СЛОВ'ЯНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ

ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

СЕРІЯ: ВИКЛАДАЧІ СДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ...

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II етапу
Всеукраїнської олімпіади
з математики

ВИПУСК 1

Умови

Відповіді

Розв′язання

Слов'янськ – 2008

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ – 2007

6 – 11 класи

Слов'янськ – 2008

Серія заснована у 2008 році

УДК 371.384:51 (076)
ББК 22.1
О – 543

Беседін Б.Б., Бірюкова Г.М., Ганзера Г.О., Кадубовська В.М., Кадубовський О.А., Плесканьова Л.Г., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2007: Навчальний посібник – Слов'янськ, 2008. – 40 с.

Адресовано в першу чергу вчителям математики, як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням та студентам математичних факультетів педагогічних вузів.

РОЗГЛЯНУТО
ТА РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ
в якості навчального посібника
НА ЗАСІДАННІ

– Вченої ради фізико-математичного факультету СДПУ (протокол № 5 від 20.02.2008 р.)

– Вченої ради Слов'янського державного педагогічного університету (протокол № 6 від 28.02.2008 р.)

Рецензенти: кандидат пед. наук ЛОДАТКО Є.О., Слов'янський інститут науково-педагогічної і виробничої інфраструктури, професор кафедри обліку і аналізу господарської діяльності і менеджменту

кандидат фіз.-мат. наук ВЕЛИЧКО В.Є., Слов'янський державний педагогічний університет, завідувач кафедри алгебри.

Відповідальний за випуск: кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри ГМВМ Кадубовський О.А.

ВІД АВТОРІВ

„Математика – це мистецтво
розв'язувати задачі,
які розв'язувати не вмієш"

Даний посібник містить задачі II етапу (районного) Всеукраїнської олімпіади з математики, який проводився 11 листопада 2007 року відповідно до наказу УОН № 640 від 24.09.2007 р.

Особливістю представленого посібника є те, що для більшості задач олімпіади пропонується декілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід є навмисним і ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого з запропонованих методів.

Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в деякому розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головною метою авторів посібника було «донести» до вчителів та їх учнів якомога більше корисних математичних ідей і методів та показати їх застосування.

Враховуючи багаторічний досвід викладачів кафедри, наведемо поради, що стосуються розв'язання олімпіадних задач з математики.

Досвід показує, що багато учнів взагалі невірно розуміють умови задач, не вміють аналізувати і часто не розуміють, що означає розв'язати математичну задачу – намагаються вгадати відповідь, привносять додаткові умови, розглядають тривіальні частинні випадки. Тому при розв'язанні математичних задач, зокрема олімпіадних, перш за все треба навчитися проводити АНАЛІЗ задачі, який допоможе усвідомити умову задачі та намітити шлях її розв'язання.

При розв'язанні олімпіадних задач з математики слід пам'ятати наступне:

- Олімпіади з математики перевіряють, в першу чергу, здатність до творчості, уміння логічно мислити, а не об'єм отриманих раніше знань.
- Не можна навчитись розв'язувати олімпіадні (нестандартні) задачі миттєво. Для цього необхідно не тільки
    - опанувати певні **принципи** в математиці – деякі прості, майже очевидні твердження, аксіоми або методи, – які використовуються в доведеннях теорем (принцип Діріхлє, доведення від супротивного, принцип крайнього і т.д.).

  та
    - більш глибоко ознайомитися з такими розділами математики як *теорія множин*, *математична логіка*, *комбінаторика*, *теорія ймовірностей*, *теорія графів*, зокрема такими важливими теоремами елементарної алгебри як теореми подільності та порівнянь, з геометрії[1] – теорем Стюарта, Чеви, Менелая, Птолемея, Брахмагупти та ін.

  але й

[1] **Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. 2-е изд., испр. – М., МЦНМО, 2003 – 56 с.**

- цілеспрямовано і систематично розв'язувати велику кількість задач, починаючи з найпростіших. Однин з „рецептів" розв'язання математичних, зокрема олімпіадних, задач було сформульовано відомим математиком і педагогом Д. Пойа[2]:

„Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!".

- Майже всі олімпіадні задачі можна віднести до одного з наступних видів
  - задачі на обчислення або порівняння,
  - на знаходження певного елементу,
  - на доведення або пояснення,
  - на дослідження,
  - на перетворення або побудову
  - розфарбування та розрізання та ін..

  Для більшості з них в шкільному курсі вивчається відповідний метод або техніка.

  Якщо ж трапляється задача незнайомого виду, то в більшості випадків ефективним є

  розбиття даної задачі на підзадачі, вид яких є відомим або ж

  спроба переформулювати задачу (замінити її рівносильною).

- При розв'язанні широкого кола задач доцільним є спроба введення допоміжних елементів (параметрів, додаткових побудов). Такий підхід називають методом допоміжних елементів.

Викладачі фізико-математичного факультету СДПУ одержують багато запитань, що стосуються розв'язань олімпіадних задач з математики.

Враховуючи це і бажаючи допомогти учням і їх вчителям у підготовці до олімпіад ми видаємо цей посібник. Автори мають надію, що він буде корисним не лише керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням, а й стане для багатьох з них поштовхом для більш глибокого вивчення математики в цілому.

Зауважимо також, що з історії олімпіадного „руху" відомо, що деякі задачі які пропонувалися, вимагали більш глибокого обмірковування, ніж це можливо за години, відведені на змагання. Вони самі та їх узагальнення надихали в подальшому до досліджень, результати яких ставали науковими роботами.

Вчіться творити та винаходити в процесі розв'язання задач! З найщирішими побажаннями, викладачі кафедри геометрії та методики викладання математики Слов'янського державного педагогічного університету.

25.01.2008

[2] **Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 452 с.**

ЗМІСТ

УМОВИ ЗАДАЧ

6 клас

1. (15 балів) Батько і син вирішили переміряти кроками відстань між двома деревами, для чого відійшли водночас від того ж самого дерева. Довжина кроку батька – 70 см, сина – 56 см. Знайти відстань між цими деревами, якщо відомо, що їхні сліди збіглися 10 разів.
2. (15 балів) Скільки води треба додати до 600 г рідини, що містить 40% солі, щоб вийшов 12%-й розчин цієї солі?
3. (20 балів) Довести, що сума двох послідовних непарних чисел ділиться на 4.
4. (20 балів) На дошці записано число 23. Щохвилини число стирають з дошки і записують на його місце добуток його цифр, збільшений на 12. Що виявиться на дошці через годину?
5. (30 балів) У клітчатому квадраті 9×9 зафарбовано 19 клітинок. Доведіть що, або знайдуться дві зафарбовані клітинки, що мають спільну сторону, або знайдеться не зафарбована клітинка, до сторін якої примикають не менше двох зафарбованих.

7 клас

1. (15 балів) Батон коштував $1{,}5$ грн. Ціна на нього підвищувалася 2 рази на 5% і на 6%, а потім знизилася відразу на 11%. Чи змінилася ціна батона в гривнях?
2. (15 балів) Скільки існує натуральних тризначних чисел, які при діленні на 8 дають остачу 3?
3. (20 балів) Зі 100 учнів ліцею 28 вивчають англійську мову, 30 – німецьку, 42 – французьку, 8 – англійську і німецьку, 10 – французьку і англійську, 5 учнів – німецьку і французьку, 3 – вивчають усі три мови. Скільки учнів вивчають лише англійську, лише французьку, лише німецьку? Скільки учнів не вивчають жодної мови?
4. (20 балів) Учню надіслали 20 задач. За кожну розв'язану задачу давали 8 балів; за неправильно розв'язану знімали 5 балів; за задачу, за розв'язання якої учень не брався, – 0 балів. Скільки задач спробував розв'язувати учень, якщо він набрав 13 балів?
5. (30 балів) При яких натуральних значеннях a рівняння $ax = a + x + 1$ має парні корені?

8 клас

1. (15 балів) Доведіть, що вираз $(a-b)(a-b-6)+9$ невід'ємний при будь-яких a і b.
2. (15 балів) У трикутнику ABC бісектриса з вершини A, висота з вершини B та серединний перпендикуляр до сторони AB перетинаються в одній точці. Знайдіть величину кута A.
3. (20 балів) Знайти, через скільки хвилин після того, як годинник показував 9 годин, хвилинна стрілка наздожене годинну?
4. (20 балів) Сума трьох цілих чисел ділиться на 6. Довести, що й сума кубів цих чисел ділиться на 6.
5. (30 балів) Довести, що в будь-якому шестидесятизначному числі, десятковий запис якого не містить нулів, можна закреслити кілька цифр так, що число, яке вийшло в результаті цього, буде поділятися на 1001.

9 клас

1. (15 б.)Знайти суму всіх коренів рівняння $x^2+3|x-1|-7=0$.
2. (15 б.)Розв'язати нерівність: $\dfrac{x^2+3x}{x}<\sqrt{18}+\sqrt{2}x$.
3. (20 б.)Натуральні числа m та n такі, що $(4m-n)(n+m)=6m^2$. Довести, що n ділиться на m.
4. (20 б.)У трикутнику ABC бісектриса AE дорівнює відрізку EC. Знайти кути трикутника ABC, якщо $AC=2AB$.
5. (30 б.)У вершинах трикутника написані числа 1, 2 і 3. Потім кожне з чисел одночасно замінили на суму двох сусідніх. Цю операцію провели ще декілька разів. Чи може сума одержаних трьох чисел дорівнювати 3000000?

УМОВИ ЗАДАЧ

10 клас

1. (15 б.)При яких значеннях k рівняння $\left(k-1\right)x^2+\left(k+4\right)x+k+7=0$ має єдиний корінь?
2. (15 б.)Розв'язати нерівність: $\left(x^2-x-2\right)\sqrt{x^2-x}\geq 0$.
3. (20 б.)Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$.
4. (20 б.)Точка M – середина сторони BC опуклого чотирикутника $ABCD$, $\angle AMD=120^0$. Довести, що $AB+\frac{1}{2}BC+CD\geq AD$.
5. (30 б.)Прямокутник 7×11 розрізали на квадрати 2×2 та триклітинкові куточки (див. мал.). Скільки всього фігур одержали при розрізанні?

11 клас

1. (15 б.)Розв'язати рівняння: $\cos x\cdot\sqrt{2-x-x^2}=0$.
2. (15 б.)Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності: $\left|x^2-3x-3\right|>\left|x^2+7x-13\right|$.
3. (20 б.)Знайти найменше значення виразу $\frac{y}{x}$, якщо відомо, що $x^2-10x+y^2-2y+1=0$.
4. (20 б.)Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці E. Відомо, що площі трикутників ABE та DCE дорівнюють по 1, площа чотирикутника $ABCD$ не перевищує 4, $AD=3$. Знайти BC.
5. (30 б.)В квадраті 1×1 відмітили 9 точок, ніякі три з яких не лежать на одній прямій. Довести, що знайдуться два трикутника з вершинами у цих точках, площі яких не перевищують $\frac{1}{8}$ для кожного.

ВІДПОВІДІ

6 клас

1) 2520 см;
2) 1400 грамів води;
4) 16.

7 клас

1) Змінилася, зменшилася;
2) 112;
3) 13 учнів вивчають лише англійську, 20 – лише німецьку, 30 – лише французьку, 20 учнів не вивчають жодної мови.;
4) учень спробував вирішувати 13 задач, з яких розв’язав 6 правильно і 7 не правильно;
5) $a = 3$.

8 клас

2) $\angle A = 60^\circ$;
3) через $49\frac{1}{11}$ хвилин.

9 клас

1) 1;
2) $x \in (-3,0) \cup (0,+\infty)$;
4) $\angle B = 90^\circ, \angle A = 60^\circ, \angle C = 30^\circ$;
5) Ні.

10 клас

1) $\left\{1;2;-\frac{22}{3}\right\}$;
2) $(-\infty;-1] \cup \{0\} \cup \{1\} \cup [2;+\infty)$;
3) $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$;
5) 25; 24.

11 клас

1) $\left\{-2;-\frac{\pi}{2};1\right\}$;
2) $x = -5$;
3) $-2,4$;
4) $BC = 3$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

6 клас

Задача №1

Оскільки при вимірюванні відстані між деревами батько і син відходили від одного дерева (називатимемо його першим деревом), то перше співпадіння слідів батька і сина відбулося перед початком руху від першого до другого дерева.

За умовою довжина кроку батька – 70 см, сина – 56 см. Тоді друге співпадіння їх слідів відбудеться на відстані H (в напрямку від першого дерева), яка дорівнює такому найменшому числу, яке одночасно ділиться і на 70 і на 56.

Тому вказана відстань H є найменшим спільним кратним (НСК) чисел 70 і 56. Знайдемо $\text{НСК}(70,56)$. Для цього розкладемо вказані числа на прості множники

$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Таким чином $\text{НСК}(70,56) = 2^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 280$. Отже, друге співпадіння слідів відбулося на відстані 280 см від першого дерева.

Оскільки останнє – ДЕСЯТЕ – співпадіння слідів відбулося біля другого дерева, то відстань S між деревами дорівнює $S = 9 \cdot H = 9 \cdot 280 = 2520$ см.

Таким чином, відстань між деревами становить 25 метрів, 20 см.

Відповідь: 2520 см.

Задача №2

Оскільки маса чистої солі в даній рідині становить 40% від 600 грамів всієї рідини, то маса чистої солі, яка міститься в даній рідині, дорівнює

$$\frac{600}{100} \cdot 40 = 6 \cdot 40 = 240 \text{ грамів.}$$

Зрозуміло, що після доливання до даної рідини води, маса чистої солі у новій рідині також буде становити 240 грамів, але складатиме вже 12% від маси всієї нової рідини. Тому вага нової рідини становитиме

$$\frac{240}{12} \cdot 100 = 2000 \text{ грамів.}$$

Таким чином, до 600 грамів рідини, що містить 40% солі, треба додати $2000 - 600 = 1400$ грамів води, щоб вийшов 12%-й розчин цієї солі.

Відповідь: 1400 грамів води.

Задача №3

Оскільки довільне непарне число a можна подати у вигляді $2n-1$, то наступне за ним непарне число b має вид

$$a+2=2n-1+2=2n+1.$$

І тому сума S двох послідовних непарних чисел a і b дорівнює

$$S=(2n-1)+(2n+1)=4n.$$

З того, що число S має вид $S=4\cdot n$ випливає, що S ділиться на 4.

Таким чином, сума двох послідовних непарних чисел ділиться на 4.

Задача №4

До початку відліку часу на дошці було записано число 23.

Через одну хвилину після початку відліку часу (згідно з правилом отримання нових чисел, описаним в умові задачі) нове число, записане на дошці, дорівнює $2\cdot 3+12=18$ (назвемо це число першим числом).

Через дві хвилини	$1\cdot 8+12=20$	(друге число);
через три хвилини	$2\cdot 0+12=12$	(третє число);
через чотири хвилини	$1\cdot 2+12=14$	(четверте число);
через п'ять хвилини	$1\cdot 4+12=16$	(п'яте число);
через шість хвилин	$1\cdot 6+12=18$	(шосте число);
через сім хвилини	$1\cdot 8+12=20$	(сьоме число) і так далі.

Зрозуміло, що через одну годину (60 хвилин), згідно ведених домовленостей щодо назв чисел, на дошці буде записане шістдесяте число.

З отриманої послідовності $18,20,12,14,16,18,20,...$ чисел бачимо, що починаючи з шостого числа, група $\{18,20,12,14,16\}$ чотирьох впорядкованих чисел починає повторюватись. Тобто: шосте число дорівнює першому, сьоме – другому, восьме – третьому, дев'яте – четвертому, десяте – п'ятому, одинадцяте – знову першому і так далі.

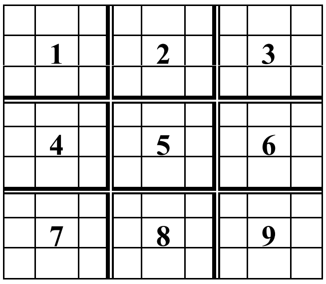
Оскільки $60=5\cdot 12$, то по закінченню шістдесятої хвилини група чисел $\{18,20,12,14,16\}$ повториться рівно 12 разів, а останнє шістдесяте число буде дорівнювати 16.

Таким чином через одну годину на дошці буде записано число 16.

Відповідь: 16.

Задача №5

Розіб’ємо даний квадрат (розміром 9×9) на дев’ять рівних квадратів розміром 3×3 так, як показано на рисунку.



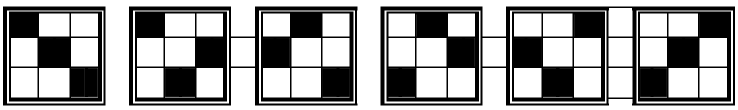
Оскільки $19 = 9\cdot2+1$, то існує квадрат, якому належить щонайменше три зафарбованих клітинки (при довільному розфарбуванні 19 клітинок в чорний колір).

Покажемо, що при довільному розфарбуванні трьох з дев’яти клітинок такого квадрату (розміром 3×3) має місце одна з можливостей, описаних в умові задачі.

1) якщо три з трьох клітинок рядка (або ж стовпця) пофарбовано в один колір, то існують дві зафарбовані клітинки, що мають одну сторону;

2) якщо дві з трьох клітинок рядка (або ж стовпця) пофарбовано в один колір, то або вони або мають спільну сторону, або ж обидві примикають до не зафарбованої клітинки;

3) якщо в кожному рядку (або ж стовпці) міститься рівно одна пофарбована клітинка, то ніякі дві з пофарбованих не мають спільної сторони, але завжди існує не пофарбована клітинка до сторін якої примикають дві зафарбовані.
Всі такі випадки зображено нижче



Таким чином, при довільному зафарбуванні 19 клітинок у квадраті розміром 9×9 знайдуться або

– дві зафарбовані клітинки, що мають спільну сторону,

або ж знайдеться

– не зафарбована клітинка, до сторін якої примикають не менше двох зафарбованих.

7 клас

Задача №1

<u>I спосіб.</u>

1) Після першого підвищення ціни батону (вартістю $1{,}5$ грн., або ж 150 коп.) на 5% його вартість становила

$$150+150\cdot 0{,}05=150+7{,}5=157{,}5 \text{ коп.}$$

2) Після другого підвищення ціни батону на 6% його вартість становила

$$157{,}5+157{,}5\cdot 0{,}06=157{,}5+9{,}45=166{,}95 \text{ коп.}$$

3) Після зниження ціни батону на 11% його вартість становить

$$166{,}95-166{,}95\cdot 0{,}11=166{,}95\cdot 0{,}89=148{,}586 \text{ коп., або ж } 1{,}48586\approx 1{,}49 \text{ грн.}$$

Таким чином, в результаті двох послідовних підвищень і одного пониження вартості батону, його ціна зменшилась на 150-148,586=1,414 коп.

Зауважимо, що питання про зміну ціни товару (в гривнях) <u>не слід</u> розуміти як питання про зміну цілої частина ціни товару в гривнях! Довільна грошова одиниця грає ту ж саму роль, як і будь-яка одиниця виміру. Тому питання про зміну ціни товару передбачає конкретну відповідь: ЗМІНИЛАСЯ чи НЕ ЗМІНИЛАСЯ.

<u>II спосіб.</u> (В ЗАГАЛЬНОМУ ВИГЛЯДІ)

Нехай x – початкова ціна товару. Після першого підвищення ціни товару на $p\%$, його вартість становила $x+x\cdot\dfrac{p}{100}=x\left(1+\dfrac{p}{100}\right)=x\left(\dfrac{100+p}{100}\right)$ (грош.од.)

Після другого підвищення ціни товару на $q\%$, його вартість становила

$$x\left(\frac{100+p}{100}\right)+x\left(\frac{100+p}{100}\right)\cdot\frac{q}{100}=x\left(\frac{100+p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)=x\left(\frac{100+p}{100}\right)\left(\frac{100+q}{100}\right).$$

Після пониження ціни товару на $(p+q)\%$, його вартість становить

$$x\left(\frac{100+p}{100}\right)\left(\frac{100+q}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{p+q}{100}\right)=x\left(\frac{100+p}{100}\right)\left(\frac{100+q}{100}\right)\cdot\left(\frac{100-(p+q)}{100}\right).$$

Покажемо, що величина $K=\left(\dfrac{100+p}{100}\right)\left(\dfrac{100+q}{100}\right)\left(\dfrac{100-(p+q)}{100}\right)<1$.

Для цього достатньо показати справедливість нерівності

$$(100+p)(100+q)\big(100-(p+q)\big)<10^6 \text{ для довільних додатних } p \text{ і } q$$

Оскільки

$(100+p)(100+q)\big(100-(p+q)\big)=\big(10^4+100(p+q)+pq\big)\big(100-(p+q)\big)=$

$=10^6+(p+q)\big(10^4-10^4\big)-100(p+q)^2-pq(p+q)+100pq$, то нерівність набуває вид

$100(p+q)^2+pq(p+q)-100pq>0$ або ж $100\big(p^2+q^2\big)+100pq+pq(p+q)>0$.

Зі справедливості останньої нерівності для довільних додатних p і q випливає справедливість доводжуваної нерівності.

Таким чином для довільних додатних p і q, нова ціна товару становить $K \cdot x$, причому $0 < K < 1$. І тому є меншою за початкову ціну x.

Відповідь: Змінилася, зменшилася.

Задача №2

__I спосіб.__

Розіб'ємо усі тризначні числа (починаючи з першого) на „вісімки" послідовних тризначних чисел

$\{100,101,102,103,104,105,106,107\}$, $\{108,109,110,111,112,113,114,115\}$, ...,

$\{898,899,990,991,992,993,994,995\}$, $\{996,997,998,999\}$

В кожній такій „вісімці" лише одне число, а саме останнє, при ділені на вісім дає в остачі 3.

Оскільки усіх тризначних чисел рівно $9 \times 10 \times 10 = 900$, і число $900 = 112 \cdot 8 + 4$, то всього таких „вісімок" рівно 112. Кожна з них містить лише одне шукане число.

І тому існує 112 тризначних чисел, які при діленні на вісім дають в остачі три.

__II спосіб.__

Довільне натуральне число x, яке при діленні на 8 дає в остачі 3 можна подати у вигляді $x = 8k + 3$, де k – ціла частина при діленні числа x на 8, яка дорівнює нулю (якщо $1 \le x \le 7$) або ж є натуральним числом.

Оскільки шуканими числами є тризначні числа, то повинна виконуватись подвійна нерівність $99 < 8k + 3 < 1000$. Перепишемо її у вигляді

$$96 < 8k < 997 \text{ або ж } \begin{cases} 8k < 997 \\ 8k > 96 \end{cases}.$$

Оскільки k натуральне, то умова $\begin{cases} k < \dfrac{997}{8} \\ k > \dfrac{96}{8} \end{cases}$, рівносильна системі $\begin{cases} k \le \left[\dfrac{997}{8}\right] \\ k \ge \left[\dfrac{96}{8}\right] + 1 \end{cases}$ (*).

Н а г а д а є м о, що через $[q]$ позначається ціла частина числа q – найбільше ціле число, яке не перевищує q.

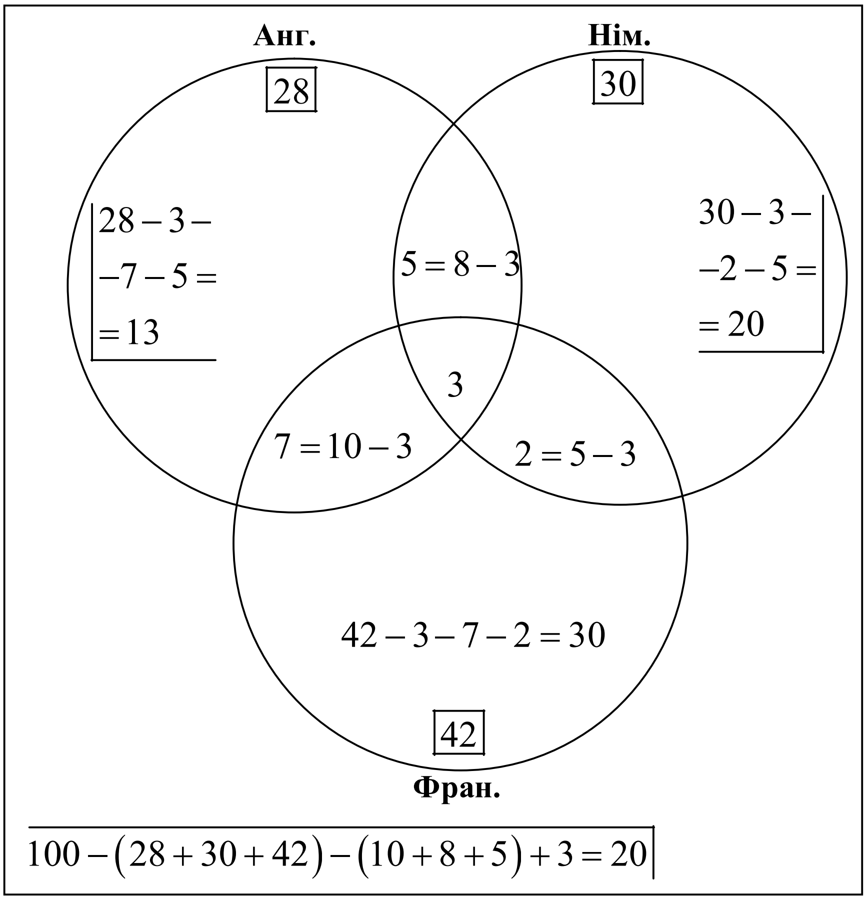
З системи (*) маємо, що $\begin{cases} k \le 124 \\ k \ge 13 \end{cases}$. Тоді загальна кількість натуральних розв'язків отриманої системи дорівнює $124 - 13 + 1 = 112$.

Таким чином, існує 112 натуральних тризначних чисел (104, 112, 120, ... 992), які при діленні на 8 дають остачу 3.

Відповідь: 112.

Задача №3

1) З'ясуємо спочатку питання: скільки учнів вивчають точно по дві мови.



1.1) Оскільки англійську і німецьку вивчають всього 8 учнів, з яких троє – усі три мови, то 5 учнів $(8-3)$ вивчають точно дві мови – англійську і німецьку.

1.2) Оскільки англійську і французьку вивчають всього 10 учнів, з троє – усі три мови, то 7 учнів $(10-3)$ вивчають точно дві мови – англійську і французьку.

1.3) Оскільки німецьку і французьку вивчають всього 5 учнів, з яких троє – усі три мови, то 2 учні $(5-3)$ вивчають точно дві мови – німецьку і французьку.

2) З'ясуємо тепер питання про те, скільки учнів вивчають виключно по одній мові.

2.1) Оскільки англійську мову всього вивчають 28 учнів ліцею, з яких 5 лише англійську і німецьку, 7 – лише англійську і французьку та 3 – усі три мови, то лише англійську мову вивчають $28-3-7-5=13$ (учнів).

2.2) Оскільки німецьку мову всього вивчають 30 учнів ліцею, з яких 5 лише німецьку і англійську, 2 – лише німецьку і французьку та 3 – усі три мови, то лише німецьку мову вивчають $30-3-2-5=20$ (учнів).

2.3) Оскільки французьку мову всього вивчають 42 учнів ліцею, з яких 2 лише французьку і німецьку, 7 – лише французьку і англійську та 3 – усі три мови, то лише французьку мову вивчають $42-3-2-7=30$ (учнів).

Таким чином, хоча б одну іноземну мову вивчають

$(13+20+30)+(7+5+2)+3=80$ (учнів).

І тому жодної іноземної мови не вивчають всього $100-80=20$ учнів ліцею.

Відповідь: 13 учнів вивчають лише англійську; 20 учнів вивчають лише німецьку; 30 учнів вивчають лише французьку; 20 учнів не вивчають жодної мови.

Задача №4

Нехай x – число правильно розв'язаних учнем задач (за кожну з яких він отримав 8 балів), а y – число не правильно розв'язаних учнем задач (за кожну з яких він отримав -5 балів).

Тоді, згідно з умовою задачі, має місце рівність $x \cdot 8 + y \cdot (-5) = 13$.
Оскільки:

1) **учень набрав додатну кількість** (а саме 13) **балів** (це рівносильне умові що правильно розв'язаною є принаймні 1 задача, тому $x \geq 2$),
2) **число набраних балів не є кратним числу** 8 (це рівносильне умові що є принаймні 1 задача розв'язана не вірно),
3) **кількість всіх задач –** 20,

то повинна виконуватися нерівність $2 < x + y \leq 20$.

Таким чином, розв'язання даної задачі зводиться до розв'язування в натуральних числах x і y наступної системи:

$$\begin{cases} x \cdot 8 + y \cdot (-5) = 13 \\ x + y \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 \cdot (x-1) = 5 \cdot (y+1) \\ x + y \leq 20 \end{cases}.$$

Розглянемо більш детально рівняння $8 \cdot (x-1) = 5 \cdot (y+1)$.
Оскільки числа $(x-1)$ і $(y+1)$ є натуральними, а числа 8 і 5 – взаємно прості, то спільне значення Z лівої і правої частини цього рівняння повинно бути натуральним числом, кратним числу 40, яке є найменшим спільним кратним чисел 8 і 5.
Отже, спільне значення Z лівої і правої частини рівняння $8 \cdot (x-1) = 5 \cdot (y+1)$ може дорівнювати лише числам 40, 80, 120 і т.д

Якщо $Z = 40 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$, то з рівняння $8 \cdot (x-1) = 5 \cdot (y+1) = 40k$ маємо, що $x = 5k+1$, а $y = 8k-1$. Оскільки $x = 5k+1$, $y = 8k-1$ повинні задовольняють умові $x + y \leq 20$, то має місце нерівність

$$(5k+1) + (8k-1) = 13k \leq 20$$

Звідки випливає що натуральне k може бути рівним лише числу 1. Тому $x = 6$, $y = 7$ – єдиний розв'язок даної задачі.

Таким чином, учень спробував розв'язувати 13 задач, з яких розв'язав 6 правильно і 7 не правильно.

Відповідь: 13.

Задача №5

Запишемо дане рівняння $ax = a + x + 1$ у вигляді $(a-1)x = a+1$.

Оскільки a є натуральним числом, то права частина (вираз $a+1$) останнього рівняння більше або дорівнює 2.

1) Якщо $a=1$, то рівняння набуває вид

$$0 \cdot x = 2$$

і не має коренів.

2) Якщо $a \neq 1$, то коренем даного рівняння є число $x = \frac{a+1}{a-1}$.

3) Очевидно, що при $a=2$ корінь рівняння дорівнює 3, але не є парним числом.

4) При $a=3$ корінь рівняння дорівнює 2 і є парним числом.

5) Покажемо тепер, що при довільному натуральному $a \geq 4$ число $\frac{a+1}{a-1}$ не є цілим числом.

Для цього достатньо показати, що при натуральних $a \geq 4$ знаменник дробу $\frac{a+1}{a-1}$ є більшим за половину чисельника, або, що теж саме, – подвоєний знаменник дробу більший за його чисельник, тобто, що при $a \geq 4$ виконується нерівність

$$2(a-1) > a+1.$$

Розв'яжемо цю нерівність:

$$2(a-1) > a+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2a-2 > a+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a > 3.$$

Оскільки розв'язком нерівності $2(a-1) > a+1$ будуть усі $a > 3$, то це й означає, що при натуральних $a \geq 4$ знаменник $(a-1)$ дробу $\frac{a+1}{a-1}$ не може бути дільником його чисельника і тому дріб $\frac{a+1}{a-1}$ не може бути цілим числом.

Таким чином, дане рівняння має парні корені лише при $a=3$.

Відповідь: $a=3$.

8 клас

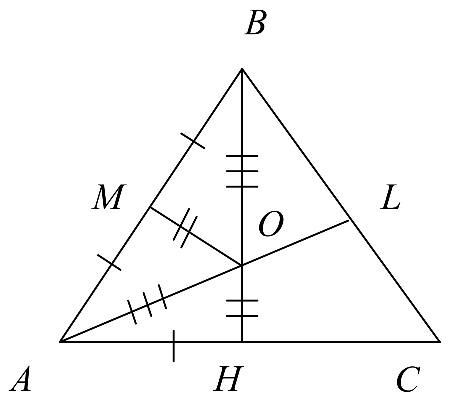
Задача №1

Перетворимо даний вираз $(a-b)(a-b-6)+9$ до наступного виду

$$(a-b)(a-b-6)+9=(a-b)^2-6(a-b)+9=(a-b)^2-2\cdot(a-b)\cdot 3+3^2=(a-b-3)^2$$

Оскільки даний вираз є квадратом виразу $(a-b-3)$, то він є невід’ємним при будь-яких a і b.

Задача №2



Нехай у трикутнику ABC бісектриса AL кута A, висота BH та серединний перпендикуляр до сторони AB в точці M перетинаються в точці O.

Тоді за властивістю бісектриси кута трикутника маємо, що $OH=OM$. Звідки випливає що прямокутні трикутники AMO і AHO рівні за катетом і гіпотенузою.

Оскільки OM є одночасно і висотою і медіаною трикутника AOB, то трикутник AOB є рівнобедреним з основою AB. Тому $AO=BO$.

Таким чином, з рівності вказаних трикутників випливає рівність відповідних кутів, а саме: $\angle HAO=\angle BAO=\angle ABO$.

Оскільки $\angle HAO+\angle BAO+\angle ABO=90^\circ$, то кожен з кутів $\angle HAO,\angle BAO,\angle ABO$ дорівнює 30°. Тому $\angle A=60^\circ$.

Відповідь: $\angle A=60^\circ$.

Задача №3

Оскільки за добу годинна стрілка робить 2 повних обороти, а хвилинна – $24=2\cdot 12$ повних оборотів, то швидкість хвилинної стрілки у 12 разів більша за швидкість годинної стрілки.

Нехай далі R – радіус циферблату годинника, а x – швидкість годинної стрілки. Тоді $2\pi R$ – довжина кола циферблату годинника або ж відстань, яку кінець стрілки долає за повний оборот, $12x$ – швидкість хвилинної стрілки.

Початкова відстань (довжина дуги кола циферблату) між кінцями хвилинної та годинної стрілки о 9^{00} складає три чверті довжини кола циферблата (бо рух відбувається у напрямку за годинниковою стрілкою), тобто $\frac{3\pi R}{2}$.

Позначимо, через t час, через який після 9-ої години хвилинна стрілка наздожене годинну.

Тоді, з урахуванням введених позначень, має місце рівняння

$$\frac{3\pi R}{2}+t\cdot x=t\cdot 12x\text{, або ж } 11tx=\frac{3\pi R}{2}\text{, звідки } t=\frac{3\pi R}{2\cdot 11x}.$$

Але ж швидкість x годинникової стрілки дорівнює $x=\frac{2\pi R}{12}=\frac{\pi R}{6}$ оборотів на годину. Тому $t=\dfrac{3\pi R}{2\cdot 11\cdot\frac{\pi R}{6}}=\frac{9}{11}$ годин. Або ж $\frac{9}{11}\cdot 60=\frac{540}{11}=49\frac{1}{11}$ хвилин.

Таким чином, після того, як годинник показував 9^{00}, хвилинна стрілка наздожене годинну через $49\frac{1}{11}$ хвилин.

Відповідь: $49\frac{1}{11}$ хвилин.

Задача №4

I спосіб.

Нехай x,y,z – вказані цілі числа. Тоді $(x+y+z)=6\cdot k$, $k\in\mathbb{Z}$.
Піднесемо до третього степеня обидві частини останньої рівності.

$$(x+y+z)^3=(6\cdot k)^3$$

Оскільки $(x+y+z)^3=(x+(y+z))^3=x^3+3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+(y+z)^3=$

$$=x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+3yz(y+z)=$$
$$=(x^3+y^3+z^3)+3(y+z)(x^2+x(y+z)+yz)=$$
$$=(x^3+y^3+z^3)+3(y+z)(x(x+y+z)+yz)=$$
$$=(x^3+y^3+z^3)+3x(x+y+z)+3x(y+z)yz,$$

то $(x^3+y^3+z^3)=6\cdot(36k^2)-3x(x+y+z)-3x(y+z)yz=$

$$=6\cdot(36k^3)-6(3kx)-3(y+z)xyz$$

Для довільних двох цілих чисел y і z

або їх сума $(y+z)$ ділиться на два,

або ж їх добуток yz ділиться на два.

Тоді при довільних цілих x,y,z,k вираз $3(y+z)xyz$ завжди ділиться на шість. Тому і вираз $6\cdot(36k^3)-6(3kx)-3(y+z)xyz$ ділиться на шість. Отже, сума кубів вказаних чисел ділиться на 6.

<u>II спосіб.</u>

Подамо вираз $x^3+y^3+z^3$ у наступному вигляді

$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3+z^3-(x+y+z)+(x+y+z)=$$
$$=(x^3-x)+(y^3-y)+(z^3-z)+(x+y+z)=$$
$$=x(x^2-1)+y(y^2-1)+z(z^2-1)+(x+y+z)=$$
$$=(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)+(z-1)z(z+1)+(x+y+z).$$

Звідки

$$x^3+y^3+z^3=(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)+(z-1)z(z+1)+(x+y+z)\ (*)$$

Зауважимо, що з трьох послідовних цілих чисел одне завжди ділиться на три, і принаймні одне ділиться на два. Тому добуток трьох послідовних цілих чисел завжди ділиться на шість.

Отже, кожен з перших трьох доданків правої частини рівності (*) ділиться на шість. За умовою останній доданок – вираз $(x+y+z)$ – також ділиться на шість. І тому права частина рівності (*) а разом з нею і ліва частина – вираз $x^3+y^3+z^3$ – ділиться на шість.

Більше того, з рівності (*) випливає, що сума кубів $x^3+y^3+z^3$ трьох цілих чисел ділиться на шість тоді і лише тоді, коли на шість ділиться сума цих чисел.

Задача №5

Не важко перевірити, що

$111111=1001\cdot 111$; $222222=1001\cdot 222$; $333333=1001\cdot 333$

$444444=1001\cdot 444$; $555555=1001\cdot 555$; $666666=1001\cdot 666$

$777777=1001\cdot 777$; $888888=1001\cdot 888$; $999999=1001\cdot 999$

Оскільки десятковий запис шестидесятизначного числа не містить нулів, то з того що $60=9\cdot 6+4$ випливає, що принаймні одна з дев'яти (ненульових) цифр повторюється щонайменше сім разів. Тому можна викреслити щонайбільше 54 цифри довільного шестидесятизначного числа так, щоб в результаті утворилося число з шести однакових цифр, яке очевидно вже ділиться на 1001.

9 клас

Задача №1

За властивістю модуля дане рівняння $x^2+3|x-1|-7=0$ можна замінити рівносильною сукупністю двох систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+3(x-1)-7=0\\x-1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-3(x-1)-7=0\\x-1<0\end{cases}\end{array}\right..$$

Розв'яжемо окремо кожну з цих систем:

$$\begin{cases}x^2+3(x-1)-7=0\\x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3x-10=0\\x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(x+5)=0\\x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x=2;$$

$$\begin{cases}x^2-3(x-1)-7=0\\x-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x-4=0\\x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)(x-4)=0\\x<1\end{cases}\Leftrightarrow x=-1.$$

Таким чином, розв'язками даного рівняння є числа 2 і -1. Очевидно, що їх сума дорівнює 1.

Відповідь: 1.

Задача №2

<u>I спосіб.</u>

Очевидно, що дана нерівність $\frac{x^2+3x}{x}<\sqrt{18}+\sqrt{2}x$ має смисл лише за умови $x\neq 0$. Тому вона рівносильна нерівності $x+3<\sqrt{18}+\sqrt{2}x$, $x\neq 0$.

Розв'яжемо лінійну нерівність $x+3<\sqrt{18}+\sqrt{2}x$, виконавши рівносильні перетворення:

$$x\left(1-\sqrt{2}\right)<\sqrt{18}-3$$
$$x\left(1-\sqrt{2}\right)<3\sqrt{2}-3$$
$$x\left(1-\sqrt{2}\right)<3\left(\sqrt{2}-1\right)$$
$$-x\left(\sqrt{2}-1\right)<3\left(\sqrt{2}-1\right)$$
$$-x<3$$
$$x>-3$$

Оскільки $x\neq 0$, то розв'язками даної нерівності будуть $x\in(-3,0)\cup(0,+\infty)$.

II спосіб.

Оскільки $\sqrt{18}+\sqrt{2}x=\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2}x=\sqrt{2}\left(x+3\right)$, то дана дробово-раціональна нерівність $\frac{x^2+3x}{x}<\sqrt{18}+\sqrt{2}x$ набуває вид

$$\frac{x\left(x+3\right)}{x}-\sqrt{2}\left(x+3\right)<0 \text{ або ж } \frac{x\left(x+3\right)-\sqrt{2}\left(x+3\right)x}{x}<0.$$

Звідки $\frac{x\left(x+3\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}{x}<0$.

Оскільки число $\left(1-\sqrt{2}\right)<0$, то остання нерівність рівносильна нерівності $\frac{x\left(x+3\right)}{x}>0$, яка, в свою чергу, рівносильна системі $\begin{cases} x+3>0 \\ x\neq 0 \end{cases}$. Звідки $\begin{cases} x>-3 \\ x\neq 0 \end{cases}$.

Отже, розв'язками даної нерівності будуть $x\in\left(-3,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$.

Відповідь: $x\in\left(-3,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$.

Задача №3

I спосіб.

Перетворивши задану рівність, отримаємо $\left(4m-n\right)\left(n+m\right)=6m^2$ або ж

$$4mn+4m^2-n^2-mn-6m^2=0, \text{ звідки } 3mn-n^2-2m^2=0.$$

Виконаємо тотожні перетворення у лівій частині одержаної рівності

$$3mn-n^2-2m^2=2mn+mn-n^2-2m^2=\left(2mn-2m^2\right)+\left(mn-n^2\right)=$$

$$=2m\left(n-m\right)-n\left(n-m\right)=\left(2m-n\right)\left(n-m\right).$$

Оскільки $\left(2m-n\right)\left(n-m\right)=0$, то або $n=2m$, або ж $n=m$. А це й означає, що число n ділиться на m.

II спосіб.

Перетворимо дану рівність $\left(4m-n\right)\left(n+m\right)=6m^2$ до наступного вигляду.

$$4mn+4m^2-n^2-mn=6m^2 \text{ або ж}$$

$$n^2-3mn+2m^2=0.$$

Розглянемо останню рівність, як квадратне рівняння відносно змінної n. Тоді за теоремою Вієта, мають місце рівності:

$$n_1+n_2=3m,$$

$$n_1\cdot n_2=2m^2.$$

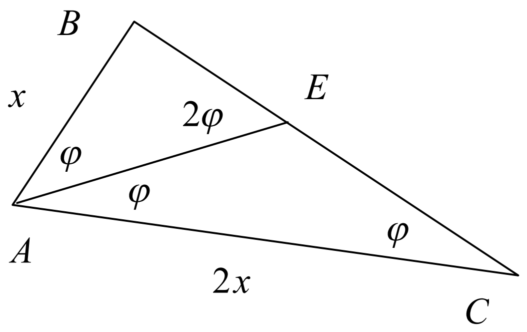
Звідки $n_1=m$, $n_2=2m$.

Таким чином, натуральні m і n, які задовольняють даній рівності $\left(4m-n\right)\left(n+m\right)=6m^2$ є такими, що число n ділиться на m.

Задача №4

Нехай ABC – даний трикутник, AE бісектриса кута A і виконуються рівності $AE = EC$ і $AC = 2AB$. Знайдемо кути трикутника ABC.

I спосіб.

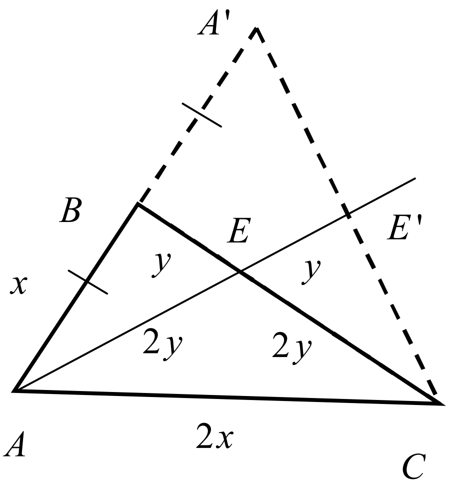


Нехай $AB = x$, тоді $AC = 2x$. За умовою $AE = EC$. За властивістю бісектриси кута трикутника має місце рівність $AB : AC = BE : EC$. Звідки $EC = 2BE$.

Розглянемо трикутники BCA і BAE. Вони подібні за двома кутами. Тому $\dfrac{BE}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$ звідки $AB^2 = BE \cdot BC$. Оскільки $BC = 3BE$, то має місце рівність $x^2 = 3BE^2$.

Тоді $BE = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $BC = \dfrac{3x}{\sqrt{3}}$. З трикутника ABC за теоремою косинусів маємо рівність $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$. Тому, з урахуванням введених позначень, маємо рівність $4x^2 = x^2 + 3x^2 - 2x \cdot \dfrac{3x}{\sqrt{3}} \cdot \cos\angle B$. Звідки випливає, що $\cos\angle B = 0$, і тому $\angle B = 90^\circ$. Оскільки $\angle A = 2\angle C$ і $\angle A + \angle C = 90^\circ$, то $\angle A = 60^\circ, \angle C = 30^\circ$.

II спосіб.



Нехай $AE = 2y$, тоді $EC = 2y$.

Оскільки $AB : AC = 1 : 2$, то за властивістю бісектриси кута трикутника ($AB : AC = BE : EC$) маємо, що $BE = y$.

На промені AB від точки B відкладемо відрізок $BA' = AB$ і розглянемо одержаний трикутник $A'AC$.

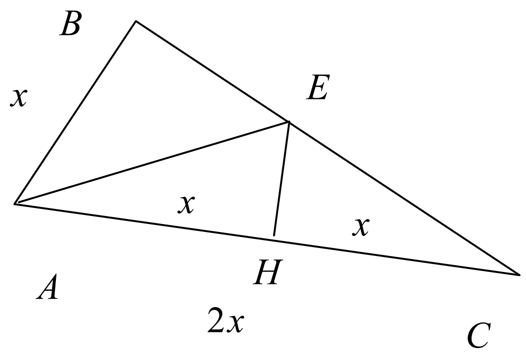
Оскільки CB – медіана $\triangle A'AC$ і $BE : EC = 1 : 2$, то точка E – точка перетину медіан $\triangle AA'C$.

За побудовою $AA' = AC$, AE бісектриса кута A. Тому пряма AE є перпендикулярною стороні $A'C$ рівнобедреного $\triangle A'AC$.

Нехай $AE \cap A'C = E'$. Тоді за властивістю медіани $EE' = y$

Трикутники ABE і $CE'E$ рівні за двома сторонами і кутом між ними. Звідки маємо, що $CA' = 2CE' = 2x$. І тому $\triangle A'AC$ є правильним трикутником. Звідки випливає, що $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$.

III спосіб.



Опустимо перпендикуляр EH на сторону AC. Оскільки за умовою $AE = EC$, то трикутник AEC рівнобедрений. Тому $AH = HC = x$.

Розглянемо трикутники ABE і AHE: $AB = AH = x$; AE – спільна сторона; $\angle BAE = \angle HAE$ за умовою. Отже, трикутники ріні за двома сторонами і кутом між ними. Тому $\angle ABC = 90^\circ$.

В прямокутному трикутнику ABC катет AB вдвічі менший за гіпотенузу. І тому $\angle ACB = 30^\circ$.
Таким чином, $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ – шукані кути даного трикутника.

Відповідь: $\angle B = 90^\circ, \angle A = 60^\circ, \angle C = 30^\circ$.

Задача №5

Очевидно, що сума S_0 чисел у вершинах даного трикутника до здійснення замін дорівнює $S_0 = 1 + 2 + 3 = 6$.

Після першої заміни чисел у вершинах трикутника на суму двох сусідніх, нова сума S_1 (сума нових чисел у вершинах трикутника) становить $S_1 = (2+3) + (1+3) + (1+2) = 12 = 6 \cdot 2 = S_0 \cdot 2$. Останнє також випливає з того факту, що в нову суму в якості доданків рівно двічі входить кожне зі старих чисел.

Тоді очевидно, що після другої заміни нова сума $S_2 = 2 \cdot S_1 = S_0 \cdot 2^2 = 6 \cdot 2^2$. І так далі. Тобто, після n-ої заміни нова n-та сума S_n становитиме

$$S_n = 6 \cdot 2^n.$$

Таким чином, дана задача зводиться до з’ясування питання про розв’язність рівняння $6 \cdot 2^n = 3000000$ в натуральних числах. Тобто, до з’ясування питання, чи існує таке натуральне n, при якому виконувалась би вказана рівність.

Оскільки права частина рівняння $6 \cdot 2^n = 3000000$ ділиться на 5, а ліва його частина $6 \cdot 2^n$ при довільному натуральному n не ділиться на 5, то вказана рівність не можлива при жодному натуральному n.

Тому зазначена в умові задачі сума не може дорівнювати числу 3000000.

Відповідь: Ні.

10 клас

Задача №1

Досліджуване рівняння $(k-1)x^2+(k+4)x+k+7=0$ в залежності від параметра k може бути рівнянням першого або другого степеня.

Нехай $k=1$, тоді дане рівняння є лінійним рівнянням і набуває вид $5x+8=0$. Звідки маємо, що $x=-8/5$.
Таким чином при $k=1$ маємо єдиний корінь $x=-8/5$.

Нехай тепер $k\neq 1$. Тоді дане рівняння є квадратним і має один корінь (два рівних корені) коли дискримінант дорівнює нулю.

$$D=(k+4)^2-4(k-1)(k+7)=-3k^2-16k+44=0.$$

Розв'язуючи рівняння $-3k^2-16k+44=0$, одержимо, що $k=2$ або $k=-22/3$. Тому у випадку коли $k\neq 1$, дане рівняння має єдиний корінь лише при $k=2$ або $k=-22/3$.

Відповідь: $\left\{1;2;-\frac{22}{3}\right\}$.

Задача №2

$$\left(x^2-x-2\right)\sqrt{x^2-x}\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)\sqrt{x(x-1)}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+1)(x-2)\geq 0\\ x(x-1)>0\end{cases}\\ x(x-1)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\leq -1\\ x\geq 2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x<0\\ x>1\end{array}\right.\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq -1\\ x\geq 2\\ x=0\\ x=1\end{array}\right..$$

Відповідь: $(-\infty;-1]\cup\{0\}\cup\{1\}\cup[2;+\infty)$.

Задача №3

Додавши до другого рівняння системи $\begin{cases}x+y+z=3\\ x^2+y^2+z^2=3\end{cases}$ перше, помножене на -2, одержимо

$$\begin{cases}x+y+z=3\\ x^2-2x+y^2-2y+z^2-2z=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z=3\\ x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z=3\\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1.\\ z=1\end{cases}$$

Відповідь: $x=1; y=1; z=1$.

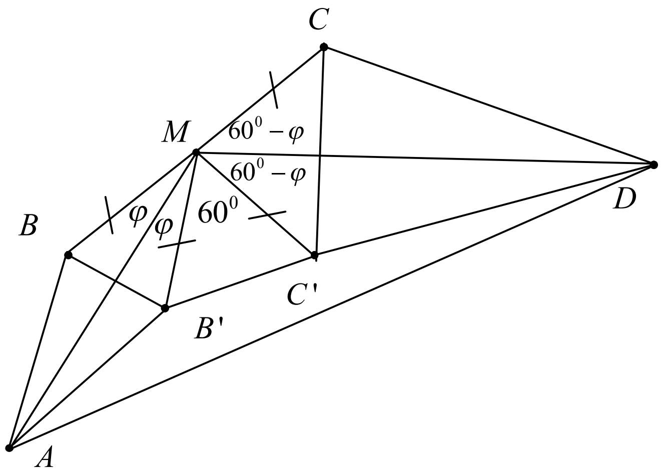
Задача №4

Нехай $ABCD$ – заданий чотирикутник, M середина BC. За умовою $\angle AMD = 120^0$. Нехай далі $\angle AMB = \varphi$, тоді $\angle DMC = 60^0 - \varphi$.

Побудуємо точки B' і C' симетричні точкам B і C відносно прямих AM і DM відповідно. Тоді $MB' = MB$, $MC' = MC$. Звідки $MB' = MC'$.

Оскільки $\angle AMB + \angle DMC = 60^0$, то $\angle B'MB + \angle C'MC = 120^0$. Тому $\angle B'MC' = 60^0$. Таким чином трикутник $B'MC'$ є рівнобедреним з кутом при вершині 60^0. Тому трикутник $B'MC'$ рівносторонній. Звідки $B'C' = MB' = MB = \frac{BC}{2}$.

Розглянемо замкнену ламану $AB'C'D$. Очевидно, що справджується нерівність



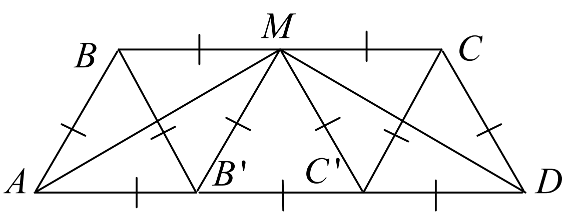
$$AB' + B'C' + C'D \geq AD.$$

Оскільки $AB' = AB$ і $DC' = DC$, то для сторін даного чотирикутника доведено нерівність

$$AB + \frac{1}{2}BC + CD \geq AD.$$

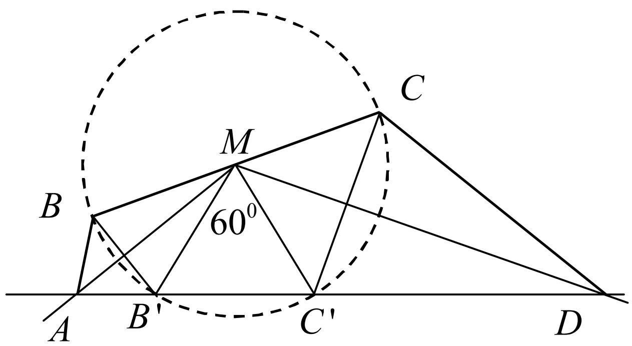
При чому, рівність досягається у тих випадках, коли точки B' і C' належать відрізку AD і задовольняють умовам:

$$B' \in [AC'],\ C' \in [B'D].$$



Прикладом чотирикутника, для якого досягається рівність у доведеній (нестрогій) нерівності, може бути рівнобедрена трапеція з кутом 60^0 при більшій основі, довжина якої втричі більша за бічну сторону.

Довільний інший чотирикутник, для якого досягається вказана рівність можна побудувати наступним чином:



Побудуємо коло на відрізку BC як на діаметрі. Нехай M – середина BC, а точки B' і C' такі точки кола, що задовольняють умовам:

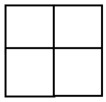
1) $\angle B'MC' = 60^0$;

2) точки B' і C' лежать в одній півплощині відносно прямої BC

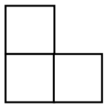
Проведемо бісектриси кутів BMB' та CMC' і нехай вони перетинають пряму $B'C'$ відповідно у точках A і D. Тоді $ABCD$ – шуканий чотирикутник, для якого досягається рівність $AB + 0,5 \cdot BC + CD = AD$.

Задача №5

Нехай дану фігуру (у вигляді клітчатого прямокутника розміром 7×11) розрізано на:

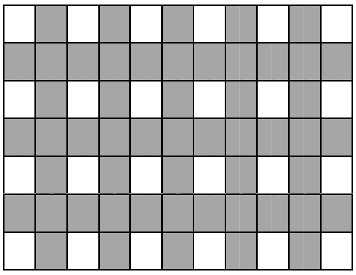
x квадратів розміром 2×2, тобто, фігур виду 

та

y триклітинкових „куточків” тобто, фігур виду 

1) З того, що число 77 не ділиться ні на 3, ні на 4 випливає, що x, y – натуральні числа (ні x, ні y не можуть бути рівними нулю).

2) Пофарбуємо прямокутник у спосіб, вказаний на рисунку (24 білих, та 53 чорних клітинок).



Очевидно, що кожен з x квадратів містить точно:

1 білу клітинку та 3 чорних клітинок.

Кожен з y „куточків” або

а) не містить білих клітинок,
і тоді нехай z – кількість таких куточків, або ж

б) містить точно 1 білу і 2 чорні клітинки.
Таких куточків тоді буде $y-z$.

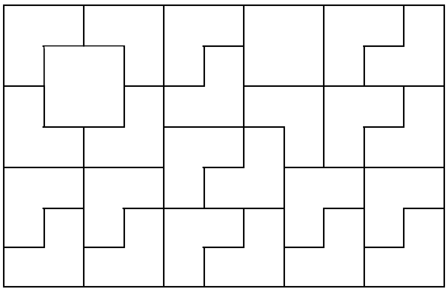
Тоді, зрозуміло, що повинні виконуватись рівності $\begin{cases} x\cdot1+z\cdot0+(y-z)\cdot1=24 \\ x\cdot3+z\cdot3+(y-z)\cdot2=53 \end{cases}$,

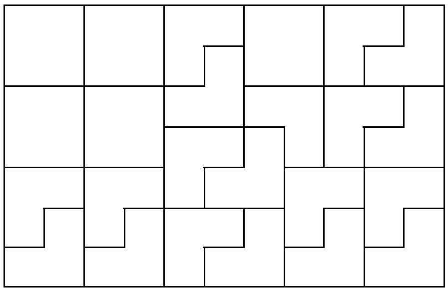
кожна з яких є безпосереднім підрахунком відповідно білих і чорних клітинок.

Після спрощень маємо $\begin{cases} x+y-z=24 \\ 3x+2y+z=53 \end{cases}$ або ж $\begin{cases} x+y=24+z\ge24 & (*) \\ 4x+3y=77 & (**) \end{cases}$.

3) Не важко перевірити, що розв'язками (x,y) рівняння (**) в натуральних числах є виключно пари $(2,23)$, $(5,19)$, $(8,15)$, $(11,11)$, $(14,7)$, $(17,3)$. Але умові (*) задовольняють лише перші два розв'язки.

4) Нижче наведемо приклади, де реалізованими є набори фігур, що відповідають парам $(2,23)$ і $(5,19)$





Відповідь: 25; 24.

11 клас

Задача №1

$$\cos x\cdot\sqrt{2-x-x^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x-x^2=0 \\ \begin{cases} 2-x-x^2>0 \\ \cos x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \\ \begin{cases} -2<x<1 \\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \\ x=-\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{-2;-\dfrac{\pi}{2};1\right\}$.

Задача №2

__I спосіб.__

Піднесемо до квадрату обидві частини нерівності $\left|x^2-3x-3\right|>\left|x^2+7x-13\right|$ та виконаємо тотожні перетворення:

$$\left|x^2-3x-3\right|>\left|x^2+7x-13\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|x^2-3x-3\right|^2>\left|x^2+7x-13\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x-3\right)^2>\left(x^2+7x-13\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x-3\right)^2-\left(x^2+7x-13\right)^2>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(x^2-3x-3\right)-\left(x^2+7x-13\right)\right)\left(\left(x^2-3x-3\right)+\left(x^2+7x-13\right)\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-10x+10)\left(2x^2+4x-16\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x+1)\left(x^2+2x-8\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+4)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$$

Звідки випливає, що найбільшим цілим числом, яке задовольняє останній сукупності (є розв'язком даної нерівності), буде число -5.

<u>II спосіб.</u>

За визначенням модуля маємо наступні рівносильні переходи

$$\left|x^2-3x-3\right|>\left|x^2+7x-13\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left|x^2-3x-3\right|>x^2+7x-13 \\ x^2+7x-13\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \left|x^2-3x-3\right|>-\left(x^2+7x-13\right) \\ x^2+7x-13<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-3x-3>x^2+7x-13 \\ x^2+7x-13\ge 0 \\ x^2-3x-3\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -\left(x^2-3x-3\right)>x^2+7x-13 \\ x^2+7x-13\ge 0 \\ x^2-3x-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} -\left(x^2-3x-3\right)>-\left(x^2+7x-13\right) \\ x^2+7x-13<0 \\ x^2-3x-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-3x-3>-\left(x^2+7x-13\right) \\ x^2+7x-13<0 \\ x^2-3x-3\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -10x>-10 \\ x^2+7x-13\ge 0 \\ x^2-3x-3\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+2x-8<0 \\ x^2+7x-13\ge 0 \\ -x^2+3x+3>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 10x>10 \\ -x^2-7x+13>0 \\ -x^2+3x+3>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+2x-8>0 \\ -x^2-7x+13>0 \\ x^2-3x-3\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1 \\ x^2+7x-13\ge 0 \\ x^2-3x-3\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+4)(x-2)<0 \\ x^2+7x-13\ge 0 \\ -x^2+3x+3>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ -x^2-7x+13>0 \\ -x^2+3x+3>0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+4)(x-2)>0 \\ -x^2-7x+13>0 \\ x^2-3x-3\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1 \\ x^2+7x-13\ge 0 \\ (x+4)(x-2)\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+4)(x-2)<0 \\ x^2+7x-13\ge 0 \\ x>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ -x^2-7x+13>0 \\ (x+4)(x-2)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+4)(x-2)>0 \\ -x^2-7x+13>0 \\ x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le -4 \\ x^2+7x-13\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1<x<2 \\ x^2+7x-13\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1<x<2 \\ x^2+7x-13<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-4 \\ -x^2-7x+13>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+4\le 0 \\ (x+4)(x+3)-25\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1<x<2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+7x-13\ge 0 \\ x^2+7x-13<0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x+4<0 \\ (x+4)(x+3)-25<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ 1<x<2 \\ x<-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

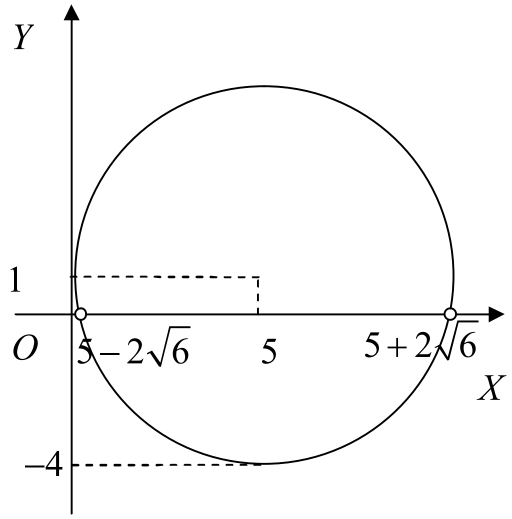
$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-4)\cup(1;2)$$

Таким чином, найбільше ціле число, яке задовольняє даній нерівності буде число -5.

Відповідь: -5

Задача №3

<u>І спосіб</u>



Перетворимо задане рівняння $x^2-10x+y^2-2y+1=0$ з двома змінними до вигляду:

$$(x-5)^2+(y-1)^2=25.$$

Останнє рівняння задає на площині коло з центром в точці $(5,1)$ і радіусом рівним 5.

Виразимо з цього рівняння y як функцію від x. А саме**:**

$$|y-1|=\sqrt{25-(x-5)^2}\ .$$

Перед розкриттям модуля зауважимо, що для знаходження найменшого значення виразу $\frac{y}{x}$ треба розглядати ту частину кола, де y приймає від’ємні значення, оскільки значення x для довільної точки даного кола завжди додатні. Тому з останньої рівності з модулем маємо, що $y=1-\sqrt{25-(x-5)^2}$.

Розглянемо функцію $\varphi(x)=\frac{y}{x}=\frac{1-\sqrt{25-(x-5)^2}}{x}$ та знайдемо її найменше значення на відрізку $\left[5-2\sqrt{6},5+2\sqrt{6}\right]$, кінці якого є розв’язками рівняння $x^2-10x+1=0$ (абсцисами точок перетину кола з віссю OX),

Знайдемо похідну функції $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x)=\frac{\frac{(x-5)x}{\sqrt{25-(x-5)^2}}-1+\sqrt{25-(x-5)^2}}{x^2}=\frac{5x-\sqrt{25-(x-5)^2}}{\sqrt{25-(x-5)^2}\,x^2}.$$

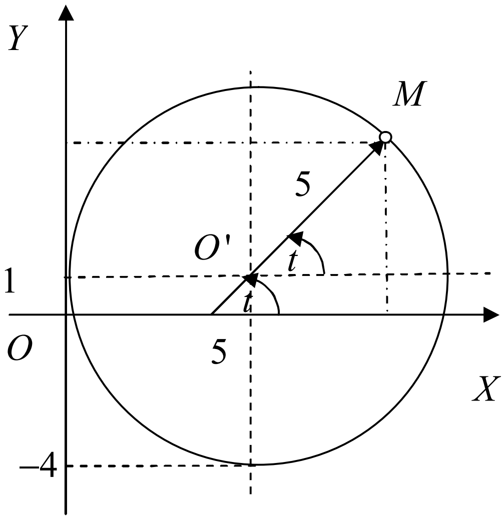
Знайдемо критичні точки: $5x-\sqrt{25-(x-5)^2}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sqrt{25-(x-5)^2}=5x\Leftrightarrow 25-(x-5)^2=25x^2\Leftrightarrow x(13x-5)=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{13}$$

Оскільки $\varphi\left(\frac{5}{13}\right)<\varphi\left(5-2\sqrt{6}\right)=\varphi\left(5+2\sqrt{6}\right)$, то в точці $x=\frac{5}{13}$, функція приймає своє найменше значення, яке дорівнює:

$$\varphi\left(\frac{5}{13}\right)=\frac{1-\sqrt{25-\left(\frac{5}{13}-5\right)^2}}{\frac{5}{13}}=-\frac{12}{5}=-2,4\,.$$

II спосіб



Виразимо координати (x, y) довільної точки M даного кола $(x-5)^2+(y-1)^2=25$ через деяку третю змінну.

А саме, нехай $M(x, y)$ – довільна точка даного кола з центром в точці $O'(5,1)$ і радіусом $R=5$. Позначимо через t кут між радіус-вектором $\overrightarrow{O'M}$ точки M і додатнім напрямком осі OX. Тоді очевидно, що кожна точка $M(x, y)$ (даного) кола однозначно визначається кутом t, $0 \le t < 360^0$.

При чому:
перша координата точки M дорівнює $x = R\cos t + 5 = 5\cos t + 5$, а
друга її координата рівна $y = R\sin t + 1 = 5\sin t + 1$.

Розглянемо функцію $f(t) = \dfrac{y}{x} = \dfrac{5\sin t + 1}{5(\cos t + 1)}$ та знайдемо її найменше значення.

Для цього виконаємо елементарні перетворення, застосувавши відповідні тригонометричні формули:

$$f(t) = \frac{5\sin t + 1}{5(\cos t + 1)} =$$

$$= \frac{10\sin(t/2)\cos(t/2) + \sin^2(t/2) + \cos^2(t/2)}{10\cos^2(t/2)} =$$

$$= \mathrm{tg}(t/2) + \frac{1}{10}\mathrm{tg}^2(t/2) + \frac{1}{10} =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\mathrm{tg}^2(t/2) + 10\,\mathrm{tg}(t/2) + 1\right) =$$

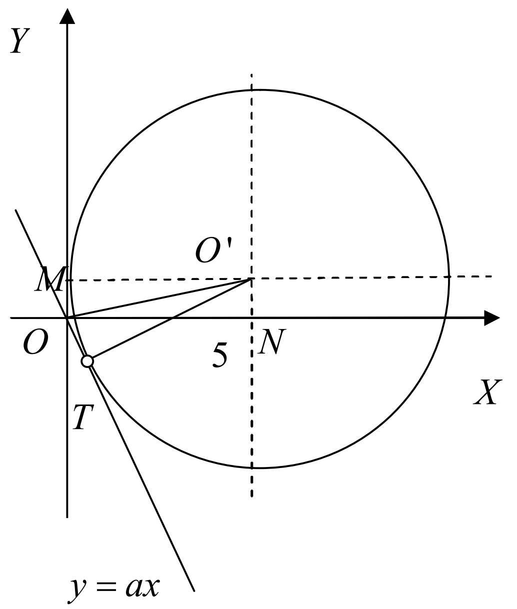
$$= \frac{1}{10}\left(\mathrm{tg}^2(t/2) + 2\,\mathrm{tg}(t/2)\cdot 5 + 5^2 - 5^2 + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\left(\mathrm{tg}(t/2) + 5\right)^2 - 24\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\mathrm{tg}(t/2) + 5\right)^2 - 2{,}4 \ge -2{,}4 .$$

Отже найменше значення функції $f(t) = \dfrac{5\sin t + 1}{5(\cos t + 1)}$ дорівнює числу $-2{,}4$.

III спосіб



Нехай $\dfrac{y}{x}=a$, тобто $y=ax$ при $x\neq 0$.

Тоді для розв’язання задачі достатньо знайти таке значення (параметру) a, при якому система

$$\begin{cases} x^2-10x+y^2-2y+1=0 \\ y=ax \end{cases}$$

має розв’язок.

Перше рівняння системи задає на площині коло $(x-5)^2+(y-1)^2=25$ з центром в точці $(5,1)$ і радіусом рівним 5.

Друге рівняння системи задає на площині сукупність прямих $y=ax$, які проходять через початок координат і мають кутовий коефіцієнт рівний a.

Нагадаємо, що геометричний зміст кутового коефіцієнта прямої полягає в тому, що він чисельно дорівнює тангенсу кута, який пряма утворює з додатнім напрямком осі OX.

Тоді зрозуміло, що найменшим значенням параметру a, при якому вказана вище система має розв’язок, буде таке його значення, при якому пряма $y=ax$ дотикається кола $(x-5)^2+(y-1)^2=25$. (На рисунку T – точка дотику)

Отже, нехай $\angle TOX=\alpha$, $\angle O'OX=\beta$. Тоді $a=\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$.

З рівності прямокутних трикутників $O'TO$ і $O'MO$ (за катетом і гіпотенузою) випливає, що $\angle O'OT=\angle O'OM$.

Тому $\angle TOX=\angle O'OT-\angle O'OX=\angle O'OM-\angle O'OX$. Звідки маємо, що

$$\alpha=\angle O'OM-\beta.$$

З прямокутного трикутника $O'MO$ маємо, що $\operatorname{tg}\angle O'MO=5$.

З прямокутного трикутника $O'NO$ маємо, що $\operatorname{tg}\angle O'ON=\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{5}$.

Таким чином, для знаходження шуканого значення параметру a достатньо обчислити тангенс відповідного кута α

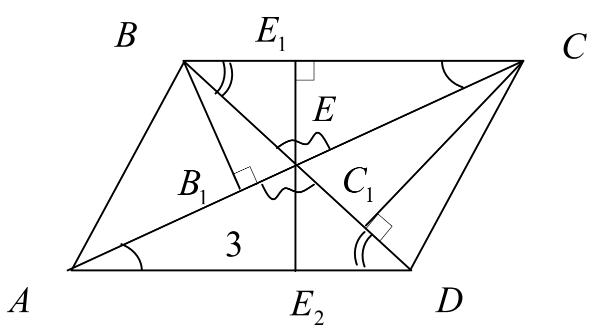
$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\angle O'OM-\beta\right)=\frac{\operatorname{tg}\angle O'OM-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\angle O'OM\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{5-\frac{1}{5}}{1+5\cdot\frac{1}{5}}=\frac{25-1}{5+5}=\frac{24}{10}=2{,}4$$

Оскільки $a=-\operatorname{tg}\alpha$, то $a=-2{,}4$.

Відповідь: $-2{,}4$.

Задача №4

I спосіб.



Нехай E – точка перетину діагоналей даного опуклого чотирикутника $ABCD$, а s – площа трикутника BEC.

Нехай далі BB_1 – перпендикуляр, опущений з точки B на пряму AC.

Оскільки точки A, E, C лежать на одній прямій, а точка B не належить прямій AC, то $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{s}{1} = \frac{\frac{1}{2}CE \cdot BB_1}{\frac{1}{2}EA \cdot BB_1} = \frac{CE}{EA}$. Звідки $\frac{CE}{EA} = \frac{s}{1}$.

Нехай тепер CC_1 – перпендикуляр, опущений з точки C на пряму BD. Оскільки точки B, E, D лежать на одній прямій, а точка C не належить прямій BD, то $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{s}{1} = \frac{\frac{1}{2}BE \cdot CC_1}{\frac{1}{2}ED \cdot CC_1} = \frac{BE}{ED}$. Звідки $\frac{BE}{ED} = \frac{s}{1}$.

Розглянемо трикутники BEC і DEA: вони подібні за двома пропорційними сторонами $\left(CE : EA = s : 1 = BE : ED\right)$ і кутом між ними.

Тому: 1) $AD \parallel BC$ і 2) $BC : AD = s : 1$.

Оскільки за умовою $AD = 3$, то має місце рівність $BC : 3 = s : 1$. Звідки випливає, що $s = S_{\triangle BCE} = \frac{BC}{3} = \frac{1}{2}BC \cdot \frac{2}{3}$. І тому висота EE_1 трикутника CBE дорівнює $\frac{2}{3}$.

Але ж тоді висота EE_2 трикутника ADE дорівнює $\frac{2}{3s}$, бо $\frac{EE_1}{EE_2} = \frac{s}{1}$. І тому $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}AD \cdot EE_2 = \frac{1}{2}3 \cdot \frac{2}{3s} = \frac{1}{s}$.

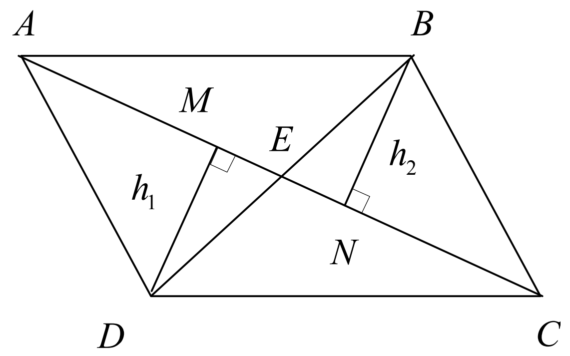
Таким чином, маємо що $S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{BCE} + S_{CDE} + S_{DAE} = 1 + s + 1 + \frac{1}{s} = 2 + s + \frac{1}{s}$.

За умовою $S_{ABCD} \le 4$. Тому повинна виконуватись нерівність $2 + s + \frac{1}{s} \le 4$, або ж $s + \frac{1}{s} \le 2$. Звідки випливає $s^2 - 2s + 1 \le 0$ або ж $\left(s-1\right)^2 \le 0$. І тому $s = 1$.

З того що $BC : AD = s : 1 = 1 : 1$ маємо, що $BC = AD = 3$.

Більше того, оскільки у даного чотирикутника дві протилежні сторони AD і BC є паралельними і рівними, то такий чотирикутник є паралелограмом.

II спосіб.



Нехай DM і BN – перпендикуляри, опущені з точок D і B на діагональ AC. Позначимо $DM = h_1$, $BN = h_2$. Тоді: $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AE \cdot h_2 = 1$, $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} CE \cdot h_1 = 1$.

Звідки випливає, що $h_1 = \frac{2}{CE}$, $h_2 = \frac{2}{AE}$.

За умовою задачі маємо, що $S_{ABCD} \le 4$. Тому має місце нерівність

$$S_{\triangle ADE} + S_{\triangle CBE} = S_{\triangle ABCD} - 2 \le 2 \text{, тобто } \frac{1}{2} AE \cdot h_1 + \frac{1}{2} EC \cdot h_2 \le 2 \text{, звідки}$$

$$\frac{1}{2} AE \cdot \frac{2}{CE} + \frac{1}{2} EC \cdot \frac{2}{AE} \le 2 \text{, або ж } \left(AE - EC \right)^2 \le 0 \text{ звідки}$$

$$AE = EC .$$

Більше того, з рівності $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CDE}$ випливає, що $BE \cdot AE = DE \cdot CE$ або ж, що

$$\frac{BE}{DE} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{1} \text{, звідки } BE = DE$$

Таким чином діагоналі даного опуклого чотирикутника $ABCD$ в точці перетину діляться навпіл. І тому такий чотирикутник є паралелограмом. І тому $BC = AD = 3$.

Відповідь: 3.

Задача №5

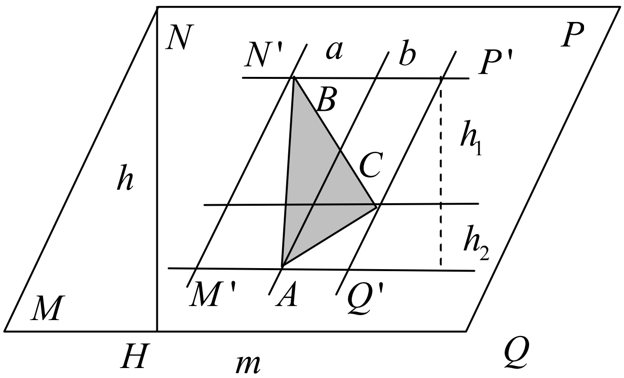
Для розв'язання даної задачі скористаємося наступним твердженням, а саме:

Якщо вершини трикутника ABC лежать всередині (або ж на границі) паралелограма $MNPQ$ зі стороною $MQ = m$ і висотою $NH = h$, то площа такого трикутника не більша за половину площі паралелограма, тобто, $S_{\triangle ABC} \le mh/2$.

Справедливість цього твердження є наслідком наступних міркувань:

Зрозуміло, що площа $S_{\triangle ABC}$ кожного трикутника, дві з вершин якого співпадають з вершинами паралелограма, а третя вершина лежить на протилежній його стороні, дорівнює $mh/2$. Тобто, існують трикутники, для яких досягається точна рівність $S_{\triangle ABC} = mh/2$.

Покажемо тепер, що площа довільного трикутника, який міститься всередині паралелограма $MNPQ$, не може перевищувати $mh/2$.



Отже, проведемо через кожну з вершин трикутника ABC прямі, паралельні сторонам паралелограма $MNPQ$.

Тоді трикутник можна обмежити паралелограмом $M'N'P'Q'$, який або цілком міститься всередині паралелограма $MNPQ$ або ж співпадає з ним. І тому площа паралелограма $M'N'P'Q'$ не може перевищувати площі паралелограма $MNPQ$.

У випадку <u>не тупокутного</u> трикутника покажемо, що його площа не може перевищувати половини площі паралелограма $M'N'P'Q'$ (у випадку тупокутного трикутника міркування аналогічні).

Згідно позначень, введених на рисунку, для площі трикутника ABC можна записати наступну рівність

$$S_{\triangle} = (a+b)\cdot(h_1+h_2) - \frac{1}{2}(a+b)h_1 - \frac{1}{2}bh_2 - \frac{1}{2}a(h_1+h_2) =$$

$$= \frac{1}{2}(a+b)\cdot(h_1+h_2) - \frac{1}{2}ah_1 \le \frac{1}{2}(a+b)\cdot(h_1+h_2) = \frac{S_{M'N'P'Q'}}{2}.$$

Оскільки $S_{M'N'P'Q'} \le mh$, то $S_{\triangle ABC} \le \dfrac{mh}{2}$.

Отже, встановлено справедливість наведеного твердження.

Перейдемо тепер до доведення твердження, сформульованого в умові даної задачі.

Розіб’ємо даний квадрат (зі стороною 1 лін.од.) на 16 рівних квадратів, площа кожного з яких дорівнює 1/16 (кв.од.). При такому розбитті маємо чотири рядки r_1, r_2, r_3, r_4 і чотири стовпці s_1, s_2, s_3, s_4, які визначають прямокутники, площа кожного з яких $1/4$ (кв.од.).

	$s1$	$s2$	$s3$	$s4$
$r1$	1	2	3	4
$r2$	5	6	7	8
$r3$	9	10	11	12
$r4$	13	14	15	16

1) За принципом Діріхлє з дев’яти відмічених довільним чином точок, що задовольняють умові задачі, рівно три точки належать одному з чотирьох рядків. І тому існує три точки (позначимо їх через A_1, A_2, A_3), що потрапляють у прямокутник, площа якого дорівнює $1/4$.

За доведеним вище твердженням площа трикутника $A_1A_2A_3$ не перевищує половини площі вказаного прямокутника. І тому $S_{\vartriangle A_1A_2A_3} \le 1/8$.

Отже, існує **ПЕРШИЙ** з трикутників, площа якого не перевищує $1/8$ (кв.од.).

Аналогічно, з дев’яти точок рівно три точки (позначимо їх B_1, B_2, B_3) належать одному стовпцю. Якщо трійка точок A_1, A_2, A_3 не співпадає з трійкою точок B_1, B_2, B_3 (серед точок A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 є принаймні чотири різні точки), то існує й **ДРУГИЙ** трикутник, площа якого не перевищує $1/8$ (кв.од.).

2) Дослідимо тепер випадок коли точки A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 співпадають (визначають один трикутник). Оскільки перетином довільного рядка і стовпця є один з шістнадцяти квадратів, то точки A_1, A_2, A_3 належать одному з таких квадратів.

Більше того, можна вважати, що в кожному рядку і стовпці, які не містять вказаний квадрат, знаходиться рівно по дві точки. Якщо це не так, то буде існувати рядок (або стовпець), що містить три точки відмінні від точок A_1, A_2, A_3.

І тому **ДРУГИЙ** шуканий трикутник буде існувати.

Отже, розглянемо три суттєво різних ситуації, а саме:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

2.1) Нехай точки A_1, A_2, A_3 належать одному з чотирьох внутрішніх квадратів (на рисунку їх позначено числами – 6, 7, 10, 11). Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що точки A_1, A_2, A_3 належать 6-му квадрату.

В останній рядок і останній стовпець може потрапити щонайбільше чотири з шести решти точок. Тому принаймні одна з двох точок (позначимо її C_0) потрапить або у 1-й, або у 3-й, або в 9-й, або ж в 11-й квадрат.

Оберемо довільні дві точки з точок A_1, A_2, A_3, наприклад A_1, A_2 Тоді три точки A_1, A_2, C_0 належать квадрату розміром $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. І тому площа трикутника $A_0B_0C_0$ не перевищує $1/8$ (кв.од.)

2.2) Припустимо тепер, що точки A_1, A_2, A_3 належать одному з чотирьох кутових квадратів (на рисунку їх позначено числами – 1, 4, 13, 16).

Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що A_1, A_2, A_3 належать 4-му квадрату.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

2.2.1) Якщо одна з двох точок третього стовпця потрапляє в 7-й квадрат, то шуканий трикутник A_1, A_2, C_0 знайдено.

2.2.2) Припустимо, що обидві точки третього стовпця потрапили в 11-й квадрат. Тоді принаймні одна з двох точок другого стовпця потрапляє в 6-й або 14-й квадрат. І тому шуканий трикутник знайдено.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

2.2.3) Припустимо, що обидві точки третього стовпця потрапили у 15-й квадрат. Якщо одна з двох точок третього рядка потрапила у 10-й квадрат, то шуканий трикутник знайдено. Тому припустимо, що обидві точки третього рядка потрапили у 9-й квадрат. Тоді обидві точки другого рядка потрапляють в 6-й квадрат. І тому шуканий трикутник знайдено.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

2.2.4) Припустимо тепер, що точки третього стовпця потрапили в 11-й і 15-й квадрат. Якщо друга точка четвертого рядка потрапила у 14-й квадрат, то шуканий трикутник знайдено.
Тому припустимо, що друга точка четвертого рядка потрапляє в 13-й квадрат. Якщо друга точка третього рядка потрапить в 10-й квадрат, то, шуканий трикутник знайдено. Тому припустимо, що друга точка третього рядка потрапляє в 9-й квадрат. Тоді точки другого стовпця можуть потрапити тільки в 6-й квадрат. І тому шуканий трикутник знайдено.

Таким чином, існує **ДРУГИЙ** трикутник $A_0B_0C_0$, площа якого не перевищує $1/8$ (кв.од.) і тому існує два різних трикутники, що задовольняють умові задачі.

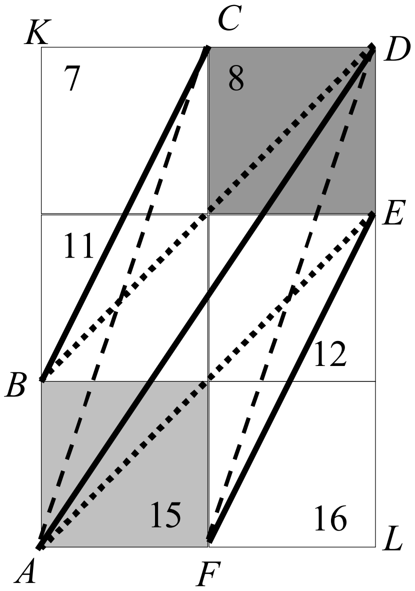
2.3) Нехай тепер точки A_1, A_2, A_3 належать одному з восьми граничних, але не кутових квадратів (на рисунку їх позначено числами – 2, 3, 5, 9, 8, 12, 14, 15).
Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що точки A_1, A_2, A_3 належать 8-му квадрату.
2.3.1) Якщо одна з двох точок третього стовпця потрапляє в 3-й або 11-й квадрат, то шуканий трикутник A_1, A_2, C_0 знайдено.

2.3.2) Припустимо, що обидві точки третього стовпця потрапили у 15-й квадрат. Якщо одна з двох точок третього рядка потрапила у 10-й квадрат, то шуканий трикутник знайдено.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Тому припустимо, що обидві точки третього рядка потрапили у 9-й квадрат. Тоді обидві точки першого рядка обов’язково потрапляють у 2-й квадрат.

Доведемо, що при довільному розташуванні трьох точок A_1, A_2, A_3 у восьмому квадраті і двох точок B_1, B_2 в п’ятнадцятому квадраті знайдуться три точки, які не співпадають з точками A_1, A_2, A_3 та визначають трикутник, площа якого не перевищує $1/8$ (кв.од.)



Отже, позначимо вершини вказаних квадратів так, як показано на рисунку. Тоді очевидно, що площа шестикутника $ABCDEF$ дорівнює $1/4$ (кв.од.). Проведемо діагональ AD.

Оскільки AD ділить площу прямокутника $AKDL$ навпіл і площа трикутника BKC дорівнює площі трикутника FEL, то $S_{ABCD} = S_{ADEF} = 1/8$ (кв.од.).

З п’яти точок A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 принаймні три точки належать або чотирикутнику $ABCD$ або ж чотирикутнику $ADEF$.

Якщо ці точки не співпадають з точками A_1, A_2, A_3, то шуканий трикутник знайдено, бо він повністю міститься в чотирикутнику, площа якого $1/8$ (кв.од.).

Якщо ж три точки A_1, A_2, A_3 належать одному з рівновеликих чотирикутників, то три шукані точки належать:

або паралелограму $ACDF$ (його площа становить $3/16$ кв.од.);

або паралелограму $ABDE$ (його площа становить $2/16$ кв.од.).

В кожному з цих випадків площа вписаного трикутника не перевищує половини площі відповідного паралелограма. І тому менша за величину $4/32 = 1/8$ (кв.од.).

Отже, існує **ДРУГИЙ** трикутник (вершини якого не співпадають з точками A_1, A_2, A_3) площа якого не перевищує $1/8$ (кв.од.)

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Физматкнига, **2006**. – 320с.
2. Агаханов Н.Х., Терешин Д.А., Кузнецова Г.М. Школьные математические олимпиады. М.: Дрофа, **1999**. – 128с.
3. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад **1975**. – 112с.
4. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Заочные математические олимпиады. 2-е изд., М., **1987**. – 176с.
5. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад (Библиотека математического кружка, выпуск 18) М.: «Наука», **1988**. – 288с.
6. Вышенский В.А., Карташев Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И. Сборник задач киевских математических олимпиад, Киев, **1984**. – 240с.
7. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. М.: «Просвещение», **1986**. – 303с.
8. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. Киров: Аса, **1994**. – 272с.
9. Германович П.Ю. Сборник задач по математике на сообразительность. Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, **1960**. – 224с.
10. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике, М.: МЦНМО, **2005**. – 560с.
11. Довбыш Р.И., Потемкина Л.Л., Трегуб Н.Л., Лиманский В.В., Оридорога Л.Л., Кулеско Н.А. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями. – Донецк: ООО ПКФ «БАО», **2005**. – 336с.
12. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. Изд. 3-е, испр./ Под редакцией В.О. Бугаенко. М.: МЦНМО, **2004**. – 96с.
13. Коваль Т.В. 400 задач з математичних олімпіад. 8–11 класи. – Тернопіль: Мандрівець, **2004.** – 80с.
14. Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др. Зарубежные математические олимпиады. Под ред. И.Н. Сергеева (Серия Библиотека математического кружка) М.: «Наука», **1987**. – 416с.
15. Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я. Венгерские математические олимпиады. Перевод с венгерского Ю.А. Данилова под редакцией и с предисловием В.М. Алексеева. М.: Мир, **1976**. – 544с.
16. Леман А.А. Сборник задач Московских математических олимпиад. М.: «Просвещение», **1965**. – 384 с.
17. Лось В.М., Тихієнко В.П. Математика: навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач: Навч. посібник. – К.: Кондор, **2005** – 312с.
18. Морозова Е.А. и др. Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги. Пособие для учащихся, 4-е изд., испр. и дополн., М., **1976**. – 288с.
19. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников. Пособие для учителей М.: «Просвещение», **1982**. – 96с.
20. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Изд. 5-е испр. и доп. (совместно с ОАО «Московские учебники») М.: МЦНМО, **2006**. – 640с.
21. Рожков В.И., Курдеванидзе Г.Д., Панфилов Н.Г. Сборник задач математических олимпиад. – М.: Ун-т дружбы народов, **1987**. – 28с.
22. Савин А.П. и др. Физико-математические олимпиады. Сборник. М.: «Знание», **1977**. – 160с.

23. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., **2005**. – 344с.
24. Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике. М.: Просвещение, **2002.** – 208с.
25. Страшевич С., Бровкин Е. Польские математические олимпиады. Перевод с польского Ю.А.Данилова (серия «Математические олимпиады») М., «Мир», **1978**. – 338с.
26. Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В. Московские математические олимпиады 1993-2005 г. / Под ред. В.М.Тихомирова. М.: МЦНМО, **2006. –** 456с.
27. Фомин А.А., Кузнецова Г.М. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады – М.: Дрофа, **2006**. – 159с.
28. Яковлев Г.Н., Купцов Л.П., Резниченко С.В., Гусятников П.Б. Всероссийские математические олимпиады школьников. М.: Просвещение, **1992.** – 383с.
29. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язання . –Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, **2005.** – 208с.
30. Ясінський В.А. Олімпіадні задачі. Випуск 1: Навчальний посібник – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, **2004.** – 40с.
31. Ященко И.В. Приглашение на математический праздник. 2-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, **2005**. – 104с.

Internet ресурси

1. **Київські олімпіади з математики – http://www.matholymp.kiev.ua/index.php**
2. **"Математические олимпиады и олимпиадные задачи"** (декілька тисяч олімпіадних задач російських і міжнародних математичних змагань) – **http://zaba.ru/**.
3. **Фізико-математичний журнал "Квант"** (завдання різних математичних олімпіад за 1971–2002рр) **– http://kvant.mccme.ru**
4. **Соросівська олімпіада для учнів – http://issep.rssi.ru**.
5. **International Mathematical Olympiad – http://imo.math.ca/**

Видавець СПД Маторін Б.І.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої продукції ДЦ №74, видане Державним комітетом інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України від 10.02.2004 р.

Підписано до друку 15.02.2008
Формат 40×84 1/16. Ум. др. Арк.. 2, 5.
Зам. №71. Тираж 200 прим.

84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс (06262) 3–20–69

Слов'янський державний педагогічний університет
– один із престижних та прогресивних вищих навчальних закладів України.

СДПУ більш як 65 років посідає провідні позиції на ринку освітніх послуг.

З нашого університету розпочинається історія розвитку вищої педагогічної освіти в Донбасі.

СЕРІЯ: ВИКЛАДАЧІ СДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ

РОЗВ′ЯЗАННЯ ЗАДАЧ II ЕТАПУ

ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ – 2007

До уваги абітурієнтів

Слов'янський державний педагогічний університет оголошує прийом студентів на **2008 – 2009** навчальний рік на денну та заочну форми навчання для підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційними рівнями

бакалавр, спеціаліст, магістр

за рахунок коштів державного бюджету, фізичних і юридичних осіб.

Строки навчання: бакалавр – 4 роки;
спеціаліст – 1 рік на базі бакалавра;
магістр – 1 рік на базі бакалавра, спеціаліста.

ПЕРЕЛІК
сертифікатів (вступних випробувань) **УКРАЇНСЬКОГО ЦЕНТРУ ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ОСВІТИ**,
які будуть зараховуватися для конкурсного відбору вступників на підготовку за напрямами (спеціальностями) для здійснення прийому на

фізико-математичний факультет

Слов'янського державного педагогічного університету в 2008 році:

Напрям підготовки. Спеціалізація	**Сертифікати. Вступні випробування**
6.040201 **Математика**. Спеціалізація: **основи інформатики**	1) українська мова та література (сертифікат), 2) математика (сертифікат)
6.040203 **Фізика.** Спеціалізація: **основи інформатики**	1) українська мова та література (сертифікат), 2) фізика (сертифікат) або математика (сертифікат)

Контактна інформація

84116, Донецька область, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Приймальна ректора: (06262) 3-23-54
Приймальна комісія: (06262) 3-97-50
Деканат фізико-математичного факультету
Тел.: (06262) 3-26-59