Кадубовський О.А.,
Кадубовська О.Л., Плесканьова Л.Г.

СЕРІЯ – МАТЕМАТИКА: монографії, підручники та посібники

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ЧАСТИНА І:

Елементи векторної алгебри.
Метод координат
на площині та в просторі.

навчальний посібник

теорія
приклади
задачі

Слов'янськ – 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кадубовський О.А., Кадубовська О.Л., Плесканьова Л.Г.

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ЧАСТИНА І:

Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині та в просторі.

Рекомендовано вченою радою
Слов'янського державного педагогічного університету
як навчальний посібник

Слов'янськ – 2010

УДК 514.12

ББК 22.151.5

Кадубовський О.А., Кадубовська О.Л., Плесканьова Л.Г.
Аналітична геометрія. Частина I: Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині та в просторі: Навчальний посібник – Видання 2-е, виправлене та доповнене. – Слов'янськ, 2010. – 84 с.

Адресовано студентам педагогічних ВНЗів за напрямом підготовки 6.040201 Математика* в якості навчального посібника. Посібник об'єднує матеріал з тем «Векторна алгебра» і «Метод координат на площині та в просторі», який традиційно входить до програми річного курсу з аналітичної геометрії. Кожен параграф містить теоретичні відомості та вказівки, необхідні для ефективного розв'язування відповідних задач.

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ

вченою радою Слов'янського державного педагогічного університету – протокол № 3 від 14.12.2010 р.

Рецензенти: доктор фіз.-мат. наук ЧУЙКО С.М., професор, завідувач кафедри економіко-математичних дисциплін Слов'янського державного педагогічного університету;

кандидат фіз.-мат. наук, ЖУЧОК Ю.В., доцент кафедри математичного аналізу та алгебри Інституту інформаційних технологій Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Відповідальний за випуск: кандидат фіз.-мат. наук, викладач кафедри геометрії та МВМ СДПУ Кадубовський О.А.

Зміст

ВІД АВТОРІВ

Мета даного посібника полягає в тому, щоб допомогти студентам першого курсу фізико-математичних факультетів педагогічних ВНЗів при вивченні розділів «Векторна алгебра» і «Метод координат на площині та в просторі».

Разом з теоретичним матеріалом, який містить майже всі доведення основних властивостей операцій над векторами та основних положень методу координат на площині та в просторі, посібник містить й широке коло задач, які відповідають освітньо-професійній програмі підготовки майбутніх вчителів математики.

Крім стандартних задач, спрямованих на оволодіння апаратом векторної алгебри та методом координат, посібник містить й задачі шкільного курсу геометрії, векторний метод розв'язування яких, через обмаль програмного часу, майже не висвітлюється у загально освітніх школах.

Автори щиро вдячні рецензентам за виявлені недоліки та зауваження.

Особлива подяка зав. кафедрою ГМВМ СДПУ – *Чуйко Олені Вікторівні* та викладачу кафедри ГМВМ СДПУ – *Авраменку Миколі Петровичу* за цінні поради та плідні консультації під час написання даного посібника.

I. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1. Вектори та лінійні операції над ними

1.1 Вектори. Рівність векторів

Означення 1.1. Величини, які для свого задання потребують не тільки числового значення, але й напряму в просторі (зокрема на площині) будемо називати *векторними величинами* або *векторами*.

В подальшому для наочного зображення векторів будемо використовувати *геометричні вектори,* тобто прямолінійні відрізки, що мають не тільки визначену довжину, але й визначений напрям. Вектори будемо позначати або однією малою латинською літерою (наприклад $\vec{a}$), або ж двома великими (напр. $\overrightarrow{AB}$, де: A – початок вектора, B – його кінець).

Означення 1.2. Довжину вектора називатимемо його *модулем.*

Для модуля вектора $\vec{a}$ використовують позначення $|\vec{a}|$.

Означення 1.3. Вектор, початок і кінець якого співпадають, називають вектором нульової довжини або *нуль-вектором.* Для нуль-вектора використовують позначення $\vec{0}$.

Означення 1.4. Скінчену або нескінчену сукупність векторів площини, що лежать на паралельних прямих або належать одній прямій, будемо називати *колінеарними* векторами.

Кожна пара векторів, зображених на рис. 1.1, є колінеарними векторами. Проте вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – однаково напрямлені (цей факт будемо позначати так $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), а пари векторів $\vec{a},\vec{c}$ і $\vec{c},\vec{b}$ – протилежно напрямлені $\left(\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}, \vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}\right)$.

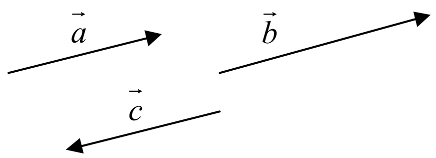


Рис. 1.1

Зауваження 1.1. Хоча для нуль-вектора напрям не визначений, його прийнято вважати колінеарним будь-якому вектору. Крім того, $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$.

Означення 1.5. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають рівними, якщо вони задовольняють наступним умовам:

a) колінеарні та однаково напрямлені: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$;

b) мають рівні модулі (однакову довжину): $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Зауваження 1.2. Зараз і надалі під *вектором* $\vec{a}$ слід розуміти **сукупність всіх векторів** простору, які рівні одному фіксованому геометричному вектору $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

Означення 1.6. Колінеарні вектори однакової довжини але різних напрямків називаються протилежними векторами. Для вектора протилежного вектору $\vec{a}$ використовують позначення $-\vec{a}$. Прикладом протилежних векторів є вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$, де A, B – довільні (різні) точки простору.

На прикладі паралелограма $ABCD$, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, не важко впевнитися в справедливості наступних співвідношень:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$; $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CB}$;

$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}=-\vec{b}$.

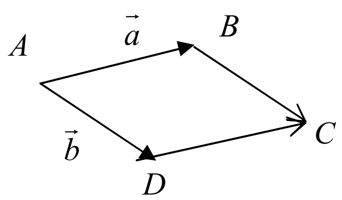


Рис. 1.2

Лінійними операціями над векторами називають операції додавання та віднімання векторів, а також добуток вектора на число.

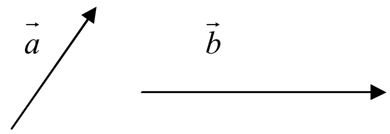
1.2 Додавання та віднімання векторів

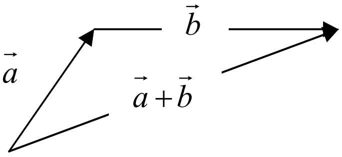
Означення 1.7. Сумою $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, початок якого співпадає з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що кінець вектора $\vec{a}$ співпадає з початком вектора $\vec{b}$.

Додавання двох векторів можна здійснити за допомогою двох правил:

1) «трикутника» та 2) «паралелограма».

Отже, нехай задано два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1.3 – 1.4).





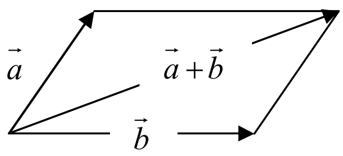


Рис.1.3: правило «трикутника» **Рис.1.4: правило «паралелограма»**

Правило ***трикутника*** полягає в тому, що за допомогою паралельного перенесення одного з векторів, його початок суміщають з кінцем другого вектора. Тоді шуканим вектором $\vec{a}+\vec{b}$ є вектор, позначений на рис.1.3. З наведеного правила отримуємо важливий наслідок:

Для будь-яких точок A, B, C має місце рівність $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Правило ***паралелограма*** полягає в тому, що за допомогою паралельного перенесення одного з векторів, його початок суміщається з початком другого. Тоді шуканим вектором $\vec{a}+\vec{b}$ є вектор, що співпадає з діагоналлю паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис.1.4.).

Означення 1.7*. Сумою $\left(\overrightarrow{a_1}+...+\overrightarrow{a_n}\right)$ n векторів $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ називають такий вектор $\vec{c}$, початок якого співпадає з початком вектора $\overrightarrow{a_1}$, а кінець – з кінцем вектора $\overrightarrow{a_n}$, за умови, що кінець вектора $\overrightarrow{a_i}$ співпадає з початком вектора $\overrightarrow{a_{i+1}}$ для кожного $i=1,...,n-1$.

Означення 1.8. Різницею $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є такий вектор $\vec{c}$, що в сумі з вектором $\vec{b}$ становить вектор $\vec{a}$.

Щоб знайти різницю $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ необхідно:

- шляхом паралельного перенесення сумістити початки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- шуканим вектором є вектор, що сполучає кінець вектора $\vec{b}$ з початком вектора $\vec{a}$ у напрямку «від від'ємника до зменшуваного» (рис. 1.5).

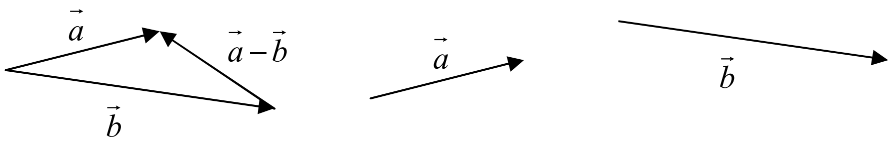


Рис. 1.5: до означення 1.8.

Не важко бачити, що знайдений вектор $\vec{a}-\vec{b}$ в сумі з $\vec{b}$ становить вектор $\vec{a}=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{b}$.

Операції додавання та віднімання векторів мають наступні **властивості**: для будь-яких векторів $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ мають місце співвідношення:

a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$;

b) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

c) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

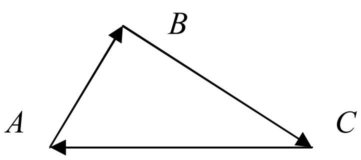
d) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$;

e) $\forall\,\vec{a}\ \exists\ \vec{a}'=-\vec{a}:\ \ \vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$;

f) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|,\quad \left|\vec{a}+\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$.

Доведення властивостей зводиться до застосування геометричного змісту введених операцій.

Приклад 1. Довести, що для сторін будь-якого трикутника справджується рівність $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

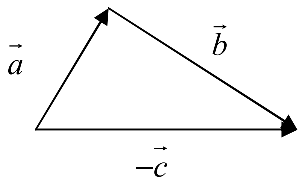


За правилом трикутника $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Оскільки $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$, то останнє й доводить справедливість твердження.

Приклад 2. Довести, що для будь-якої замкненої ламаної $A_1A_2...A_nA_1$ (чи будь-якого n–кутника) має місце рівність $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+...+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{0}$.

За означенням 1.7* маємо рівність $\overrightarrow{A_1A_2}+...+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$. Оскільки $\overrightarrow{A_1A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{0}$, то рівність доведено.

Приклад 3. Довести, що з будь-якої трійки не колінеарних векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, що задовольняють умову $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, можна утворити трикутник, довжини сторін якого становлять $\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{b}\right|$, $\left|\vec{c}\right|$ (лін.од.).



З рівності $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ маємо, що $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$. Але ж тоді, за визначенням операції додавання двох векторів, маємо ситуацію зображену на рисунку. З останнього й випливає справедливість твердження.

1.3 Добуток вектора на число

Означення 1.9. Добутком (дійсного) числа $\alpha \neq 0$ на вектор $\vec{a}$ на називають такий вектор $\vec{b}=\alpha \cdot \vec{a}$, що задовольняє умовам:

1) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ якщо $\alpha > 0$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ якщо $\alpha < 0$; 2) $\left|\vec{b}\right| = |\alpha| \cdot \left|\vec{a}\right|$.

Операція добутку вектора на число має наступні властивості:

Твердження 1.1. Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та будь-яких дійсних чисел α, β мають місце рівності:

a) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a};\ (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;

b) $\alpha \cdot \vec{a} = \beta \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{a}=\vec{0} \\ \alpha=\beta \end{array}\right.$;

c) $\left|\alpha \cdot \vec{a}\right| = |\alpha| \cdot \left|\vec{a}\right|$;

d) $\alpha \cdot \left(\beta \cdot \vec{a}\right) = \beta \cdot \left(\alpha \cdot \vec{a}\right) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$;

e) $\alpha \cdot \left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$;

f) $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a} = (\alpha+\beta) \cdot \vec{a}$.

! Опрацювати доведення твердження 1.1 за посібниками [1] – ст. 15–16; [3] – ст. 40–42.

1.3.1 Ділення колінеарних векторів

Означення 1.9*. Число α, яке визначається зі співвідношення $\vec{b}=\alpha \cdot \vec{a}$, при $\vec{a} \neq \vec{0}$ називають відношенням колінеарних векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$ та позначають $\alpha = \dfrac{\vec{b}}{\vec{a}}$.

Операція ділення колінеарних векторів має наступні властивості:

Твердження 1.2. Якщо $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – колінеарні вектори, $\alpha, \beta \in R$, причому $\vec{c} \neq \vec{0}$ і $\beta \neq 0$, то справджуються наступні співвідношення

a) $\dfrac{\vec{a}}{\vec{c}} + \dfrac{\vec{b}}{\vec{c}} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}}$;

b) $\alpha\left(\dfrac{\vec{a}}{\vec{c}}\right) = \dfrac{\alpha\vec{a}}{\vec{c}}$;

c) $\dfrac{\beta \cdot \vec{a}}{\beta \cdot \vec{c}} = \dfrac{\vec{a}}{\vec{c}}$;

d) $\dfrac{1}{\beta}\left(\dfrac{\vec{a}}{\vec{c}}\right) = \dfrac{\vec{a}}{\beta\vec{c}}$.

! Опрацювати доведення твердження 1.1. за посібником [2] – ст. 16.

1.3.2 Властивості лінійних операцій над векторами

Нехай $\alpha,\beta \in R$. Тоді для будь-яких векторів $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ мають місце наступні властивості

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$;
3) $\exists\vec{0}:\ \forall\vec{a}\quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4) $\forall\vec{a}\ \exists\overrightarrow{a'}=-\vec{a}:\quad \vec{a}+\overrightarrow{a'}=\vec{0}$;
5) $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\left(\beta\cdot\vec{a}\right)=\beta\cdot\left(\alpha\cdot\vec{a}\right)$;
6) $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$;
7) $\alpha\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$;
8) $\forall\vec{a}\ \ 1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Означення 1.* Множину векторів V з операціями додавання та множення на число, які задовольняють умовам 1–8, називатимемо ***лінійним векторним простором***, або просто ***векторним простором***.

Означення 1.10. Вектор, який (при обраному масштабі) має довжину рівну 1 (лін.од.), називають *одиничним вектором* або *ортом*.

Маючи будь-який ненульовий вектор $\vec{a}$ завжди можна отримати одиничний вектор $\overrightarrow{a^0}\uparrow\uparrow\vec{a}$, який визначається рівністю:

$$\overrightarrow{a^0}=\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\vec{a}\,. \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є колінеарними тоді і лише тоді, коли існує таке дійсне число $\lambda\neq 0$, що виконується рівність

$$\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}\,. \tag{1.2}$$

Доведення:

Достатність слідує з означення операції множення вектора на число.

Необхідність: оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є колінеарними, то можливі лише три суттєво різні випадки, а саме:

1) якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то поклавши $\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$, не важко впевнитися, що $\vec{a} = \vec{b} \cdot \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$;

2) якщо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то поклавши $\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$, не важко впевнитися, що $\vec{a} = -\vec{b} \cdot \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$;

3) якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda = 0$.

Найбільш зручною для застосування є теорема, яка є переформулюванням **теореми 1.1**.

Теорема 1.2. Необхідною й достатньою умовою колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є існування таких дійсних чисел α і β, що задовольняють умовам:

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = \vec{0}, \tag{1.3}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \ . \tag{1.4}$$

Рівність (1.3) надалі називатимемо *лінійною залежністю,* що пов'язує ці вектори. Умова (1.4) означає, що числа α і β не можуть одночасно бути рівними нулю.

Зауваження 1.3. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не є колінеарними, то рівність (1.3) має місце лише за умов $\alpha = \beta = 0$. І навпаки, якщо рівність (1.3) має місце лише за умов $\alpha = \beta = 0$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ не є колінеарними.

1.4 Лінійна комбінація векторів

Означення 1.11. Нехай задано сукупність векторів $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$ (площини чи простору) та n довільних дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Тоді вектор

$$\vec{x} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_n} + ... + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n} \tag{1.5}$$

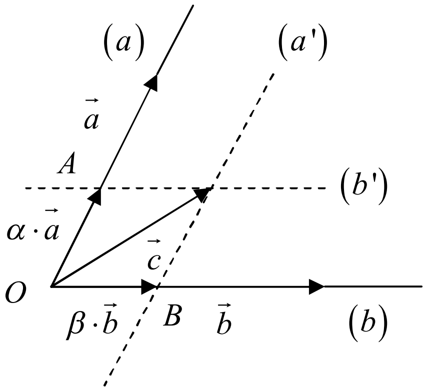
називають лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$, а рівність (1.5), як зазначено вище, називають *лінійною залежністю*, що пов'язує вектори $\vec{x}, \overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$.

1.4.1 Розклад вектора за двома неколінеарними векторами

Зауваження 1.4. Будь-які неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зі спільним початком однозначно визначають площину (**поясніть чому?**), яку надалі будемо позначати $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Теорема 1.3. Будь-який вектор $\vec{c}$ площини $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ єдиним чином розкладається в лінійну комбінацію неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Тобто існують такі однозначно визначені дійсні числа α і β, що має місце рівність

$$\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b} \tag{1.6}$$



Доведення. *Існування*: за допомогою паралельного перенесення сумістимо початки всіх векторів в одній фіксованій точці O. Через кінець вектора $\vec{c}$ проведемо прямі (a') і (b'), паралельні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно. Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не є колінеарними, то побудовані прямі не є паралельними.

І тому цілком визначені точки перетину цих прямих з прямими (a) і (b), що містять вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно. Нехай $(a')\cap(b)=B$, $(a)\cap(b')=A$. Тоді за правилом паралелограма $\vec{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Оскільки вектори $\vec{b},\overrightarrow{OB}\in(b)$; $\vec{a},\overrightarrow{OA}\in(a)$, то відповідні пари векторів є колінеарними. І тому (за теоремою 1.2.) існують такі дійсні числа α і β, що справджуються рівності: $\overrightarrow{OA}=\alpha\cdot\vec{a}$; $\overrightarrow{OB}=\beta\cdot\vec{b}$. Таким чином, має місце рівність $\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$.

Єдиність розкладу: припустимо, що існують такі числа α' і β', що має місце рівність $\vec{c}=\alpha'\cdot\vec{a}+\beta'\cdot\vec{b}$. Тоді вірною є рівність $\vec{0}=(\alpha-\alpha')\cdot\vec{a}+(\beta-\beta')\cdot\vec{b}$. Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не є колінеарними, то за теоремою 1.2 остання рівність справджується лише за умов коли $\begin{cases}(\alpha-\alpha')=0\\(\beta-\beta')=0\end{cases}$. Отже, числа α і β для вектора $\vec{c}$ та фіксованих неколінеарних $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначаються однозначно.

Вправа 1: дослідити ситуації, коли кінець вектора $\vec{c}$ належить одній з прямих, що містить вектор $\vec{a}$ або ж вектор $\vec{b}$.

1.4.2 Розклад вектора за трьома некомпланарними векторами

Означення 1.12. Скінчену або нескінчену сукупність векторів простору, які належать одній площині або ж є паралельними одній площині, будемо називати *компланарними* векторами.

Теорема 1.4. Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ є компланарними тоді і лише тоді, коли існують три дійсні числа α, β, γ такі, що задовольняють умовам:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}, \tag{1.6}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0. \tag{1.7}$$

Рівність (1.6) визначає *лінійну залежність,* якою пов'язані вказані вектори. Умова (1.7) означає, що α, β і γ не можуть одночасно бути рівними нулю.

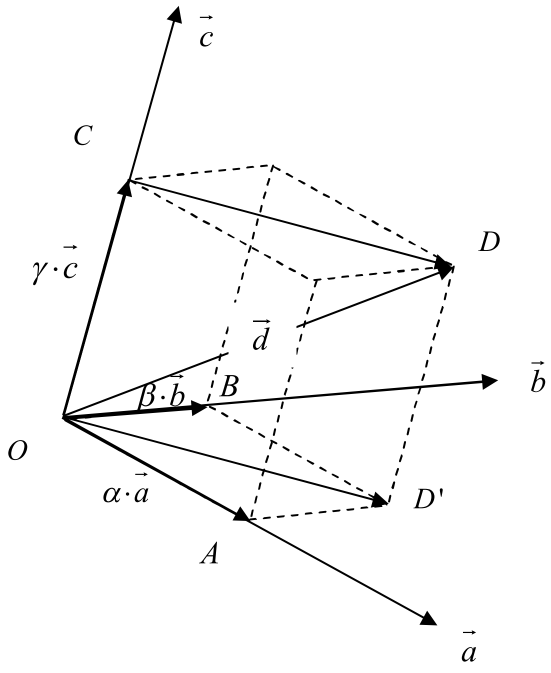
Вправа 2: довести теорему 1.4.

Зауваження 1.5. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не є компланарними, то рівність (1.6) має місце лише за умов $\alpha = \beta = \gamma = 0$. І навпаки, якщо рівність (1.6) має місце лише за умов $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не є компланарними. Аналогом теореми 1.3. в просторі є наступна теорема.

Теорема 1.5. Будь-який вектор $\vec{d}$ простору єдиним чином розкладається в лінійну комбінацію будь-яких трьох не компланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Тобто, існують такі *однозначно* визначені дійсні числа α, β і γ, що має місце рівність:

$$\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}. \tag{1.8}$$

Доведення. *Існування*: за допомогою паралельного перенесення сумістимо початки всіх векторів в одній фіксованій точці O.



Через кінець (точку D) вектора $\vec{d}$ проведемо пряму $d \parallel \vec{c}$. Нехай $d \cap \left(\vec{a},\vec{b}\right) = D'$. Через точку D' проведемо прямі паралельні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно. Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні (поясніть чому?), то цілком визначені точки A і B перетину цих прямих з прямими $\left(\vec{a}\right)$ і $\left(\vec{b}\right)$, що містять вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно.

Тоді за **теоремою 1.3** існують такі однозначно визначені дійсні числа α і β, що виконується рівність: $\overrightarrow{OD'} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{b}$. Далі: через точку D проведемо пряму паралельну $\overrightarrow{OD'}$, яка перетинає пряму $\left(\vec{c}\right)$ в точці C. За **теоремою 1.1.** існує дійсне число γ, таке що $\overrightarrow{OC} = \gamma\cdot\vec{c}$. Оскільки $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD'}$, то за правилом трикутника маємо: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD'}$. Звідки $\vec{d} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{b} + \gamma\cdot\vec{c}$.

Єдиність розкладу слідує з умови некомпланарності векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Вправа 3: дослідити ситуації, коли точка D належить одній з прямих, що містить вектор $\vec{a}$, $\vec{b}$ або $\vec{c}$.

1.5 Задачі до практичних занять № 1-2

1-2.1) Користуючись паралелограмом, побудованим на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (зі спільним початком), перевірити справедливість рівностей:

a) $(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{a}$;

b) $(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{b}$;

c) $\vec{a}+(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b}$;

d) $\vec{a}/2+\vec{b}/2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)/2$;

e) $\left(\vec{a}+\vec{b}/2\right)-\left(\vec{b}+\vec{a}/2\right) = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)/2$;

f) Доведіть, що $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = 2\cdot\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2\right)$.

g) Доведіть, що якщо вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярні, то $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$.

1-2.2) Яку особливість повинні мати вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб мали місце рівності:

a) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; c) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|$; e) $\vec{a}+\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$;

b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$; d) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$; f) $\vec{a}/\left|\vec{a}\right| = \vec{b}/\left|\vec{b}\right|$.

1-2.3) Три вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{c},\ \overrightarrow{BC}=\vec{b},\ \overrightarrow{CA}=\vec{a}$ служать сторонами трикутника. За допомогою векторів $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ виразити вектори, що співпадають з медіанами трикутника: $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN},\overrightarrow{CP}$. Доведіть, що з медіан (як відрізків) будь-якого трикутника можна скласти трикутник.

1-2.4) Знаючи вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{c},\ \overrightarrow{BC}=\vec{b},\ \overrightarrow{CA}=\vec{a}$, які служать сторонами трикутника, знайти вектори, що колінеарні бісектрисам кутів цього трикутника.

1-2.5) Користуючись задачею 1-2.4), за допомогою векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ виразити вектор $\overrightarrow{AL_A}$ $\left(\overrightarrow{BL_B},\ \overrightarrow{CL_C}\right)$, що співпадає з бісектрисою трикутника ABC.

1-2.6) В паралелограмі $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$, де M – точка перетину діагоналей паралелограма.

1-2.7) Розкладіть за векторами $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MH}$ і $\overrightarrow{AF}$, якщо $AH=HD$, $BF=MC=\frac{1}{4}BC$ (рис. 1.6).

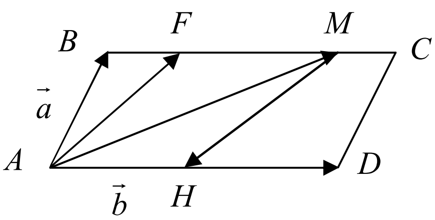


Рис. 1.6: до задачі 1-2.7)

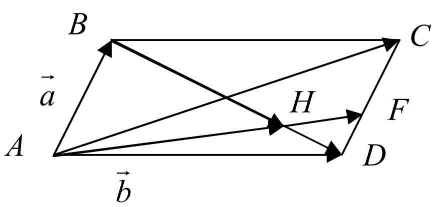


Рис. 1.7: до задачі 1-2.8)

1-2.8) Розкладіть за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BH},\overrightarrow{AH}$ і $\overrightarrow{AF}$, якщо $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{HD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$ (рис. 1.7).

1-2.9) Довести, що сума векторів, які сполучають центр O правильного трикутника з його вершинами, дорівнює нулю. Довести, що така точка єдина.

1-2.10) Нехай $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ і $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$. Доведіть, що $\triangle ABC$ є правильним.

1-2.11) Нехай M і N – середини відрізків AB і CD відповідно. Доведіть, що $\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)/2$.

1-2.12) В тетраедрі (трикутній піраміді) $OABC$ задано ребра, що виходять з вершини O: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Виразити через ці вектори всі інші ребра тетраедра, медіану $\overrightarrow{DM}$ грані OAB і вектор $\overrightarrow{OQ}$, де Q – точка перетину медіан грані ABC.

1-2.13) Нехай K, L, M, N – середини сторін AB, BC, CD, DA просторового чотирикутника $ABCD$ (вершини не обов'язково належать одній площині). Доведіть, що $KLMN$ – паралелограм.

1-2.14) На стороні AD і на діагоналі AC паралелограма $ABCD$ взято точки M і N так, що $AM=\frac{1}{5}AD$ і $AN=\frac{1}{6}AC$. Довести, що точки M, N і B лежать на одній прямій. В якому відношенні точка N ділить відрізок MB?

1-2.15) Чи можуть в розкладі ненульового вектора $\vec{c}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{b}$ за двома неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$

a) обидва коефіцієнта розкладу λ і μ дорівнювати нулю?;

b) один з них дорівнювати нулю? Якщо так, то за яких умов?

1-2.16) Знаючи розклад векторів $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ за трьома некомпланарними векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, перевірити чи є вектори $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ компланарними. У випадку стверджувальної відповіді записати лінійну залежність, що їх пов'язує:

a) $\vec{l}=2\cdot\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{m}=-\vec{a}+2\cdot\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{n}=-\vec{a}-\vec{b}+2\cdot\vec{c}$;

b) $\vec{l}=\vec{c}$, $\vec{m}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{n}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;

c) $\vec{l}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{m}=\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{n}=-\vec{a}+\vec{c}$.

Знайти α, β, γ, при яких виконується рівність $\alpha\cdot\vec{l}+\beta\cdot\vec{m}+\gamma\cdot\vec{n}=\vec{0}$.

1-2.17) Розкласти вектор $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ за трьома некомпланарними векторами: $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}, \quad \vec{n}=\vec{a}-\vec{b}, \quad \vec{p}=2\vec{b}+3\vec{c}$.

1-2.18) Дано два неколінеарних вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти вектор $\vec{x}$, модуль якого дорівнює модулю вектора $\vec{a}$, а напрям співпадає з напрямком даного вектора $\vec{b}$.

1-2.19) Сума чотирьох одиничних векторів дорівнює нулеві. Доведіть, що їх можна розбити на дві пари паралельних векторів.

1-2.20) Доведіть, що якщо діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник є паралелограмом.

Доведіть наступні теореми:

1-2.21) Доведіть, що *будь-які два вектора на прямій*, *три вектори на площині*, *чотири вектори простору* – є лінійно залежними.

1-2.22) **ТЕОРЕМА 1.** Прямі (AB) і (CD) паралельні або співпадають тоді і лише тоді, коли

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD}, \text{ де } \lambda \neq 0.$$

1-2.23) **ТЕОРЕМА 2.** Три точки A, B і C належать одній прямій тоді і лише тоді, коли

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}, \text{ де } \lambda \neq 0.$$

1-2.24) **ТЕОРЕМА 3.** Якщо точки A, B і C належать одній прямій, то для будь-якої точки O має місце рівність

$$\overrightarrow{OC} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA} + \mu \cdot \overrightarrow{OB}, \text{ де } \lambda + \mu = 1.$$

1-2.25) **ТЕОРЕМА 4.** Для довільних чотирьох точок A, B, C, D, що належать одній площині, з яких A, B і C не лежать на одній прямій, мають місце співвідношення:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} \qquad (*)$$

$$\overrightarrow{OD} = (1 - \alpha - \beta) \cdot \overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{OB} + \beta \cdot \overrightarrow{OC} \qquad (**)$$

І навпаки, якщо виконується одне з наведених співвідношень, то виконується й друге, а точки A, B, C, D належать одній площині.

2. Компонента та проекція вектора на вісь. Скалярний добуток векторів

2.1 Компонента та проекція вектора на вісь

Означення 2.1. Пряму l, на якій обрано додатній напрям, початок відліку та одиницюя довжини називають *координатною віссю*.

Зауваження 2.1. Надалі, якщо не буде сказано більше, будемо вважати, що додатній напрямок осі l співпадає з напрямком деякого одиничного вектора $\overrightarrow{l^0}$, тобто $l = \left(\overrightarrow{l^0}\right)$.

Означення 2.2. Проекцією (ортогональною) точки M на вісь l називають основу M' перпендикуляра, опущеного з точки M на цю вісь.

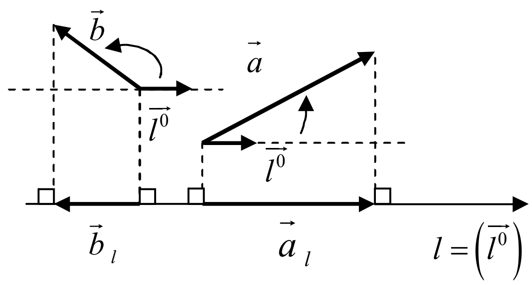


Рис. 2.1: до означення 2.3.

Означення 2.3. Компонентою (або векторною проекцією) вектора $\vec{a}$ на вісь l називають такий вектор $\vec{a}_l$, початок якого співпадає з проекцією початку вектора $\vec{a}$ на вісь l, а кінець – з проекцією кінця вектора $\vec{a}$ на цю вісь (рис. 2.1).

Означення 2.4. Кутом між вектором $\vec{a}$ та віссю $l = \left(\overrightarrow{l^0}\right)$ будемо називати кут, утворений векторами $\vec{a}$ і $\overrightarrow{l^0}$ зі спільним початком.

Означення 2.5. Проекцією (або скалярною проекцією) $Пр_l\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на вісь $l = \left(\overrightarrow{l^0}\right)$ називають число, модуль якого дорівнює довжині компоненти вектора $\vec{a}$ на вісь l. Причому, цю величину обирають з додатним знаком, коли напрям компоненти співпадає з додатним напрямом осі (вектора $\vec{a}_l \subset l$), та з від'ємним знаком, якщо це не так. Тобто: $Пр_l\vec{a} > 0$ коли $\vec{a}_l \uparrow\uparrow \overrightarrow{l^0}$ і $Пр_l\vec{a} < 0$ коли $\vec{a}_l \uparrow\downarrow \overrightarrow{l^0}$.

Отже, проекцією вектора на вісь є число (скаляр), яке дорівнює добутку довжини цього вектора на косинус кута між ним та «додатним» напрямом осі:

$$Пр_l\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\angle\left(\vec{a}, \vec{l^0}\right) \tag{2.1}$$

Очевидно, що коли $\vec{a} \perp l$, то компонента $\vec{a}_l = \vec{0}$. І тому $Пр_l\vec{a} = 0$.

2.1.1 Властивості компонент і проекцій вектора на вісь

a) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)_l = \vec{a}_l + \vec{b}_l$;

b) $\left(\lambda \cdot \vec{a}\right)_l = \lambda \cdot \vec{a}_l$;

c) $Пр_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = Пр_l\vec{a} + Пр_l\vec{b}$;

d) $Пр_l\left(\lambda \cdot \vec{a}\right) = \lambda \cdot Пр_l\vec{a}$.

Доведення властивостей *a*) і *c*) ґрунтується на основі розгляду конструкцій, аналогічних тим, що зображені на рис. 2.2.–2.3.

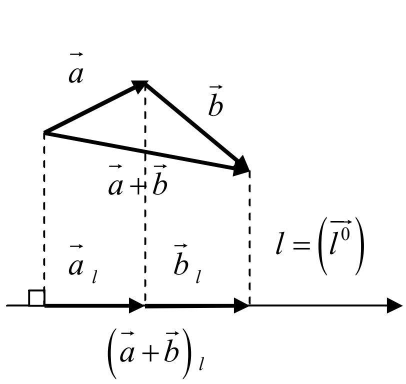


Рис. 2.2

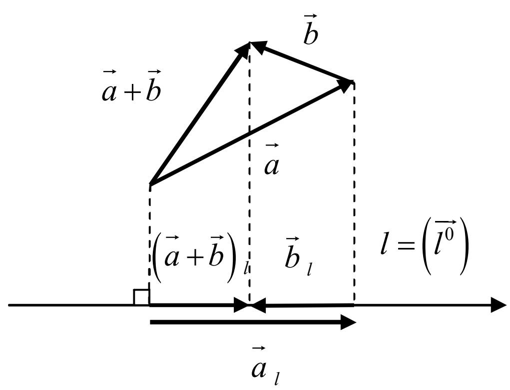


Рис. 2.3

Доведення властивостей *b*) і *d*) ґрунтується на основі розгляду конструкцій, аналогічних тим, що зображені на рис. 2.4.

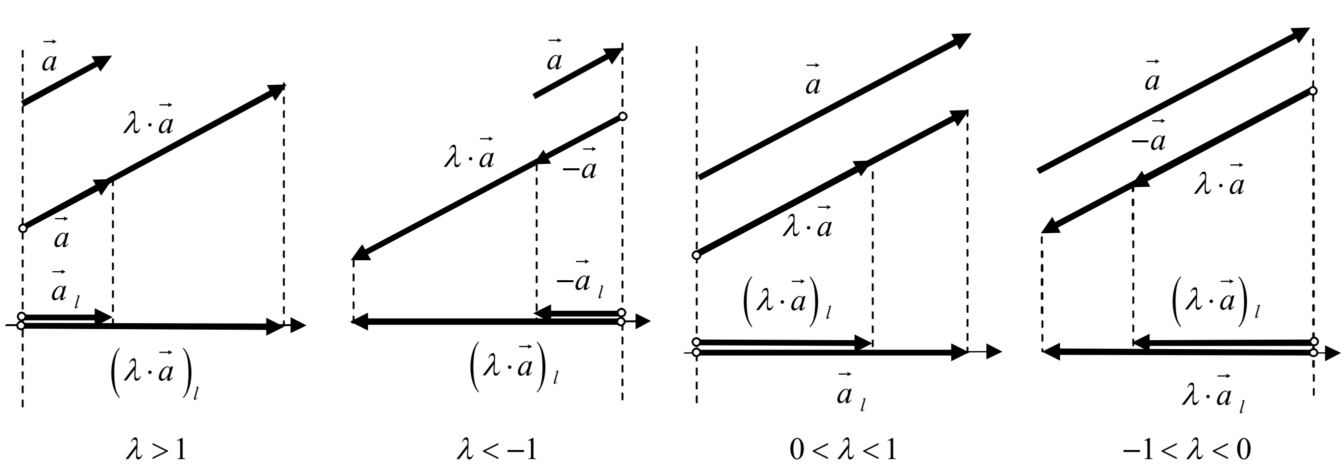


Рис. 2.4

2.2 Скалярний добуток векторів

Означення 2.6. Скалярним добутком $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}). \tag{2.3}$$

Означення 2.7. Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають кут $0 \le \varphi \le \pi$ між рівними їм векторами, які мають спільний початок.

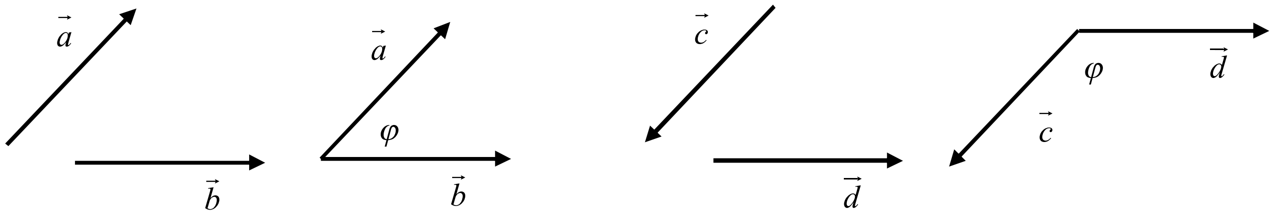


Рис. 2.5: кут між векторами

Зрозуміло, що скалярним добутком двох векторів є число (скаляр). Причому:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle > 0 \text{ коли } \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) > 0 \quad \text{і} \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle < 0 \text{ коли } \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) < 0$$

Не важко бачити, що:

якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^0$, звідки $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (2.4)

якщо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^0$, звідки $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (2.5)

якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^0$, звідки $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ (2.6)

Теорема 2.1. Ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є перпендикулярними тоді і лише тоді, коли $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$, тобто

$$\begin{cases} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \\ \vec{a} \ne \vec{0}, \vec{b} \ne \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{a} \ne \vec{0}, \vec{b} \ne \vec{0}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Справедливість твердження слідує з визначення скалярного добутку векторів. Зрозуміло також, що у випадку коли або $\vec{a} = \vec{0}$, або $\vec{b} = \vec{0}$ скалярний добуток $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.

Якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то згідно (2.3), маємо $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$. (2.8)

Означення 2.8. Значення $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$ називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$.

Таким чином, довжину вектора $\vec{a}$ можна обчислити за формулою

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \tag{2.9}$$

З рівності (2.3) маємо, що кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ може бути знайдений за допомогою співвідношення

$$\cos \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} \tag{2.10}$$

Зауваження 2.3. За допомогою рис. 2.6 не важко встановити, що $\cos\angle\left(-\vec{a}, \vec{b}\right) = \cos\angle\left(\vec{a}, -\vec{b}\right) = \cos\left(\pi - \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right) = -\cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. Звідки маємо очевидні рівності:

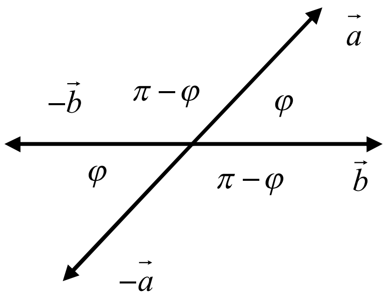


Рис. 2.6

$$\cos\angle\left(\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}\right) = \cos\angle\left(\vec{a}, \lambda \cdot \vec{b}\right) = \begin{cases} \cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right), & \lambda > 0 \\ -\cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right), & \lambda < 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\sin\angle\left(\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}\right) = \sin\angle\left(\vec{a}, \lambda \cdot \vec{b}\right) = \sin\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \quad \forall \lambda \neq 0 \tag{2.12}$$

2.2.1 Властивості скалярного добутку векторів

a) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$;

b) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$;

c) $\langle (\alpha \cdot \vec{a}), \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, (\alpha \cdot \vec{b}) \rangle = \alpha \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$;

d) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left|\vec{a}\right| \cdot \textit{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot \textit{Пр}_{\vec{b}} \vec{a}$;

e) $\langle (\vec{a} + \vec{b}), \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$;

f) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \Leftrightarrow \vec{c} = \lambda \cdot \vec{a}$.

Доведення:

a) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\vec{b}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \angle\left(\vec{b}, \vec{a}\right) = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$;

b) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\angle\left(\vec{a}, \vec{a}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos 0^0 = \left|\vec{a}\right|^2 \geq 0$;

c) $\langle (\alpha \cdot \vec{a}), \vec{b} \rangle = \left|\alpha \cdot \vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\angle\left(\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\alpha\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\angle\left(\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}\right) =$

$$=\begin{cases}\alpha\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right), & \alpha\ge 0\\ -\alpha\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\left(-\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right), & \alpha<0\end{cases}=\alpha\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\alpha\cdot\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle;$$

d) $\left|\vec{a}\right|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\dfrac{\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle}{\left|\vec{a}\right|}=\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle;\quad \left|\vec{b}\right|\cdot Пр_{\vec{b}}\vec{a}=\left|\vec{b}\right|\cdot\dfrac{\left\langle\vec{b},\vec{a}\right\rangle}{\left|\vec{b}\right|}=\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle;$

e) $\left\langle\left(\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{c}\right\rangle=\left\langle\vec{c},\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right\rangle=\left|\vec{c}\right|\cdot Пр_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left|\vec{c}\right|\cdot\left(Пр_{\vec{c}}\vec{a}+Пр_{\vec{c}}\vec{b}\right)=\left\langle\vec{a},\vec{c}\right\rangle+\left\langle\vec{b},\vec{c}\right\rangle;$

f) $\vec{c}=\lambda\cdot\vec{a}\Rightarrow\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\cdot\vec{c}=\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\cdot\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)=\left\langle\lambda\cdot\vec{a},\vec{b}\right\rangle\cdot\vec{a}=\left\langle\vec{c},\vec{b}\right\rangle\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\left\langle\vec{c},\vec{b}\right\rangle;$

$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left\langle\vec{b},\vec{c}\right\rangle\Rightarrow\vec{c}\parallel\vec{a}\Rightarrow\vec{c}=\lambda\cdot\vec{a}$.

2.3 Задачі до практичного заняття № 3

3.1) Знайти значення скаляра $3\cdot\left|\vec{m}\right|-2\cdot\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle+4\cdot\vec{n}^{\,2}$, якщо $\left|\vec{m}\right|=\frac{1}{3}$, $\left|\vec{n}\right|=6$ а $\angle\left(\vec{m},\vec{n}\right)=\frac{\pi}{3}$.

3.2) Обчислити скалярний добуток $\left\langle\vec{p},\vec{q}\right\rangle$ знаючи, що $\vec{p}=3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c},\ \ \vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}-5\vec{c}$, де $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

3.3) Обчислити кут між векторами $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$ і $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$, де $\vec{p},\vec{q}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

3.4) Вектори $\overrightarrow{AB}=2\cdot\vec{a}-6\cdot\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}+7\cdot\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=-3\cdot\vec{a}-\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – взаємно перпендикулярні орти, утворюють трикутник ABC. Визначити кути цього трикутника.

3.5) Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{s}$ і $\vec{t}$, якщо відомо, що вектори $\vec{p}=\vec{s}+2\vec{t}$ і $\vec{q}=5\cdot\vec{s}-4\cdot\vec{t}$ взаємно перпендикулярні.

3.6) Обчислити $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle+\left\langle\vec{b},\vec{c}\right\rangle+\left\langle\vec{c},\vec{a}\right\rangle$, якщо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – такі три орти, що $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

3.7) Знайти проекцію вектора $\vec{a}=10\cdot\vec{m}+2\cdot\vec{n}$ на вісь, що має напрям вектора $\vec{b}=5\cdot\vec{m}-12\cdot\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ – взаємно перпендикулярні орти. Знайти кути між віссю проекції та одиничними векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ відповідно.

3.8) Дано два неколінеарних вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що компланарний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та задовольняє системі рівнянь: $\begin{cases} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = 1 \\ \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle = 0 \end{cases}$.

3.9) Дано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти вектор $\vec{c}$, що співпадає з ортогональною проекцією вектора $\vec{b}$ на пряму, напрям якої визначається вектором $\vec{a}$.

3.10) Знаючи вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, на яких побудовано паралелограм, визначити вектор, що співпадає з висотою паралелограма, перпендикулярною до сторони $\vec{a}$.

3.11) Знаючи вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, що співпадають зі сторонами $\triangle ABC$, вивести формулу для обчислення довжин медіан трикутника.

Доведіть наступні теореми:

3.12) Теорему ***косинусів***: для будь-якого трикутника ABC має місце співвідношення $\left|\overline{AB}\right|^2 = \left|\overline{CA}\right|^2 + \left|\overline{CB}\right|^2 - 2 \cdot \left|\overline{CA}\right| \cdot \left|\overline{CB}\right| \cdot \cos\angle\left(\overline{CA}, \overline{CB}\right)$.

3.13) Користуючись попередньою задачею, доведіть пряму та обернену теореми ***Піфагора***.

3.14) За допомогою векторів доведіть, що медіани довільного трикутника $(\triangle ABC)$ перетинаються в одній точці (M) – *центр тяжіння трикутника*.

3.15) За допомогою векторів доведіть, що висоти довільного трикутника $(\triangle ABC)$ перетинаються в одній точці (H) – *ортоцентр трикутника*.

3.16) За допомогою векторів доведіть, що бісектриси довільного трикутника $(\triangle ABC)$ перетинаються в одній точці (L) – *інцентр трикутника*.

3. Векторний, мішаний та подвійний векторний добуток векторів

Означення 3.1. Впорядковану трійку некомпланарних векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називатимемо **правою** (***лівою***), якщо, при розгляді з кінця третього вектора $\vec{c}$, найкоротший шлях руху від першого $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ відбувається у відповідній площині $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ **проти руху годинникової стрілки** (***за годинниковою стрілкою***) – рис. 3.1.

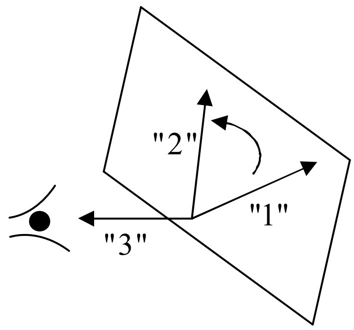
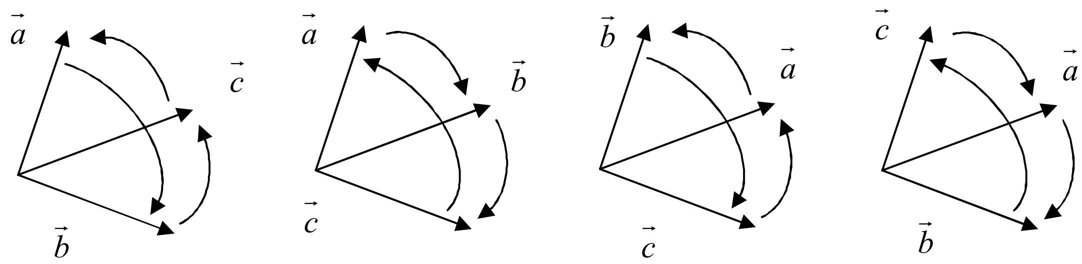


Рис. 3.1: до означення 3.1.

Зауваження 3.1. Якщо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву (ліву) трійку, то групи векторів $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$; $\vec{c},\vec{a},\vec{b}$ також утворюють праві (ліві) трійки, а групи векторів $\vec{a},\vec{c},\vec{b}$; $\vec{b},\vec{a},\vec{c}$; $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ – відповідно ліві (праві) трійки.



права трійка **ліва трійка** **права трійка** **ліва трійка**

Рис. 3.2: до зауваження 3.1.

Зауваження 3.2. Про впорядковану трійку (некомпланарних) векторів $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$, які утворюють праву (ліву) трійку говорять, що вони задають додатну (від'ємну) орієнтацію простору.

Зауваження 3.3. При зміні напрямку одного з векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ характер «лівості-правості» змінюється на «протилежний». Тобто, якщо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву (ліву) трійку, то трійки векторів:

$$-\vec{a},\vec{b},\vec{c};\quad \vec{a},-\vec{b},\vec{c};\quad \vec{a},\vec{b},-\vec{c} \tag{3.1}$$

утворюють відповідно ліві (праві) трійки – рис. 3.2.

3.1 Векторний добуток векторів

Означення 3.2. Векторним добутком $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який задовольняє наступним умовам:

a) $\left|\vec{c}\right| = \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$;

b) $\left\langle\vec{c},\vec{b}\right\rangle = \left\langle\vec{c},\vec{a}\right\rangle = 0$, тобто вектор $\vec{c}$ є перпендикулярним кожному з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$; іншими словами – є перпендикулярним до площини $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, що визначається векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

c) вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (як впорядкована трійка векторів) утворюють «праву трійку».

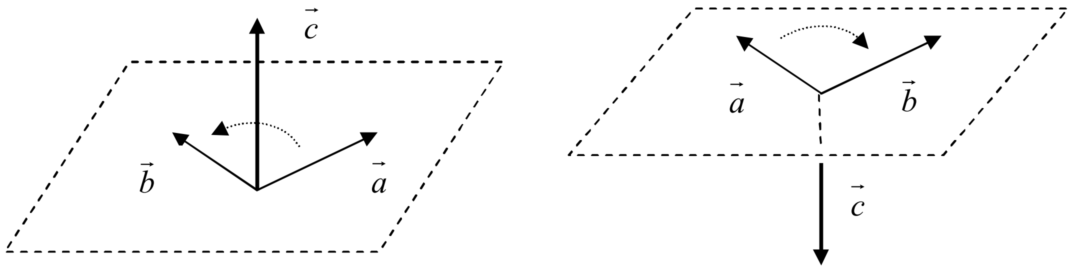
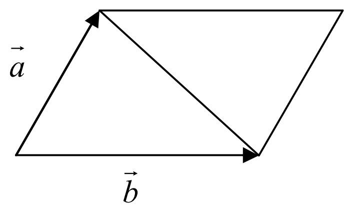


Рис. 3.3: $a)$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ **– права трійка;** $b)$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ **– ліва трійка**

Зауваження 3.4. Напрямок вектора $\vec{c} = \left[\vec{a},\vec{b}\right]$ залежить від порядку векторів що входять в $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Тобто, вектор $\vec{c}$ напрямлений так, що, якщо відкласти вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ з однієї точки (сумісти їх початки), то з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший рух від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ відбувається проти руху годинникової стрілки. (див. рис. 3.3 $a),b)$). Але ж тоді вектор $\vec{c}\,' = \left[\vec{b},\vec{a}\right]$ має ту властивість, що з його кінця найкоротший рух від $\vec{b}$ до $\vec{a}$ відбувається також проти годинникової стрілки, що можливо лише за умов, коли кінці векторів $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ і $\vec{c}\,'=\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ зі спільним початком лежать в різних півпросторах відносно площини $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Отже $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\neq\left[\vec{b},\vec{a}\right]$!!!. Зауважимо, що напрямок вектора $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ коректно визначений лише у випадку коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не є колінеарними.

3.1.1 Геометричний зміст векторного добутку двох неколінеарних векторів



полягає в тому, що довжина вектора $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ або ж двом площам трикутника, побудованого на цих векторах.

Доведення цього факту слідує з умови a) визначення 3.2, та формули зі шкільного курсу математики для обчислення площі паралелограма за двома прилеглими сторонами та кутом між ними. Тобто:

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = S_{\square(\vec{a},\vec{b})} = 2\cdot S_{\triangle(\vec{a},\vec{b})}\,. \tag{3.2}$$

3.1.2 Властивості векторного добутку векторів

a) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$;

b) $\left[\alpha\cdot\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\alpha\cdot\vec{b}\right]=\alpha\cdot\left[\vec{a},\vec{b}\right]$;

c) $\left[\vec{a},\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]$, $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]$.

Доведення: надалі вважатимемо, що початки всіх векторів співпадають, а через $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, як і раніше, позначатимемо площину, що визначається $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

a) Нехай $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$; $\vec{c}\,'=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$, звідки $\left[\vec{b},\vec{a}\right]=-\vec{c}\,'$. Доведемо, що $\vec{c}=\vec{c}\,'$.

$a1$) Оскільки $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, $-\vec{c}\,'=\left[\vec{b},\vec{a}\right]\perp\left(\vec{b},\vec{a}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, то $\vec{c}\parallel\vec{c}\,'$. За визначенням 3.2, групи векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$; $\vec{b},\vec{a},-\vec{c}\,'$ задають праві трійки. Оскільки $\vec{c}\parallel\vec{c}\,'$, то, з урахуванням зауваження 3.1, маємо, що $\vec{c}\uparrow\downarrow-\vec{c}\,'$. І тому $\vec{c}\,'=\lambda\cdot\vec{c}$, причому $\lambda<0$.

$a2$) $\left|\vec{c}\right|=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\sin\angle\left(\vec{b},\vec{a}\right)=\left|\left[\vec{b},\vec{a}\right]\right|=\left|-\left[\vec{b},\vec{a}\right]\right|=\left|\vec{c}\,'\right|$.

$a3)$ Оскільки $\left|\vec{c'}\right| = \left|\vec{c}\right|$, то з рівності $\left|\vec{c'}\right| = \left|\lambda \cdot \vec{c}\right| = \left|\lambda\right| \cdot \left|\vec{c}\right|$ слідує, що $\lambda = \pm 1$. Оскільки $\lambda < 0$, то $\lambda = -1$.

Отже, з урахуванням $a1) - a3)$, та визначення рівності векторів, маємо, що $\vec{c'} = \vec{c}$.

b) Нехай $\vec{c} = \left[\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}\right]$; $\vec{c'} = \alpha \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$. Доведемо, що $\vec{c} = \vec{c'}$.

При $\alpha = 0$ рівність очевидна. Нехай $\alpha \neq 0$, тоді $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \vec{c'}$.

$b1)$ $\left|\vec{c}\right| = \left|\left[\left(\alpha \cdot \vec{a}\right), \vec{b}\right]\right| = \left|\left(\alpha \cdot \vec{a}\right)\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin \angle\left(\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}\right) = \left|\alpha\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$,

$\left|\vec{c'}\right| = \left|\alpha \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \left|\alpha\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. Отже, $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{c'}\right|$.

$b2)$ Оскільки $\vec{c} \perp \left(\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, $\lambda \cdot \vec{c'} \perp \left(\vec{b}, \vec{a}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, то $\vec{c} \parallel \vec{c'}$. І тому $\vec{c'} = \delta \cdot \vec{c}$.

$b3)$ Оскільки $\left|\vec{c'}\right| = \left|\vec{c}\right|$, то з рівності $\left|\vec{c'}\right| = \left|\delta \cdot \vec{c}\right| = \left|\delta\right| \cdot \left|\vec{c}\right|$ слідує, що $\delta = \pm 1$.

$b4)$ Нехай $\delta = -1$, звідки $\vec{c'} = -\vec{c}$. Тоді за *визначенням 3.2*, $\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; $\vec{a}, \vec{b}, \dfrac{1}{\alpha} \cdot \vec{c'}$ $\left(\dfrac{1}{\alpha} \cdot \vec{c'} = -\dfrac{1}{\alpha} \cdot \vec{c}\right)$ повинні задавати праві трійки, що не можливо, бо з умови що $\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку, слідує що $\vec{a}, \vec{b}, -\dfrac{1}{\alpha} \cdot \vec{c}$ утворюють ліву трійку. Дійсно:

при $\alpha > 0$ трійки векторів $\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і $\vec{a}, \vec{b}, -\dfrac{1}{\alpha} \cdot \vec{c}$ різної орієнтації, оскільки вектор $-\dfrac{1}{\alpha} \cdot \vec{c}$ протилежно напрямлений вектору $\vec{c}$;

при $\alpha < 0$ вектори $-\dfrac{1}{\alpha} \cdot \vec{c}$ і $\vec{c}$ однаково напрямлені; але ж $\alpha \cdot \vec{a}$ і $\vec{a}$ протилежно напрямлені. Отже, $\delta \neq -1$, і тому $\delta = 1$, звідки $\vec{c'} = \vec{c}$.

c) $\left[\vec{a}, \left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}\right]$. Якщо вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ колінеарні (тобто $\exists\ \lambda \neq 0:\ \vec{b} = \lambda \cdot \vec{c}$), то справедливість рівності слідує з властивості $b)$, та умови $a)$ *визначення 3.2*.

А саме $\left[\vec{a}, \left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right] = \left[\vec{a}, \left(\lambda \cdot \vec{c} + \vec{c}\right)\right] = \left[\vec{a}, (\lambda + 1) \cdot \vec{c}\right] = (\lambda + 1) \cdot \left[\vec{a}, \vec{c}\right]$.

З іншого боку $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \lambda \cdot \vec{c}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}\right] = \lambda \cdot \left[\vec{a}, \vec{c}\right] + 1 \cdot \left[\vec{a}, \vec{c}\right] = \left(\lambda + 1\right) \cdot \left[\vec{a}, \vec{c}\right]$.

Доведення загального випадку **опрацювати** за посібником [3] – ст. 219–221.

З визначення векторного добутку випливають наступні властивості:

Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin 90^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \qquad (3.3)$$

Теорема 3.1. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{b}$.

Доведення. Якщо $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, то

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = \left|\left[\lambda\vec{b},\vec{b}\right]\right| = \left|\lambda\cdot\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\sin\angle\left(\lambda\cdot\vec{b},\vec{b}\right)\right| = \left|\lambda\cdot\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot 0 = 0.$$

Звідки $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$. Як частинний випадок – $\left[\vec{a},\vec{a}\right]=\vec{0}$.

Нехай $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$, тоді $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=0$. Звідки площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює нулю, що можливо лише за умов колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Лема 3.1. Якщо взаємно перпендикулярні орти $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють *праву трійку*, то мають місце наступні рівності:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{c}, \quad \left[\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{a}, \quad \left[\vec{c},\vec{a}\right]=\vec{b}. \qquad (3.4)$$

Лема 3.2. Якщо взаємно перпендикулярні орти $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють *ліву трійку*, то мають місце наступні рівності:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\vec{c}, \quad \left[\vec{b},\vec{c}\right]=-\vec{a}, \quad \left[\vec{c},\vec{a}\right]=-\vec{b}. \qquad (3.5)$$

Доведення обох лем є звичайною перевіркою рівності векторів.

Доведемо, наприклад, що $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{c}\,'=\vec{c}$ (лема 3.1).

1) $\left|\vec{c}\,'\right| = \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin 90^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = 1\cdot 1 = 1 = |\vec{c}|$;

2) Оскільки $\vec{c}\,'=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ (за визначенням); $\vec{c}\perp\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ (за умовою леми), то $\vec{c}\parallel\vec{c}\,'$. І тому, з урахуванням 1), $\vec{c}\,'=\pm\vec{c}$.

3) Оскільки $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,'$ (за визначенням), $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (за умовою леми) утворюють праві трійки, то кінці векторів $\vec{c}\,',\vec{c}$ зі спільним початком лежать в одному півпросторі відносно площини $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Отже, $\vec{c}\uparrow\uparrow\vec{c}\,'$, і тому $\vec{c}\,'=\vec{c}$.

Доведемо, що $\vec{c}\,' = \left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\vec{c}$ (лема 3.2).

1) $\left|\vec{c}\,'\right| = \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin 90^0 = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| = 1 \cdot 1 = 1 = \left|-\vec{c}\right|$;

2) Оскільки $\vec{c}\,' = \left[\vec{a},\vec{b}\right]$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right] \perp \left(\vec{a},\vec{b}\right)$ (за визначенням); $-\vec{c} \perp \left(\vec{a},\vec{b}\right)$ (за умовою леми), то, $\vec{c} \parallel \vec{c}\,'$. І тому, з урахуванням 1), $\vec{c}\,' = \pm\vec{c}$.

3) Оскільки $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,'$ (за визначенням) утворюють праву трійку, а вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (за умовою леми) утворюють ліву трійку, то кінці векторів $\vec{c}\,',\vec{c}$ зі спільним початком лежать в різних півпросторах відносно площини $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Отже, $\vec{c}\,' \uparrow\downarrow \vec{c}$, і тому $\vec{c}\,' = -\vec{c}$.

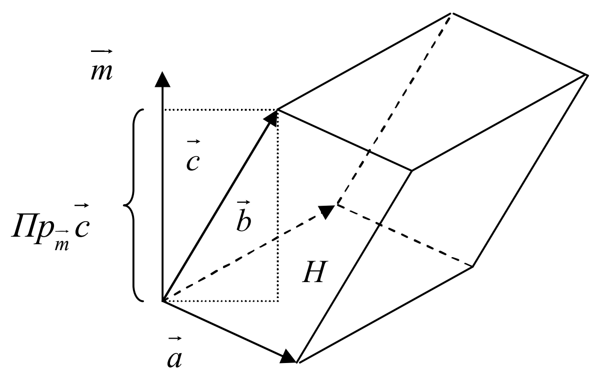
Інші рівності з (3.4), (3.5) доводяться за аналогією.

3.2 Мішаний добуток векторів (векторно-скалярний)

Означення 3.3. Якщо векторний добуток векторів $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ скалярно помножити на вектор $\vec{c}$, то такий добуток трьох векторів називають *мішаним добутком* векторів і позначають

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) \qquad \text{або} \qquad \left\langle\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right\rangle, \qquad \text{або ж} \qquad \left\langle\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\rangle \tag{3.6}$$

3.2.1 Геометричний зміст мішаного добутку трьох некомпланарних векторів



Нехай вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не є компланарними, тобто не лежать в одній площині за умов суміщення їх початків. За визначенням скалярного добутку векторів $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ і $\vec{c}$ маємо, що

$$\left\langle\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right\rangle = \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| \cdot Пр_{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}\vec{c}\ .$$

Якщо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку, то кут між векторами $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ і $\vec{c}$ гострий. Тому $Пр_{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}\vec{c}$ буде додатним числом, яке дорівнює висоті паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Крім того, оскільки $\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|$ – площа основи цього паралелепіпеда, то $\left\langle\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right\rangle = S_{\square\left(\vec{a},\vec{b}\right)} \cdot H = V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$, де $V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$ – об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Якщо ж вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють ліву трійку, то кут між векторами $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ і $\vec{c}$ є тупим. Тому $Пр_{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}\vec{c}$ буде від'ємним числом. І в цьому випадку $\left\langle\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right\rangle = -V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}$.

Тобто, модуль мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда або ж шести об'ємам піраміди, побудованих на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

$$\left|\left\langle\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right\rangle\right| = V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = 6 \cdot V_{пір.(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}. \tag{3.7}$$

3.2.2 Властивості мішаного добутку

З попередніх міркувань слідує, що якщо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву (ліву) трійку, то $\left\langle\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right\rangle > 0$ $\left(\left\langle\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right\rangle < 0\right)$. З урахуванням зауваження 3.1 групи векторів $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$; $\vec{c},\vec{a},\vec{b}$ також утворюють праву (ліву) трійку. Звідки їх мішаний добуток буде додатним (від'ємним) числом, абсолютна величина якого дорівнює об'єму того ж самого паралелепіпеда. І тому

$$\left\langle\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right\rangle = \left\langle\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{a}\right\rangle = \left\langle\left[\vec{c},\vec{a}\right],\vec{b}\right\rangle = \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right),$$

де $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ – позначення мішаного добутку векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

a) $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) > 0$ тоді і лише тоді коли вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють *праву трійку*;

   $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) < 0$ тоді і лише тоді коли вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють *ліву трійку*;

b) $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right) = \left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right) = -\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right) = -\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right) = -\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)$. Тобто, мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці співмножників, та змінює знак при будь-якій нециклічній перестановці співмножників, яка змінює їх послідовність;

c) $\left(\left(\alpha \cdot \vec{a}\right),\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{a},\left(\alpha \cdot \vec{b}\right),\vec{c}\right) = \left(\vec{a},\vec{b},\left(\alpha \cdot \vec{c}\right)\right) = \alpha \cdot \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$;

d) $\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{c},\vec{d}\right) = \left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right) + \left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)$; $\left(\vec{a},\vec{b},\left(\vec{c}+\vec{d}\right)\right) = \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) + \left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)$.

e) $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$ тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ є компланарними векторами (**необхідна й достатня умова компланарності трьох векторів**).

Доведення властивості $a)$:

нехай $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left\langle\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right\rangle>0$ $\left(\left\langle\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right\rangle<0\right)$. Тоді $\cos\angle\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)>0$ $\left(\cos\angle\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)<0\right)$. Звідки слідує, що кінці векторів $\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}$ зі спільним початком лежать в одному півпросторі (в різних півпросторах) відносно площини $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. І тому $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву (ліву) трійку векторів. І навпаки.

Доведення властивості $b)$:

$b1)$ Нехай $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву (ліву) трійку. Тоді $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$; $\vec{c},\vec{a},\vec{b}$ також утворюють праву (ліву) трійки (зауваження 3.1). І тому $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right),\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right),\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)$ мають один знак (за властивістю $a)$). Оскільки модулі цих чисел однакові і дорівнюють об'єму одного й того ж паралелепіпеда, то $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)$.

$b2)$ Нехай $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву (ліву) трійку. Тоді $\vec{a},\vec{c},\vec{b}$; $\vec{b},\vec{a},\vec{c}$; $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ утворюють ліву (праву) трійки (зауваження 1.1). І тому $\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)$; $\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c};\right)$ $\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)$ мають один знак, протилежний знакові $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$. Оскільки модулі цих чисел однакові й дорівнюють об'єму одного й того ж паралелепіпеда, то $-\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)$.

Доведення властивості $c)$:

покажемо, наприклад, що $A=\left(\left(\alpha\cdot\vec{a}\right),\vec{b},\vec{c}\right)=\alpha\cdot\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=B$.

З геометричного змісту мішаного добутку слідує, що $|A|$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\left(\alpha\cdot\vec{a}\right),\vec{b},\vec{c}$. І тому об'єм цього паралелепіпеда в $|\alpha|$ разів більший за об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (оскільки один з його вимірів збільшився в $|\alpha|$ разів).

У випадку коли $\alpha > 0$ групи $\left(\alpha \cdot \vec{a}\right), \vec{b}, \vec{c};\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють трійки одного характеру (одночасно ліві або праві). І тому A і B мають однаковий знак. Звідки $A = B$.

Якщо ж $\alpha < 0$, то групи $\left(\alpha \cdot \vec{a}\right), \vec{b}, \vec{c};\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють трійки різного характеру. Тобто $\left(\left(\alpha \cdot \vec{a}\right), \vec{b}, \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \le 0$. Але ж тоді $\left(\left(\alpha \cdot \vec{a}\right), \vec{b}, \vec{c}\right), \alpha \cdot \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ одного знаку. Отже, $A = B$.

Доведення властивостей $d)$ пропонується на самостійне опрацювання.

Доведення властивості $e)$:

Достатність: нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, тобто паралельні деякій площині π. Тоді можливі два випадки:

$e1)$ нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$ тоді $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$. Звідки $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right) = 0$.

$e2)$ нехай $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ тоді $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$. Звідки, користуючись властивостями $a), c), d)$, маємо $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}\right) = \alpha \cdot \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\right) + \beta \cdot \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}\right) =$

$$= \alpha \cdot \left(\vec{b}, \vec{a}, \vec{a}\right) + \beta \cdot \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}\right) = \alpha \cdot \left\langle \vec{b}, \left[\vec{a}, \vec{a}\right] \right\rangle + \beta \cdot \left\langle \vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{b}\right] \right\rangle = \alpha \cdot \left\langle \vec{b}, \vec{0} \right\rangle + \beta \cdot \left\langle \vec{a}, \vec{0} \right\rangle = 0.$$

Необхідність: нехай $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left\langle \left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c} \right\rangle = 0$ звідки слідує, що

або $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{c}$, або один з векторів $\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}$ є нульовим.

В першому випадку маємо що $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, і тому вони компланарні.

В другому випадку або вектори $\vec{a}, \vec{b}$ колінеарні, або ж вектор $\vec{c}$ нульовий.

Останнє й доводить необхідність.

3.3 Подвійний векторний добуток

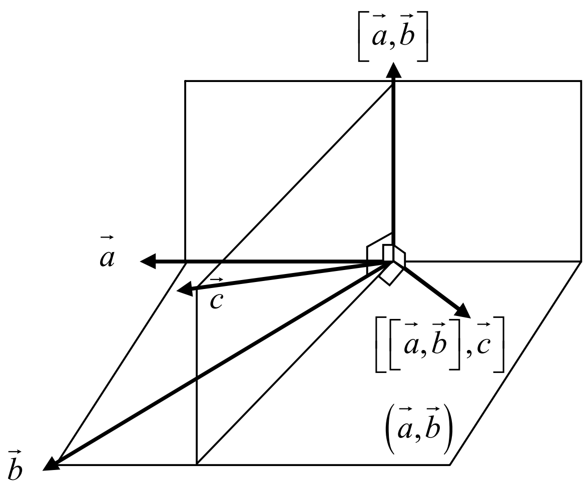
Означення 3.4. Якщо вектор $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ (який є векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$) векторно помножити на вектор $\vec{c}$ справа або зліва, то такий добуток називають подвійним векторним добутком і позначають $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]$ або ж $\left[\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right]$ відповідно.

3.3.1 Геометричний зміст подвійного векторного добутку

За означенням векторного добутку векторів маємо:

a) $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]\perp\left[\vec{a},\vec{b}\right]$; b) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$; c) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$.

Зі співвідношень $a)-c)$ слідує, що вектори $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ одночасно перпендикулярні одному й тому ж вектору $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. А це й означає, що ці три вектори є компланарними векторами.



Більше того, оскільки $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ і $\left(\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)$ є перпендикулярними площинами, то *вектор* $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]$ *належить площині* $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Пояснення: площина $\left(\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)$ проходить через пряму, що містить вектор $[\vec{a},\vec{b}]$, який за означенням перпендикулярний площині $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$; тоді за ознакою перпендикулярності площин маємо $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\perp\left(\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)$. Далі: вектор $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]$ лежить в площині перпендикулярній площині $\left(\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)$. Звідки слідує що пряма, яка містить вектор $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]$, є паралельною площині $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Якщо (за допомогою паралельного перенесення) сумістити початки всіх розглядуваних векторів, то вектор $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]$ буде належати площині $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Оскільки вектори $\vec{a},\vec{b}$ не є колінеарними, то будь-який вектор площини $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ однозначно розкладається за цими векторами. Більше того, для подвійного векторного добутку має місце наступний розклад за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]=\vec{b}\cdot\left\langle\vec{a},\vec{c}\right\rangle-\vec{a}\cdot\left\langle\vec{b},\vec{c}\right\rangle. \tag{3.8}$$

Вправа 4: за допомогою координат доведіть справедливість (3.8).

Приклад 4. Знайти векторний добуток $\left[\left(3\vec{a}+\vec{b}\right),\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\right]$.

Розв'язання:

$$\left[\left(3\vec{a}+\vec{b}\right),\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\right]=3\left[\vec{a},\vec{a}\right]-9\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{a}\right]-3\left[\vec{b},\vec{b}\right]=-9\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{a}\right]=-10\left[\vec{a},\vec{b}\right]=10\left[\vec{b},\vec{a}\right]$$

Приклад 5. Знайти модуль векторного добутку векторів $\left[\left(\vec{a}+2\vec{b}\right),\left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)\right]$, якщо $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5, \angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання: $\left|\left[\left(\vec{a}+2\vec{b}\right),\left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)\right]\right|=\left|4\left[\vec{a},\vec{b}\right]+6\left[\vec{b},\vec{a}\right]\right|=$

$$=\left|4\left[\vec{a},\vec{b}\right]-6\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=2\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=2\,|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=2\cdot3\cdot5\cdot\sin\frac{\pi}{3}=30\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}.$$

Приклад 6. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}=3\vec{m}+5\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$ і $\vec{c}=2\vec{m}+7\vec{n}$, якщо $\left|\vec{m}\right|=\dfrac{1}{2}$, $\left|\vec{n}\right|=3$, $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=135^0$.

Розв'язання: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left((3\vec{m}+5\vec{n}),(\vec{m}-2\vec{n}),(2\vec{m}+7\vec{n})\right)=\left\langle\left[(3\vec{m}+5\vec{n}),(\vec{m}-2\vec{n})\right],(2\vec{m}+7\vec{n})\right\rangle=$

$$=\left\langle\left(-6\left[\vec{m},\vec{n}\right]+5\left[\vec{n},\vec{m}\right]\right),(2\vec{m}+7\vec{n})\right\rangle=\left\langle-11\left[\vec{m},\vec{n}\right],(2\vec{m}+7\vec{n})\right\rangle=-22\left\langle\left[\vec{m},\vec{n}\right],\vec{m}\right\rangle-77\left\langle\left[\vec{m},\vec{n}\right],\vec{n}\right\rangle=$$

$=-22\left\langle\vec{l},\vec{m}\right\rangle-77\left\langle\vec{l},\vec{n}\right\rangle=0$, бо за визначенням векторного добутку $\vec{l}\perp\vec{m}$, $\vec{l}\perp\vec{n}$.

3.4 Задачі до практичного заняття № 4

4.1) Спростити добутки $\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{b},\vec{c}\right],\left[\vec{c},\vec{a}\right]$ знаючи, що $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ є взаємно перпендикулярними ортами, які утворюють праву (ліву) трійку.

4.2) Розкласти вектор $\vec{p}=\left[\left(3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right),\left(\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}\right)\right]$ за взаємно перпендикулярними ортами $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$, які утворюють праву (ліву) трійку.

4.3) Дано: $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = -6$. Обчислити $\left\| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right\|$.

4.4) Дано: $\left|\vec{a}\right| = 8$, $\left|\vec{b}\right| = 15$, $\left\| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right\| = 72$. Обчислити $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$.

4.5) Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 6$, $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

4.6) Якій умові повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектори $\vec{m} = 3\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$ були колінеарними.

4.7) Знаючи дві сторони трикутника $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, обчислити довжину його висоти $\overrightarrow{CD}$.

4.8) Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

$\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}, \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}, \vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, де $|\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{r}| = 1$; $\vec{p} \perp \vec{q}, \vec{r}$; $\vec{q} \perp \vec{r}$.

4.9) Знайти висоту піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо за основу взято трикутник, побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ із задачі **4.8**.

4.10) Перевірити, чи компланарними є вектори $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q} - 2\vec{r}$ і $\vec{c} = 7\vec{p} + 14\vec{q} - 13\vec{r}$, де $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ – взаємно перпендикулярні орти.

Доведіть наступні твердження:

4.11) Якщо $\begin{cases} \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0} \\ \left[\vec{a}, \vec{c}\right] = \vec{0} \\ \vec{a} \neq \vec{0} \end{cases}$, то $\left[\vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{0}$.

4.12) Якщо $\begin{cases} \left\langle\vec{a}, \vec{b}\right\rangle = 0 \\ \left[\vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \end{cases}$, то $\left\langle\vec{a}, \vec{c}\right\rangle = 0$.

4.13) Якщо $\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{a} \perp \vec{c} \end{cases}$, то $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \vec{0}$.

4.14) $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]^2 + \left\langle\vec{a}, \vec{b}\right\rangle^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2$.

4.15) $\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right] + \left[\left[\vec{b}, \vec{c}\right], \vec{a}\right] + \left[\left[\vec{c}, \vec{a}\right], \vec{b}\right] = \vec{0}$.

II. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ ТА В ПРОСТОРІ

4. Прямокутна система координат на площині та в просторі

4.1 Прямокутна система координат в просторі

Прямокутна декартова система координат (ПДСК) в просторі визначається вибором точки *O – початку системи координат* та *впорядкованою трійкою взаємно перпендикулярних ортів* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (зі спільним початком у цій точці), які утворюють (для визначеності) праву трійку. Напрями вказаних векторів визначають додатній напрям відповідних осей OX, OY, OZ. Останні й будемо називати *координатними осями* (рис. 4.1).

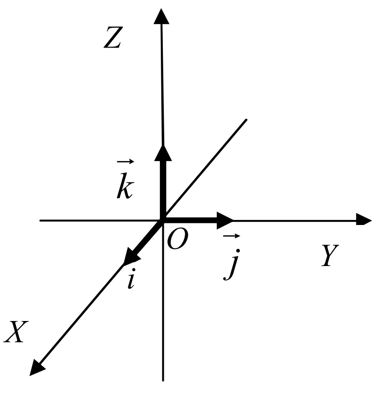


Рис. 4.1

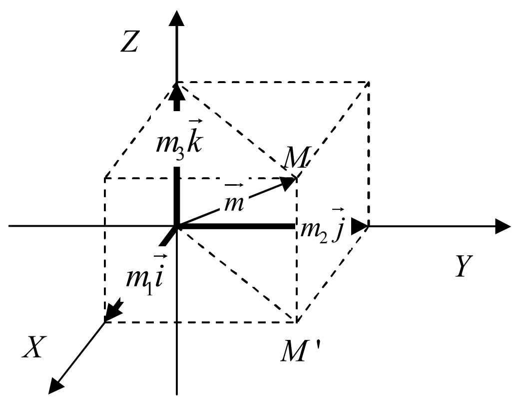


Рис. 4.2

Оскільки вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ не є компланарними, то будь який вектор $\vec{m}$ простору однозначно розкладається за цими векторами: $\vec{m} = m_1 \cdot \vec{i} + m_2 \cdot \vec{j} + m_3 \cdot \vec{k}$, де $m_1 \cdot \vec{i}$, $m_2 \cdot \vec{j}$ і $m_3 \cdot \vec{k}$ є вектори, колінеарні відповідним осям та служать ребрами того паралелепіпеда, для якого вектор $\vec{m}$ є діагоналлю (рис. 4.2);

m_1, m_2, m_3 – числа, рівні проекціям вектора $\vec{m}$ на осі OX, OY, OZ відповідно, тобто $m_1 = Пр_{\vec{i}}\,\vec{m}$, $m_2 = Пр_{\vec{j}}\,\vec{m}$, $m_3 = Пр_{\vec{k}}\,\vec{m}$.

Означення 4.1. Проекції m_1, m_2, m_3 на вісі координат будемо називати координатами вектора $\vec{m}$ в прямокутній системі $S=\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ($OXYZ$), яка визначається т. O і базисними векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, та позначати: $\vec{m}=\{m_1, m_2, m_3\}$.

Покажемо, що в базисі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ мають координати:

$$\vec{i}=\{1,0,0\}, \quad \vec{j}=\{0,1,0\}, \quad \vec{k}=\{0,0,1\} \tag{4.1}$$

Очевидно, що $\vec{i}=1\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}$. Оскільки кожен вектор простору єдиним чином розкладається за трьома некомпланарними векторами, зокрема $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, то $\vec{i}=\{1,0,0\}$. Аналогічно $\vec{j}=\{0,1,0\}$, $\vec{k}=\{0,0,1\}$ в базисі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

4.1.1 Визначення координат точки

Під координатами довільної точки M в системі $S=\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ будемо розуміти координати вектора $\overrightarrow{OM}=\vec{m}$, який носить назву *радіус-вектор точки* M.

Таким чином

Означення 4.2. Якщо вектор $\overline{OM}$ в системі $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ має координати $\overrightarrow{OM}=\vec{m}=\{m_1, m_2, m_3\}=m_1\cdot\vec{i}+m_2\cdot\vec{j}+m_3\cdot\vec{k}$, то координатами точки M в цій системі називатимемо числа m_1, m_2, m_3 і позначатимемо $M\left(m_1, m_2, m_3\right)$.

І навпаки, якщо точка M в системі $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ має координати $M\left(m_1, m_2, m_3\right)$, то координати її радіус-вектора рівні $\overrightarrow{OM}=m_1\cdot\vec{i}+m_2\cdot\vec{j}+m_3\cdot\vec{k}=\{m_1, m_2, m_3\}$.

4.1.2 Координати вектора, початок якого не співпадає з початком координат

Нехай в системі координат $S=\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ задано своїми координатами дві точки: $A=\left(a_1, a_2, a_3\right)\neq\left(0,0,0\right)$ і $B=\left(b_1, b_2, b_3\right)$. Звідки $\overrightarrow{OA}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\overrightarrow{OB}=\{b_1, b_2, b_3\}$.

Тоді за правилом трикутника маємо: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=$

$=\left(b_1\cdot\vec{i}+b_2\cdot\vec{j}+b_3\cdot\vec{k}\right)-\left(a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}+a_3\cdot\vec{k}\right)=(b_1-a_1)\cdot\vec{i}+(b_2-a_2)\cdot\vec{j}+(b_3-a_3)\cdot\vec{k}$, отже

$$\overrightarrow{AB}=\{b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3\} \tag{4.2}$$

Таким чином, дві точки простору, взяті в певному порядку задають вектор, координати якого знаходяться за правилом (4.2).

4.2 Прямокутна система координат на площині

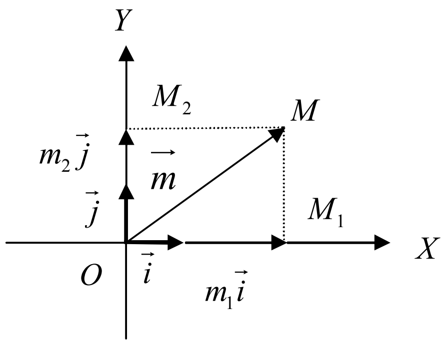


Рис. 4.3

Аналогічно тривимірному випадку, прямокутна система координат на площині (двовимірний випадок) визначається точкою $O(0,0)$ – *початком системи координат,* та впорядкованою парою перпендикулярних ортів $\vec{i}, \vec{j}$ – рис. 4.3.

Зрозуміло, що радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ будь-якої точки M площини єдиним чином розкладається за неколінеарними векторами $\vec{i}, \vec{j}$:

$$\vec{m} = m_1 \cdot \vec{i} + m_2 \cdot \vec{j}, \text{ де}$$

m_1, m_2 числа, рівні проекціям вектора $\vec{m}$ на вісі OX і OY відповідно.

За аналогією числа m_1, m_2 будемо називати координатами точки M в системі $S = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Очевидно, що вектори $\vec{i}, \vec{j}$ в базисі $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ мають координати:

$$\vec{i} = \{1,0\}, \ \vec{j} = \{0,1\} \tag{4.3}$$

та має місце аналог рівності (3.2)

$$\overrightarrow{AB} = \left\{b_1 - a_1, b_2 - a_2\right\}. \tag{4.4}$$

4.3 Дії з векторами, що задані своїми координатами в прямокутній системі координат

Нехай в деякій системі координат $S = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ на площині задано вектори $\vec{a} = \left\{a_1, a_2\right\}$ і $\vec{b} = \left\{b_1, b_2\right\}$.

та в деякій прямокутній системі координат $S = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ простору задано вектори: $\vec{x} = \left\{x_1, x_2, x_3\right\}$, $\vec{y} = \left\{y_1, y_2, y_3\right\}$ і $\vec{z} = \left\{z_1, z_2, z_3\right\}$.

4.3.1 Додавання та віднімання векторів

Координати вектора, що є сумою (різницею) двох векторів можна обчислити за правилами:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\{(a_1\pm b_1),(a_2\pm b_2)\},\tag{4.5}$$

$$\vec{x}\pm\vec{y}=\{(x_1\pm y_1),(x_2\pm y_2),(x_3+y_3)\}.\tag{4.6}$$

Доведемо, наприклад, формулу (4.5). Доведення (4.6) аналогічне доведенню (4.5).

Сумістимо початки цих векторів з початком координат – т. $O(0,0)$. Тоді точка A, що співпадає з кінцем вектора $\vec{a}$ матиме координати $A=(a_1,a_2)$. Аналогічно кінець вектора $\vec{b}$ матиме координати $B=(b_1,b_2)$. Тоді

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\overline{OA}\pm\overline{OB}=\left(a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}\right)\pm\left(b_1\cdot\vec{i}+b_2\cdot\vec{j}\right)=(a_1\pm b_1)\cdot\vec{i}+(a_2\pm b_2)\cdot\vec{j}=\{(a_1\pm b_1),(a_2\pm b_2)\}.$$

4.3.2 Добуток вектора на число

Координати вектора, що є добутком вектора на число можна знайти за правилами

$$\lambda\cdot\vec{a}=\{\lambda\cdot a_1,\lambda\cdot a_2\};\ \ \lambda\cdot\vec{x}=\{\lambda\cdot x_1,\lambda\cdot x_2,\lambda\cdot x_3\}.\tag{4.7}$$

Доведення рівностей (4.7) пропонується на самостійне опрацювання.

4.3.3 Скалярний добуток векторів

Лема 4. Скалярний добуток векторів площини або простору можна обчислити відповідно за формулами:

$$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2,\tag{4.8}$$

$$\left\langle\vec{x},\vec{y}\right\rangle=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3.\tag{4.9}$$

Доведення цих формул є звичайним застосуванням властивостей скалярного добутку векторів. Доведемо, наприклад, формулу (4.8). Формула (4.9) доводиться аналогічно.

Оскільки $\vec{a}=\{a_1,a_2\}$ і $\vec{b}=\{b_1,b_2\}$, то $\vec{a}=a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}$, $\vec{b}=b_1\cdot\vec{i}+b_2\cdot\vec{j}$. І тому:

$$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\left\langle\left(a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}\right),\left(b_1\cdot\vec{i}+b_2\cdot\vec{j}\right)\right\rangle=\left\langle a_1\cdot\vec{i},b_1\cdot\vec{i}\right\rangle+\left\langle a_1\cdot\vec{i},b_2\cdot\vec{j}\right\rangle+\left\langle a_2\cdot\vec{j},b_1\cdot\vec{i}\right\rangle+\left\langle a_2\cdot\vec{j},b_2\cdot\vec{j}\right\rangle=$$

$$=a_1\cdot b_1\cdot\left\langle\vec{i},\vec{i}\right\rangle+a_1\cdot b_2\cdot\left\langle\vec{i},\vec{j}\right\rangle+a_2\cdot b_1\cdot\left\langle\vec{j},\vec{i}\right\rangle+a_2\cdot b_2\cdot\left\langle\vec{j},\vec{j}\right\rangle=$$

$$=a_1\cdot b_1\cdot\left|\vec{i}\right|\cdot\left|\vec{i}\right|\cdot\cos 0^0+a_1\cdot b_2\cdot\left|\vec{i}\right|\cdot\left|\vec{j}\right|\cdot\cos 90^0+a_2\cdot b_1\cdot\left|\vec{j}\right|\cdot\left|\vec{i}\right|\cdot\cos 90^0+a_2\cdot b_2\cdot\left|\vec{j}\right|\cdot\left|\vec{j}\right|\cdot\cos 0^0=$$

$$=a_1\cdot b_1\cdot 1\cdot 1\cdot 1+0+0+a_2\cdot b_2\cdot 1\cdot 1\cdot 1=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2.$$

За визначенням $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{\left\langle \vec{c}, \vec{c} \right\rangle}$. Тому:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,; \qquad \left|\vec{x}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,. \tag{4.10}$$

З визначення скалярного добутку векторів $\left(\left\langle \vec{m}, \vec{n} \right\rangle = \left|\vec{m}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos\angle\left(\vec{m}, \vec{n}\right)\right)$ та формул (4.8)–(4.10), маємо:

$$\cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}\,; \qquad \cos\angle\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}\,. \tag{4.11}$$

Аналогічним чином визначаються проекція вектора $\vec{a}$ (вектора $\vec{x}$) на вісь, що має напрям деякого вектора $\vec{b}$ (вектора $\vec{y}$):

$$Пр_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}\,; \qquad Пр_{\vec{y}}\,\vec{x} = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}\,. \tag{4.12}$$

4.3.4 Векторний добуток векторів

Теорема 4.1. Якщо вектори $\vec{y}, \vec{z}$ в прямокутній системі координат $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ мають координати $\vec{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$, $\vec{z} = \{z_1, z_2, z_3\}$, а трійка $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – права, то координати вектора, що є векторним добутком цих векторів, можна обчислити за допомогою співвідношень

$$\left[\vec{y}, \vec{z}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \Delta_1 \cdot \vec{i} - \Delta_2 \cdot \vec{j} + \Delta_3 \cdot \vec{k} = \{\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3\}, \text{ де} \tag{4.13}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{4.14}$$

Нагадаємо, що визначник другого порядку можна обчислити за правилом:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b\,. \tag{4.15}$$

Доведення є наслідком застосування властивостей векторного добутку векторів, а саме:

$$\left[\vec{y}, \vec{z}\right] = \left[\{y_1, y_2, y_3\}, \{z_1, z_2, z_3\}\right] = \left[\left\{y_1 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + y_3 \cdot \vec{k}\right\}, \left\{z_1 \cdot \vec{i} + z_2 \cdot \vec{j} + z_3 \cdot \vec{k}\right\}\right] =$$

$$= \left[y_1 \cdot \vec{i}, z_1 \cdot \vec{i}\right] + \left[y_1 \cdot \vec{i}, z_2 \cdot \vec{j}\right] + \left[y_1 \cdot \vec{i}, z_3 \cdot \vec{k}\right] + \left[y_2 \cdot \vec{j}, z_1 \cdot \vec{i}\right] + \left[y_2 \cdot \vec{j}, z_2 \cdot \vec{j}\right] + \left[y_2 \cdot \vec{j}, z_3 \cdot \vec{k}\right] +$$

$$+\left[y_3\cdot\vec{k},z_1\cdot\vec{i}\right]+\left[y_3\cdot\vec{k},z_2\cdot\vec{j}\right]+\left[y_3\cdot\vec{k},z_3\cdot\vec{k}\right]=y_1\cdot z_1\cdot\left[\vec{i},\vec{i}\right]+y_1\cdot z_2\cdot\left[\vec{i},\vec{j}\right]+y_1\cdot z_3\cdot\left[\vec{i},\vec{k}\right]+$$

$$+y_2\cdot z_1\cdot\left[\vec{j},\vec{i}\right]+y_2\cdot z_2\cdot\left[\vec{j},\vec{j}\right]+y_2\cdot z_3\cdot\left[\vec{j},\vec{k}\right]+y_3\cdot z_1\cdot\left[\vec{k},\vec{i}\right]+y_3\cdot z_2\cdot\left[\vec{k},\vec{j}\right]+y_3\cdot z_3\cdot\left[\vec{k},\vec{k}\right]=$$

$$=y_1\cdot z_2\cdot\left[\vec{i},\vec{j}\right]+y_1\cdot z_3\cdot\left[\vec{i},\vec{k}\right]+y_2\cdot z_1\cdot\left[\vec{j},\vec{i}\right]+y_2\cdot z_3\cdot\left[\vec{j},\vec{k}\right]+y_3\cdot z_1\cdot\left[\vec{k},\vec{i}\right]+y_3\cdot z_2\cdot\left[\vec{k},\vec{j}\right]=$$

$$=\left(y_2\cdot z_3-y_3\cdot z_2\right)\cdot\left[\vec{j},\vec{k}\right]+\left(y_3\cdot z_1-y_1\cdot z_3\right)\cdot\left[\vec{k},\vec{i}\right]+\left(y_1\cdot z_2-y_2\cdot z_1\right)\cdot\left[\vec{i},\vec{j}\right]=$$

$$=\left(y_2\cdot z_3-y_3\cdot z_2\right)\cdot\vec{i}+\left(y_3\cdot z_1-y_1\cdot z_3\right)\cdot\vec{j}+\left(y_1\cdot z_2-y_2\cdot z_1\right)\cdot\vec{k}=$$

$$=\left(y_2\cdot z_3-y_3\cdot z_2\right)\cdot\vec{i}-\left(y_1\cdot z_3-y_3\cdot z_1\right)\cdot\vec{j}+\left(y_1\cdot z_2-y_2\cdot z_1\right)\cdot\vec{k}=$$

$$=\Delta_1\cdot\vec{i}-\Delta_2\cdot\vec{j}+\Delta_3\cdot\vec{k}=\left\{\Delta_1,-\Delta_2,\Delta_3\right\}.$$

За формулою (4.10) модуль векторного добутку можна обчислити за правилом:

$$\left\|\left[\vec{y},\vec{z}\right]\right\|=\sqrt{\begin{vmatrix}y_2 & y_3\\ z_2 & z_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y_1 & y_3\\ z_1 & z_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}^2}\,. \tag{4.16}$$

З визначення модуля векторного добутку та формул (4.16), (4.10), маємо:

$$\left|\sin\angle\left(\vec{y},\vec{z}\right)\right|=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y_2 & y_3\\ z_2 & z_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y_1 & y_3\\ z_1 & z_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\cdot\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}}\,. \tag{4.17}$$

4.3.5 Мішаний добуток векторів

За визначенням мішаного добутку маємо $\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)=\left\langle\vec{x},\left[\vec{y},\vec{z}\right]\right\rangle$. Тоді, використовуючи формули (4.9), (4.13), (4.14), мішаний добуток $\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ можна обчислити наступним чином:

$$\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)=\left\langle\vec{x},\left[\vec{y},\vec{z}\right]\right\rangle=\left\langle\left\{x_1,x_2,x_3\right\},\left\{\Delta_1,-\Delta_2,\Delta_3\right\}\right\rangle=x_1\cdot\begin{vmatrix}y_2 & y_3\\ z_2 & z_3\end{vmatrix}-x_2\cdot\begin{vmatrix}y_1 & y_3\\ z_1 & z_3\end{vmatrix}+x_3\cdot\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}.$$

Нагадаємо, що визначник третього порядку обчислюється за правилом:

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=x_1\cdot\begin{vmatrix}y_2 & y_3\\ z_2 & z_3\end{vmatrix}-x_2\cdot\begin{vmatrix}y_1 & y_3\\ z_1 & z_3\end{vmatrix}+x_3\cdot\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}. \tag{4.18}$$

Таким чином
$$\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}. \tag{4.19}$$

З формули (4.19) та властивостей мішаного добутку випливає, що: $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})>0$ $\left((\vec{x},\vec{y},\vec{z})<0\right)$ тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ утворюють праву (відповідно ліву) трійку, або ще кажуть «задають додатну (або ж від'ємну) орієнтацію».

4.3.6 Направляючі косинуси вектора

З'ясуємо геометричний зміст прямокутних координат вектора у просторі. Нехай $\vec{a}$ – ненульовий вектор, заданий у прямокутній системі $S=\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ координатами $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$. Тоді маємо векторну рівність:

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\ .$$

Введемо у розгляд кути: $\alpha=\angle\left(\vec{a},\vec{i}\right)$, $\beta=\angle\left(\vec{a},\vec{j}\right)$ і $\gamma=\angle\left(\vec{a},\vec{k}\right)$.

Оскільки $\left\langle\vec{a},\vec{i}\right\rangle=a_1\cdot\left\langle\vec{i},\vec{i}\right\rangle+a_2\cdot\left\langle\vec{i},\vec{j}\right\rangle+a_3\cdot\left\langle\vec{i},\vec{k}\right\rangle=a_1$,

то одержуємо, що $a_1=\left\langle\vec{a},\vec{i}\right\rangle$, бо $\left|\vec{i}\right|^2=1$, $\left\langle\vec{i},\vec{j}\right\rangle=0$, $\left\langle\vec{i},\vec{k}\right\rangle=0$.

Отже $a_1=\left\langle\vec{a},\vec{i}\right\rangle=\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\alpha$.

Аналогічно маємо рівності: $a_2=\left\langle\vec{a},\vec{j}\right\rangle=\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\beta$, $a_3=\left\langle\vec{a},\vec{k}\right\rangle=\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\gamma$.

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають ***направляючими косинусами вектора*** $\vec{a}$ відносно системи $S=\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Із одержаних формул випливає, що кожна координата вектора дорівнює добутку довжини цього вектора на відповідний направляючий косинус.

Зазначимо, що сума квадратів направляючих косинусів будь-якого ненульового вектора дорівнює одиниці. Дійсно, оскільки

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}=\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\alpha\cdot\vec{i}+\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\beta\cdot\vec{j}+\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\gamma\cdot\vec{k}\ ,$$

то $\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)$, тобто $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Звідси випливає, що координати одиничного вектора $\vec{e}$ в прямокутній системі координат дорівнюють направляючим косинусам цього вектора:

$$\vec{e}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}\text{ , або ж }\left|\vec{e}\right|=1\ .$$

Таким чином, в прямокутній системі координат $S=\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ довільний вектор $\vec{a}$ має координати: $\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\alpha$, $\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\beta$, $\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\gamma$,

де α,β і γ – кути, що «направляють» вектор $\vec{a}$.

4.3.7 Поділ (напрямленого) відрізка в заданому відношенні

Нехай в прямокутній системі координат $S=\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ задано координати точок $A\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ та $B\left(b_1,b,...,b_n\right)$, $n=1,2,3$. І нехай точка C ділить напрямлений відрізок у відношенні $\lambda=\dfrac{m}{n}$, тобто $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\lambda=\dfrac{m}{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\lambda\cdot\overrightarrow{CB}$. Тоді координати точки C можна обчислити за допомогою формул:

$$c_i=\frac{a_i+\lambda\cdot b_i}{1+\lambda}=\frac{n\cdot a_i+m\cdot b_i}{n+m},\quad i=1,...,n \tag{4.20}$$

Доведення: нехай $\left(c_1,c_2,...,c_n\right)$ – координати шуканої точки C. Тоді: $\overrightarrow{AC}=\left(c_1-a_1,,...,c_n-a_n\right)$, $\overrightarrow{CB}=\left(b_1-c_1,,...,b_n-c_n\right)$. Оскільки $\overrightarrow{AC}=\lambda\cdot\overrightarrow{CB}$, то: $c_i-a_i=\lambda\cdot\left(b_i-c_i\right)\ \forall i=1,...,n$. Звідки й слідує справедливість рівностей (4.20).

Крім того:

a) якщо $m=n\neq 0$, то точка C є серединою відрізка AB;
b) якщо $\lambda>0$, то $\overrightarrow{AC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CB}$, а точка C лежить між точками A і B;
c) якщо $\lambda<0$, то $\overrightarrow{AC}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CB}$, а точка C лежить поза точками A і B.

Більше того: $\lambda>0 \Leftrightarrow$ точка C лежить між точками A і B;
$\lambda<0 \Leftrightarrow$ точка C лежить поза точками A і B.

Зауваження 4.1.

1) для точок A,B і C прямої величину $\left(ABC\right)=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$ називають простим відношенням трьох точок;

2) формули (4.20) мають місце для будь-якої афінної системи координат, які будуть розглянуті нами нижче.

4.4 Задачі до практичного заняття № 5

В усіх наведених задачах система координат – *прямокутна*.

5.1) Довести, що точки $A(-3;0;2)$, $B(-2;1;3)$, $C(5;0;2)$ і $D(4;-1;1)$ є вершинами паралелограма.

5.2) Дано точки $A(-3;0;2)$ і $B(4;6;11)$. Знайти координати точки C, яка ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ у відношенні λ, де: $\lambda = 2$; $\lambda = -1/2$.

5.3) Знаючи координати вершини $A(2;-5;3)$ трикутника ABC і координати векторів, що співпадають з двома його сторонами $\overrightarrow{AB} = \{4;1;2\}$, $\overrightarrow{BC} = \{3;-2;5\}$, знайти координати інших вершин $\triangle ABC$.

5.4) Знайти одиничний вектор паралельний вектору $\vec{a} = \{4;1;2\}$.

5.5) Знайти скалярний добуток векторів та кут між ними:

a) $\vec{a} = \{1;2\}$, $\vec{b} = \{2;4\}$;

b) $\vec{a} = \{1;-1;1\}$, $\vec{b} = \{-4;2;-2\}$.

5.6) Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = \{2;-1;1\}$, $\vec{b} = \{-4;2;-2\}$.

5.7) Задано координати вершин трикутника $A(-1;0;1)$, $B(0;2;-3)$, $C(4;4;1)$

a) обчислити площу трикутника ABC;

b) знайти висоту трикутника, що проходить через точку A;

c) знайти кут $\angle BAC$.

5.8) Перевірити, чи є наступні вектори компланарними:

a) $\vec{a} = \{2;-1;3\}$, $\vec{b} = \{1;4;2\}$, $\vec{c} = \{3;1;-1\}$;

b) $\vec{a} = \{1;6;5\}$, $\vec{b} = \{3;-2;4\}$, $\vec{c} = \{7;-18;2\}$.

Якщо ні, то яку трійку складають праву чи ліву?

5.9) Задано вершини тетраедра: $A(1;2;3)$, $B(9;6;4)$, $C(3;0;4)$, $S(5;2;6)$.

a) обчислити об'єм тетраедра $ABCS$;

b) знайти довжину висоти тетраедра, що проходить через вершину S;

c) знайти кут між ребром AS та площиною (ABC).

5.10) Дано вектори $\vec{a}=\{0;4;1\}$ і $\vec{b}=\{2;-2;1\}$. Знайти вектор $\vec{c}$ довжини 2 (лін.од.), який перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а впорядкована трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ має від'ємну орієнтацію.

5.11) Довести, що площу трикутника, заданого координатами своїх вершин $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ можна обчислити за формулою

$$S_{\vartriangle}=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{abs}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{abs}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

де $\operatorname{abs}(q)$ – модуль величини q.

5.12) Довести, що об'єм тетраедра $ABCD$, заданого координатами своїх вершин $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, $D(x_4,y_4,z_4)$ можна обчислити за формулою

$$V_{тетр.}=\frac{1}{6}\cdot\operatorname{abs}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\operatorname{abs}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

***

5.13) Задано координати вершин $\vartriangle ABC$: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$.

a) знайти координати точки перетину медіан трикутника;
b) знайти координати точки перетину бісектрис трикутника;
c) знайти координати точки перетину висот трикутника;
d) знайти координати точки перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

5. Афінна система координат на площині та в просторі

5.1 Відомості з лінійної алгебри

5.1.1 Дії з матрицями

Додавання матриць здійснюється за правилом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}, & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21}, & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}.$$

Множення матриць здійснюється за правилами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \left(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \right); \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{12} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{12} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \left(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}, a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}, a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \right);$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{12} + b_{13}a_{13} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{12} + b_{23}a_{13} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{12} + b_{33}a_{13} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

5.1.2 Знаходження оберненої матриці

Якщо матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ є невиродженою, то обернену до неї матрицю позначають A^{-1}, та знаходять за наступним правилом:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (A)$$

Аналогічно якщо матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ є невиродженою, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{де} \qquad (B)$$

$$b_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad b_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad b_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};$$

$$b_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad b_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad b_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix};$$

$$b_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; \quad b_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; \quad b_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5.1.3 Розклад вектора за базисними векторами

Нагадаємо, що:

Означення 5.1. Систему p векторів $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, ..., \overrightarrow{w_p}$ називають _лінійно залежною_, якщо існують такі числа $k_1, k_2, ..., k_p$, одночасно не всі рівні нулю, що має місце рівність

$$k_1 \overrightarrow{w_1} + k_2 \overrightarrow{w_2} + ... + k_p \overrightarrow{w_p} = \vec{0}. \tag{5}$$

Якщо ж рівність $k_1 \overrightarrow{w_1} + k_2 \overrightarrow{w_2} + ... + k_p \overrightarrow{w_p} = \vec{0}$ має місце ***лише за умов,*** коли всі $k_1, k_2, ..., k_p$ одночасно є рівними нулю ($k_1 = k_2 = ... = k_p = 0$), то вектори $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, ..., \overrightarrow{w_p}$ називаються _лінійно незалежними_.

Означення 5.2. _Базисом_ векторного простору (див. означення 1.*) називають таку сукупність лінійно незалежних векторів $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$, що для довільного вектора $\vec{v}$ з цього простору сукупність векторів $\vec{v}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ є лінійно залежною.

Зауваження 5.1. Базисом на координатній прямій є будь-який ненульовий вектор; на площині – будь-яка впорядкована пара неколінеарних векторів; в просторі – будь-яка впорядкована трійка некомпланарних векторів. **!!! Доведіть ці твердження.**

Вимірністю або розмірністю векторного простору називають максимальну кількість лінійно незалежних векторів (кількість базисних векторів). А тому множина векторів прямої утворює одновимірний векторний простір, множина векторів площини – двовимірний, а множина векторів простору – тривимірний векторний простір.

Означення 5.3. Якщо вектори базису попарно ортогональні (перпендикулярні), то такий базис називають ортогональним.

Означення 5.4. Якщо вектори ортогонального базису є одиничними, то такий базис називають ортонормованим.

Нехай в деякому базисі $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}$ $(n=1,2,...)$ $n-$вимірного векторного простору задано координати векторів:

$$\overrightarrow{u_1}=u_{11}\cdot\overrightarrow{e_1}+u_{12}\cdot\overrightarrow{e_2}+...+u_{1n}\cdot\overrightarrow{e_n}\,,$$

$$\overrightarrow{u_2}=u_{21}\overrightarrow{e_1}+u_{22}\overrightarrow{e_2}+...+u_{2n}\overrightarrow{e_n}\,,...,$$

$$\overrightarrow{u_i}=u_{i1}\overrightarrow{e_1}+u_{i2}\overrightarrow{e_2}+...+u_{in}\overrightarrow{e_n}\,,..., \tag{5.1}$$

$$\overrightarrow{u_n}=u_{n1}\overrightarrow{e_1}+u_{n2}\overrightarrow{e_2}+...+u_{nn}\overrightarrow{e_n}\,,$$

$$\vec{w}=w_1\cdot\overrightarrow{e_1}+w_2\cdot\overrightarrow{e_2}+...+w_n\cdot\overrightarrow{e_n}\,. \tag{5.2}$$

З курсу лінійної алгебри відомо, що необхідною й достатньою умовою для того, щоб вектори $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},...,\overrightarrow{u_n}$ утворювали базис $n-$вимірного векторного простору є нерівність нулю визначника:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & ... & u_{1n} \\ ... & & & \\ u_{i1} & u_{i2} & ... & u_{in} \\ ... & & & \\ u_{n1} & u_{n2} & ... & u_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5.3}$$

Знайдемо координати вектора $\vec{w}$ в базисі $\left\{\overrightarrow{u_i}\right\}_{i=1}^{n}$.

За визначенням базису, система векторів $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},...,\overrightarrow{u_n},\vec{w}$ є лінійно залежною, а тому існують такі дійсні числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, одночасно не всі рівні нулю, такі що має місце рівність:

$$\vec{w}=\alpha_1\overrightarrow{u_1}+\alpha_2\overrightarrow{u_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{u_n} \tag{5.4}$$

Підставимо вирази (5.1) і (5.2) в (5.4). Одержимо:

$$\vec{w}=w_1\overrightarrow{e_1}+w_2\overrightarrow{e_2}+...+w_n\overrightarrow{e_n}=$$

$$=\alpha_1(u_{11}\overrightarrow{e_1}+u_{12}\overrightarrow{e_2}+...+u_{1n}\overrightarrow{e_n})+\alpha_2(u_{21}\overrightarrow{e_1}+u_{22}\overrightarrow{e_2}+...+u_{2n}\overrightarrow{e_n})+...+\alpha_n(u_{n1}\overrightarrow{e_1}+u_{n2}\overrightarrow{e_2}+...+u_{nn}\overrightarrow{e_n})=$$

$$=(\alpha_1\cdot u_{11}+\alpha_2\cdot u_{21}+...+\alpha_n\cdot u_{n1})\cdot\overrightarrow{e_1}+...+(\alpha_1\cdot u_{1n}+...+\alpha_n\cdot u_{nn})\cdot\overrightarrow{e_n} \tag{5.5}$$

Оскільки вектор $\vec{w}$ однозначно розкладається за базисними векторами $\left\{\vec{e_i}\right\}_{i=1}^{n}$, то з рівності (5.5) маємо систему рівнянь (5.6), розв'язавши яку відносно невідомих $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, знайдемо коефіцієнти розкладу вектора $\vec{w}$ за базисними векторами $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_n}$.

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot u_{11} + \alpha_2 \cdot u_{21} + ... + \alpha_n \cdot u_{n1} = w_1 \\ \alpha_1 \cdot u_{12} + \alpha_2 \cdot u_{22} + ... + \alpha_n \cdot u_{n2} = w_2 \\ ... \\ \alpha_1 \cdot u_{1n} + \alpha_2 \cdot u_{2n} + ... + \alpha_n \cdot u_{nn} = w_n. \end{cases} \tag{5.6}$$

Подамо систему (5.6) в матричній формі:

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} u_{11}\ u_{12} ... u_{1n} \\ u_{21}\ u_{22} ... u_{2n} \\ ... \\ u_{n1}\ u_{n2} ... u_{nn} \end{pmatrix} = (w_1, w_2, ..., w_n), \tag{5.7}$$

або ж в скороченому виді

$$\alpha \cdot U = W, \tag{5.7*}$$

де: α, W – «матриці–рядки»; U – така квадратна матриця, перший рядок якої складається з координат вектора $\vec{u_1}$ в базисі $\left\{\vec{e_i}\right\}_{i=1}^{n}$, другий – з координат вектора $\vec{u_2}$ в базисі $\left\{\vec{e_i}\right\}_{i=1}^{n}$, …, n-ий рядок – з координат вектора $\vec{u_n}$ в базисі $\left\{\vec{e_i}\right\}_{i=1}^{n}$.

Матричне рівняння (5.7*) можна розв'язати за допомогою оберненої матриці:

$$\alpha = W \cdot U^{-1}, \tag{C}$$

де U^{-1} – матриця обернена до матриці U. При $n = 2$ матрицю U можна знайти за правилом (A), а при $n = 3$ – за правилом (B).

5.2 Афінна система координат на площині

Афінна система координат є узагальненням прямокутної декартової системи координат. Афінна система координат на площині визначається ***репером*** $A = \left(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, тобто вибором:

точки O – <u>початку системи координат</u> і впорядкованою парою неколінеарних векторів $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ (взагалі кажучи, різної довжини) зі спільним початком у цій точці – <u>базисом</u>.

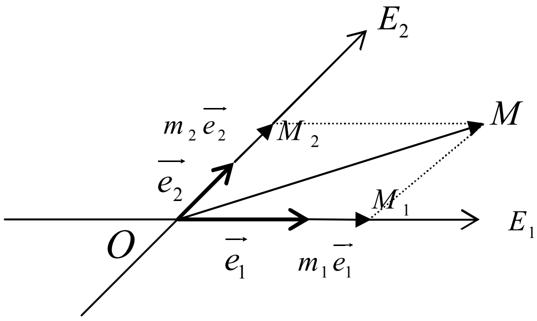


Рис. 5.1

Напрямки зазначених векторів визначають додатній напрямок відповідних осей OE_1, OE_2, які й називають координатними осями (рис. 5.1).

Оскільки вектори $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ не є колінеарними (складають базис відповідного двовимірного векторного простору), то будь-який вектор $\vec{m}$ площини (двовимірного векторного простору) з початком у точці O однозначно розкладається за цими векторами: $\vec{m} = m_1\overrightarrow{e_1} + m_2\overrightarrow{e_2}$, де

$m_1\overrightarrow{e_1}$, $m_2\overrightarrow{e_2}$ – це вектори колінеарні відповідним осям і є сторонами того паралелограма, для якого вектор $\vec{m}$ співпадає з діагоналлю $\overrightarrow{OM}$ (рис.5.1);

m_1, m_2 – числа, рівні «проекціям» вектора $\vec{m}$ відповідно на вісі OE_1, OE_2; тобто, проводячи через кінець вектора $\vec{m}$ (точку M) прямі паралельні осям OE_1, OE_2, одержимо відповідно точки M_2, M_1. Проекції m_1, m_2 на осі координат будемо називати координатами вектора $\vec{m}$ в системі $A = \left(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ (що визначається т. O і базисними векторами $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$) та позначати $\vec{m} = \{m_1, m_2\} = m_1\overrightarrow{e_1} + m_2\overrightarrow{e_2}$.

Під координатами довільної точки M в системі $A = \left(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ будемо розуміти координати вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{m}$ (*радіус-вектор* точки M) відносно цієї ж системи.

Тобто: $M\left(m_1, m_2\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \left\{m_1, m_2\right\} = m_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{e_2}$.

Якщо в системі $A=\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ задано дві точки: $A\left(a_1,a_2\right)\neq O\left(0,0\right)$ і $B=\left(b_1,b_2\right)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ визначаються за правилом $\overrightarrow{AB}=\{(b_1-a_1),(b_2-a_2)\}$ – «від координат кінця треба відняти координати початку».

5.2.1 Дії з векторами в афінній системі координат на площині

Нехай маємо координати двох векторів $\vec{x}=\{x_1,x_2\}$ і $\vec{y}=\{y_1,y_2\}$ в системі $A=\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. Знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle=\left\langle (x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}),(y_1\vec{e_1}+y_2\vec{e_2})\right\rangle=x_1y_1\left\langle \vec{e_1},\vec{e_1}\right\rangle+x_1y_2\left\langle \vec{e_1},\vec{e_2}\right\rangle+x_2y_1\left\langle \vec{e_2},\vec{e_1}\right\rangle+x_2y_2\left\langle \vec{e_2},\vec{e_2}\right\rangle=$$

$$=x_1y_1\left|\vec{e_1}\right|^2+x_1y_2\left\langle \vec{e_1},\vec{e_2}\right\rangle+x_2y_1\left\langle \vec{e_2},\vec{e_1}\right\rangle+x_2y_2\left|\vec{e_2}\right|^2=(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix}\left|\vec{e_1}\right|^2, & \left\langle \vec{e_1},\vec{e_2}\right\rangle \\ \left\langle \vec{e_2},\vec{e_1}\right\rangle, & \left|\vec{e_2}\right|^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},$$

або в матричній формі:

$$\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle=(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\text{ де}\qquad(5.8)$$

$$g_{ij}=\left\langle \vec{e_i},\vec{e_j}\right\rangle=\left|\vec{e_i}\right|\cdot\left|\vec{e_j}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right)=g_{ji},\quad i=1,2;\ j=1,2\,.\qquad(5.9)$$

Очевидно, що у випадку коли $\begin{cases}\left|\vec{e_1}\right|=\left|\vec{e_2}\right|=1\\ \vec{e_1}\perp\vec{e_2}\end{cases}$ маємо наступну рівність

$$\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle=(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2\,.\qquad(5.8^*)$$

Матрицю $G=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}$ називають матрицею метричних коефіцієнтів або матрицею Грама. Як наслідок з формули (5.8), маємо:

$$\left|\vec{x}\right|^2=\left\langle \vec{x},\vec{x}\right\rangle=(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\qquad(5.10)$$

Тоді косинус кута між векторами визначається за формулою:

$$\cos\angle\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\frac{\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle}{\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|},\text{ де}\qquad(5.11)$$

$\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle$ обчислюється за формулою (5.8), а величини $\left|\vec{x}\right|,\left|\vec{y}\right|$ – за формулою (5.10).

5.3 Афінна система координат в просторі

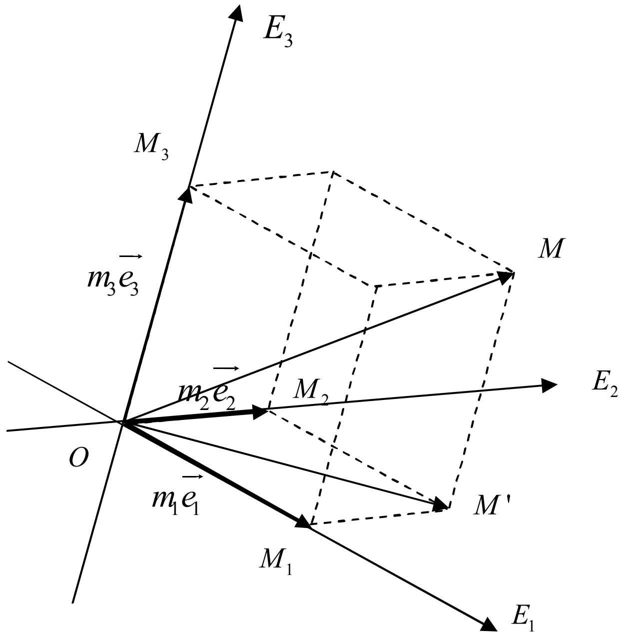


Рис. 5.2

За аналогією з площиною афінна система координат у просторі визначається ***репером*** $A=\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$, тобто вибором точки $O(0,0,0)$ – <u>початку системи координат</u> і <u>базисом</u> – впорядкованою трійкою некомпланарних векторів $\vec{e_1},\vec{e_2}$ і $\vec{e_3}$ зі спільним початком у цій точці (рис. 5.2).

Скалярний добуток векторів $\vec{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$ і $\vec{y}=\{y_1,y_2,y_3\}$, заданих своїми координатами в системі $A=\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$, можна обчислити за правилом

$$\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle=(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},\text{ де} \tag{5.12}$$

$$g_{ij}=\left\langle \vec{e_i},\vec{e_j}\right\rangle=\left|\vec{e_i}\right|\cdot\left|\vec{e_j}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{e_i},\vec{e_j}}\right)=g_{ji};\ i,j=1,2,3. \tag{5.13}$$

$$\left|\vec{x}\right|^2=\left\langle \vec{x},\vec{x}\right\rangle=(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Не важко бачити, що:

$$g_{11}=\left|\vec{e_1}\right|^2;\quad g_{22}=\left|\vec{e_2}\right|^2;\quad g_{33}=\left|\vec{e_3}\right|^2;\quad g_{12}=\left\langle \vec{e_1},\vec{e_2}\right\rangle=\left|\vec{e_1}\right|\cdot\left|\vec{e_2}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)=g_{21};$$

$$g_{13}=\left\langle \vec{e_1},\vec{e_3}\right\rangle=\left|\vec{e_1}\right|\cdot\left|\vec{e_3}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{e_1},\vec{e_3}\right)=g_{31};\quad g_{23}=\left\langle \vec{e_2},\vec{e_3}\right\rangle=\left|\vec{e_2}\right|\cdot\left|\vec{e_3}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{e_2},\vec{e_3}\right)=g_{32}. \tag{5.15}$$

Зауваження 5.2. Як було зазначено вище, афінна система координат (на площині чи в просторі) є узагальненням прямокутної декартової системи координат. Вона визначається ***репером***: початком системи координат та базисом (впорядкованою двійкою неколінеарних або ж впорядкованою трійкою некомпланарних векторів для площині і простору відповідно).

Часто-густо в навчальній літературі використовують (проміжну) так звану «косокутну систему координат». Від тепер і в подальшому під косокутною системою координат (на площині або ж в просторі) будемо розуміти афінну систему, базисні вектори якої при обраній одиниці масштабу є одиничними.

Більш наочну інформацію наведено у порівняльних таблицях нижче.

Таблиця 1. Частинні випадки афінної системи координат на площині

	Афінна	***Косокутна***	***Прямокутна***
Визначення	1) $O;\vec{e}_1,\vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$;	1) $O;\vec{e}_1,\vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$;	1) $O;\vec{e}_1,\vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$;
	2) $\angle\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)=\alpha$	2) $\angle\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)=\alpha$	2) $\angle\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)=90^\circ$
		3) $\lvert\vec{e}_1\rvert=\lvert\vec{e}_2\rvert=1$	3) $\lvert\vec{e}_1\rvert=\lvert\vec{e}_2\rvert=1$
Матриця Грама G	$\begin{pmatrix} \lvert\vec{e}_1\rvert^2 & \lvert\vec{e}_1\rvert\lvert\vec{e}_2\rvert\cos\alpha \\ \lvert\vec{e}_1\rvert\lvert\vec{e}_2\rvert\cos\alpha & \lvert\vec{e}_2\rvert^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Скалярний добуток векторів $\vec{x}$ **і** $\vec{y}$	$(x_1,x_2)\cdot G\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$	$(x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=$ $=x_1y_1+x_2y_2+\left(x_1y_2+x_2y_1\right)\cos\alpha$	$(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=$ $=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2$
Модуль вектора $\vec{x}$	$\sqrt{(x_1,x_2)\cdot G\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$	$\sqrt{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\cos\alpha}$	$\sqrt{x_1^2+x_2^2}$
Умова перпендикулярності векторів $\vec{x}$ **і** $\vec{y}$	$(x_1,x_2)\cdot G\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$	$x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+$ $+\left(x_1y_2+x_2y_1\right)\cos\alpha=0$	$x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2=0$

Таблиця 2. Частинні випадки афінної системи координат в просторі

	Афінна	*Косокутна*	*Прямокутна*
Визначення	1) $O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$, $\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)\neq 0$	1) $O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$, $\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)\neq 0$	1) $O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$, $\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)\neq 0$
	2) $\angle\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)=\alpha$, $\angle\left(\vec{e_1},\vec{e_3}\right)=\beta$, $\angle\left(\vec{e_2},\vec{e_3}\right)=\gamma$	2) $\angle\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)=\alpha$, $\angle\left(\vec{e_1},\vec{e_3}\right)=\beta$, $\angle\left(\vec{e_2},\vec{e_3}\right)=\gamma$	2) $\angle\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)=90^\circ$, $\angle\left(\vec{e_1},\vec{e_3}\right)=90^\circ$, $\angle\left(\vec{e_2},\vec{e_3}\right)=90^\circ$
		3) $\lvert\vec{e_1}\rvert=\lvert\vec{e_2}\rvert=\lvert\vec{e_3}\rvert=1$	3) $\lvert\vec{e_1}\rvert=\lvert\vec{e_2}\rvert=\lvert\vec{e_3}\rvert=1$
Матриця Грама G	$\begin{pmatrix} \lvert\vec{e_1}\rvert^2 & \lvert\vec{e_1}\rvert\lvert\vec{e_2}\rvert\cos\alpha & \lvert\vec{e_1}\rvert\lvert\vec{e_3}\rvert\cos\beta \\ \lvert\vec{e_2}\rvert\lvert\vec{e_1}\rvert\cos\alpha & \lvert\vec{e_2}\rvert^2 & \lvert\vec{e_2}\rvert\lvert\vec{e_3}\rvert\cos\gamma \\ \lvert\vec{e_3}\rvert\lvert\vec{e_1}\rvert\cos\beta & \lvert\vec{e_3}\rvert\lvert\vec{e_2}\rvert\cos\gamma & \lvert\vec{e_3}\rvert^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Скалярний добуток векторів $\vec{x}$ **і** $\vec{y}$	$(x_1,x_2,x_3)\cdot G\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$	$(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=$ $=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+(x_1y_2+x_2y_1)\cos\alpha+$ $+(x_1y_3+x_3y_1)\cos\beta+(x_2y_3+x_3y_2)\cos\gamma$	$(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=$ $=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3$
Модуль вектора $\vec{x}$	$\sqrt{(x_1,x_2,x_3)\cdot G\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}$	$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2\cos\alpha+x_1x_3\cos\beta+x_2x_3\cos\gamma)}$	$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$
Умова перпенди-кулярності векторів $\vec{x}$ **і** $\vec{y}$	$(x_1,x_2,x_3)\cdot G\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=0$	$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+(x_1y_2+x_2y_1)\cos\alpha+$ $+(x_1y_3+x_3y_1)\cos\beta+(x_2y_3+x_3y_2)\cos\gamma=0$	$x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3=0$

5.4 Застосування афінної системи координат до розв'язання геометричних задач

Відомості, одержані раніше, можна поділити на дві частини:

до першої частини відносяться: визначення вектора, дії з векторами та їх властивості; поняття колінеарності та компланарності векторів; множення вектора на число; розклад вектора за базисними векторами та його єдність;

до другої – скалярне множення векторів і його алгебраїчні властивості.

В першому випадку, використовуючи названі операції та їх властивості, можна розв'язувати широке коло задач: на паралельність, обчислення відношень паралельних відрізків, приналежність трьох точок одній прямій, чотирьох точок одній площині.

В другому випадку вектори досить успішно застосовуються при обчислені: відстаней, кутів, доведенні нерівностей, знаходженні ГМТ.

Задачі першого типу називають *афінними*, другого – *метричними*.

При застосуванні векторів (координатного методу) до розв'язування задач слід засвоїти наступне:

- *використовуючи операції додавання векторів і множення вектора на число, обчислити відстані та кути не вдається* – тому ці операції, як правило, не застосовуються в задачах, в яких фігурують такі поняття, як «коло», «бісектриса», «перпендикуляр»;
- задачі, в яких мова йде про: паралельні прямі і площини, паралельні відрізки (конкретно про *паралелограм, трапецію, паралелепіпед, призму, середину відрізка, середню лінію трикутника, центральну симетрію, точку перетину медіан трикутника й тетраедра*) піддаються ефективному розв'язанню.

Суть координатного методу в геометрії полягає в тому, щоб залежності між елементами геометричної фігури виразити за допомогою алгебраїчних співвідношень.

Розв’язування афінних задач координатним методом розпочинається з вибору афінної системи координат, в якій потрібно знайти координати точок і векторів та скласти необхідні рівняння прямих, площин і т.ін.

Систему координат можна вводити довільно. Результат розв’язування задач не залежить від вибору системи координат. Проте від вдалого її вибору залежить раціональний шлях розв’язання, швидкість і легкість одержання необхідного результату. Тому перш ніж вводити систему координат, необхідно проаналізувати задачу, встановити координати яких точок і векторів потрібно знайти, рівняння яких площин одержати й подумати, в якій з обраних систем координат це можна зробити з найменшою затратою фізичних і розумових сил. Загальних правил тут немає*: кожна задача вимагає індивідуального підходу*.

Наступні твердження (**Т.1.** – **Т.4.**) є теоретичною основою, або «словником», що переводить геометричні поняття та властивості на «мову» векторної алгебри і будуть корисними при розв’язувані *афінних* задач.

Т.1. Прямі (AB) і (CD) паралельні або співпадають $\Leftrightarrow$ коли $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD}$, $\lambda \neq 0$.

Т.2. Три точки A, B, C належать одній прямій тоді і лише тоді, коли $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$, де $\lambda \neq 0$.

Т.3. Якщо точки A, B, C належать одній прямій, то для будь-якої точки O має місце співвідношення $\overrightarrow{OC} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA} + \mu \cdot \overrightarrow{OB}$, де $\lambda + \mu = 1$.

Т.4. Для довільних чотирьох точок A, B, C, D, що належать площині, з яких A, B, C не належать одній прямій:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{OD} = (1 - \alpha - \beta) \cdot \overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{OB} + \beta \cdot \overrightarrow{OC}$$

І навпаки, якщо виконується одне зі співвідношень, то виконується й друге, а точки A, B, C, D належать одній площини.

Як було зазначено вище, специфіка обох типів задач полягає в тому, що кожна з них є особливою і потребує індивідуального підходу. Саме це і становить основну проблему пошуку ефективного їх розв'язання.

Проте, для деяких *метричних* задач (задач обчислювального характеру) можливим є наступний *алгоритм* до їх розв’язування.

Нехай на площині (в просторі) задано фігуру. І нехай a,b (a,b,c) *довжини сторін (ребер) зі спільною вершиною, кут між якими (кути між кожною парою яких) також відомий (відомі).* І нехай цими даними вичерпуються вихідні дані умови задачі.

Тоді для застосування векторно-координатного методу слід виконати наступну *послідовність дій*

Крок 1. За початок $O(0,0)$ $\left(O(0,0,0)\right)$ афінної системи координат природно обрати спільну точку відомих сторін (ребер).

Крок 2. В якості базисних векторів $\vec{e_1},\vec{e_2}$ $\left(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$ – саме ті сторони (ребра), довжини та кут між якими є відомими.

Тоді цілком визначені довжини базисних векторів, та кути між ними.

Крок 3. Оскільки відомий кут (кути) між базисними векторами, то можливим є обчислення метричних коефіцієнтів

$$g_{ij}=\left\langle\vec{e_i},\vec{e_j}\right\rangle=\left|\vec{e_i}\right|\cdot\left|\vec{e_j}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right)=g_{ji}\,.$$

Крок 4. Відносно системи $O;\vec{e_1},\vec{e_2}$ $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$ знайти координати векторів (вершин фігури), необхідних для обчислення шуканого елементу. На цьому кроці доцільно користуватися правилом трикутника, поділом напрямленого відрізка у заданому відношенні.

Крок 5. Користуючись формулами (5.8) – (5.15) та результатами попередніх кроків, знайти шуканий елемент фігури.

Не важко бачити, що якщо в трикутнику відомі три елементи: *сторона* і *прилеглі кути*, або *дві сторони та будь-який з трьох кутів*, то застосовуючи теореми «синусів», або, відповідно «косинусів», задача легко зводиться до описаної вище задачі. Це свідчить про те, що наведений алгоритм може бути застосований до розв'язування досить широкого кола задач з геометрії середньої та вищої шкіл.

Приклад 7. Задано трикутник ABC: $AB=4,\ \ AC=3,\ \ \angle BAC=60^0$. Знайти довжину відрізка AD, якщо точка D ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{BC}$ у відношенні $2:3$.

Крок 1-2. Розглянемо в площині трикутника афінну систему координат з початком в точці $A=O=(0,0)$ та базисними векторами $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{AB}$.

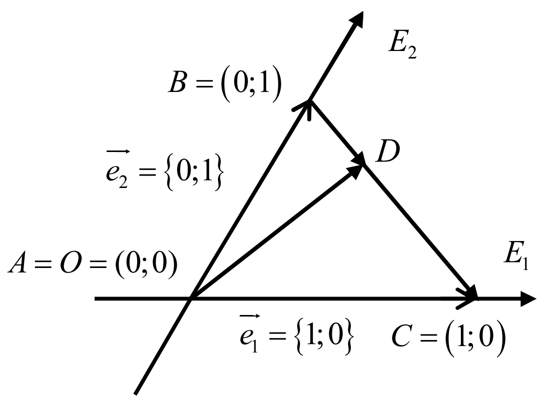
Крок 3. Тоді зрозуміло, що: $\left|\overrightarrow{e_1}\right|=3,\ \left|\overrightarrow{e_2}\right|=4,\ \ \angle\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)=60^0 \Rightarrow \cos\angle\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)=\frac{1}{2}$. І тому можна обчислити метричні коефіцієнти:

$$g_{12}=\left\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right\rangle=\left|\overrightarrow{e_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{e_2}\right|\cdot\cos\angle\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)=g_{21}=3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=6;$$

$$g_{11}=\left\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1}\right\rangle=\left|\overrightarrow{e_1}\right|^2=9,\quad g_{22}=\left\langle\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2}\right\rangle=\left|\overrightarrow{e_2}\right|^2=16.$$

Тобто матриця G має вид: $G=\begin{pmatrix}9&6\\6&16\end{pmatrix}$.

Крок 4. Зрозуміло, що для знаходження довжини AD, необхідно знайти координати вектора $\overrightarrow{OD}$, які визначаються координатами точки D в системі $O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$. Не важко бачити, що точки B і C в системі $O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ мають координати $C(1;0)$, $B(0;1)$.



За умовою точка $D(d_1;d_2)$ ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{BC}$ у відношенні $\lambda=2:3$. Тоді, за формулами координат точки, яка ділить напрямлений відрізок у відношенні λ, маємо:

$d_1=\frac{0+1\cdot2/3}{1+2/3}=\frac{2}{5};\quad d_2=\frac{1+0\cdot2/3}{1+2/3}=\frac{3}{5}$. Звідки $D\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$. Тому $\overrightarrow{OD}=\left\{\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right\}$.

Крок 5. $AD^2=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD}\right\rangle=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)\cdot\begin{pmatrix}9&6\\6&16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2/5\\3/5\end{pmatrix}=\left(\frac{2}{5}\cdot9+\frac{3}{5}\cdot6,\frac{2}{5}\cdot6+\frac{3}{5}\cdot16\right)\cdot\begin{pmatrix}2/5\\3/5\end{pmatrix}=$

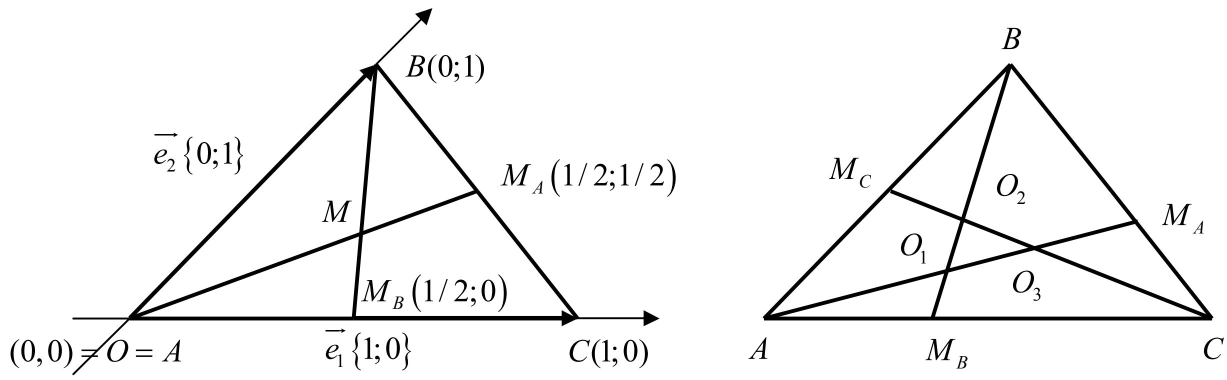
$$=\frac{1}{25}\cdot(18+18,12+48)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\cdot(36,60)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\cdot(36\cdot2+60\cdot3)=\frac{252}{25}=\left(\frac{6}{5}\cdot\sqrt{7}\right)^2.$$

Таким чином $AD=\frac{6}{5}\sqrt{7}$.

Метод введення афінної системи координат ефективно застосовується і при розв'язуванні багатьох задач на доведення.

Приклад 8. Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні $2:1$ у напрямку від вершини трикутника.

Нехай ABC – довільний трикутник. AM_A, BM_B, CM_C – його медіани. Оскільки вектори $\overline{AC}, \overline{AB}$ не є колінеарними, то в площині трикутника можна розглянути афінну систему координат з базисом $\vec{e}_1 = \overline{AC}$, $\vec{e}_2 = \overline{AB}$ так, як це показано на рисунку нижче. Зрозуміло, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ в цій системі мають координати $\vec{e}_1 = \{1;0\}$, $\vec{e}_2 = \{0;1\}$. Тоді, згідно введених позначень, вершини трикутника матимуть в цій системі координати $A(0;0), B(0;1), C(1;0)$. І тому середини сторін трикутника матимуть координати $M_A(1/2;1/2)$, $M_B(1/2;0)$, $M_C(0;1/2)$.



1) Доведемо спочатку другу частину твердження. Тобто, що *точка перетину кожної пари медіан ділить їх у відношенні* $2:1$ *у напрямку від вершин трикутника.*

Розглянемо, наприклад, медіани BM_B і AM_A. Нехай вони перетинаються в точці M. Оскільки кожна трійка точок A, M, M_A; B, M, M_B належить одній прямій, то існують такі дійсні числа α, β, що мають місце співвідношення: $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MM_A}} = \alpha$; $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{MM_B}} = \beta$. Тобто, точка M ділить напрямлений відрізок $\overline{AM_A}$ у відношенні $\alpha:1$, а $\overline{BM_B}$ – у відношенні $\beta:1$.

Далі: оскільки $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MM_A}} = \alpha$, то за формулою (4.20), точка M має координати $M\left(m_1, m_2\right) = \left(\frac{0+\alpha \cdot 1/2}{1+\alpha}, \frac{0+\alpha \cdot 1/2}{1+\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}, \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}\right)$. Аналогічно, з умови $\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MM_B}} = \beta$ слідує, що $M\left(m_1, m_2\right) = \left(\frac{0+\beta \cdot 1/2}{1+\beta}, \frac{1+\beta \cdot 0}{1+\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{2(1+\beta)}, \frac{1}{1+\beta}\right)$.

Оскільки координати кожної точки афінної системи координат визначаються єдиним чином, то для визначення координат $\left(m_1, m_2\right)$ точки M маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{\alpha}{2(1+\alpha)} = \dfrac{\beta}{2(1+\beta)} \\ m_2 = \dfrac{\alpha}{2(1+\alpha)} = \dfrac{1}{1+\beta} \end{cases}.$$

З першого рівняння слідує, що: $\frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{\beta}{1+\beta} \Rightarrow \alpha + \alpha\beta = \beta + \alpha\beta \Rightarrow \alpha = \beta$. Підставивши $\alpha = \beta$ в друге рівняння, отримаємо рівність $\frac{\alpha}{2(1+\alpha)} = \frac{1}{1+\alpha} \Rightarrow \alpha = 2$. Отже, $\alpha = \beta = 2$.

Аналогічним чином, розглянувши дві інші пари медіан – AM_A, CM_C; BM_B, CM_C – не важко встановити, що вони також точкою перетину діляться у відношенні $2:1$. І тому, точка перетину кожної пари медіан трикутника ділить кожну з них у відношенні $2:1$ у напрямку від вершини.

2) *Доведемо, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.* Припустимо протилежне. Тобто, що точки $O_1 = AM_A \cap BM_B$, $O_2 = BM_B \cap CM_C$, $O_3 = AM_A \cap CM_C$ не співпадають. Тоді на кожному з трьох напрямлених відрізків $\overrightarrow{AM_A}, \overrightarrow{BM_B}, \overrightarrow{CM_C}$ лежить по дві різні точки O_1, O_3, O_2, O_1 і O_3, O_1 відповідно, кожна з яких ділить відповідний відрізок в однаковому відношенні $2:1$. Чого бути не може, бо для будь-якого напрямленого відрізка існує єдина точка, яка ділить його у заданому відношенні **(Доведіть цей факт).**

Таким чином, отримали протиріччя, і тому медіани будь-якого трикутника перетинаються в одній точці.

5.5 Задачі до практичного заняття № 6

6.1) Вектори $\vec{e_1},\vec{e_2},...,\vec{e_n},\vec{v}$ задано координатами в деякому базисі. Довести, що $\vec{e_1},\vec{e_2},...,\vec{e_n}$ утворюють базис та знайти координати вектора $\vec{v}$ в цьому базисі.

a) $\vec{e_1}=\{1;2\}$, $\vec{e_2}=\{3;4\}$, $\vec{v}=\{5;6\}$;

b) $\vec{e_1}=\{1;1;1\}$, $\vec{e_2}=\{1;1;2\}$, $\vec{e_3}=\{1;2;3\}$, $\vec{v}=\{6;9;14\}$.

6.2) Обчислити відстань між двома точками $M(3;0)$ і $N(1;-2)$ за умов, що координатний кут косокутної системи координат становить $\omega=2\pi/3$.

6.3) Відносно косокутної системи координат з кутом $\omega=\pi/3$ задано координати вершин трикутника $A(0;0)$, $B(7;4)$ і $C(-1;6)$. Обчислити довжину медіани, проведеної з вершини A.

6.4) Визначити координатний кут, якщо відстань між точками $A(10;-4)$ і $B(7;-1)$ дорівнює 3 (лін.од.).

6.5) В паралелограмі $ABCD$: $|AB|=4$, $|AD|=2$, $\angle A=60^0$, точка K – середина сторони DC. Прямі BD і AK перетинаються в точці M. Знайти кут AMB.

6.6) В трикутнику ABC: $|AB|=2$, $|AC|=3$, $\angle A=60^0$. Знайти кут DOK між бісектрисою AD і медіаною CK.

6.7) В паралелепіпеді $ABCDA'B'C'D'$ $|AB|=2$, $|AA'|=6$, $|AD|=4$; $\cos\angle BAD=\cos\angle BAA'=1/3$, $\cos\angle DAA'=1/2$, точка K – середина ребра BB', точка L – середина ребра BC. Знайти:

a) відстань між серединами відрізків AK і LB';

b) кут між прямими AK і LB'.

6.8) Довести, що відрізки, які сполучають середини протилежних ребер трикутної піраміди, перетинаються в одній точці та діляться нею навпіл.

6.9) Довести ***теорему Стюарта***: якщо дано $\triangle ABC$ і на його стороні BC точку D, то має місце рівність: $AD^2\cdot BC=AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD-BC\cdot BD\cdot DC$.

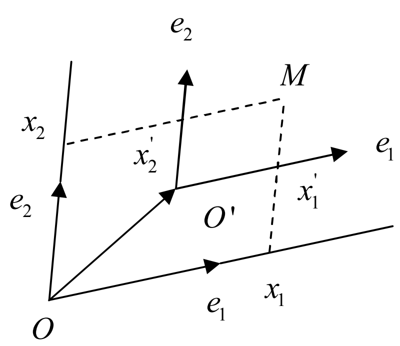
6.10) Довести ***теорему Менелая***: щоб три точки A_1, B_1 і C_1, які лежать відповідно на сторонах BC, CA і AB $\triangle ABC$ (або на їх продовженнях), належали одній прямій, необхідно й достатньо, щоб $\dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}=-1$.

6. Формули перетворення координат

В геометрії, зокрема аналітичній, велике значення має, так звана, задача про *перетворення координат*. Один з підходів до її тлумачення полягає в наступному. Задано дві системи координат (на площині чи в просторі) – «стара» і «нова». Необхідно, знаючи координати деякої точки (чи вектора) в одній системі координат, знайти координати цієї ж точки (або ж вектора) в другій системі, якщо визначено положення однієї системи координат відносно другої.

Означення 6.1. Сукупність векторів $e_1, e_2, ..., e_n$ (зі спільним початком у точці O), що утворює базис $n-$вимірного афінного простору A будемо називати координатною системою (системою координат) простору A або коротко – ***репером*** і позначати $O; e_1 e_2 ... e_n$ або ж $\left(O; \{e_i\}\right)$.

6.1 Зв'язок між координатами точки в афінних системах відносно перетворення, що є перенесенням початку координат



Нехай $\left(O; \{e_i\}\right)$ і $\left(O'; \{e_i\}\right)$ – два репери афінного векторного простору M з початками у точках O і O' відповідно. Тобто, системи координат (репери) у яких одні й ті ж базисні вектори, але різні початки.

Нову систему координат $\left(O'; \{e_i\}\right)$ можна одержати зі старої $\left(O; \{e_i\}\right)$ в результаті зсуву (паралельного перенесення) на вектор $\overrightarrow{OO'}$.

Нехай далі, відомі координати точки $O' = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ відносно старої системи координат, тобто $\overrightarrow{OO'} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ в базисі $\{e_i\}$.

З'ясуємо, як пов'язані між собою координати $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ і $\left(x_1', x_2', ..., x_n'\right)$ довільної точки M (довільного вектора $u = \overrightarrow{OM}$) в старій $\left(O; \{e_i\}\right)$ та новій $\left(O'; \{e_i\}\right)$ системах координат.

За правилом трикутника маємо рівність

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \tag{6.1}$$

Оскільки $\overrightarrow{OM} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + ... + x_n \cdot e_n$, $\overrightarrow{O'M} = x_1^{'} \cdot e_1 + x_2^{'} \cdot e_2 + ... + x_n^{'} \cdot e_n$, то розписуючи рівність (6.1) в координатній формі одержуємо співвідношення

$$x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + ... + x_n \cdot e_n = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + ... + a_n \cdot e_n + x_1^{'} \cdot e_1 + x_2^{'} \cdot e_2 + ... + x_n^{'} \cdot e_n =$$

$$= \left(a_1 + x_1^{'}\right) \cdot e_1 + \left(a_2 + x_2^{'}\right) \cdot e_2 + ... + \left(a_n + x_n^{'}\right) \cdot e_n .$$

Оскільки вектор $\overrightarrow{OM}$ однозначно розкладається за базисними векторами $e_1, e_2, ..., e_n$, то мають місце рівності:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + x_1^{'} \\ x_2 = a_2 + x_2^{'} \\ ... \\ x_n = a_n + x_n^{'}. \end{cases} \tag{6.2}$$

Не важко бачити, що система рівнянь (6.2) й розв'язує поставлену нами задачу.

6.2 Зв'язок між координатами точки в афінних системах зі спільним початком

Нехай $\left(O;\{e_i\}\right)$ і $\left(O;\{e_i^{'}\}\right)$ – два репери афінного векторного простору A зі спільним початком у точці O.

Оскільки початки всіх векторів $e_1, e_2, ..., e_n; e_1^{'}, e_2^{'}, ..., e_n^{'}$ співпадають, а вектори $e_1, e_2, ..., e_n$ утворюють базис, то для будь-якого вектора $e_i^{'}$ $(i = 1, ..., n)$ однозначно визначені дійсні числа $c_{j,i}$ $(j = 1, ..., n)$ такі, що має місце лінійна комбінація

$$e_i^{'} = c_{1,i} \cdot e_1 + c_{2,i} \cdot e_2 + ... + c_{n,i} \cdot e_n . \tag{6.3}$$

Тобто цілком визначеною є матриця $C^* = \left(c_{i,j}\right) = \begin{pmatrix} c_{1,1} & ... & c_{n,1} \\ & ... & \\ c_{1,n} & ... & c_{n,n} \end{pmatrix}$.

Означення 6.2. Матрицю C^* називають матрицею переходу від базису $e_1, e_2, ..., e_n = \{e_i\}$ до базису $e_1^{'}, e_2^{'}, ..., e_n^{'} = \{e_i^{'}\}$, або матрицею переходу від старого до нового («штрихового») базису.

З'ясуємо як пов'язані між собою координати $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $(x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'})$ довільної точки M (довільного вектора $u = \overrightarrow{OM}$) в старій $(O;\{e_i\})$ та новій $(O;\{e_i^{'}\})$ системах координат.

Зрозуміло, що вектор $u = \overrightarrow{OM}$ можна записати: по-перше, як лінійну комбінацію векторів $e_1, e_2, ..., e_n$ з коефіцієнтами $x_1, x_2, ..., x_n$; по-друге – як лінійну комбінацію векторів $e_1^{'}, e_2^{'}, ..., e_n^{'}$ з коефіцієнтами $x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'}$. Тобто має місце тотожність:

$$u = \overrightarrow{OM} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + ... + x_n \cdot e_n = x_1^{'} \cdot e_1^{'} + x_2^{'} \cdot e_2^{'} + ... + x_n^{'} \cdot e_n^{'}. \qquad (6.4)$$

З іншого боку кожен вектор $e_i^{'}$ сам є лінійною комбінацією векторів $e_1, e_2, ..., e_n$. Тому, з урахуванням (6.3), має місце рівність

$$u = \overrightarrow{OM} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + ... + x_n \cdot e_n = x_1^{'} \cdot e_1^{'} + x_2^{'} \cdot e_2^{'} + ... + x_n^{'} \cdot e_n^{'} =$$

$$= x_1^{'} \cdot \left(c_{1,1} \cdot e_1 + c_{2,1} \cdot e_2 + ... + c_{n,1} \cdot e_n\right) + x_2^{'} \cdot \left(c_{1,2} \cdot e_1 + c_{2,2} \cdot e_2 + ... + c_{n,2} \cdot e_n\right) + ... +$$
$$+ x_n^{'} \cdot \left(c_{1,n} \cdot e_1 + c_{2,n} \cdot e_2 + ... + c_{n,n} \cdot e_n\right) =$$

$$= \left(c_{1,1} \cdot x_1^{'} + c_{1,2} \cdot x_2^{'} + ... + c_{1,n} \cdot x_n^{'}\right) \cdot e_1 + \left(c_{2,1} \cdot x_1^{'} + c_{2,2} \cdot x_2^{'} + ... + c_{2,n} \cdot x_n^{'}\right) \cdot e_2 + ... +$$
$$+ \left(c_{n,1} \cdot x_1^{'} + c_{n,2} \cdot x_2^{'} + ... + c_{n,n} \cdot x_n^{'}\right) \cdot e_n$$

Оскільки вектор $u = \overrightarrow{OM}$ однозначно розкладається за базисними векторами $e_1, e_2, ..., e_n$, то мають місце рівності:

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,1} \cdot x_1^{'} + c_{1,2} \cdot x_2^{'} + ... + c_{1,n} \cdot x_n^{'} \\ x_2 = c_{2,1} \cdot x_1^{'} + c_{2,2} \cdot x_2^{'} + ... + c_{2,n} \cdot x_n^{'} \\ ... \\ x_n = c_{n,1} \cdot x_1^{'} + c_{n,2} \cdot x_2^{'} + ... + c_{n,n} \cdot x_n^{'} \end{cases} \qquad (6.5)$$

або ж в матричній формі:

$$X = C \cdot X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & & c_{2,n} \\ & & ... & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & & c_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ ... \\ x_n^{'} \end{pmatrix}. \qquad (6.6)$$

Зауваження 6.1. Формули (6.5) дають змогу виразити старі координати $(x_1, x_2, ..., x_n)$ довільної точки M через її нові координати $(x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'})$.

Означення 6.3. Матрицю C називають матрицею перетворення координат.

Зауваження 6.2. Не важко бачити, що матриця C є транспонованою до матриці C^*. А тому вони мають спільний визначник, причому відмінний від нуля (Поясніть, чому?)

З урахуванням зауваження 6.2, та користуючись формулами Крамера, можливим є вираження нових координат $\left(x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'}\right)$ точки M через її старі координати $(x_1, x_2, ..., x_n)$. А саме:

$$x_1^{'} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & c_{1,2} & & c_{1,n} \\ x_2 & c_{2,2} & & c_{2,n} \\ & & ... & \\ x_n & c_{n,2} & & c_{n,n} \end{vmatrix}}{\det C}, \quad x_2^{'} = \frac{\begin{vmatrix} c_{1,1} & x_1 & & c_{1,n} \\ c_{2,1} & x_2 & & c_{2,n} \\ & & ... & \\ c_{n,1} & x_n & & c_{n,n} \end{vmatrix}}{\det C}, ..., \quad x_n^{'} = \frac{\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & & x_1 \\ c_{2,1} & c_{2,2} & & x_2 \\ & & ... & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & & x_n \end{vmatrix}}{\det C}. \tag{6.7}$$

6.3 Зв'язок між координатами точки в афінних системах (загальний випадок)

Нехай $(O;\{e_i\})$ і $\left(O';\{e_i^{'}\}\right)$ – дві координатні системи афінного векторного простору A з початками у точках O і O' відповідно. Нехай далі, відомими є координати точки $O'(a_1, a_2, ..., a_n)$ відносно старої системи координат, тобто $\overline{OO'} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ в базисі $\{e_i\}$.

З'ясуємо, як пов'язані між собою координати $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\left(x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'}\right)$ довільної точки M в старій $(O;\{e_i\})$ та новій $\left(O';\{e_i^{'}\}\right)$ системах координат.

Загальний випадок переходу від репера $(O;\{e_i\})$ до репера $\left(O';\{e_i^{'}\}\right)$ зводиться до комбінації двох випадків: *паралельного перенесення* та *переходу від одного базису до іншого* (розглянутого в попередньому пункті).

Дійсно, розглянемо третій – *проміжний* репер $(O';\{e_i\})$. Позначимо координати точки M в цьому репері через $\left(x_1^{''}, x_2^{''}, ..., x_n^{''}\right)$. Тоді за формулами (6.2) маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + x_1^{''} \\ x_2 = a_2 + x_2^{''} \\ ... \\ x_n = a_n + x_n^{''} \end{cases} \tag{6.8}$$

За формулами (6.5) координати $\left(x_1^{''}, x_2^{''}, ..., x_n^{''}\right)$ точки M в репері $\left(O'; \{e_i\}\right)$ виражаються через її координати $\left(x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'}\right)$ в репері $\left(O'; \{e_i^{'}\}\right)$ наступним чином

$$\begin{cases} x_1^{''} = c_{1,1} \cdot x_1^{'} + c_{1,2} \cdot x_2^{'} + ... + c_{1,n} \cdot x_n^{'} \\ x_2^{''} = c_{2,1} \cdot x_1^{'} + c_{2,2} \cdot x_2^{'} + ... + c_{2,n} \cdot x_n^{'} \\ ... \\ x_n^{''} = c_{n,1} \cdot x_1^{'} + c_{n,2} \cdot x_2^{'} + ... + c_{n,n} \cdot x_n^{'}. \end{cases} \tag{6.9}$$

Отже, з урахуванням формул (6.8) та (6.9), маємо формули перетворення координат для двох довільних (реперів) афінних координатних систем

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + c_{1,1} \cdot x_1^{'} + c_{1,2} \cdot x_2^{'} + ... + c_{1,n} \cdot x_n^{'} \\ x_2 = a_2 + c_{2,1} \cdot x_1^{'} + c_{2,2} \cdot x_2^{'} + ... + c_{2,n} \cdot x_n^{'} \\ ... \\ x_n = a_n + c_{n,1} \cdot x_1^{'} + c_{n,2} \cdot x_2^{'} + ... + c_{n,n} \cdot x_n^{'} \end{cases} \tag{6.10}$$

або в матричній формі

$$X = C \cdot X' + A, \tag{6.11}$$

де: A – матриця-стовпець, складений з координат вектора $\overline{OO'}$ в базисі $\{e_i\}$;

X, X' – матриці-стовпці, складені з координат довільної точки M простору A в системах $\left(O; \{e_i\}\right)$ і $\left(O'; \{e_i^{'}\}\right)$ відповідно;

$C = \left(C^*\right)^T$ – матриця перетворення координат.

Означення 6.3*. Матрицю C^* називають матрицею переходу від базису $\{e_i\}$ до базису $\{e_i^{'}\}$, а матрицю C – матрицею перетворення координат.

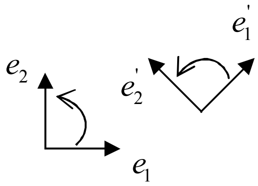
За формулами Крамера можна виразити нові координат $\left(x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'}\right)$ точки M через її старі координати $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$. А саме:

$$x_1^{'} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & c_{1,2} & & c_{1,n} \\ x_2 - a_2 & c_{2,2} & & c_{2,n} \\ & & ... & \\ x_n - a_n & c_{n,2} & & c_{n,n} \end{vmatrix}}{\det C}, \quad x_2^{'} = \frac{\begin{vmatrix} c_{1,1} & x_1 - a_1 & & c_{1,n} \\ c_{2,1} & x_2 - a_2 & & c_{2,n} \\ & & ... & \\ c_{n,1} & x_n - a_n & & c_{n,n} \end{vmatrix}}{\det C}, ..., \quad x_n^{'} = \frac{\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & & x_1 - a_1 \\ c_{2,1} & c_{2,2} & & x_2 - a_2 \\ & & ... & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & & x_n - a_n \end{vmatrix}}{\det C} \tag{6.12}$$

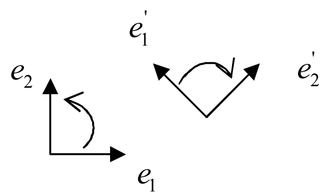
Таким чином, формули (6.10) і (6.12) дають змогу повністю розв'язувати задачу про ***перетворення координат.***

6.4 Перетворення прямокутних координат точок площини

Означення 6.4. Будемо говорити, що два ортогональних базиси (або репери) $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ і $\left(O';\vec{e_1'},\vec{e_2'}\right)$ на площині мають однакову (різну) орієнтацію, якщо вектори $\left[\vec{e_1},\vec{e_2}\right]$ і $\left[\vec{e_1'},\vec{e_2'}\right]$ є співнапрямлені (протилежно напрямлені).



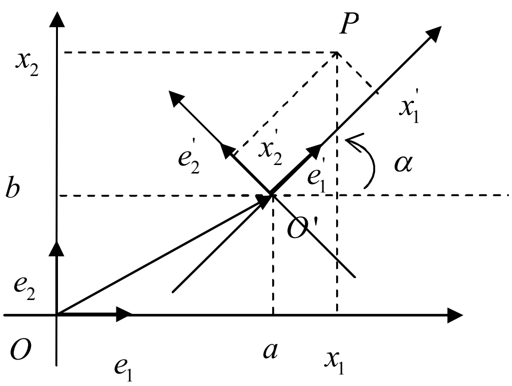
Базиси однакової орієнтації



Базиси різної орієнтації

Твердження 6.1. Два ортогональних базиси (репери) мають однакову орієнтацію, якщо визначник $\det C^*$ матриці переходу від одного базису до іншого є додатним числом, і різну орієнтацію – якщо $\det C^* < 0$.

Розглянемо задачу про перетворення прямокутних координат. А саме:

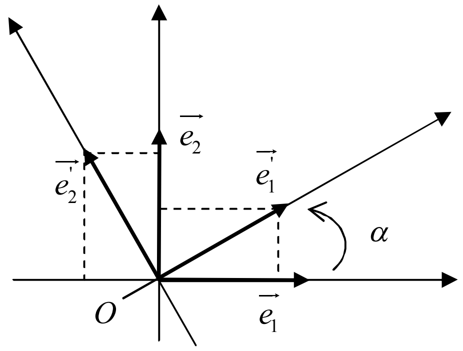


нехай $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ і $\left(O';\vec{e_1'},\vec{e_2'}\right)$ дві прямокутні системи координат на площині, при чому $\left|\vec{e_1}\right| = \left|\vec{e_2}\right| = \left|\vec{e_1'}\right| = \left|\vec{e_2'}\right| = 1$. Нехай далі, відомі координати нового початку $O' = (a,b)$ в старій системі $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ та відомий кут α між векторами $\vec{e_1}$ і $\vec{e_1'}$.

З'ясуємо, як пов'язані між собою координати (x_1, x_2) і $\left(x_1', x_2'\right)$ довільної точки P (довільного вектора $u = \overrightarrow{OP}$) в старій $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ та новій $\left(O';\vec{e_1'},\vec{e_2'}\right)$ системах координат. <u>Для цього достатньо розглянути випадок, коли початки координат співпадають</u> $O = O'$.

Проте слід розглянути окремо два випадки, а саме: коли базиси $\left\{\vec{e_1},\vec{e_2}\right\}$ і $\left\{\vec{e_1'},\vec{e_2'}\right\}$ мають однакову або ж різну орієнтацію відповідно.

6.4.1 Зв'язок між координатами точки в прямокутних системах зі спільним початком (відносно повороту). Випадок однакової орієнтації



Розкладемо вектори $\vec{e_1'},\vec{e_2'}$ за базисними векторами $\vec{e_1},\vec{e_2}$, тобто знайдемо координати векторів $\vec{e_1'},\vec{e_2'}$ в базисі $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$.

Не важко бачити, що

$$\vec{e_1'}=\left|\vec{e_1'}\right|\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\vec{e_1}}{\left|\vec{e_1}\right|}+\left|\vec{e_1'}\right|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\frac{\vec{e_2}}{\left|\vec{e_2}\right|},\qquad \vec{e_2'}=\left|\vec{e_2'}\right|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\frac{\vec{e_1}}{\left|\vec{e_1}\right|}+\left|\vec{e_2'}\right|\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\vec{e_2}}{\left|\vec{e_2}\right|}.$$

Оскільки за умовою $\left|\vec{e_1}\right|=\left|\vec{e_2}\right|=\left|\vec{e_1'}\right|=\left|\vec{e_2'}\right|=1$, то мають місце рівності:

$$\left.\begin{aligned}\vec{e_1'}&=\cos\alpha\cdot\vec{e_1}+\sin\alpha\cdot\vec{e_2}\\ \vec{e_2'}&=-\sin\alpha\cdot\vec{e_1}+\cos\alpha\cdot\vec{e_2}\end{aligned}\right\}\qquad(6.13)$$

Звідки матриця переходу від базису $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ до базису $\{\vec{e_1'},\vec{e_2'}\}$ має вид $C^*=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, а матриця перетворення координат $C=\left(C^*\right)^T=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

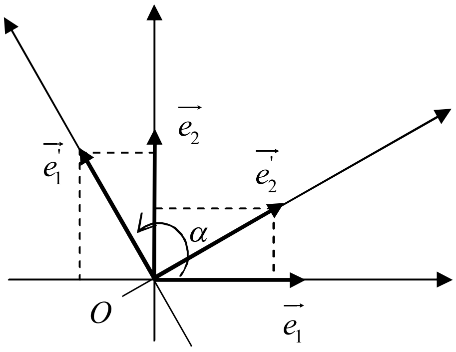
З урахуванням співвідношень (6.5) і (6.6), формули переходу від нової системи координат $\left(O';\vec{e_1'},\vec{e_2'}\right)$ до старої $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ мають вид $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix}$,

або ж в координатній формі:

$$\begin{cases}x_1=\cos\alpha\cdot x_1'-\sin\alpha\cdot x_2'\\ x_2=\sin\alpha\cdot x_1'+\cos\alpha\cdot x_2'.\end{cases}\qquad(6.14)$$

Зауваження 6.3. *Якщо* нова система координат $\left(O';\vec{e_1'},\vec{e_2'}\right)$ одержана зі старої $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ в результаті повороту останньої на кут $\alpha=\angle\left(\vec{e_1},\vec{e_1'}\right)$ (за годинниковою стрілкою) навколо свого початку, то формули (6.14) встановлюють зв'язок між координатами (x_1,x_2) та (x_1',x_2') довільної точки P в старій та новій системах координат відповідно.

6.4.2 Зв'язок між координатами точки в прямокутних системах зі спільним початком (відносно повороту). Випадок різної орієнтації



Розкладемо вектори $\vec{e_1'},\vec{e_2'}$ за базисними векторами $\vec{e_1},\vec{e_2}$, тобто знайдемо координати векторів $\vec{e_1'},\vec{e_2'}$ в базисі $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$.

Не важко бачити, що

$$\vec{e_1'}=\left|\vec{e_1'}\right|\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\vec{e_1}}{\left|\vec{e_1}\right|}+\left|\vec{e_1'}\right|\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\vec{e_2}}{\left|\vec{e_2}\right|},\qquad \vec{e_2'}=\left|\vec{e_2'}\right|\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\vec{e_1}}{\left|\vec{e_1}\right|}+\left|\vec{e_2'}\right|\cdot\cos(\pi-\alpha)\cdot\frac{\vec{e_2}}{\left|\vec{e_2}\right|}.$$

Оскільки за умовою $\left|\vec{e_1}\right|=\left|\vec{e_2}\right|=\left|\vec{e_1'}\right|=\left|\vec{e_2'}\right|=1$, то мають місце рівності

$$\left.\begin{aligned}\vec{e_1'}&=\cos\alpha\cdot\vec{e_1}+\sin\alpha\cdot\vec{e_2}\\ \vec{e_2'}&=\sin\alpha\cdot\vec{e_1}-\cos\alpha\cdot\vec{e_2}\end{aligned}\right\}\qquad(6.15)$$

Звідки матриця переходу від базису $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ до базису $\{\vec{e_1'},\vec{e_2'}\}$ має вид

$C^*=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$, а матриця перетворення координат $C=\left(C^*\right)^T=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$.

З урахуванням співвідношень (6.5) і (6.6), формули переходу від нової системи координат $\left(O';\vec{e_1'},\vec{e_2'}\right)$ до старої $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ мають вид

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix},$$

або ж в координатній формі:

$$\begin{cases}x_1=\cos\alpha\cdot x_1'+\sin\alpha\cdot x_2'\\ x_2=\sin\alpha\cdot x_1'-\cos\alpha\cdot x_2'.\end{cases}\qquad(6.16)$$

Зауваження 6.4. Якщо нова система координат $\left(O';\vec{e_1'},\vec{e_2'}\right)$ одержана зі старої $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ в результаті (композиції)

1) повороту останньої на кут $\alpha=\angle\left(\vec{e_1},\vec{e_1'}\right)$ (за годинниковою стрілкою) навколо свого початку та

2) симетрії відносно прямої, що містить $\vec{e_1'}$,

то формули (6.16) й встановлюють зв'язок між координатами (x_1, x_2) та (x_1', x_2') довільної точки P в старій та новій системах координат відповідно.

6.4.3 Зв'язок між координатами точки в прямокутних системах. Загальний випадок

Проводячи міркування, аналогічні тим, що були застосовані при розгляді загального випадку перетворення афінних координат, не важко встановити, формули, які пов'язують координатами (x_1, x_2) та (x_1', x_2') довільної точки P в старій $\left(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ та новій $\left(O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'}\right)$ прямокутних системах координат відповідно. А саме:

у випадку однакової орієнтації базисів, маємо формули

$$\begin{cases} x_1 = \cos\alpha \cdot x_1' - \sin\alpha \cdot x_2' + a \\ x_2 = \sin\alpha \cdot x_1' + \cos\alpha \cdot x_2' + b. \end{cases} \tag{6.17}$$

у випадку різної орієнтації базисів, маємо формули

$$\begin{cases} x_1 = \cos\alpha \cdot x_1' + \sin\alpha \cdot x_2' + a \\ x_2 = \sin\alpha \cdot x_1' - \cos\alpha \cdot x_2' + b. \end{cases} \tag{6.18}$$

З урахуванням (6.12) за формулами Крамера можна виразити також і нові координати (x_1', x_2') точки P через її старі координати (x_1, x_2). А саме:

у випадку однакової орієнтації базисів, маємо формули

$$x_1' = \begin{vmatrix} x_1 - a & -\sin\alpha \\ x_2 - b & \cos\alpha \end{vmatrix}, \qquad x_2' = \begin{vmatrix} \cos\alpha & x_1 - a \\ \sin\alpha & x_2 - b \end{vmatrix} \tag{6.19}$$

у випадку різної орієнтації базисів, маємо формули

$$x_1' = -\begin{vmatrix} x_1 - a & \sin\alpha \\ x_2 - b & -\cos\alpha \end{vmatrix}, \qquad x_2' = -\begin{vmatrix} \cos\alpha & x_1 - a \\ \sin\alpha & x_2 - b \end{vmatrix}. \tag{6.20}$$

6.5 Задачі до практичного заняття № 7

7.1) Визначити координати початку (O') нової системи координат (відносно старої СК), якщо формули перетворення координат задані наступним чином:

a) $x = x'+1$, $y = y'-2$;

b) $x = x'+3$, $y = y'+5$;

c) $x = x'-2$, $y = y'+1$;

d) $x = x'$, $y = y'-1$.

7.2) Визначити кут α, на який повернуто осі координат, якщо формули перетворення координат задано наступним чином:

a) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'$, $y = -\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'$;

b) $x = -y'$, $y = x'$;

c) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'$;

d) $x = -x'$, $y = -y'$.

7.3) Визначити координати нового початку відносно старої СК та кут α, на який повернуто її вісі, якщо формули перетворення координат задані наступними рівностями

a) $x = -x'-1$, $y = -y'+3$;

b) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'+4$, $y = -\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'$

c) $x = \frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'-2$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'+1$;

d) $x = -x'+3$, $y = y'-2$.

7.4) Як зміняться координати точок, якщо:

a) осі абсцис і ординат поміняти місцями;

b) змінити напрямок осі ординат на протилежний, а вісь абсцис залишити без змін;

c) вісь абсцис замінити на вісь ординат, а вісь ординат на вісь абсцис із протилежним напрямком;

7.5) Формули перетворення координат задано наступними рівностями $x = 2x' + z' + 1, \quad y = 4x' + 4y' + z' + 2, \quad z = x' + 4y' + 3$. Знайти координати початків та базисних векторів кожної системи (старої та нової) відносно іншої.

7.6) Написати формули перетворення координат при переході від старої системи Oxy до нової $Ox'y'$ у наступних ситуаціях:

a) центр O старої системи координат співпадає з вершиною A паралелограма $ABCD$, а базисні вектори із векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; центр O' нової системи із вершиною B, а базисні вектори із $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BA}$;

b) центр O старої системи координат співпадає з вершиною A паралелограма $ABCD$, а базисні вектори із векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; центр O' нової системи із вершиною C, а базисні вектори із $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{CB}$;

c) центр O старої системи координат співпадає з вершиною A трикутника ABC, а базисні вектори з векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; центр O' нової системи координат з точкою перетину медіан, а базисні вектори з $\overrightarrow{O'B}$ і $\overrightarrow{O'C}$;

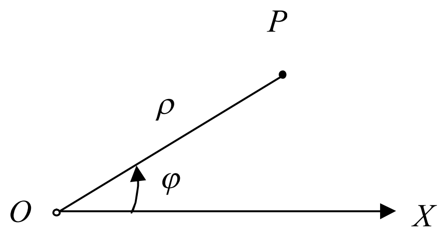
d) центри O і O' старої й нової систем координат співпадає з точкою перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, базисні вектори старої з векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, а нової з векторами $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OD}$.

7. Приклади (ортогональних) криволінійних систем координат

7.1 Полярна система координат (на площині)

Полярна система координат на площині визначається точкою O (полюс) і прямою Ox (полярна вісь) з фіксованим (додатним) напрямком на ній.

Тоді для кожної точки P площини, на якій задана полярна система координат $(O;Ox)$, визначається впорядкована пара чисел (ρ,φ) – «полярні координати» точки P. А саме:

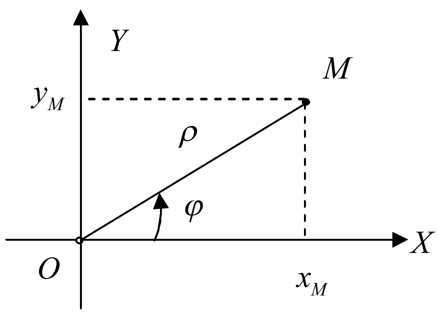


ρ – «полярний радіус» – довжина вектора $\overrightarrow{OP}$;

φ – «полярний кут» – кут між додатним напрямком осі OX і вектором $\overrightarrow{OP}$.

Кут вимірюється у напрямку проти руху годинникової стрілки $(0 \le \varphi < 2\pi)$. Для полюса O $\rho = 0$, а кут φ не визначено.

Для одержання всіх точок площини достатньо ρ змінювати у межах $(0;+\infty)$, а куту φ надавати значень від 0 до 2π.



Якщо полюс O співпадає з початком, а полярна вісь – з віссю Ox прямокутної декартової системи координат на площині, то полярні координати (ρ,φ) довільної точки M пов'язані з її прямокутними декартовими координатами (x_M, y_M) наступними співвідношеннями:

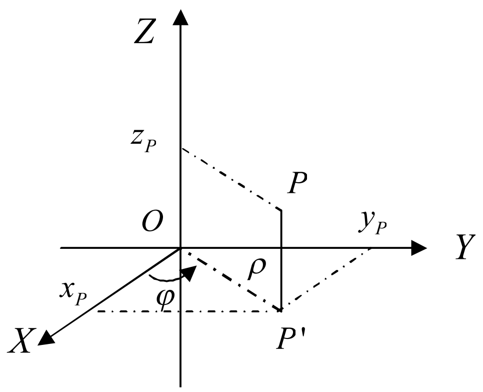
$$\begin{cases} x_M = \rho \cdot \cos\varphi \\ y_M = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}, \tag{7.1}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y_M}{x_M}, \quad x_M \neq 0 \end{cases}, \tag{7.2}$$

7.2 Циліндрична та сферична системи координат (у просторі)

Будемо вважати, що в (тривимірному) просторі зафіксовано прямокутну декартову систему координат (ПДСК) $OXYZ$.

Початок циліндричної та сферичної системи координат розташуємо в точці O – початку ПДСК. Нехай P – довільна точка простору. Позначимо через P' її проекцію на площину XOY .



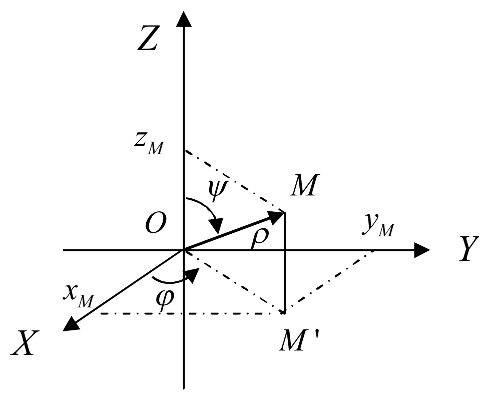
Циліндричні координати (ρ,φ,z) точки P визначаються наступним чином:
координати ρ,φ співпадають з полярними координатами точки P' в системі $(O;OX)$,
координата z – є третьою координатою точки P в ПДСК $OXYZ$.

Для одержання всіх точок простору достатньо ρ змінювати у межах $(0;+\infty)$, φ – в межах $[0;2\pi)$, а z – у межах $(-\infty;+\infty)$.

Циліндричні координати точки P та її відповідні прямокутні координати пов'язані формулами:

$$x_P=\rho\cdot\cos\varphi,\quad y_P=\rho\cdot\sin\varphi,\quad z_P=z \tag{7.3}$$

$$\rho=\sqrt{x_P^2+y_P^2},\quad \mathrm{tg}\varphi=\frac{y_P}{x_P}, x_P\neq 0,\quad z=z_P \tag{7.4}$$



Сферичні координати (ρ,ψ,φ) точки M визначаються наступним чином:
ρ – довжина відрізка OM ,
ψ – кут між півпрямою OM (вектором $\overrightarrow{OM}$) і додатним напрямком осі OZ $(0\le\psi<\pi)$,
φ – полярний кут точки M' (проекція точки M на площину XOY), тобто $\varphi=\angle XOM'$.

Для одержання всіх точок простору достатньо ρ змінювати у межах $(0;+\infty)$, ψ – у межах $(0;\pi)$ а φ – в межах $[0;2\pi)$.

Сферичні та відповідні прямокутні координати точки M пов'язані наступними формулами:

$$x_M=\rho\cdot\sin\psi\cdot\cos\varphi,\ y_M=\rho\cdot\sin\psi\cdot\sin\varphi,\qquad z_M=\rho\cdot\cos\psi \tag{7.5}$$

$$\rho=\sqrt{x_M^2+y_M^2+z_M^2},\ \cos\psi=\frac{z_M}{\sqrt{x_M^2+y_M^2+z_M^2}},\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y_M}{x_M},\ x_M\neq 0 \tag{7.6}$$

7.3 Задачі до практичного заняття № 8

8.1) Знаючи прямокутні координати точок $A(-1;1)$, $B(0;2)$, $C(5;0)$ і $D(-8;-6)$, знайти їх координати у відповідній полярній системі координат.

8.2) Відносно полярної системи координат дано точки $A(2;\pi/3)$, $B\left(\sqrt{2};3\pi/4\right)$, $C(5;\pi/2)$ і $D(3;-\pi/6)$. Знайти координати цих точок у відповідній прямокутній системі координат.

8.3) Полярна вісь полярної системи координат паралельна осі абсцис прямокутної системи й однаково з нею напрямлена. Дано прямокутні координати полюса $O(3;2)$ і точок $M_1(5;2), M_2(3;1), M_3(3;5)$, $M_4\left(3+\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right)$, $M_5\left(3+\sqrt{3};3\right)$. Визначити полярні координати цих точок.

8.4) Довести, що відстань d між точками $(\rho_1;\varphi_1)$ і $(\rho_2;\varphi_2)$ в полярних координатах може бути обчислена за формулою

$$d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\cdot\rho_1\cdot\rho_2\cdot\cos(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

Обчисліть відстань між точками $A(2;\pi/12)$ і $B(1;5\pi/12)$.

8.5) Полюс полярної системи координат знаходиться у точці $(3;5)$, а додатній напрямок полярної осі співпадає з додатнім напрямком осі OY. Знайти в цій системі полярні координати точок $A(9;-1)$ і $B\left(5;5-2\sqrt{3}\right)$.

8.6) Скласти формули перетворення координат для полярної та прямокутної систем координат, якщо полюс знаходиться у точці (x_0,y_0), а полярна піввісь утворює кут α з додатним напрямом осі OX.

8.7) Довести, що площа трикутника, вершини якого задано в полярних координатах $M_1(\rho_1;\varphi_1)$, $M_2(\rho_2;\varphi_2)$ і $M_3(\rho_3;\varphi_3)$ може бути обчислена за формулою

$$S_\vartriangle = \frac{1}{2}\cdot\left|\rho_1\cdot\rho_2\cdot\sin(\varphi_2-\varphi_1)+\rho_2\cdot\rho_3\cdot\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\rho_3\cdot\rho_1\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_3)\right|\cdot$$

Обчисліть площу трикутника, одна з вершин якого знаходиться в полюсі, а дві інші мають координати $(5;11\pi/18),(3;\pi/9)$.

8.8) Знайти сферичні координати точок за їх прямокутними координатами:

$$A=(-8;-4;1),\quad B=(-2;-2;-1),\quad C=(0;-4;3),\quad D=(1;-1;-1),\quad E=(0;1;0).$$

8.9) Як зміняться прямокутні, циліндричні та сферичні координати точки, якщо її симетрично відобразити відносно:

a) початку координат;

b) площини Oxy;

c) осі Oz;

d) площини Oyz;

e) осі Ox.

8. Приблизний варіант підсумкової контрольної роботи

Задано координати піраміди $ABCD$.

I Варіант: $A=(0;0;1)$, $B=(2;3;5)$, $C=(6;2;3)$, $D=(3;7;2)$.

II Варіант: $A=(1;2;1)$, $B=(-1;5;1)$, $C=(-1;2;7)$, $D=(1;5;9)$.

III Варіант: $A=(2;3;2)$, $B=(0;6;2)$, $C=(0;3;8)$, $D=(2;6;10)$.

1. Знайти:

   a) довжину ребра AD;

   b) кут між ребрами AB і AC;

   c) проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;

   d) площу грані ABC;

   e) висоту трикутника ABC, яка проходить через вершину A;

   f) об'єм піраміди $ABCD$;

   g) довжину висоти піраміди, що проходить через вершину D;

   h) кут між ребром AD і площиною трикутника ABC.

2. Чи належать наступні четвірки точок одній площині:

   I Варіант: $A=(2;3;7)$, $B=(1;4;9)$, $C=(-4;0;5)$, $D=(-2;3;-5)$.

   II Варіант: $A=(1;2;1)$, $B=(1;1;2)$, $C=(2;1;1)$, $D=(-3;0;7)$.

   III Варіант: $A=(1;1;1)$, $B=(2;4;6)$, $C=(3;5;7)$, $D=(9;10;8)$.

3. Скласти систему рівнянь, яка визначає координати одиничного вектора $\vec{x}$, який утворює рівні кути з векторами $\vec{a}=\{8;4;1\}$ і $\vec{b}=\{2;2;1\}$, є перпендикулярним вектору $\vec{c}=\{1;1;1\}$, а трійки векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ і $\vec{a},\vec{b},\vec{x}$ мають однакову орієнтацію (обидві або праві, або ліві).

4. Перевірити, чи утворюють вектори $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ базис тривимірного векторного простору. Знайти координати вектора $\vec{a}=\{3;7;13\}$ в цьому базисі.

   I Варіант: $\vec{e_1}=\{1;0;0\}$, $\vec{e_2}=\{0;1;0\}$, $\vec{e_3}=\{0;0;1\}$.

   II Варіант: $\vec{e_1}=\{1;0;0\}$, $\vec{e_2}=\{1;1;0\}$, $\vec{e_3}=\{1;1;1\}$.

   III Варіант: $\vec{e_1}=\{1;1;1\}$, $\vec{e_2}=\{1;2;3\}$, $\vec{e_3}=\{1;4;9\}$.

5. Дано дві системи координат $Oxyz$ (стару) і $O'x'y'z'$ (нову). По відношенню до першої системи початок другої знаходиться в точці $O'(1,2,3)$, а базисними векторами другої системи є вектори $\vec{e_1}=\{2;4;1\}$, $\vec{e_2}=\{0;4;4\}$, $\vec{e_3}=\{1;1;0\}$.

   a) виразити координати точки відносно першої системи через їх координати в другій системі;

   b) виразити координати точок відносно другої системи через їх координати в першій системі;

   c) знайти координати початку O і координати базисних векторів e_1,e_2,e_3 першої системи відносно другої.

6. Визначити кут α на який повернуто координатні вісі, якщо формули перетворення координат мають вид: $x=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'$; $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'$.

9. Питання до колоквіуму

1. Поняття вектора. Рівність векторів. Операція додавання (віднімання) векторів та її властивості.
2. Операція множення вектора на число та її властивості.
3. Операція ділення колінеарних векторів та її властивості.
4. Лінійна залежність векторів. Властивості лінійної залежності.
5. Геометричний зміст лінійної залежності двох і трьох векторів.
6. Лінійна залежність чотирьох векторів простору.
7. Проекція вектора на вісь та її властивості.
8. Скалярний добуток векторів та його властивості. Обчислення скалярного добутку векторів в афінних, косокутних та прямокутних.
9. Обчислення відстані між двома точками в афінних, косокутних та прямокутних координатах.
10. Знаходження кута між векторами в афінних та прямокутних координатах.
11. Необхідна й достатня умови перпендикулярності векторів.
12. Векторний добуток векторів, його властивості та геометричний зміст. Знаходження векторного добутку в прямокутних координатах.
13. Мішаний добуток векторів, його властивості та геометричний зміст. Обчислення мішаного добутку в прямокутних координатах.
14. Подвійний векторний добуток векторів та його властивості.
15. Необхідні й достатні умови колінеарності векторів.
16. Необхідна й достатня умови приналежності трьох точок (заданих своїми координатами відносно афінної системи координат) одній прямій.
17. Необхідні й достатні умови компланарності векторів.
18. Необхідна й достатня умови приналежності чотирьох точок (заданих своїми координатами відносно афінної системи координат) одній площині.
19. Поділ напрямленого відрізка у даному відношенні.
20. Базис векторного простору. Координати вектора в даному базисі. Ортогональний та ортонормований базис.
21. Афінна система координат на площині та в просторі.
22. Прямокутна декартова система координат на площині та в просторі.
23. Полярна і циліндрична системи координат. Зв'язок між полярними (циліндричними) і прямокутними декартовими координатами точок площини (простору).
24. Сферична система координат. Зв'язок між сферичними і прямокутними декартовими координатами точок простору.
25. Формули перетворення афінних координат площини (простору).
26. Формули перетворення прямокутних координат площини.
27. Формули перетворення прямокутних координат простору.
28. Основні афінні формули методу координат.
29. Основні метричні формули в косокутних та прямокутних координатах.
30. Застосування афінної системи координат до розв’язування геометричних задач.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

[1] Александров П.С. Лекции по аналитической геометри, пополненные необходимыми знаниями из алгебры. – М.: Наука, 1968. – 912 с.

[2] Атанасян Л.С. Геометрія. Частина 1: Навчальний посібник для студентів фізмат факультетів педінститутів. – К.: Вища школа, 1976. – 456 с.

[3] Бахвалов С.В., Бабушкин Л.И., Иваницкая В.П. Аналитическая геометрия: Учебник для педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1970. – 376 с.

[4] Борисенко О.А., Ушакова Л.М. Аналітична геометрія: Навчальний посібник для університетів. – Х.: Основа, 1993. – 192 с.

[5] Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. – Минск, 1989. – 286 с.

[6] Гармаш Е.Е., Рубан П.И. Руководство к решению задач по аналитической геометрии. – М.: Высшая школа, 1963. – 314 с.

[7] Гриньов Б.В., Кириченко І.К. Векторна алгебра: підручник. – Х.: Гімназія, 2008. – 163 с.

[8] Гурский Е.И., Ершова В.В. Основы линейной алгебры и аналитическая геометрия. – Минск.: Высшая школа, 1965. – 263 с.

[9] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: Учебник для студентов вузов, обучающ. по спец. «Физика» и «Приклад. Математика». 5-е изд. – М.: Наука: Физматлит, 1999. – 224 с.

[10] Клетеник Д.В., Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 240 с.

[11] Кравченко В.В., Лубенська Т.В., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія: Навчальний посібник. – К.: Кн. вид-во НАУ, 2005. – 144 с.

[12] Кушнир И.А. Координатный и векторный метод решения задач.– К.: Астарта, 1996.– 413 с.

[13] Майоров В.М., Скопец З.А. Задачник-практикум по векторной алгебре. – М.: Учедпедгиз, 1961. – 152 с.

[14] Майоров В.М., Скопец З.А. Векторное решение геометрических задач (задачник-практикум по спецсеминару). Для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1968. – 252 с.

[15] Моденов П.С. Аналитическая геометрия. – МГУ, 1969. – 698 с.

[16] Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии . – М.: Наука, 1976. – 384 с.

[17] Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии: Для мех.-мат. фак. ун-тов. Изд. 4-е. – М.: Высш. школа, 1967. – 655 с.

[18] Постников М.М. Лекции по геометри. Семестр I. – М., Наука, 1979. – 336 с.

[19] Привалов И.И., Аналитическая геометрия: Учебник для втузов, Изд. 30-е, стереотип. – М.: Наука, 1966. – 272 с.

[20] Савельєв В.М. Геометрія: Ч. 1. Афінна геометрія прямих та площин: Методичні вказівки до проведення практичних занять з геометрії для студентів фізико-математичних факультетів вищих учбових закладів. – Слов’янськ.: СДПІ, 2001. – 53 с.

[21] Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1964. – 336 с.

ДОДАТКИ

Зведена таблиця з векторної алгебри

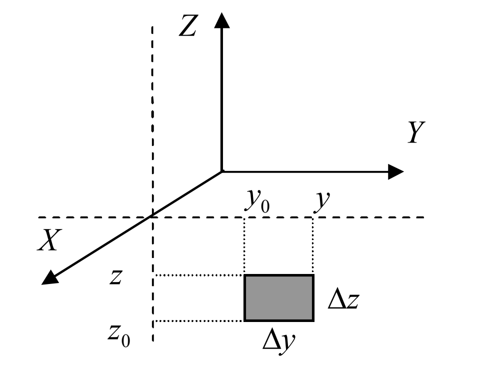
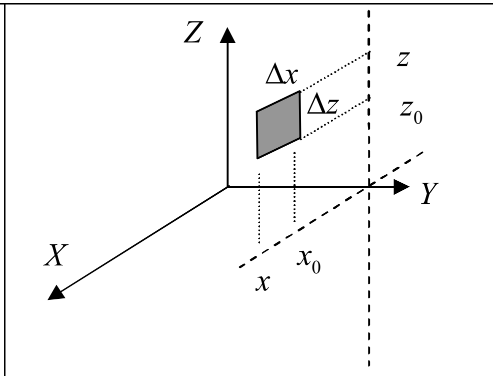
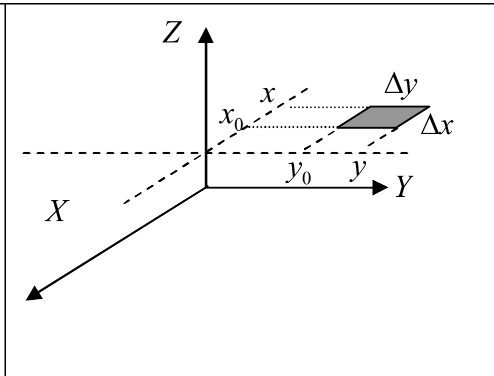
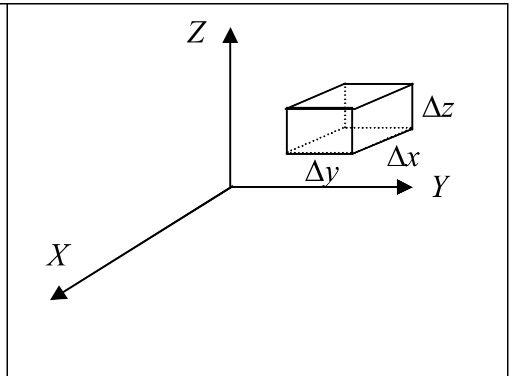
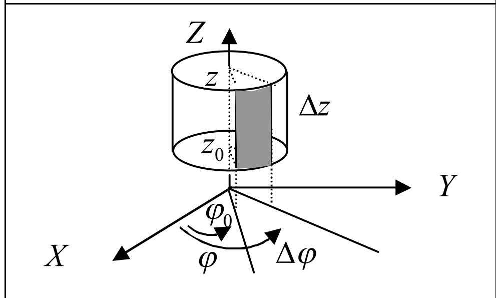
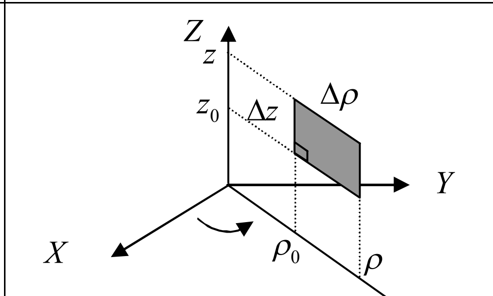
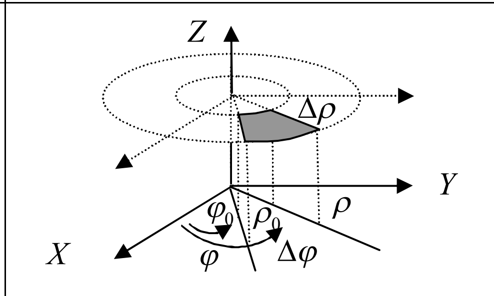
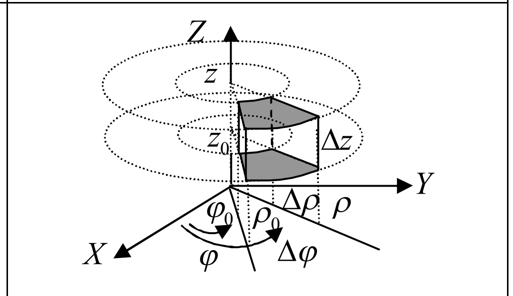
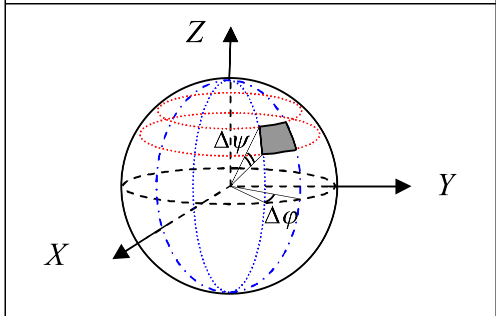
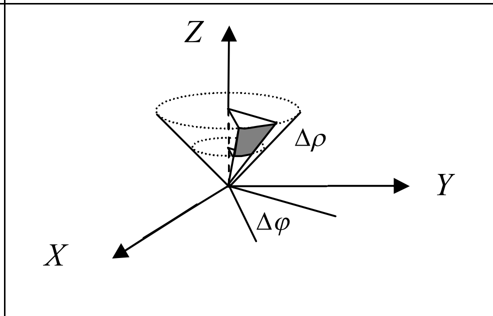
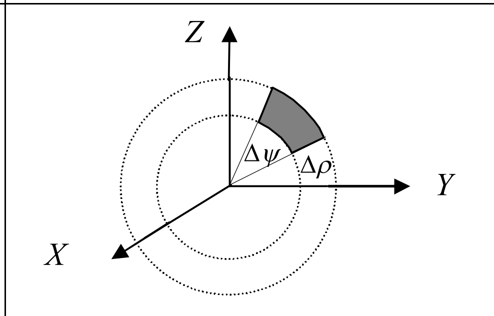
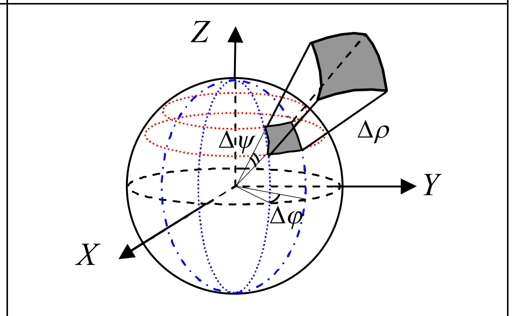
Поняття, операція, властивість	Позначення, визначення, умови, критерії	Прямокутна система координат	
		на площині	в просторі
		$\vec{a}=\{a_1,a_2\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2\}$	$\vec{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$, $\vec{y}=\{y_1,y_2,y_3\}$, $\vec{z}=\{z_1,z_2,z_3\}$
модуль вектора	$\lvert\vec{a}\rvert$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$	$\lvert\vec{x}\rvert=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$
додавання та віднімання	$\vec{a}\pm\vec{b}$	$\vec{a}\pm\vec{b}=\{(a_1\pm b_1),(a_2\pm b_2)\}$	$\vec{x}\pm\vec{y}=\{(x_1\pm y_1),(x_2\pm y_2),(x_3+y_3)\}$
добуток вектора на число	$\lambda\vec{a}$	$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_1,\lambda a_2\}$	$\lambda\vec{x}=\{\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3\}$
проекція вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$	$Пр_{\vec{b}}\vec{a}$	$Пр_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$	$Пр_{\vec{y}}\vec{x}=\dfrac{x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$
скалярний добуток	$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$	$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$	$\left\langle\vec{x},\vec{y}\right\rangle=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3$
векторний добуток	$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{c}$: $\left\langle\vec{c},\vec{b}\right\rangle=\left\langle\vec{c},\vec{a}\right\rangle=0$, $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$	$\left[\vec{x},\vec{y}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1&x_3\\y_1&y_3\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\left\{\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}x_1&x_3\\y_1&y_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\right\}$, $\left\lvert\left[\vec{x},\vec{y}\right]\right\rvert=\sqrt{\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&x_3\\y_1&y_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}^2}$, $\sin\angle\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\dfrac{\sqrt{\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&x_3\\y_1&y_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$	
кут між векторами	$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$	$\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$	$\cos\angle\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\dfrac{x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$
мішаний добуток	$\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)=\left\langle\left[\vec{x},\vec{y}\right],\vec{z}\right\rangle$	$\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)=\left\langle\left[\vec{x},\vec{y}\right],\vec{z}\right\rangle=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_2&y_3\\z_2&z_3\end{vmatrix}\cdot x_1-\begin{vmatrix}y_1&y_3\\z_1&z_3\end{vmatrix}\cdot x_2+\begin{vmatrix}y_1&y_2\\z_1&z_2\end{vmatrix}\cdot x_3$	

колінеарність векторів	$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}$, $\lambda\neq 0$; $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.	$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$	$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$
рівність векторів	$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow$	$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=1$	$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=1$
перпендикулярність векторів	$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=0$	$a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2=0$	$x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3=0$
компланарність векторів **права (ліва) трійка векторів**	$\Leftrightarrow\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$ $\Leftrightarrow\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$ $\left(\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0\right)$	$\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}>0$ $\left(\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}<0\right)$	
розклад вектора $\vec{c}=\{c_1,c_2\}$ $\left(\vec{c}=\{c_1,c_2,c_3\}\right)$ **за** **не колінеарними векторами** $\vec{a}$ **і** $\vec{b}$; **некомпланарними векторами** $\vec{x}$, $\vec{y}$ **і** $\vec{z}$	знаходження таких чисел α і β (α, β і γ), що справджуються рівності $\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$ $\vec{c}=\alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{y}+\gamma\cdot\vec{z}$	$\alpha=\frac{\Delta_1}{\Delta}$; $\beta=\frac{\Delta_2}{\Delta}$ $\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$, $\Delta_1=\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}$	$\alpha=\frac{\Delta_1}{\Delta}$; $\beta=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, $\gamma=\frac{\Delta_3}{\Delta}$; $\Delta=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$, $\Delta_1=\begin{vmatrix}c_1&y_1&z_1\\c_2&y_2&z_2\\c_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}x_1&c_1&z_1\\x_2&c_2&z_2\\x_3&c_3&z_3\end{vmatrix}$, $\Delta_3=\begin{vmatrix}x_1&y_1&c_1\\x_2&y_2&c_2\\x_3&y_3&c_3\end{vmatrix}$

застосування

Площа паралелограма (трикутника), побудованого на векторах $\vec{a}$ **і** $\vec{b}$	$S_{\square(\vec{a},\vec{b})}=\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|$	$S_{\triangle(\vec{a},\vec{b})}=\frac{1}{2}\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|$
висота паралелограма (трикутника), побудованого на векторах $\vec{a}$ **і** $\vec{b}$**, яка опущена сторону, утворену вектором** $\vec{b}$	$h=\frac{\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|}{\left\|\vec{b}\right\|}$	
об'єм паралелепіпеда (трикутної піраміди), побудованого (побудованої) на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ **і** $\vec{c}$	$V_{пар.(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}=\left\|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right\|$	$V_{nip.(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}=\frac{1}{6}\left\|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right\|$
висота паралелепіпеда (трикутної піраміди), побудованого (побудованої) на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ **і** $\vec{c}$**, яка спирається на грань, утворену векторами** $\vec{b}$ **і** $\vec{c}$	$H=\frac{\left\|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right\|}{\left\|\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right\|}$	

Елементи площ координатних поверхонь та об'ємів координатних паралелепіпедів для прямокутної, циліндричної та сферичної систем координат відповідно

			
$S_1 = \Delta y \Delta z$ $\quad x = const$	$S_2 = \Delta x \Delta z$ $\quad y = const$	$S_3 = \Delta x \Delta y$ $\quad z = const$	$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ $\quad x, y, z - const$
			
$S_1 = \rho\, \Delta\varphi\, \Delta z$ $\quad \rho = const$	$S_2 = \Delta\rho\, \Delta z$ $\quad \varphi = const$	$S_3 = \rho\, \Delta\rho\, \Delta\varphi$ $\quad z = const$	$\Delta V = \rho\, \Delta\rho\, \Delta\varphi\, \Delta z$ $\quad \rho, \varphi, z - const$
			
$S_1 = \rho^2 \sin\psi\, \Delta\psi\, \Delta\varphi$ $\quad \rho = const$	$S_2 = \rho \sin c\, \Delta\rho\, \Delta\varphi$ $\quad \psi = const$	$S_3 = \rho\, \Delta\rho\, \Delta\psi$ $\quad \varphi = const = \pi / 2$	$\Delta V = \rho^2 \sin\psi\, \Delta\rho\, \Delta\varphi\, \Delta\psi$

Навчальне видання

Кадубовський Олександр Анатолійович,
Кадубовська Ольга Леонтіївна, **Плесканьова** Лілія Григорівна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Частина І:
Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині та в просторі.

Навчальний посібник

для студентів педагогічних ВНЗів
за напрямом підготовки 6.040201 Математика*

Дизайн обкладинки О.А. Кадубовський

Відповідальний за випуск О.А. Кадубовський

Комп'ютерне верстання О.Л. Кадубовська

Видавничий центр «Маторін»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДЦ №74, видане Державним комітетом інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України від 10.02.2004 р.

Підписано до друку 05.02.2011.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 3,5.
Зам. № . Тираж 100 прим.

84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс (06262) 3-20-99; тел. (0626) 66-53-56