 + \frac{7}{3}z_3^2.$$

Одержали канонічний вид квадратичної форми: $f = z_1^2 - 3z_2^2 + \frac{7}{3}z_3^2$.

Вона має три ненульових коефіцієнти, тому $rg\ f = 3$

Матрицями переходу до нових координат кожного кроку будуть матриці $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$ відповідно. Тоді $x \xrightarrow{C} z$, $C = C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$, а матрицею переходу до канонічного базису буде матриця

$$U = (C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо позначити $e: e_1, e_2, e_3$ – базис, в якому задана квадратична форма f, а $g: g_1, g_2, g_3$ – її канонічний базис, то із матриці U одержимо:

$$g_1 = e_1;$$
$$g_2 = -2e_1 + e_2;$$
$$g_3 = -\frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + e_3.$$

Зауваження. Зручно процес приведення до канонічного виду записувати наступним чином:

$$f = \underline{x_1^2} + x_2^2 + 3x_3^2 \underline{+ 4x_1x_2} \underline{+ 2x_1x_3} + 2x_2x_3 =$$

$$= \underline{(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3} + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 =$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 =$$

$$
=\left[\begin{array}{l} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{array}\right] = y_1^2 \underline{\underline{-3y_2^2}}\,\underline{\underline{-2y_2y_3}} + 2y_3^2 =
$$

$$
= y_1^2 \underline{\underline{-3(y_2^2 + \frac{2}{3}y_2y_3)}} + 2y_3^2 = y_1^2 \underline{\underline{-3\left[\,(y_2 + \frac{1}{3}y_3)^2 - \frac{1}{9}y_3^2\,\right]}} + 2y_3^2 =
$$

$$
= y_1^2 \underline{\underline{-3(y_2 + \frac{1}{3}y_3)^2 + \frac{1}{3}y_3^2}} + 2y_3^2 = \left[\begin{array}{l} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ z_3 = y_3 \end{array}\right] = z_1^2 - 3z_2^2 + \frac{7}{3}z_3^2.
$$

Тут однаковими лініями підкреслено рівні вирази, в останньому з яких виділено повний квадрат.

Приклад 17.7. Методом Лагранжа знайти нормальний вигляд та невироджене лінійне перетворення координат, яке приводить до цього виду квадратичну форму:

$$
A(x, x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3 .
$$

Розв'язання. Коефіцієнт загального виду квадратичної форми $A(x, x)_3$ при x_1^2 дорівнює $4 \neq 0$. Виділимо доданки з x_1 і повний квадрат з цієї суми:

$$
A(x, x) = \underline{4x_1^2} + x_2^2 + x_3^2 \underline{- 4x_1x_2} \underline{+ 4x_1x_3} - 3x_2x_3 =
$$

$$
= \underline{(2x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3} + x_2^2 + x_3^2 - 3x_2x_3 =
$$

$$
= (2x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2x_3 =
$$

$$
=\left[\begin{array}{l} y_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{array}\right] = y_1^2 \underline{\underline{-y_2y_3}}
$$

Коефіцієнти при y_2^2 і y_3^2 дорівнюють 0 і квадратична форма ще не приведена до канонічного виду. Тому необхідно зробити додаткову зміну координат, аналогічну до тієї, яка описана у методі Лагранжа, крок 1.2.

$$A(x,x) = \left[\begin{array}{ll} z_1 = y_1 & y_1 = z_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 & y_2 = \frac{1}{2} z_2 + \frac{1}{2} z_3 \\ z_3 = y_2 - y_3 & y_3 = \frac{1}{2} z_2 - \frac{1}{2} z_3 \end{array}\right] =$$

$$= \quad z_1^2 - \left(\frac{1}{4} z_2^2 - \frac{1}{4} z_3^2 \right) = z_1^2 - \frac{1}{4} z_2^2 + \frac{1}{4} z_3^2 .$$

У цьому випадку ми зразу одержали канонічний вигляд квадратичної форми. В загальному випадку таке перетворення лише створює ненульові коефіцієнти при квадратах змінних.

Довільний канонічний вигляд квадратичної форми легко приводиться до нормального виду лише однією невиродженою зміною координат:

$$A(x,x) = z_1^2 - \frac{1}{4} z_2^2 + \frac{1}{4} z_3^2 = \left[\begin{array}{l} t_1 = z_1 \\ t_2 = \frac{1}{2} z_2 \\ t_3 = \frac{1}{2} z_3 \end{array}\right] = t_1^2 - t_2^2 + t_3^2 .$$

Матрицями переходу до нових координат кожного кроку будуть матриці $C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ відповідно.

Тоді $x \xrightarrow{C} t, C = C_1 C_2 C_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ – матриця не виродженого перетворення координат, яке приводить квадратичну форму $A(x,x)$ до нормального виду $t_1^2 - t_2^2 + t_3^2$.

Вправи до виконання:

Вправа 17.1. Знайти ранг квадратичної форми:

а) $L(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$; б) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-x_1x_3$.

Вправа 17.2. Дана матриця $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ квадратичної форми $L(x_1,x_2,x_3)$. Записати цю квадратичну форму у загальному вигляді $L(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j$.

Вправа 17.3. Записати матрицю квадратичної форми $(x_1 x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Вправа 17.4. Методом Лагранжа знайти нормальний вигляд та невироджене лінійне перетворення координат, яке приводить до цього виду квадратичну форму: $x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$.

Вправа 17.5. Для квадратичних форм f і g знайти невироджене лінійне перетворення координат, яке переводить форму f в форму g.

$f=2x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3$,

$g=2y_1^2+3y_2^2+6y_3^2-4y_1y_2-4y_1y_3+8y_2y_3$.

Самостійна робота.

Задача 17.1. Записати матрицю квадратичної форми

а) $L(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2-x_1x_2$,

б) $L(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2-4x_3^2+5x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$.

Задача 17.2. Знайти ранг квадратичної форми:

а) $L(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$,

б) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

Задача 17.3. Записати квадратичну форму в матричному вигляді: $L(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2-2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-3x_1x_3$.

Задача 17.4. Записати квадратичну форму за заданою матрицею $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 17.5. Записати матрицю квадратичної форми $(x_1x_2x_3)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Задача 17.6. Методом Лагранжа знайти канонічний вигляд в множині дійсних чисел квадратичної форми та відповідний канонічний базис:

а) $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$,

б) $x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$

Задача 17.7 Методом Лагранжа знайти нормальний вигляд та невироджене лінійне перетворення координат, яке приводить до цього виду квадратичні форми:

а) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, б) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$.

Задача 17.8. Знайти невироджене лінійне перетворення, яке переводить квадратичну форму f в квадратичну форму g:

$f=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3$,

$g=y_1^2+2y_2^2-y_3^2+4y_1y_2-2y_1y_3-4y_2y_3$.

Заняття 18. Метод Якобі. Критерій Сильвестра. Класифікація квадратичних форм

Мета*: Засвоїти метод Якобі для приведення квадратичної форми до канонічного виду та визначення канонічного базису. Розглянути поняття індексів інерції та навчитись їх визначати. Навчитися користуватись різними критеріями визначення типу квадратичної форми.*

Необхідні теоретичні матеріали

Перетворення базису $e_1, e_2, ..., e_n$ на базис $f_1, f_2, ..., f_n$ називається ***трикутним,*** якщо воно має наступний вид:

$$f_1 = e_1$$
$$f_2 = \lambda_{21} e_1 + e_2$$
$$f_3 = \lambda_{31} e_1 + \lambda_{32} e_2 + e_3$$
$$\dots$$
$$f_n = \lambda_{n1} e_1 + \lambda_{n2} e_2 + ... + \lambda_{n(n-1)} e_{n-1} + e_n$$

Визначимо ***кутові мінори*** матриці $A_e = (a_{ij})$ квадратичної форми *A(x,x)* в базисі *e*:

$$\Delta_1 = |a_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}, \dots .$$

Теорема. (Якобі) *Нехай мінори* $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{n-1}$ *матриці* A_e *квадратичної форми A(x, x) відмінні від нуля. Тоді існує єдине трикутне перетворення базисних векторів* $e_1, e_2, ..., e_n$, *за допомогою якого форму* $A(x, x)$ *можна привести до канонічного виду.*

Позначимо мінор матриці A_e, складений з перших (k) рядочків та перших $(k+1)$ стовпчиків без i-го стовпчика, символом $\Delta_{k,i}$. Тоді ***коефіцієнти трикутного перетворення*** обчислюються за формулами

$$\lambda_{ji} = (-1)^{j+i} \frac{\Delta_{j-1,i}}{\Delta_{j-1}}, \quad j = 2, 3, \dots, n, \ 1 \le i < j \,. \ (1)$$

Маємо ***формули для знаходження канонічних коефіцієнтів***:

$$\lambda_1 = \Delta_1, \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots, \lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} . (2)$$

Знаходження канонічного вигляду та канонічного базису квадратичної форми за допомогою формул (1) та (2) називається ***методом Якобі***.

Індексом інерції квадратичної форми називається кількість відмінних від нуля канонічних коефіцієнтів (k) (тобто рангу), ***додатним індексом інерції*** – кількість додатних канонічних коефіцієнтів (p), ***від'ємним індексом інерції*** – число від'ємних канонічних коефіцієнтів (q). Ясно, що $k = p + q$.

Теорема. (закон інерції квадратичної форми). *Кількість доданків з додатними (від'ємними) коефіцієнтами в нормальному виді квадратичної форми не залежить від способу приведення форми до його канонічного виду.*

Квадратична форма $A(x, x)$ називається

1. ***додатно визначеною***, якщо $\forall x \neq \theta$ виконується нерівність $A(x, x)>0$.

2. ***від`ємно визначеною***, якщо $\forall x \neq \theta$ виконується нерівність $A(x, x)<0$

3. ***знакозмінною***, якщо $\exists\, x, y \in L$ такі, що $A(x, x)>0$ і $A(y, y)<0$.

4. ***квазідодатно визначеною,*** якщо $\forall x \in L \quad A(x, x) \geq 0$ і існує $x \neq \theta$ що $A(x, x) = 0$.

5. ***квазівід`ємно визначеною,*** якщо $\forall x \in L \quad A(x, x) \leq 0$ і існує $x \neq \theta$, що $A(x, x) = 0$.

Теорема. (Критерій знаковизначеності квадратичної форми) *Квадратична форма* $A(x, x)$, *задана в* n*- мірному лінійному просторі* L *є додатно (від'ємно) визначена тоді і тільки тоді, коли додатний індекс інерції* p *(від'ємний індекс інерції* q*) дорівнює* n*:* $p = n \quad (q = n)$

Теорема. (Критерій квазівизначеності) *Квадратична форма* $A(x, x)$ *квазівизначена тоді і тільки тоді, коли або* $p < n, \quad q = 0$, *або* $p = 0, \quad q < n$

Теорема. (Критерій знакозмінності квадратичної форми) *Квадратична форма* $A(x, x)$ *знакозмінна тоді і тільки тоді, коли і додатний, і від'ємний індекси інерції цієї форми відмінні від нуля:* $p > 0 \quad і \quad q > 0$.

Теорема. (Критерій Сильвестра)

а) *Для того, щоб квадратична форма* $A(x, x)$ *була додатно визначена, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності:* $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0.$

б) *Квадратична форма від'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли знаки кутових мінорів чередуються так:* $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 > 0, ...$

Дві квадратичні форми f і g одного і того ж лінійного простору називаються ***еквівалентними***, якщо існує не вироджене перетворення координат T, при якому загальний вид квадратичної форми f співпадає з загальним видом квадратичної форми g.

Позначається $f \sim g$.

Твердження. *Квадратичні форми еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх додатні і від'ємні індекси інерції співпадають*.

Аудиторна робота.

Приклад 18.1. Методом Якобі знайти канонічний вигляд та відповідний канонічний базис квадратичних форм:

а) $A(x,x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

б) $A(x,x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

Розв'язання. а) Побудуємо матрицю цієї квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Знайдемо її кутові мінори:

$$\Delta_1 = 1 \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -36.$$

Після перевірки, що всі кутові мінори (можливо за виключенням останнього) відмінні від нуля, робимо висновок, що поставлену задачу можна розв'язати методом Якобі. Тоді канонічні коефіцієнти знаходяться за формулами (2):

$$\lambda_1 = \Delta_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{4}{1} = 4, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{-36}{4} = -9.$$

Отже, маємо *канонічний вид квадратичної форми*:

$$A(x,x) = y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2.$$

Коефіцієнти трикутного перетворення обчислюються за формулами (1):

Мінор $\Delta_{1,1}$ – це визначник, що утворюється із першого рядочка матриці A, перших 1+1=2 стовпчиків без першого стовпчика, тобто він дорівнює елементу, що стоїть на місці (12), тоді $\lambda_{21}=(-1)^{2+1}\dfrac{\Delta_{1,1}}{\Delta_1}=-\dfrac{1}{1}=-1$

Мінор $\Delta_{2,1}$ – це визначник, що утворюється із двох перших рядочків матриці A, перших 2+1=3 стовпчиків без першого стовпчика, тобто він дорівнює визначнику $\Delta_{2,1}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 0\end{vmatrix}=10$, тоді

$\lambda_{31}=(-1)^{3+1}\dfrac{\Delta_{2,1}}{\Delta_2}=\dfrac{10}{4}=2{,}5$

Мінор $\Delta_{2,2}$ – це визначник, що утворюється із двох перших рядочків матриці A, перших 2+1=3 стовпчиків без другого стовпчика, тобто він дорівнює визначнику $\Delta_{2,2}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2$, тоді

$\lambda_{32}=(-1)^{3+2}\dfrac{\Delta_{2,2}}{\Delta_2}=-\dfrac{2}{4}=-0{,}5$ і маємо трикутне перетворення базису, що приводить до *канонічного базису*:

$$f_1=e_1$$

$$f_2=-e_1+e_2$$

$$f_3=2{,}5e_1-0{,}5e_2+e_3$$

Розв'язання. б) Побудуємо матрицю цієї квадратичної форми:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ -2 & 1 & -3/2\\ 2 & -3/2 & 1\end{pmatrix}$$

Знайдемо її кутові мінори: $\Delta_1 = 4 \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Δ_2 не є останнім кутовим мінором, тому його рівність нулю не дає можливість скористатись методом Якобі. Для приведення такої квадратичної форми до канонічного виду можна скористатися методом Лагранжа або підібрати таке перетворення квадратичної форми, після якого перші два кутові мінори будуть ненульовими.

Приклад 18.2. Визначити тип квадратичної форми 3-мірного простору

$$x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2.$$

Розв'язання. а) Побудуємо матрицю цієї квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Знайдемо її кутові мінори:

$$\Delta_1 = 1 \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9.$$

Тоді канонічні коефіцієнти знаходяться за формулами (2):

$$\lambda_1 = \Delta_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{3}{1} = 3, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{9}{3} = 3.$$

Отже, маємо *канонічний вид квадратичної форми*:

$$A(x, x) = y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2.$$

Всі канонічні коефіцієнти додатні, отже додатній індекс інерції дорівнює 3 і дорівнює розмірності простору. За критерієм знаковизначеності, ця квадратична форма є додатновизначеною.

В цьому прикладі після обчислення кутових мінорів також можна скористатися критерієм Сильвестра: всі кутові мінори додатні ($\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = 3 > 0, \Delta_3 = 9 > 0$), тому квадратична форма є додатновизначеною.

Приклад 18.3. З'ясувати, чи є еквівалентними наступна пара форм, не знаходячи лінійного перетворення однієї квадратичної форми в іншу:

$$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3,\ g = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3$$

Розв'язання. Побудуємо матриці цих квадратичних форм та знайдемо їх кутові мінори, канонічні коефіцієнти та визначимо їхні індекси інерції:

для квадратичної форми f

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -17.$$

$\lambda_1 = \Delta_1 = 2, \quad \lambda_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} = \dfrac{2}{2} = 1, \quad \lambda_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta_2} = \dfrac{-17}{2}$. Отже, додатний індекс інерції дорівнює 2, від'ємний індекс інерції дорівнює 1.

Для квадратичної форми g

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_1 = 3 \neq 0, \quad \Lambda_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0, \quad \Lambda_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{11}{2}.$$

$\mu_1 = \Lambda_1 = 3, \quad \mu_2 = \dfrac{\Lambda_2}{\Lambda_1} = \dfrac{6}{3} = 2, \quad \lambda_3 = \dfrac{\Lambda_3}{\Lambda_2} = \dfrac{11}{12}$. Додатний індекс інерції цієї квадратичної форми дорівнює 3, що не дорівнює додатному індексу інерції квадратичної форми f, тому, за критерієм еквівалентності, квадратичні форми f і g не є еквівалентними.

Приклад 18.4. Дослідити, при яких значеннях параметру λ є знаковизначеною квадратична форма $\lambda x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$.

Розв'язання. Побудуємо матрицю цієї квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо її кутові мінори: $\Delta_1 = \lambda, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 4.$

За критерієм Сильвестра, ця квадратична форма додатновизначена, коли її кутові мінори додатні. Отже, $\Delta_1 = \lambda > 0, \Delta_2 = \lambda - 4 > 0$, значить при $\lambda > 4$ квадратична форма додатновизначена.

За цим же критерієм, ця квадратична форма від'ємновизначена, коли її кутові мінори чередуються: $\Delta_1 = \lambda < 0, \Delta_2 = \lambda - 4 > 0$. Таких параметрів λ не існує, тому квадратична форма не може бути від'ємновизначеною ні для якого параметру λ.

Вправи до виконання:

Вправа 18.1. Методом Якобі знайти канонічний вигляд та відповідний канонічний базис квадратичної форми

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Вправа 18.2 Визначити тип квадратичної форми 3-мірного простору:

а) $2x_2^2 - x_1^2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$,

б) $-3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

Самостійна робота.

Задача 18.1. Методом Якобі знайти канонічний вигляд та відповідний канонічний базис квадратичної форми

а) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

б) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Задача 18.2. Знайти тип квадратичної форми

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Задача 18.3. З'ясувати, чи є еквівалентними наступна пара форм, не знаходячи лінійного перетворення однієї квадратичної форми в іншу:

$f = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 21x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 22x_2x_3$,

$g = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$,

Задача 18.4. Знайти всі значення параметру λ, при яких додатновизначені наступні квадратичні форми

а) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,

б) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Індивідуальні завдання

ІНДЗ № 1. «*Комплексні числа*»

1. Запишіть комплексне число z в алгебраїчній формі, знайдіть дійсну та уявну частину даного комплексного числа, модуль цього комплексного числа.
2. Подайте число в тригонометричній формі, вкажіть модуль та аргумент комплексного числа. Використовуючи формулу Муавра (піднесення до степеня комплексного числа) знайдіть n – ий степінь числа z.
3. Знайдіть всі значення $\sqrt[n]{z}$ та зобразіть всі ці значення на комплексній площині.
4. На комплексній площині зобразіть область, що задовольняє умови.
5. Розв'язати рівняння у полі комплексних чисел.

ІНДЗ № 2. «*Лінійні простори. Лінійні оператори. Квадратичні форми*»

1. Ортогоналізувати систему векторів q_1, q_2, q_3 простору V_4, та доповнити її до ортогонального базису. Побудувати з цього базису ортонормований базис. Знайти кут між векторами q_1, q_2.
2. Знайти проекцію елементу x на a_1, a_2, та відстань від x до a_1, a_2, якщо x, a_1, a_2 задано в ортогональному базисі e.
3. Знайти образ, ядро, ранг і дефект лінійного оператору $A: R^n \to R^n$, якщо $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
4. Методом Лагранжа привести задану квадратичну форму до нормального виду. Знайти матрицю переходу до нових координат.
5. Методом Якобі привести задану квадратичну форму до канонічного вигляду. Визначити її тип.

Питання до колоквіуму:

«Комплексні числа»

1. геометричний зміст модуля та аргументу комплексного числа,
2. алгебраїчна формула для знаходження модуля комплексного числа,
3. формули для знаходження аргументу комплексного числа,
4. формулу Муавра, формулу коренів n-го степеня із комплексного числа,

«Матриці. Визначники»

5. означення визначника, властивості визначників при елементарних перетвореннях,
6. формула обчислення алгебраїчного доповнення A_{ij}; формула розкладу визначника по i-му рядку,
7. означення оберненої матриці, теорему про обернену матрицю (формула оберненої матриці)
8. формули Крамера,

«Системи лінійних рівнянь»

9. означення сумісної системи лінійних рівнянь, визначеної, невизначеної системи, однорідної, неоднорідної,
10. означення вектора,
11. означення суми векторів та добутку вектору на число,
12. означення лінійної комбінації,
13. означення лінійної залежності та лінійної незалежності,
14. означення рангу,
15. означення фундаментальної системи розв'язків,
16. критерій лінійної залежності,
17. умову лінійної незалежності, пов'язану з рангом матриці,
18. критерій сумісності, критерій визначеності,

«Алгебраїчні структури. Лінійні простори»

19. означення групи; поля;
20. означення лінійного простору;
21. означення базису; координат елементу;
22. означення розмірності простору;
23. означення суми і перетину підпросторів;
24. означення евклідового простору;
25. означення лінійної оболонки.
26. критерій підпростору;
27. обернена теорема про зв'язок розмірності і базису;

28. матриця $e \to e^{'}$, матриця $e' \to e$, матриця $x_e \to x_{e^{'}}$;

29. про зв’язок розмірностей підпросторів, їх суми та перетину;

30. критерій прямої суми;

31. властивості ортогональних проекцій;

«Лінійні оператори»

32. означення лінійного оператору;

33. означення матриці лінійного оператору A; $\det \mathrm{A}$;

34. означення ядра та образа, дефекту і рангу лінійного оператору;

35. властивості ядра та образу лінійного оператору;

36. означення власних векторів, власних значень;

37. означення характеристичного рівняння, характеристичного числа;

«Квадратичні форми»

38. означення білінійної форми; означення квадратичної форми;

39. означення канонічного виду та індексу інерції квадратичної форми;

40. означення та критерій додатновизначеності;

Література.

1. Безущак О.О, Ганюшкін О.Г., Кочубінська Є.А. Навчальний посібник з лінійної алгебри для студентів механіко-математичного факультету. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2019. – 224 с.

2. Волошина Т.В. Лінійна алгебра: навч. посібник / Т.В. Волошина. – Луцьк: Вежа-Друк, 2020. – 308 с.

3. Зайцев О.П. Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до матаналізу. – навч. посібник. – К.: Алерта, 2017. – 574 с.

4. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : Навч. посібник / В.В. Булдигін, І.В. Алєксєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховничий, Н.Р. Коновалова, Л.Б. Федорова; за ред. проф. В.В. Булдигіна. – К. : ТВіМС, 2019. – 224 с.

5. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Лінійна алгебра» (2 семестр). Пащенко З.Д., Турка Т.В. – Слов’янськ: ДВНЗ «ДДПУ», 2017, – 109 с.

6. Набока О.О. Лінійна алгебра : навч.-метод. посібник. Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». – Харків : Стильна типографія, 2020. – 64 с.

7. Осадча Л. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник. – Рівне: НУВГП, 2020. – 205 с.

8. Пащенко З.Д., Турка Т.В. «Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Частина 1» для спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика)» − Слов’янськ: ДВНЗ «ДДПУ», 2020, − 170 с.

9. Борозенець Н. С., Пугач В.І. Вища математика. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. Практикум для студентів 1 курсу інженерно-технологічних спеціальностей денної і заочної форм навчання / Суми: СНАУ, 2017 р.

10. Дрозденко В.О. Вища математика: необхідний теоретичний мінімум: навч. посіб. В.О. Дрозденко, О.Л. Дрозденко Б.: Пшонківський О.В., 2020. 264 с.

11. Довгай Б.В., Шестаков С.С. Комплексні числа та многочлени: посібник до розв’язання задач. – 2017.- 46 с.

12. Лінійна алгебра. Методичні вказівки для лабораторних робіт / Баранник В. Ф., Погоріляк Є. Я., Рудько В. П., Шапочка І. В. - Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2000. - 52 с.

13. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : метод. вказівки та завд. до самост. роботи з дисципліни «Вища математика» для студентів інженер. спец. / уклад.: В.П. Мурашковська, Л.А. Руновська. – Чернігів : ЧНТУ, 2019. - 68 с.

14. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Лінійна алгебра» (2 семестр). Пащенко З.Д., Турка Т.В. – Слов’янськ: ДВНЗ «ДДПУ», 2017, – 109 с.

Підписано до друку 30.08.2021 р.
Формат 60х84 1/16. Ум. др. арк. 9,0.
Наклад 50 прим. Зам. № 1964.

Видавництво Б. І. Маторіна
84116, м. Слов'янськ, вул. Батюка, 19.
Тел.: +38 050 518 88 99. E-mail: matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.