СЛОВ'ЯНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

СЕРІЯ: ВИКЛАДАЧІ СДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ...

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II етапу
Всеукраїнської олімпіади
з математики – 2008

ВИПУСК 2

Умови

Відповіді

Розв′язання

Слов'янськ – 2009

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ – 2008

6 – 11 класи

Слов'янськ – 2009

Серія заснована у 2008 році

УДК 371.384:51 (076)
ББК 22.1
О – 543

Беседін Б.Б., Кадубовський О.А., Плесканьова Л.Г., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2008 (ВИПУСК 2, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям...): Навчальний посібник – Слов'янськ, 2009. – 44 с.

Адресовано в першу чергу вчителям математики, як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням та студентам математичних факультетів педагогічних вузів.

РОЗГЛЯНУТО
ТА РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ
в якості навчального посібника для проведення факультативних занять з математики
НА ЗАСІДАННІ

– Вченої ради фізико-математичного факультету СДПУ (протокол № 4 від 24.12.2008 р.)

– Вченої ради Слов'янського державного педагогічного університету (протокол № 5 від 30.12.2008 р.)

Рецензенти: кандидат фіз.-мат. наук ЖУЧОК Ю.В., Інститут інформаційних технологій Луганського національного університету імені Тараса Шевченка, доцент кафедри математичного аналізу та алгебри

кандидат фіз.-мат. наук СІЛІН Є.С., Слов'янський державний педагогічний університет, старший викладач кафедри економіко-математичних дисциплін.

Відповідальний за випуск: кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри ГМВМ Кадубовський О.А.

ВІД АВТОРІВ

„Математика – це мистецтво
розв'язувати задачі,
які розв'язувати не вмієш"

„Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!"
Д. Пойа[1].

Даний посібник є **другим** випуском серії **„ВИКЛАДАЧІ СДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ..."** заснованої у 2008 році. Посібник містить розв'язання задач ІІ етапу (районного) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, який проводився 16 листопада 2008 року відповідно до наказу УОН № 642 від 23.10.2008 р.

Як і в першому випуску для більшості задач олімпіади пропонується кілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого з запропонованих методів.

Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в деякому розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головна мета авторів посібника – «донести» до вчителів і учнів якомога більше корисних математичних ідей і принципів та показати їх застосування.

Нагадаємо, що принципами в математиці називають деякі прості, майже очевидні, твердження, аксіоми або методи, які використовуються в доведеннях математичних теорем. Дуже часто з ними зустрічаються і учні при розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Перш за все учні, які беруть участь в олімпіадах, повинні володіти значною кількістю принципів. Нажаль шкільна програма не передбачає знайомства з більшістю з них. З основними математичними принципами можна ознайомить в наведеній літературі, зокрема в [13][2].

[1] **Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 452 с.**
[2] **Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2005. – 344с.**

Від авторів

В посібнику до окремих задач наводяться „доповнення”, сенс яких полягає: у формулюванні двоїстої або схожої задачі,

або ж в узагальненні запропонованої задачі.

На думку авторів такі доповнення повинні активізувати і зацікавити учнів при підготовці до майбутніх олімпіад.

Автори посібника та керівництво фізико-математичного факультету СДПУ висловлює щиру подяку всім вчителям міста Слов’янськ, які беруть участь в організації та проведенні як учнівських олімпіад з математики, так і семінарів, присвячених аналізу їх результатів. Особливу подяку автори посібника висловлюють вчителю Слов’янського педагогічного ліцею Ганзері Ганні Олександрівні за організацію та проведення семінарів з розв’язування олімпіадних задач.

Автори мають надію, що представлений посібник буде корисним не лише керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням, а й стане для багатьох з них поштовхом для більш глибокого вивчення математики в цілому.

Вчіться творити та винаходити в процесі розв’язування задач! З найщирішими побажаннями, викладачі кафедри геометрії та методики викладання математики фізико-математичного факультету Слов’янського державного педагогічного університету.

31.12.2008

ЗМІСТ

ВІД АВТОРІВ 3
УМОВИ ЗАДАЧ 6
6 клас 6
7 клас 6
8 клас 7
9 клас 7
10 клас 8
11 клас 8
ВІДПОВІДІ 9
ПОВНІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ 10
6 клас 10
7 клас 12
8 клас 16
9 клас 21
10 клас 28
11 клас 33
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА 44

УМОВИ ЗАДАЧ

6 клас

1. (15 балів) Є два числа. Яке з чисел більше та на скільки, якщо 5% першого числа дорівнюють 15, а 8% від другого дорівнюють 16?
2. (15 балів) О 9 годині ранку зі станції A вирушив пасажирський поїзд, а слідом за ним об 11 годині з тієї ж станції вирушив швидкий поїзд. На якій відстані від станції A пасажирський поїзд повинен пропустити швидкий поїзд, якщо швидкість пасажирського поїзда 54 км/год, а швидкого – 72 км/год?
3. (20 балів) Довести, що сума двох послідовних непарних чисел ділиться на 4.
4. (20 балів) Яку найбільшу кількість однакових подарунків можна скласти з 320 горіхів, 240 цукерок і 200 пряників? Скільки цукерок, горіхів й пряників буде в кожному подарунку?
5. (30 балів) По колу вписали 2003 натуральних числа. Доведіть, що знайдуться два сусідніх числа, сума яких парна.

7 клас

1. (15 балів) Дано три точки $M(-2;3)$, $B(-2;6)$, $A(6;6)$. Побудуйте точку K, яка є вершиною прямокутника $MBAK$. Знайдіть площу цього прямокутника.
2. (15 балів) Білка за 20 хвилин приносить горіх до дупла. Яку відстань при цьому вона пробігає, якщо без горіха вона біжить зі швидкістю 5 м/с., а з горіхом 3 м/с.
3. (20 балів) Зі 100 учнів ліцею 28 вивчають англійську мову, 30 – німецьку, 42 – французьку, 8 – англійську і німецьку, 10 – французьку і англійську, 5 учнів – німецьку і французьку, 3 – вивчають усі три мови. Скільки учнів вивчають лише англійську, лише французьку, лише німецьку? Скільки учнів не вивчають жодної мови?
4. (20 балів) У шестицифровому числі перша цифра співпадає з четвертою, друга – з п’ятою, а третя – з шостою. Доведіть, що це число кратне 7, 11 і 13.
5. (30 балів) На столі лежать 18 олівців. Двоє учнів по черзі беруть один, два або три олівці. Програє той, хто візьме останній олівець. Як повинен грати перший учень, щоб виграти?

8 клас

1. (15 балів) Коли турист пройшов 1 *км* та половину решти шляху, то з'ясувалося, що до кінця ще $\frac{1}{3}$ всього шляху та ще 1 *км*. Знайдіть довжину всього шляху.
2. (15 балів) У трикутнику ABC бісектриса з вершини A, висота з вершини B та серединний перпендикуляр до сторони AB перетинаються в одній точці. Знайдіть величину кута A.
3. (20 балів) Розв'яжіть рівняння: $\left|2|x-1|-3\right|=5$.
4. (20 балів) Сума трьох цілих чисел ділиться на 6. Довести, що й сума кубів цих чисел ділиться на 6.
5. (30 балів) На площині дано шість точок загального положення (жодні три з них не лежать на одній прямій). Кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього кольору. Довести, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають один колір.

9 клас

1. (15 балів) Доведіть рівність: $\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
2. (15 балів) Цілі числа a, b, c і d задовольняють умові $\frac{a-b}{c-d}=\frac{a+b}{c+d}$. Чи може добуток $abcd$ дорівнювати 1000?
3. (20 балів) Натуральні числа n та m такі, що $(4m-n)(n+m)=6m^2$. Довести, що n ділиться на m.
4. (20 балів) Нехай BB_1 та CC_1 – висоти гострокутного трикутника ABC з кутом A, що дорівнює 30^0, B_2 та C_2 – середини сторін AC та AB відповідно. Доведіть, що відрізки B_1C_2 та B_2C_1 перпендикулярні.
5. (30 балів) У нескінченному місті усі квартали – квадрати одного розміру. Велосипедист стартував з перехрестя вулиць. Через півхвилини за ним поїхав інший велосипедист. Кожен їде з постійною швидкістю 1 квартал у хвилину і на кожному перехресті вулиць повертає або направо, або наліво. Чи можуть вони зустрітися?

УМОВИ ЗАДАЧ

10 клас

1. (15 балів) Відомо, що $x^2+y^2+\frac{1}{2}\le x+y$. Довести, що $x+y=1$.
2. (15 балів) На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC взяли точки M та N такі, що $AC=AM$ і $BC=BN$. Доведіть, що кут MCN дорівнює 45^0.
3. (20 балів) Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$
4. (20 балів) Дискримінант D квадратного тричлена $P(x)=x^2+px+q$ додатний. Скільки коренів може мати рівняння $P(x)+P\left(x+\sqrt{D}\right)=0$?
5. (30 балів) Числа 1, 2, 3, …, 25 розташовують у квадратній таблиці 5×5 так, щоб у кожному рядку числа були розміщені у порядку зростання. Яке найменше значення може мати сума чисел у третьому стовпчику?

11 клас

1. (15 балів) Функція $f(x)$ має вигляд $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, де a, b, c, d – деякі числа. Відомо, що $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=3$. Чому дорівнює $f(3)$?
2. (15 балів) Довести, що якщо $\cos x\neq 0$, то $\left|\dfrac{\cos 2x+3}{\cos x}\right|\ge 4$.
3. (20 балів) Відрізок CH – висота прямокутного трикутника ABC, яка проведена до гіпотенузи AB. Точки O_1, O_2 і O – є центрами вписаних кіл трикутників ACH, BCH і ABC відповідно. Довести, що $CO\perp O_1O_2$ і $CO=O_1O_2$.
4. (20 балів) Нехай a, b, c і d – довільні числа, сума яких дорівнює 1. Доведіть, що
$$a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd-2da\ge -\frac{1}{4}.$$
5. (30 балів) На дошці записані числа: a, b, c, d. Кожну секунду вони змінюються на числа $a+b,\ b+c,\ c+d,\ d+a$. Через деякий час знову дістали початкові числа: a, b, c, d. Доведіть, що $a=b=c=d=0$.

ВІДПОВІДІ

6 клас

1) Перше число дорівнює 300, а друге – 200 і тому перше число більше другого;
2) пасажирський поїзд повинен пропустити швидкий поїзд на відстані 432 *км* від станції А;
4) Найбільша кількість однакових подарунків які можна скласти з 320 горіхів, 240 цукерок і 200 пряників становить 40. В кожному подарунку буде 8 горіхів, 6 цукерок і 5 пряників.

7 клас

1) $K=(6;3)$, $S_{MBAK}=24$ (кв. од.);
2) 4500 м;
3) З усіх учнів класу 13 вивчають лише англійську, 20 – лише німецьку, 30 – лише французьку, 20 учнів не вивчають жодної мови;
5) Щоб виграти перший повинен грати наступним чином:

першого разу перший гравець повинен взяти 1 олівець, а при кожному наступному виборі керуватися правилом:

«якщо другий візьме 1 олівець, то перший повинен взяти 3 олівці,
якщо другий візьме 2 олівці, то перший повинен взяти також 2 олівці,
якщо другий візьме 3 олівці, перший повинен взяти 1 олівець».

8 клас

1) Довжина всього шляху становить 9 *км*.
2) $\angle A = 60^0$;
3) $x_1=-3$; $x_2=5$.

9 клас

2) Ні.
5) Ні.

10 клас

3) $x=1$, $y=1$, $z=1$;
4) Єдиний корінь $x=-\dfrac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$.
5) 45.

11 клас

1) $f(3)=2$;

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

6 клас

Задача №1

Нехай перше число дорівнює X, а друге – Y. Тоді:
оскільки 5% першого числа дорівнюють 15, то $\frac{5}{100}X = 15$. Звідки $X = 300$.
Оскільки 8% від другого числа дорівнюють 16, то $\frac{8}{100}Y = 16$. Звідки $Y = 200$.

Таким чином, перше число більше другого на 100.

Відповідь: перше число більше другого на 100.

Задача №2

Нехай t – час руху пасажирського потягу до моменту, коли він повинен пропустити швидкий потяг. Тоді швидкий потяг до вказаної події рухався $t-2$ години.

Оскільки на момент зазначеної події кожен з них подолав однакову відстань, то має місце рівність $54 \cdot t = 72 \cdot (t-2)$.
Розв’яжемо одержане рівняння

$$54 \cdot t = 72 \cdot (t-2);$$
$$54t = 72t - 144;$$
$$72t - 54t = 144;$$
$$18t = 144;$$
$$t = \frac{144}{18} = 8.$$

Таким чином, пасажирський поїзд повинен пропустити швидкий поїзд через 8 годин з моменту руху зі станції A о 9-ій годині ранку.
І тому за ці 8 годин пасажирський поїзд подолає відстань $S = 54 \cdot 8 = 432$ *км*.

Отже, на відстані 432 *км* від станції A, швидкий поїзд наздожене пасажирський.

Відповідь: швидкий поїзд наздожене пасажирський на відстані 432 *км* від станції A.

Задача №3

Оскільки довільне непарне число a можна подати у вигляді $2n-1$ ($n \in \mathbb{N}$), то наступне за ним непарне число b має вид

$$a+2=2n-1+2=2n+1.$$

І тому сума S двох послідовних непарних чисел a і b дорівнює

$$S=(2n-1)+(2n+1)=4n.$$

З того, що число S має вид $S=4\cdot n$ випливає, що S ділиться на 4.

Таким чином, сума двох послідовних непарних чисел ділиться на 4.

Задача №4

Нехай x – найбільша кількість подарунків, яку можна скласти з 320 горіхів, 240 цукерок і 200 пряників так, щоб не залишилося жодного горіха, цукерки або пряника. Тоді кожне з цих чисел повинно ділитися на натуральне число x. Тобто, x є спільним дільником чисел 320, 240 і 200.

Оскільки x – найбільша кількість подарунків (які можна скласти у вказаний спосіб), то число x повинно бути найбільшим спільним дільником чисел 320, 240 і 200. Отже, $x=\text{НСД}(320,240,200)$.

Оскільки $320=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5$, $240=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5$, $200=2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5$, то

$$x=\text{НСД}(320,240,200)=2\cdot2\cdot2\cdot5=40.$$

Таким чином, найбільша кількість однакових подарунків, які можна скласти з 320 горіхів, 240 цукерок і 200 пряників, становить 40. В кожному подарунку буде $\frac{320}{40}=8$ горіхів, $\frac{240}{40}=6$ цукерок і $\frac{200}{40}=5$ пряників.

Відповідь: Найбільша кількість однакових подарунків, які можна скласти з 320 горіхів, 240 цукерок і 200 пряників, становить 40. В кожному подарунку буде 8 горіхів, 6 цукерок і 5 пряників.

Задача №5

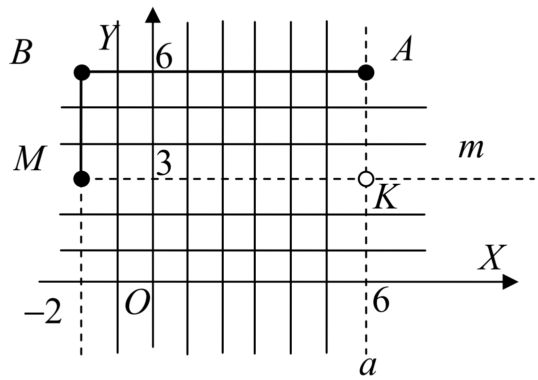
За умовою задачі по колу вписали 2003 натуральних числа. Доведемо, що знайдуться два сусідніх числа, сума яких є парною.

Найбільша кількість чисел (з 2003 заданих довільних натуральних чисел), яку можна розташувати по колу, так щоб жодна пара сусідніх чисел в сумі не давала парного числа, дорівнює 2002. Це випадок, коли маємо 1001 парне і 1001 непарне число, які чергуються на колі (парне, непарне, парне,...).

2003-тє натуральне число буде або парним, або непарним. При будь-якому його розташуванні на колі воно обов'язково потрапить між парним і непарним числом. Тобто, на колі обов'язково з'явиться пара сусідніх чисел, які мають однакову парність і тому в сумі дадуть парне число.

7 клас

Задача №1



Побудуємо три задані точки $M(-2;3)$, $B(-2;6)$ і $A(6;6)$ в прямокутній системі координат XOY.
З’єднаємо відрізками точки M і B та B і A.
Оскільки точка K є вершиною прямокутника $MBAK$, то $KM \perp BM$, $KA \perp BA$.
Побудуємо шукану точку K.

Для цього за допомогою косинця[3] проведемо:
1) через точку M пряму m перпендикулярно прямій BM;
2) через точку A – пряму a перпендикулярно прямій BA.

Тоді шукана точка K є точкою перетину прямих m і a. Більше того, оскільки на прямій a лежать точки, перша координата яких дорівнює 6, а на прямій m – точки, друга координата яких дорівнює 3, то координатами точки K є пара чисел $(6;3)$.

Обчислимо тепер площу прямокутника $MBAK$.
Оскільки $MB = 3$ одиничних відрізки, а $BA = 6 + 2 = 8$ одиничних відрізків, то за відомою формулою площа S цього прямокутника дорівнює

$$S = MB \cdot BA = 3 \cdot 8 = 24 \text{ (кв. од.)}.$$

Зауважимо, що площа вказаного прямокутника залежить не лише від координат його вершин, а й від вибору одиничного відрізка на координатних осях.
Відповідь: 24 (кв. од.).

Задача №2

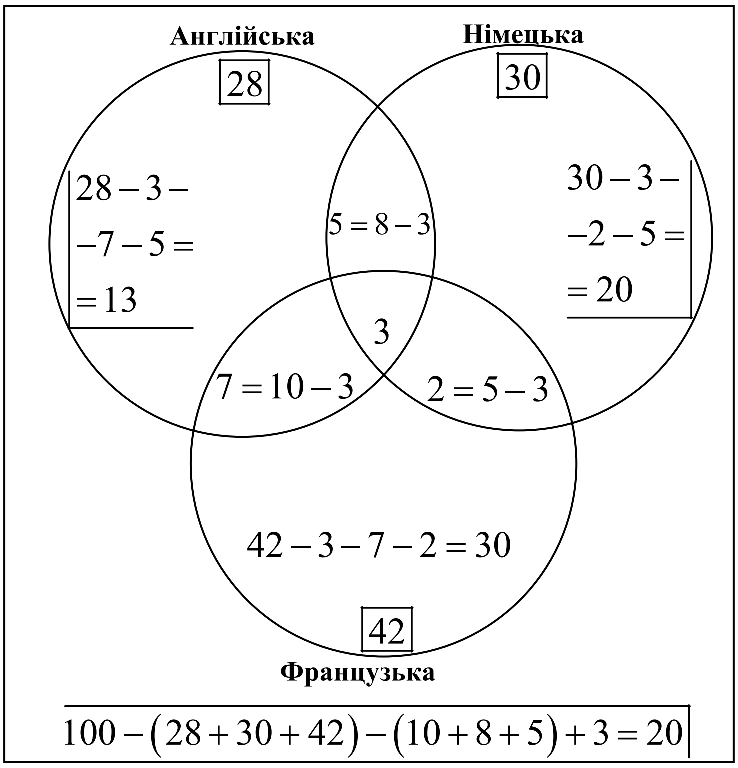
Нехай S – відстань, яку білка долає від своєї домівки (пункт A) до місця з горіхами (пункт B). Тоді відстань S від A до B білка без горіха долає за $\frac{S}{5}$ секунд. Відстань S від B до A білка з горіхом долає за $\frac{S}{3}$ секунд.

За умовою задачі на всю подорож за горіхом (шлях від A до B і назад) білка витрачає 20 хвилин або ж $20 \cdot 60 = 1200$ секунд. Тому має місце рівність $\frac{S}{5} + \frac{S}{3} = 1200$. Звідки $\frac{8}{15}S = 1200$ або ж $S = \frac{1200}{8} \cdot 15 = 150 \cdot 15 = 2250$.
Таким чином, при поході за горіхом і назад білка долає відстань 4500 метрів.
Відповідь: 4500 метрів.

[3] Косинець – геометричний інструмент у вигляді трикутника з прямим кутом

Задача №3

1) З'ясуємо спочатку питання: скільки учнів вивчають точно по дві мови.



1.1) Оскільки англійську і німецьку вивчають всього 8 учнів, з яких троє – усі три мови, то $5=8-3$ учнів вивчають точно дві мови – англійську і німецьку.

1.2) Оскільки англійську і французьку вивчають всього 10 учнів, з яких троє – усі три мови, то $7=10-3$ учнів вивчають точно дві мови – англійську і французьку.

1.3) Оскільки німецьку і французьку вивчають всього 5 учнів, з яких троє – усі три мови, то $2=5-3$ учні вивчають точно дві мови – німецьку і французьку.

2) З'ясуємо тепер питання про те, скільки учнів вивчають виключно по одній мові.

2.1) Оскільки англійську мову всього вивчають 28 учнів ліцею, з яких 5 виключно англійську і німецьку, 7 – виключно англійську і французьку та 3 – усі три мови, то виключно англійську мову вивчають $28-3-7-5=13$ (учнів).

2.2) Оскільки німецьку мову всього вивчають 30 учнів ліцею, з яких 5 виключно німецьку і англійську, 2 – виключно німецьку і французьку та 3 – усі три мови, то виключно німецьку мову вивчають $30-3-2-5=20$ (учнів).

2.3) Оскільки французьку мову всього вивчають 42 учнів ліцею, з яких 2 виключно французьку і німецьку, 7 – виключно французьку і англійську та 3 – усі три мови, то виключно французьку мову вивчають $42-3-2-7=30$ (учнів).

Таким чином, хоча б одну іноземну мову вивчають $(13+20+30)+(7+5+2)+3=80$ (учнів).

І тому жодної іноземної мови не вивчають всього $100-80=20$ учнів ліцею.

Відповідь: 13 учнів вивчають лише англійську; 20 учнів вивчають лише німецьку; 30 учнів вивчають лише французьку; 20 учнів не вивчають жодної мови.

Розв'язання задач

Доповнення.

Дана задача відноситься до задач, розв'язування яких спрощується при застосуванні так званого принципу «включення і виключення». Цей принцип полягає у наступному.

Нехай N – кількість учнів певного класу, а SP_1 і SP_2 – назви двох спортивних секцій, що діють при школі. Нехай далі:

N_1 – кількість учнів класу, які займаються в секції SP_1 та, можливо, в секції SP_2,

N_2 – кількість учнів класу, які займаються в секції SP_2 та, можливо, в секції SP_1,

$N_{1,2}$ – кількість учнів, що займаються в двох секціях SP_1 і SP_2 одночасно,

$\overline{N}$ – кількість учнів, які не займаються в жодній зі спортивних секцій.

Тоді справджується рівність

$$\overline{N} = N - \left(N_1 + N_2\right) + N_{1,2}. \tag{7.3.1}$$

Більше того, якщо позначити через K_1 (K_2) кількість учнів, які займаються виключно в одній секції SP_1 (SP_2), то мають місце рівності

$$\begin{cases} K_1 = N_1 - N_{1,2} \\ K_2 = N_2 - N_{1,2} \end{cases}. \tag{7.3.2}$$

Нехай, як і раніше, N – кількість учнів певного класу, а SP_1, SP_2 і SP_3 – назви трьох спортивних секцій, що діють при школі. Нехай далі:

N_i – кількість учнів класу, які займаються в секції SP_i ($i = 1,2,3$) та, можливо, ще й в інших секціях;

$N_{i,j}$ – кількість учнів, що займаються в двох секціях SP_i і SP_j ($i \neq j$, $i,j = 1,2,3$) одночасно, та, можливо, ще й в іншій – третій секції.

$N_{1,2,3}$ – кількість учнів, що займаються в трьох секціях SP_1, SP_2 і SP_3 одночасно,

$\overline{N}$ – кількість учнів, які не займаються в жодній зі спортивних секцій.

Тоді справджується рівність

$$\overline{N} = N - \left(N_1 + N_2 + N_3\right) + \left(N_{1,2} + N_{1,3} + N_{2,3}\right) - N_{1,2,3}. \tag{7.3.3}$$

Більше того, якщо позначити

через K_i – кількість учнів, які займаються виключно в одній секції SP_i ($i = 1,2,3$), а

через $K_{i,j}$ – кількість учнів, які займаються, виключно в двох секціях SP_i та SP_j ($i \neq j$, $i,j = 1,2,3$) одночасно, то мають місце рівності

$$\begin{cases} K_{1,2} = N_{1,2} - N_{1,2,3} \\ K_{1,3} = N_{1,3} - N_{1,2,3} \\ K_{2,3} = N_{2,3} - N_{1,2,3} \\ K_1 = N_1 - K_{1,2} - K_{1,3} - N_{1,2,3} = N_1 - \left(N_{1,2} + N_{1,3}\right) + N_{1,2,3} \\ K_2 = N_2 - K_{1,2} - K_{2,3} - N_{1,2,3} = N_2 - \left(N_{1,2} + N_{2,3}\right) + N_{1,2,3} \\ K_3 = N_3 - K_{1,3} - K_{2,3} - N_{1,2,3} = N_3 - \left(N_{1,3} + N_{2,3}\right) + N_{1,2,3} \end{cases}. \tag{7.3.4}$$

Формули (7.3.1), (7.3.3) (та їх аналоги на випадок більшої кількості „спортивних секцій”) називають формулами **включення–виключення**, бо:

спочатку виключаються всі елементи, які мають хоча б одну з властивостей,
потім включаються елементи, які мають принаймні дві властивості,
виключаються елементи які мають, принаймні три властивості і так далі.

Метод розв'язування задач за допомогою формул (7.3.1) – (7.3.4) та їх аналогів на більш загальний випадок називають **методом включення і виключення**.

Задача №4

Нехай x – задане шестицифрове число. Оскільки за умовою перша цифра числа співпадає з четвертою, друга – з п’ятою, а третя – з шостою, то число x можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} x = \overline{abcabc} &= a\cdot 100000 + b\cdot 10000 + c\cdot 1000 + a\cdot 100 + b\cdot 10 + c = \\ &= a\cdot(100000+100) + b\cdot(10000+10) + c\cdot(1000+1) = \\ &= a\cdot 100\cdot 1001 + b\cdot 10\cdot 1001 + c\cdot 1001 = \\ &= 1001\cdot(a\cdot 100 + b\cdot 10 + c) = 7\cdot 11\cdot 13\cdot(100a+10b+c) \end{aligned}$$

Таким чином, оскільки задане число має вид $x = 7\cdot 11\cdot 13\cdot(100a+10b+c)$, то воно кратне числам 7, 11 і 13.

Задача №5

Для того щоб, згідно з правилами гри, перший учень виграв, на останньому – k-му своєму кроці він повинен залишити 1 олівець (для другого). Для того, щоб йому це вдалося, на передостанньому – $(k-1)$-му кроці він повинен залишити для другого 5 олівців:

якщо другий учень на $(k-1)$-му кроці візьме 1 олівець, то перший на останньому k-му кроці повинен взяти 3 олівця;

якщо другий учень на $(k-1)$-му кроці візьме 2 олівця, то перший на останньому k-му кроці повинен взяти 2 олівця;

якщо другий учень на $(k-1)$-му кроці візьме 3 олівця, то перший на останньому k-му кроці повинен взяти 1 олівець.

Так само, для того, щоб після $(k-1)$-го кроку першому вдалося залишити для другого 5 олівців, після $(k-2)$-го кроку перший повинен залишити для другого 9 олівців:

якщо другий учень на $(k-2)$-му кроці візьме 1 олівець, то перший на останньому $(k-1)$-му кроці повинен взяти 3 олівця;

якщо другий учень на $(k-2)$-му кроці візьме 2 олівця, то перший на останньому $(k-1)$-му кроці повинен взяти 2 олівця;

якщо другий учень на $(k-2)$-му кроці візьме 3 олівця, то перший на останньому $(k-1)$-му кроці повинен взяти 1 олівець.

Продовжуючи вказані міркування маємо, що перший учень для гарантованого виграшу в даній грі повинен залишати після себе „в зворотному напрямку” 1; 5; 9; 13; 17 олівців.

Отже, перший учень, щоб виграти, повинен грати наступним чином:
першого разу він повинен взяти 1 олівець (бо 1 – це остача від ділення числа $17=(18-1)$ на число 4).

при кожному наступному виборі керуватися правилом:

«якщо другий візьме 1 олівець, то перший повинен взяти 3 олівці,
якщо другий візьме 2 олівці, то перший повинен взяти 2 олівці,

якщо другий візьме 3 олівці, то перший повинен взяти 1 олівець».

Доповнення.

Як повинен грати перший учень, щоб виграти, якщо олівців не 18 а, наприклад, 23 (17)?

Якою повинна бути стратегія першого гравця (щоб виграти), якщо при заданій кількості олівців (18) кожному з гравців дозволяється на кожному кроці брати не більше 4-ьох (5-ти) олівців?

Якою повинна бути стратегія першого гравця (щоб виграти), якщо при заданій кількості олівців $n \neq 4k+1$ кожному з гравців дозволяється на кожному кроці брати не більше m ($m < n$) олівців?

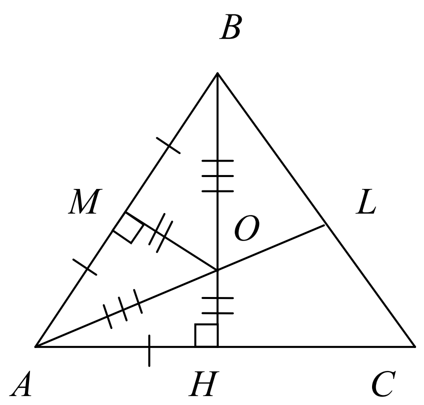
8 клас

Задача №1

Нехай S – довжина всього шляху. За умовою коли турист пройшов 1 (км) та половину решти шляху $\frac{S-1}{2}$, то з'ясувалося, що до кінця залишилося ще $\frac{1}{3}$ всього шляху S та ще 1 (км) або, що те ж саме, $\frac{1}{3}S+1$ (км). Тому має місце рівність $\left(1+\frac{S-1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}S+1\right)=S$, звідки $2+\frac{3\left(S-1\right)+2S}{6}=S$ або ж $5S-3=6S-12$. Тому $S=9$.

Відповідь: Довжина всього шляху становить 9 (км).

Задача №2



Нехай у трикутнику ABC бісектриса AL кута A, висота BH та серединний перпендикуляр до сторони AB в точці M перетинаються в точці O.

Тоді за властивістю бісектриси кута (трикутника) маємо, що $OH = OM$. Звідки випливає що прямокутні трикутники AMO і AHO рівні за катетом і гіпотенузою.

Оскільки OM є одночасно і висотою і медіаною трикутника AOB, то трикутник AOB є рівнобедреним з основою AB. Тому $\angle BAO = \angle ABO$.

Таким чином, з урахуванням рівності вказаних трикутників, маємо рівність відповідних кутів, а саме: $\angle HAO = \angle BAO = \angle ABO$.

Оскільки $\angle HAO + \angle BAO + \angle ABO = 90^0$, то кожен з кутів $\angle HAO, \angle BAO, \angle ABO$ дорівнює 30^0. Тому $\angle A = 60^0$.

Відповідь: $\angle A = 60^0$.

Задача №3

<u>І спосіб.</u>

За властивістю модуля маємо наступні рівняння

$2|x-1|-3=5$ або $2|x-1|-3=-5$;

Розв'яжемо кожне з них:

$|x-1|=4$ $\qquad$ $|x-1|=-1$;

$x-1=4$ або $x-1=-4$ $\qquad$ $x\in\varnothing$.

$x=5$ $\qquad$ $x=-3$

<u>ІІ спосіб.</u>

Нехай $|x-1|=t$, $t\geq 0$. Тоді дане рівняння $\big|2|x-1|-3\big|=5$ набуває вид $|2t-3|=5$.

Піднесемо обидві частини останнього рівняння до другого степеня та розв'яжемо одержане квадратне рівняння: $4t^2-12t+9=25$;

$t^2-3t-4=0$;

$(t+1)(t-4)=0$.

$t_1=-1$ не задовольняє умові $t\geq 0$. А тому $t=4$. Звідки $|x-1|=4$.

Таким чином, $x-1=4$ або $x-1=-4$. Звідки $x_1=-3$; $x_2=5$.

Відповідь: $x_1=-3$; $x_2=5$.

Задача №4

<u>І спосіб.</u>

Нехай x,y,z – вказані цілі числа. Тоді $(x+y+z)=6\cdot k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Оскільки $(x+y+z)^3=(x+(y+z))^3=x^3+3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+(y+z)^3=$

$=x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+3yz(y+z)=$

$=(x^3+y^3+z^3)+3(y+z)(x^2+x(y+z)+yz)=$

$=(x^3+y^3+z^3)+3(y+z)(x(x+y+z)+yz)=$

$=(x^3+y^3+z^3)+3x(x+y+z)+3x(y+z)yz$,

то $(x^3+y^3+z^3)=6\cdot(36k^3)-3x(x+y+z)-3x(y+z)yz=$

$=6\cdot(36k^3)-6(3kx)-3(y+z)xyz$

Для довільних двох цілих чисел y і z або їх сума $(y+z)$ ділиться на два, або ж їх добуток yz ділиться на два.

Тоді при довільних цілих x,y,z,k вираз $3(y+z)xyz$ завжди ділиться на шість. Тому і вираз $6\cdot(36k^3)-6(3kx)-3(y+z)xyz$ ділиться на шість. Отже, сума кубів вказаних чисел ділиться на 6.

II спосіб.

Подамо вираз $x^3+y^3+z^3$ у наступному вигляді

$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3+z^3-(x+y+z)+(x+y+z)=$$
$$=(x^3-x)+(y^3-y)+(z^3-z)+(x+y+z)=$$
$$=x(x^2-1)+y(y^2-1)+z(z^2-1)+(x+y+z)=$$
$$=(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)+(z-1)z(z+1)+(x+y+z).$$

Звідки

$$x^3+y^3+z^3=(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)+(z-1)z(z+1)+(x+y+z) \quad (8.4)$$

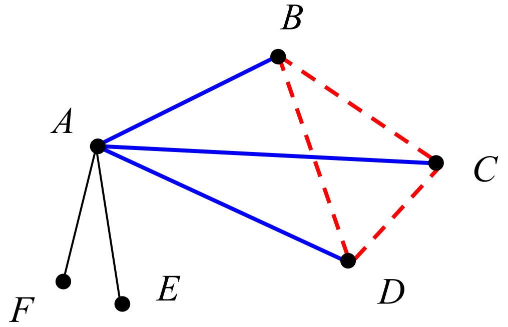
Зауважимо, що з трьох послідовних цілих чисел одне завжди ділиться на три, і принаймні одне ділиться на два. Тому добуток трьох послідовних цілих чисел завжди ділиться на шість.

Отже, кожен з перших трьох доданків правої частини рівності (8.4) ділиться на шість. За умовою останній доданок – вираз $(x+y+z)$ – також ділиться на шість. І тому права частина рівності (8.4), а разом з нею і ліва частина – вираз $(x^3+y^3+z^3)$, ділиться на шість.

Більше того, з рівності (8.4) випливає, що сума кубів $x^3+y^3+z^3$ трьох цілих чисел ділиться на шість тоді і лише тоді, коли на шість ділиться сума цих чисел.

Задача №5

Нехай на площині задано шість точок A,B,C,D,E,F загального положення (жодні три з яких не лежать на одній прямій).



Оскільки кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього кольору, то за **принципом Діріхлє** <u>з кожної точки</u> (зокрема точки A) <u>виходить принаймні три відрізки одного кольору</u> (червоного або синього). Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що відрізки AB, AC і AD одного кольору. Заради визначеності будемо вважати їх синіми.

Якщо припустити, що при довільному розфарбуванні відрізків (у вказаний за умовою задачі спосіб) не існує трикутника зі сторонами одного кольору, то відрізок BC повинен бути червоного кольору (бо сторони AB і AC синього кольору). Так само відрізки CD і BD повинні бути червоного кольору. Але ж тоді всі сторони трикутника BCD червоного кольору. Приходимо до протиріччя з припущенням. Отже наше припущення є хибним, і тому **<u>при довільному розфарбуванні відрізків у вказаний за умовою задачі спосіб існує принаймні один трикутник зі сторонами одного кольору</u>.**

Доповнення.

Доведемо більш сильне твердження, а саме, що:

при довільному розфарбуванні відрізків у вказаний за умовою задачі спосіб існує принаймні два трикутники, сторони кожного з яких розфарбовано в один колір (можливо різний для кожного з трикутників).

За доведеним раніше, існує принаймні один трикутник, сторони якого розфарбовано в один колір. Без втрати загальності можна вважати, що це саме трикутник BCD.

Припустимо обернене, що крім $\triangle BCD$ іншого трикутника зі сторонами одного кольору не існує. Тоді існують **лише наступні суттєво різні випадки**:

1) коли відрізки CA, CF, CE червоного кольору. Тоді відрізки AF, FE і EA повинні бути синього кольору. А тому існує й другий трикутник AFE зі сторонами одного (синього) кольору (рис. 1).

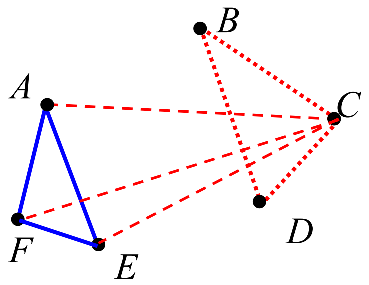


Рис. 1

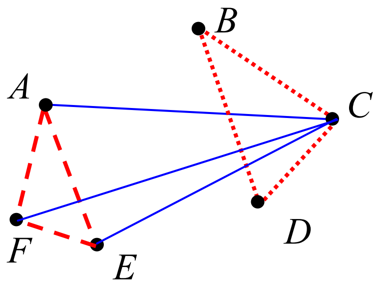


Рис. 2

2) коли відрізки CA, CF, CE синього кольору. Тоді відрізки AF, FE і EA повинні бути червоного кольору. А тому існує й другий трикутник AFE зі сторонами одного (червоного) кольору (рис. 2).

3) коли відрізки CA і CF червоного, а CE синього кольору. Тоді відрізки AB, AF і BF повинні бути синього кольору. А тому існує й другий трикутник ABF зі сторонами одного (синього) кольору (рис. 3).

4) коли відрізки CA і CE червоного, а CF синього кольору. Тоді відрізки AB, AE і BE повинні бути синього кольору. А тому існує й другий трикутник ABE зі сторонами одного (синього) кольору (рис. 4).

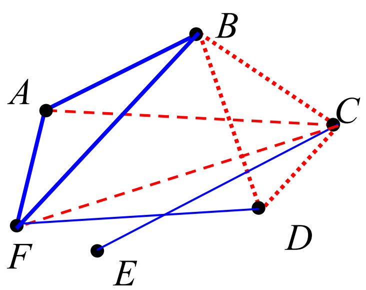


Рис. 3

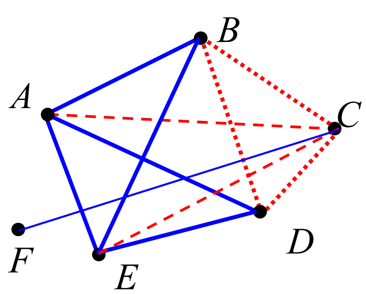


Рис. 4

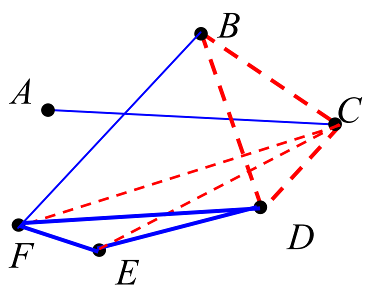


Рис. 5

5) коли відрізки CF і CE червоного, а CA синього кольору. Тоді відрізки FE, ED і DF повинні бути синього кольору. А тому існує й другий трикутник FED зі сторонами одного (синього) кольору (рис. 5).

6) коли відрізок CA червоного, а CF і CE синього кольору. Тоді відрізок FE повинен бути червоного а AB і AD синього кольору. Крім того:

6.1) якщо відрізок AF червоного кольору, то відрізок AE повинен бути синього кольору. І, як наслідок, відрізки BE і ED можуть бути лише червоного кольору. А тому існує й другий трикутник BED зі сторонами одного (червоного) кольору (рис. 6.1);

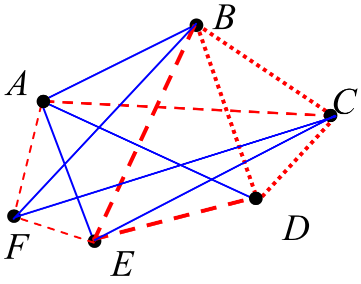


Рис. 6.1

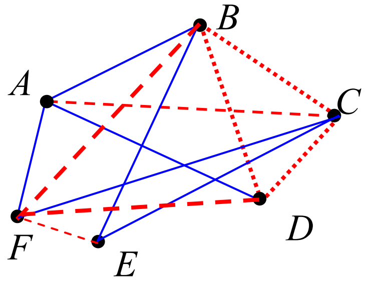


Рис. 6.2

6.2) якщо ж відрізок AF синього кольору, то відрізки BF і FD повинні бути червоного кольору. А тому існує й другий трикутник BFD зі сторонами одного (червоного) кольору (рис. 6.2).

7) коли відрізок CF червоного, а CA і CE синього кольору. Тоді відрізок AE червоного а FD і FB синього кольору. Крім того:

7.1) якщо відрізок FE червоного кольору, то відрізок AF може бути лише синього кольору. І як наслідок, AB може бути лише червоного кольору. А тому існує й другий трикутник ABF зі сторонами одного (синього) кольору (рис. 7.1);

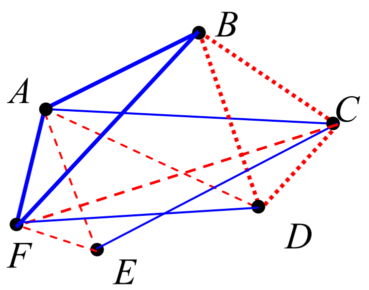


Рис. 7.1

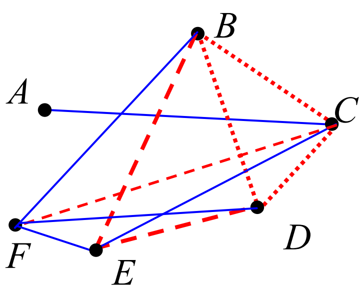


Рис. 7.2

7.2) якщо ж відрізок FE синього кольору, то відрізки BE і ED можуть бути лише червоного кольору. А тому існує й другий трикутник BED зі сторонами одного (червоного) кольору (рис. 7.2).

8) коли відрізок CE червоного, а CA і CF синього кольору. Тоді відрізки ED і BE повинні бути синього а AF червоного кольору. Крім того:

8.1) якщо відрізок FE червоного кольору, то відрізок AE повинен бути синього кольору. І як наслідок відрізки AD і AB повинні бути червоного кольору. А тому існує й другий трикутник ABD зі сторонами одного (червоного) кольору (рис. 8.1);

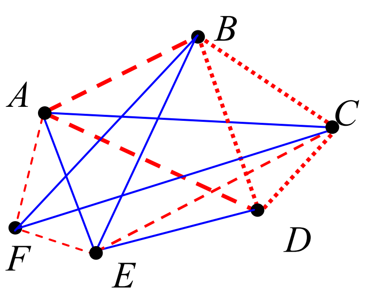


Рис. 8.1

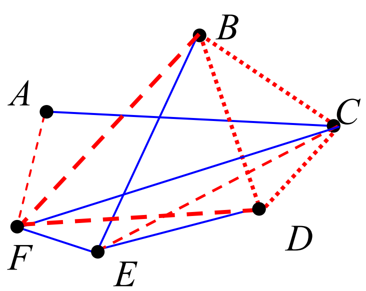


Рис. 8.2

8.2) якщо ж відрізок FE синього кольору, то відрізки BF і FD повинні бути червоного кольору. А тому існує й другий трикутник BFD зі сторонами одного (червоного) кольору (рис. 8.2).

Таким чином, при довільному розфарбуванні відрізків у вказаний за умовою задачі спосіб існує принаймні два трикутники, сторони кожного з яких розфарбовано в один колір (можливо різний для кожного з трикутників).

9 клас

Задача №1

Доведемо рівність: $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

I спосіб.

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow 5+\sqrt{24} = 2 + 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow \left(\sqrt{24}\right)^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2 \Leftrightarrow 24 = 4\cdot 6 \Leftrightarrow 24 = 24.$$

II спосіб.

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{5+\sqrt{4\cdot 3\cdot 2}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2} = \left|\sqrt{3}+\sqrt{2}\right| = \sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Задача №2

I спосіб.

З'ясуємо, чи може добуток $abcd$ дорівнювати 1000, якщо цілі числа a, b, c і d задовольняють умові $\dfrac{a-b}{c-d} = \dfrac{a+b}{c+d}$.

Отже, нехай $d \neq \pm c$, тоді $(a-b)(c+d) = (a+b)(c-d)$ або ж

$$ac + ad - bc - bd = ac - ad + bc - bd$$

Звідки $2(ad - bc) = 0$. Тому $ad = bc$.

Таким чином, добуток $abcd$ можна подати у вигляді

$$abcd = ad\cdot bc = (ad)^2.$$

Якщо припустити, що при деяких цілих a і d справджується рівність

$$(ad)^2 = 1000 = \left(10\sqrt{10}\right)^2,$$

то з неї випливатиме, що добуток цілих чисел a і d є числом $10\sqrt{10}$, або ж, що

$$\frac{ad}{10} = \sqrt{10},$$

чого бути не може, оскільки ліва частина останньої рівності є числом раціональним, а права її частина – $\sqrt{10}$ – ірраціональним числом.

II спосіб.

Нехай $d \neq \pm c$, тоді з умови $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c+d} = t$ маємо справедливість наступних рівностей $\begin{cases} a-b = t(c-d) \\ a+b = t(c+d) \end{cases}$ при деякому сталому значені t. Звідки

$$\begin{cases} 2a = 2tc \\ 2b = 2td \end{cases}, \qquad \text{або ж} \qquad \begin{cases} a = tc \\ b = td \end{cases}.$$

Тому добуток $abcd$ можна подати у вигляді $abcd = tctdcd = (tcd)^2$.

Якщо припустити, що при деяких цілих c, d і раціональному t справджується рівність $(tcd)^2 = 1000 = \left(10\sqrt{10}\right)^2$, то з неї випливатиме, що добуток раціональних чисел c, d і t є числом $10\sqrt{10}$, або ж що $\frac{tcd}{10} = \sqrt{10}$, чого бути не може, оскільки ліва частина останньої рівності є числом раціональним, а права її частина – $\sqrt{10}$ – ірраціональним числом.

Відповідь: добуток цілих чисел, що задовольняють вказану умову, не може дорівнювати заданому числу.

Доповнення.

Нагадаємо в який спосіб доводиться, що, наприклад, число $\sqrt{10}$ є ірраціональним числом. Доведення проводиться методом від супротивного,

а саме: припустимо, що число $\sqrt{10}$ є раціональним числом.

Тоді додатне число ($\sqrt{10}$) можна подати у вигляді **нескоротного** дробу $\frac{m}{n} = \sqrt{10}$, де m і n – натуральні числа.

Піднесемо далі обидві частини рівності $\sqrt{10} = \frac{m}{n}$ до квадрату. В результаті матимемо, що $10 = \frac{m^2}{n^2}$ або ж, що

$$m^2 = 10n^2. \tag{9.2.1}$$

Оскільки права частина рівності (9.2.1) ділиться на 10, то число m^2 також повинно ділитися на 10 (на 2 і на 5 одночасно), і тому саме число m повинно ділитися на прості числа 2 і 5 одночасно. Тому число m має вид $m = 10k$.

Тоді рівність (9.2.1) можна переписати у вигляді $100k^2 = 10n^2$, або ж

$$n^2 = 10k^2. \tag{9.2.2}$$

В силу вказаних вище причин, з рівності (9.2.2) також випливатиме, що число n має вид $n = 10l$.

Але ж тоді числа $m = 10k$ і $n = 10l$ є такими, що дріб $\frac{m}{n}$ є скоротним. Прийшли до протиріччя з припущенням, і тому наша гіпотеза про раціональність числа $\sqrt{10}$ є хибною. Отже, воно є ірраціональним.

Задача №3

I спосіб.

Перетворивши задану рівність, отримаємо $(4m-n)(n+m)=6m^2$ або ж

$$4mn+4m^2-n^2-mn-6m^2=0,\text{ звідки } 3mn-n^2-2m^2=0.$$

Виконаємо тотожні перетворення у лівій частині одержаної рівності

$$3mn-n^2-2m^2=$$
$$=2mn+mn-n^2-2m^2=\left(2mn-2m^2\right)+\left(mn-n^2\right)=$$
$$=2m(n-m)-n(n-m)=(2m-n)(n-m).$$

Оскільки $(2m-n)(n-m)=0$, то: або $n=2m$, або ж $n=m$. А це й означає, що число n ділиться на m.

II спосіб.

Перетворимо дану рівність $(4m-n)(n+m)=6m^2$ до наступного вигляду

$$4mn+4m^2-n^2-mn=6m^2 \quad \text{або ж} \quad n^2-3mn+2m^2=0. \tag{9.3}$$

Розглянемо рівність (9.3), як квадратне рівняння відносно змінної n. Тоді

$D=(3m)^2-4\cdot 2m^2=m^2>0$ і тому $n_1=\dfrac{3m-m}{2}=m$, $n_2=\dfrac{3m+m}{2}=2m$.

Таким чином, натуральні числа m і n, які задовольняють дану рівність, є такими, що число n ділиться на m.

Доповнення.

Розгляньте рівність (9.3), як квадратне рівняння відносно змінної m і покажіть, що число n ділиться на m.

III спосіб.

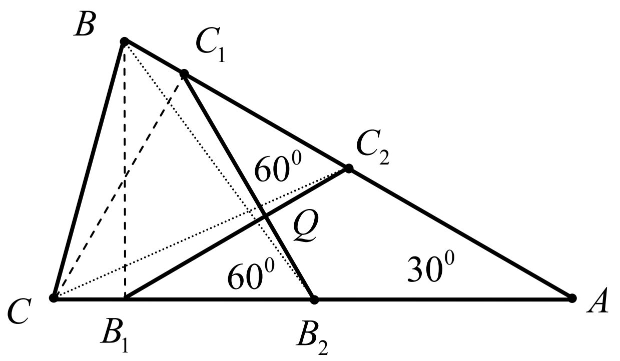
Оскільки $m\in\mathbb{N}$, то $m\neq 0$. Тому обидві частини рівності (9.3) можна поділити на m^2. В результаті одержимо рівняння виду $\left(\dfrac{n}{m}\right)^2-3\left(\dfrac{n}{m}\right)+2=0$ або ж, поклавши $\dfrac{n}{m}=t$, рівняння виду

$$t^2-3t+2=0. \tag{9.3.1}$$

Очевидно, що коренями рівняння (9.3.1) є числа $t_1=1$ та $t_1=2$.

І тому $\dfrac{n}{m}=1$ або $\dfrac{n}{m}=2$. Звідки $n=m$ або $n=2m$. Останнє й означає, що число n ділиться на m.

Задача №4



Нехай BB_1 та CC_1 – висоти гострокутного трикутника ABC з кутом A, що дорівнює 30^0; B_2 і C_2 – середини сторін AC і AB відповідно; Q – точка перетину відрізків B_1C_2 і B_2C_1.

Доведемо, що $\angle B_2QC_2 = 90^0$.

I спосіб.

Розглянемо $\triangle BB_1A$. В ньому:

$$\angle BB_1A = 90^0; \qquad \angle BAB_1 = 30^0.$$

Оскільки катет BB_1 лежить проти кута 30^0, то його довжина становить половину довжини гіпотенузи AB. За умовою C_2 – середина AB, і тому $BC_2 = BB_1$.

Отже, $\triangle BB_1C_2$ є рівнобедреним з кутом при вершині B рівним 60^0 і тому $\angle BB_1C_2 = \angle BC_2B_1 = 60^0$ (як кути при основі B_1C_2).

Кут $AC_2B_1 = 120^0$ (як суміжний із кутом BC_2B_1).

Розглянемо $\triangle CC_1A$. В ньому:

$$\angle CC_1A = 90^0; \qquad \angle CAC_1 = 30^0.$$

Оскільки катет CC_1 лежить проти кута 30^0, то його довжина становить половину довжини гіпотенузи AC. За умовою B_2 – середина AC, і тому $CB_2 = CC_1$.

Отже, $\triangle CC_1B_2$ є рівнобедреним з кутом при вершині C рівним 60^0 і тому $\angle CC_1B_2 = \angle CB_2C_1 = 60^0$ (як кути при основі C_1B_2).

Кут $AB_2C_1 = 120^0$ (як суміжний із кутом CB_2C_1).

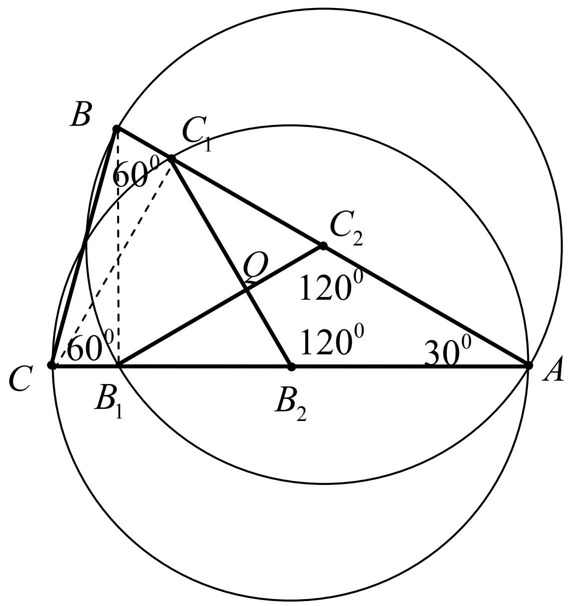
Розглянемо тепер чотирикутник AC_2QB_2. В ньому:

$\angle B_2AC_2 = 30^0$ (за умовою),

$\angle AC_2Q = \angle AC_2B_1 = 120^0$; $\angle AB_2Q = \angle AB_2C_1 = 120^0$ (за доведеним вище). Тому $\angle B_2QC_2 = 360^0 - 30^0 - 120^0 - 120^0 = 90^0$.

Таким чином, відрізки B_1C_2 і B_2C_1 перетинаються під прямим кутом.

ІІ спосіб.



Розглянемо $\triangle BB_1A$. В ньому: $\angle BB_1A = 90^0$, $\angle BAB_1 = 30^0$, звідки $\angle ABB_1 = 60^0$.

За умовою C_2 – середина AB, тому C_2 є центром кола, описаного навколо $\triangle BB_1A$.

Оскільки $\angle ABB_1 = 60^0$, то відповідний йому центральний кут AC_2B_1 (що спирається на хорду AB_1) дорівнює 120^0.

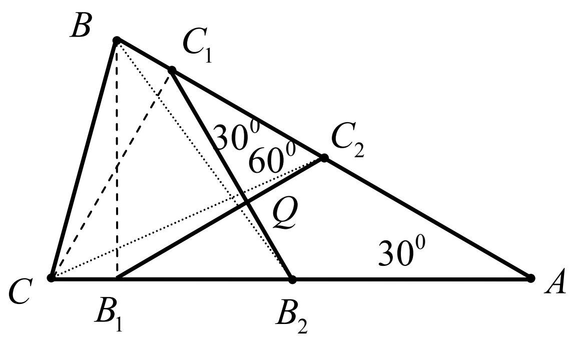
Розглянемо $\triangle CC_1A$. В ньому: $\angle CC_1A = 90^0$, $\angle CAC_1 = 30^0$, звідки $\angle ACC_1 = 60^0$.

За умовою B_2 – середина AC, тому B_2 є центром кола, описаного навколо прямокутного $\triangle CC_1A$. Оскільки $\angle ACC_1 = 60^0$, то відповідний йому центральний кут AB_2C_1 (що спирається на хорду AC_1) дорівнює 120^0.

Таким чином, з чотирикутника AC_2QB_2 маємо, що $\angle B_2QC_2 = 90^0$.

Отже, відрізки B_1C_2 і B_2C_1 перетинаються під прямим кутом.

ІІІ спосіб.



Розглянемо $\triangle BB_1A$. В ньому: $\angle BB_1A = 90^0$; $\angle BAB_1 = 30^0$.

Оскільки катет BB_1 лежить проти кута 30^0, то його довжина становить половину довжини гіпотенузи AB. За умовою C_2 – середина AB, і тому $BC_2 = BB_1$. Більше того, оскільки B_1C_2 є медіаною прямокутного трикутника $\triangle BB_1A$, проведеною з вершини прямого кута, то $B_1C_2 = BC_2$. Отже, $\triangle BB_1C_2$ є рівностороннім і тому $\angle BC_2B_1 = 60^0$.

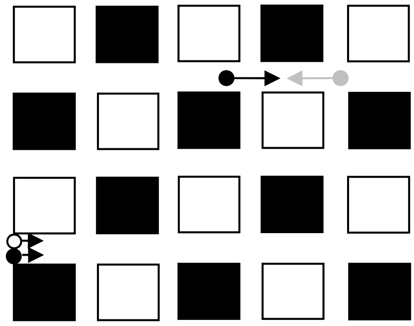
Розглянемо $\triangle CC_1A$. В ньому: $\angle CC_1A = 90^0$; $\angle CAC_1 = 30^0$. Оскільки BC_2 є медіаною прямокутного трикутника $\triangle CC_1A$, проведеною з вершини прямого кута, то $C_1B_2 = B_2A$. Тому $\angle B_2C_1A = \angle B_2AC_1 = 30^0$

Розглянемо $\triangle C_1QC_2$. В ньому: $\angle QC_1C_2 = 30^0$, $\angle QC_2C_1 = 60^0$. І тому $\angle C_1QC_2 = 90^0$. **Отже, відрізки B_1C_2 і B_2C_1 перетинаються під прямим кутом.**

Задача №5

I спосіб.

Розфарбуємо квартали міста у шаховому порядку так, щоб праворуч від першого і другого велосипедиста у момент старту знаходився чорний квартал. Тоді **у будь-який момент часу праворуч від кожного з велосипедистів знаходиться чорний квартал.**



Це дійсно так, бо на кожному перехресті (крім першого – стартового) кожен велосипедист обов’язково повертає:

або **ліворуч**, і тоді праворуч від нього знаходиться чорний квартал відмінний від того, який він щойно проїхав,

або ж **праворуч**, і тоді велосипедист огинає (залишаючись зліва від нього) той самий чорний квартал, який щойно проїхав.

1) Зустріч велосипедистів не може відбутися на жодному з перехресть. Це випливає з того, що перший велосипедист (рухаючись зі сталою швидкістю 1 квартал за хвилину) з’являється на перехрестях кожної хвилини (з моменту початку руху), тобто, в моменти часу t $(t = 1,2,...)$, які є натуральними числами.

Оскільки другий велосипедист починає свій рух через півхвилини після першого і рухається зі сталою швидкістю 1 квартал за хвилину, то на перехрестях він з’являється в моменти часу $t + 0,5$ $(t = 1,2,...)$, які не є натуральними числами. Тому не існує такого моменту часу, в який велосипедисти одночасно з’являються на перехрестях.

2) Оскільки велосипедисти рухаються з однаковою швидкістю і різницею у часі в півхвилини, то жоден з них не може наздогнати іншого:

на перехресті цього статися не може за доведеним раніше;

посеред деякого з кварталів цього також не може статися, оскільки з припущення про обернене і умови руху з однаковою швидкістю, на наступному перехресті вони з’являться одночасно, чого не може бути.

3) Отже, зустріч велосипедистів якщо і є можливою, то лише посеред деякого з кварталів, причому, за умови руху назустріч один одному.

Але останнє також не можливе, бо для одного з них в цьому разі чорний квартал буде розташований ліворуч, а для іншого – праворуч.

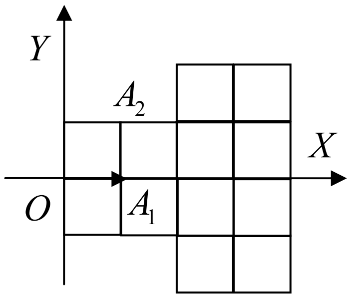
II спосіб.

1) Жоден з велосипедистів не може наздогнати іншого оскільки другий стартував на півхвилини пізніше першого, і на протязі всього часу вони рухались з постійними однаковими швидкостями.

На перехресті кварталів зустріч також не може відбутися, оскільки велосипедисти з’являються на них в різні моменти часу.

Надалі будемо вважати, що кожен квартал міста обмежують (по периметру) 4 різні вулиці, які починаються і закінчуються в межах цього кварталу.

2) Звернемо увагу на той факт, що кожен з велосипедистів для повернення у початкове положення (на стартове перехрестя), рухаючись згідно зазначених правил, повинен подолати парну кількість вулиць міста.



Нехай т. O – стартове перехрестя, а т. A_1 – перше перехрестя, на якому повертають велосипедисти. Зафіксуємо в площині міста прямокутну систему координат XOY з початком в т. O, віссю OX, додатній напрямок якої визначається т. A_1, та одиницею виміру OA_1. Додатній напрямок на осі OY визначається у звичний спосіб.

Дослідимо траєкторію руху велосипедиста, початок і кінець якої співпадають з точкою O. Для цього позначимо через A_i $(i = 1, 2, ...)$ перехрестя, які велосипедист послідовно проїжджає (належать траєкторії його руху – $OA_1A_2...A_nO$). Оскільки на кожному перехресті A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ велосипедист повертає ліворуч або праворуч, то положення точки A_{i+1} $(A_{n+1} = O)$ відрізняється від положення точки A_i лише одною координатою – першою або другою. Більше того: якщо вулиця A_iA_{i+1} паралельна осі OX, а напрямок від перехрестя A_i до перехрестя A_{i+1} співпадає (не співпадає) з додатним напрямком осі OX, то абсциса точки A_{i+1} збільшиться (зменшиться) на одну одиницю у порівнянні з абсцисою точки A_i. Те ж саме має місце для вулиць A_jA_{j+1} паралельних осі OY.

Той факт, що велосипедист повернувся на стартове перехрестя (у т. $O(0,0)$) означає, що:

2.1) сумарна кількість вулиць, які велосипедист проїжджав паралельно осі OX є парною – скільки разів рухався в додатному напрямку осі OX, стільки ж і у від'ємному її напрямку;

2.2) сумарна кількість вулиць, які велосипедист проїжджав паралельно осі OY є парною – скільки разів рухався в додатному напрямку осі OY, стільки ж і у від'ємному її напрямку.

Таким чином, довільна траєкторія $OA_1A_2...A_nO$ велосипедиста, який рухається кварталами міста згідно зазначених правил, містить парну кількість вулиць.

3) Покажемо тепер, що велосипедисти не можуть зустрітися посеред деякої вулиці, рухаючись на зустріч один одному.

Доведення проведемо методом від супротивного, а саме: припустимо, що вказана зустріч сталася посеред певної вулиці (між двома перехрестями однієї вулиці). Тоді на момент зустрічі перший велосипедист подолав $3/4$, а другий – $1/4$ цієї вулиці. Більше того, до зазначеної події, кожен з них подолав однакову кількість k повних вулиць. Отже, велосипедисти разом на момент зустрічі подолали непарну кількість $2k+1$ вулиць міста.

Якщо, перший з велосипедистів після зустрічі продовжить рух, повторивши траєкторію руху другого в зворотному напрямку, то через певний час він повернеться у початкове положення (на стартове перехрестя) і подолає при цьому (з моменту свого старту) непарну кількість вулиць міста. Чого бути не може, оскільки будь-яка траєкторія руху, що починається і закінчується у фіксованому перехресті, містить парну кількість вулиць міста.

Прийшли до протиріччя з припущенням, і тому наша гіпотеза про можливість зустрічі велосипедистів посеред вулиці (рухаючись на зустріч один одному) є хибною. Таким чином, велосипедисти не можуть зустрітися.

Відповідь: ні, не можуть зустрітися.

10 клас

Задача №1

I спосіб.

$$x^2+y^2+\frac{1}{2}\le x+y \Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2-2y\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\le 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{2}=0 \\ y-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x+y=1.$$

II спосіб.

$$x^2+y^2+\frac{1}{2}\le x+y \Leftrightarrow 4x^2+4y^2+2\le 4x+4y \Leftrightarrow 4x^2-4x+1+4y^2-4y+1\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2+(2y-1)^2\le 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2+(2y-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 2y-1=0 \end{cases} \Rightarrow x+y=1.$$

III спосіб.

Нехай $y=a$, тоді дану нерівність можна подати у вигляді $x^2-x+a^2-a+\frac{1}{2}\le 0$.

Розглянемо ліву частину останньої нерівності як квадратичний тричлен відносно змінної x та розв’яжемо цю нерівність при всіх значеннях параметра a.

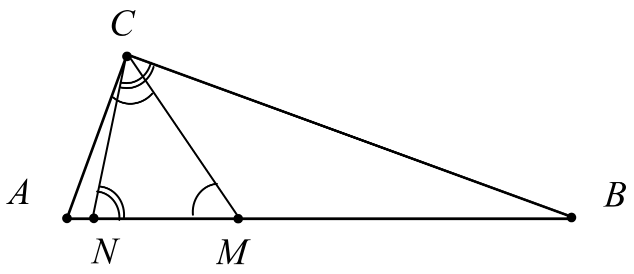
$$D=1^2-4\left(a^2-a+\frac{1}{2}\right)=-4a^2+4a-1=-\left(4a^2-4a+1\right)=-(2a-1)^2.$$

При всіх значеннях $a\ne\frac{1}{2}$ дискримінант $D<0$. Оскільки гілки параболи $y=x^2-x+a^2-a+\frac{1}{2}$ спрямовані вгору, то при $a\ne\frac{1}{2}$ нерівність не має жодного розв’язку.

При $a=\frac{1}{2}$ дискримінант $D=0$. І тому нерівність $x^2-x+a^2-a+\frac{1}{2}\le 0$ при $a=\frac{1}{2}$ має єдиний розв’язок $x=\frac{1}{2}$.

Таким чином, дана нерівність має єдиний розв’язок $x=\frac{1}{2}$ при $y=\frac{1}{2}=a$. І тому $x+y=1$.

Задача №2



За умовою задачі на гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC задано такі точки M і N, що $AM = AC$, $BN = BC$.

1) З'ясуємо взаємне розташування точок M і N відносно вершин A і B.

Точки M і N не можуть співпадати, оскільки з припущення про обернене матимемо, що гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC дорівнює сумі катетів CA і CB, чого бути не може за нерівністю трикутника.

Якщо припустити, що точка M належить внутрішності відрізка AN, то гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC виявиться більшою за суму катетів CA і CB, чого бути не може за нерівністю трикутника.

Так само точка M (точка N) не може співпасти з вершиною A (з вершиною B), бо тоді гіпотенуза AB дорівнюватиме катету BC (катету AC), чого не може бути за наслідком з теореми Піфагора.
Тому розташування зазначених точок M і N є таким, як показано на рисунку.

2) Доведемо тепер, що кут MCN дорівнює $\pi/4$.
Отже, нехай $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Тоді $\alpha + \beta = \pi/2$ (як сума гострих кутів прямокутного трикутника).
Оскільки трикутник CAM є рівнобедреним з основою CM, то $\angle ACM = \angle AMC = (\pi - \alpha)/2$.

Аналогічно, з рівнобедреного $\triangle CBN$ маємо, що $\angle BCN = \angle BNC = (\pi - \beta)/2$.

Розглянемо $\triangle CMN$. В ньому: $\angle CMN = (\pi - \alpha)/2$, а $\angle CNM = (\pi - \beta)/2$.

Тоді $$\angle MCN = \pi - \frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\pi - \beta}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Задача №3

<u>І спосіб.</u>

Додавши до другого рівняння системи $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$ перше, помножене на число (-2), одержимо

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2-2x+y^2-2y+z^2-2z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1. \\ z=1 \end{cases}$$

<u>ІІ спосіб.</u>

Зробимо наступну заміну змінних $\begin{cases} x=1+u \\ y=1+v \\ z=1-u-v \end{cases}$.

Тоді дана система матиме вид $\begin{cases} x=1+u \\ y=1+v \\ z=1-u-v \\ (1+u)^2+(1+v)^2+(1-u-v)^2=3 \end{cases}$.

Дослідимо останнє рівняння системи

$$(1+u)^2+(1+v)^2+(1-u-v)^2=3;$$

$$u^2+2u+1+v^2+2v+1+(u+v)^2-2(u+v)+1=3;$$

$$u^2+v^2+(u+v)^2=0.$$

Остання рівність має місце лише за умов, коли $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \\ u+v=0 \end{cases}$. Звідки $\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases}$.

Тому $\begin{cases} x=1+0=1 \\ y=1+0=1 \\ z=1-0-0=1 \end{cases}$.

Відповідь: $x=1;\ y=1;\ z=1.$

Задача №4

І спосіб.

За умовою дискримінант $D = p^2 - 4q$ квадратичного тричлена $P(x) = x^2 + px + q$ є додатним.

З'ясуємо, скільки коренів може мати рівняння

$$P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right) = 0. \qquad (10.4)$$

Розглянемо ліву частину рівняння (10.4)

$$P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right) = x^2 + px + q + \left(x + \sqrt{D}\right)^2 + p\left(x + \sqrt{D}\right) + q =$$
$$= 2x^2 + 2x\left(p + \sqrt{D}\right) + D + p\sqrt{D} + 2q.$$

Тоді дискримінант $D*$ квадратного рівняння (10.4) має вид

$$D* = 4\left(p + \sqrt{D}\right)^2 - 8\left(D + p\sqrt{D} + 2q\right) = 4p^2 + 8p\sqrt{D} + 4D - 8D - 8p\sqrt{D} - 16q =$$
$$= 4p^2 - 4D - 16q = 4\left(p^2 - 4q\right) - 4D = 4D - 4D = 0.$$

Оскільки дискримінант $D*$ квадратного рівняння (10.4) дорівнює нулю, то рівняння має два рівні корені

$$x_1 = x_2 = \frac{-2\left(p + \sqrt{D}\right)}{4} = -\frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Отже, за умови, що дискримінант квадратичного тричлена $P(x) = x^2 + px + q$ є додатним, рівняння $P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right) = 0$ завжди має один дійсний корінь $x = -\dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ (два рівних).

ІІ спосіб.

Оскільки дискримінант $D = p^2 - 4q$ квадратичного тричлена $P(x) = x^2 + px + q$ є додатним, то $P(x)$ можна подати у вигляді $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 – дійсні різні числа, які є коренями відповідного квадратного рівняння $P(x) = 0$.

Заради визначеності будемо вважати, що $x_2 > x_1$. Тоді очевидно, що $x_2 - x_1 = \sqrt{D}$. Тому квадратичний тричлен $P\left(x + \sqrt{D}\right)$ можна подати у вигляді

$$P\left(x + \sqrt{D}\right) = (x + x_2 - x_1 - x_1)(x + x_2 - x_1 - x_2) = (x + x_2 - 2x_1)(x - x_1).$$

Тоді тричлен $Q(x) = P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right)$ набуває виду

$$Q(x) = (x - x_2)(x - x_1) + (x + x_2 - 2x_1)(x - x_1) = (x - x_2 + x + x_2 - 2x_1)(x - x_1) =$$
$$= 2(x - x_1)(x - x_1) = 2(x - x_1)^2.$$ І тому квадратне рівняння $P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right) = 0$ має єдиний (два рівних) корінь.

Задача №5

За умовою задачі числа 1, 2, 3, …, 25 розташовують у квадратній таблиці 5×5 так, щоб у кожному (i-му) рядку числа (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i) були розташовані у порядку зростання ($a_i < b_i < c_i < d_i < e_i$).

Позначимо через S найменше значення суми чисел ($c_1+c_2+c_3+c_4+c_5$), що стоять у третьому стовпці такої таблиці.

a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
a_2	b_2	c_2	d_2	e_2
a_3	b_3	c_3	d_3	e_3
a_4	b_4	c_4	d_4	e_4
a_5	b_5	c_5	d_5	e_5

1	2	**3**	**…**	**…**
4	5	**6**	**…**	**…**
7	8	**9**	**…**	**…**
10	11	**12**	**…**	**…**
13	14	**15**	**…**	**…**

…	**…**	**11**	**12**	**13**
…	**…**	**14**	**15**	**16**
…	**…**	**17**	**18**	**19**
…	**…**	**20**	**21**	**22**
…	**…**	**23**	**24**	**25**

Найменшим можливим числом c_i (серед чисел від 1 до 25), яке можна поставити третім у певному рядку є число 3, оскільки перші дві позиції рядка повинні бути заповнені числами 1 і 2 меншими за 3.

Найменшим можливим числом c_i (серед чисел від 4 до 25, що залишилися), яке можна поставити третім у певному рядку є число 6, оскільки перші дві позиції рядка повинні бути заповнені числами 4 і 5 меншими за 6.

Найменшим можливим числом c_i (серед чисел від 7 до 25), яке можна поставити третім у певному рядку є число 9, оскільки перші дві позиції рядка повинні бути заповнені числами 7 і 8 меншими за 9.

Найменшим можливим числом c_i (серед чисел від 10 до 25), яке можна поставити третім у певному рядку є число 12, оскільки перші дві позиції рядка повинні бути заповнені числами 10 і 11 меншими за 12.

Найменшим можливим числом c_i (серед чисел від 13 до 25), яке можна поставити третім у певному рядку є число 15, оскільки перші дві позиції рядка повинні бути заповнені числами 13 і 14 меншими за 15.

Оскільки на кожному кроці заповнення таблиці (дотримуючись вказаного за умовою задачі способу) для третіх позицій кожного рядка обиралося найменше з можливих, то найменшим значенням суми чисел у третьому стовпчику (всієї таблиці) є сума вказаних вище чисел 3, 6, 9, 12 і 15.

Таким чином, $S=\left(3+6+9+12+15\right)=45$.

Відповідь: найменше значення суми чисел у третьому стовпчику становить 45.

<u>Доповнення.</u>

Провівши міркування „з точністю до навпаки" доведіть, що найбільше значення суми чисел у третьому стовпчику становить 85.

Дослідіть, чи кожне з чисел від 45 до 85 може бути сумою чисел третього стовпця при заповнені таблиці у вказаний спосіб.

11 клас

Задача №1

За умовою функція $f(x)$ має вид $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, де a, b, c, d – деякі дійсні числа. Відомо, що $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=3$.

Оскільки $f(0)=\dfrac{b}{d}=1$, то $d=b$, і тому $f(x)$ можна подати у вигляді

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+b}.$$

Оскільки $f(1)=\dfrac{a+b}{c+b}=0$, то $b=-a$, і тому $f(x)$ має вид

$$f(x)=\frac{ax-a}{cx-a}.$$

Аналогічно, з умови $f(2)=\dfrac{2a-a}{2c-a}=3$ маємо $a=6c-3a$. Звідки $c=\dfrac{2}{3}a$.

І тому функцію $f(x)$ можна подати у вигляді

$$f(x)=\frac{ax-a}{\frac{2}{3}ax-a}=\frac{\cancel{a}(x-1)}{\cancel{a}\left(\frac{2}{3}x-1\right)}=\frac{x-1}{\frac{2}{3}x-1}=\frac{3(x-1)}{2x-3}.$$

При заданих умовах, a не може дорівнювати нулеві. Дійсно, з припущення про обернене, одержимо наступні умови $1=\dfrac{b}{d}$, $0=\dfrac{b}{c+d}$, $3=\dfrac{b}{3c+d}$, які одночасно не можуть виконуватись.

Таким чином, $f(3)=\dfrac{3(3-1)}{2\cdot 3-3}=\dfrac{\cancel{3}\cdot 2}{\cancel{3}}=2$.

Відповідь: $f(3)=2$.

<u>**Доповнення**</u>.

Не важко бачити, що задана функція $f(x)$ є такою, що мають місце рівності: $f(f(0))=0$; $f(f(1))=1$; $f(f(2))=2$; $f(f(3))=3$.

1) Покажіть, що для кожного $x\neq\dfrac{3}{2}$ справджується рівність $f(f(x))=x$.

2) Яким умовам повинні задовольняти коефіцієнти a, b, c і d, щоб функція $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ мала таку саму властивість, тобто: щоб для кожного $x\neq-\dfrac{d}{c}$ справджувалась рівність $f(f(x))=x$.

Задача №2

І спосіб.

Оскільки для довільного дійсного x має місце тотожність $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, то

$$\left|\frac{\cos 2x + 3}{\cos x}\right| = \left|\frac{2\cos^2 x - 1 + 3}{\cos x}\right| =$$

$$= \left|\frac{2\cos^2 x + 2}{\cos x}\right| = 2 \cdot \left|\frac{\cos^2 x + 1}{\cos x}\right| = 2 \cdot \left|\cos x + \frac{1}{\cos x}\right| = 2\left(\left|\cos x\right| + \frac{1}{\left|\cos x\right|}\right). \qquad (11.2)$$

Покажемо, що $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ справджується нерівність $\left|\cos x\right| + \frac{1}{\left|\cos x\right|} \geq 2$.

Оскільки $\cos x \neq 0$, то

$$\left|\cos x\right| + \frac{1}{\left|\cos x\right|} \geq 2 \Leftrightarrow \left|\cos x\right|^2 - 2\left|\cos x\right| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\left|\cos x\right| - 1\right)^2 \geq 0.$$

Оскільки справедливість останньої нерівності $\left(\left|\cos x\right| - 1\right)^2 \geq 0$ не викликає сумнівів, то, з урахуванням нерівності (11.2), маємо справедливість даної нерівності $\left|\frac{\cos 2x + 3}{\cos x}\right| \geq 4$, коли $\cos x \neq 0$.

ІІ спосіб.

Оскільки $\cos x \neq 0$, то нерівність $\left|\frac{\cos 2x + 3}{\cos x}\right| \geq 4$ рівносильна нерівності

$$\left|\cos 2x + 3\right| \geq 4\left|\cos x\right|. \qquad (11.2.1)$$

Тоді очевидно, що зі справедливості нерівності (11.2.1) коли $\cos x \neq 0$ буде випливати справедливість даної нерівності. В свою чергу, справедливість нерівності (11.2.1) випливає зі справедливості нерівності

$$\left(\cos 2x + 3\right)^2 \geq \left(4\cos x\right)^2, \text{ або ж } \left(\cos 2x - 4\cos x + 3\right)\left(\cos 2x + 4\cos x + 3\right) \geq 0.$$

Оскільки $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, то останню нерівність можна переписати у вигляді

$$\left(2\cos^2 x - 4\cos x + 2\right)\left(2\cos^2 x + 4\cos x + 2\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2 x - 2\cos x + 1\right)\left(\cos^2 x + 2\cos x + 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\cos x - 1\right)^2 \cdot \left(\cos x + 1\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2 x - 1\right)^2 \geq 0$$

Очевидно, що $\forall x \in \mathbb{R}$ ліва частина останньої нерівності є невід'ємною, і, зокрема, обертається в нуль, лише коли $\cos^2 x = 1$ ($x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$).

Таким чином, доведено справедливість нестрогої нерівності $\left|\frac{\cos 2x + 3}{\cos x}\right| \geq 4$, коли $\cos x \neq 0$, рівність у якій досягається при $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

III спосіб.

Позначимо $\cos x = t$, тоді $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$. Оскільки $t = \cos x$, то $-1 \le t \le 1$.

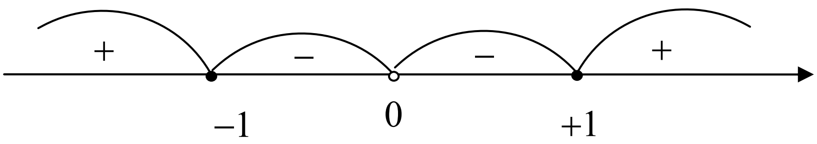
Розглянемо функцію

$$f(t) = \frac{2t^2 + 2}{t}. \qquad (11.2.2)$$

Дослідимо функцію $y = f(t)$ на монотонність та покажемо, що при всіх $t \in [-1;0) \cup (0;1]$ справджується нерівність $|f(t)| \ge 4$.

Отже, $f'(t) = \dfrac{4t \cdot t - (2t^2 + 2) \cdot 1}{t^2} = \dfrac{2t^2 - 2}{t^2} = \dfrac{2(t+1)(t-1)}{t^2}$.

Встановимо проміжки знакосталості функції $f'(t)$.



Оскільки $f'(t) < 0$ на кожному з проміжків $(-1;0)$ і $(0;1)$, то функція $y = f(t)$ спадає на кожному з проміжків $(-1;0)$ і $(0;1)$.

Оскільки $f'(t) > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$ і $(1;\infty)$, то функція $y = f(t)$ зростає на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$ і $(1;\infty)$.

Більше того, $x_{\max} = -1$; $x_{\min} = 1$.

Оскільки $f(-1) = \dfrac{2(-1)^2 + 2}{-1} = -4$, а $f(1) = \dfrac{2(1)^2 + 2}{1} = 4$, то з урахуванням проміжків монотонності:

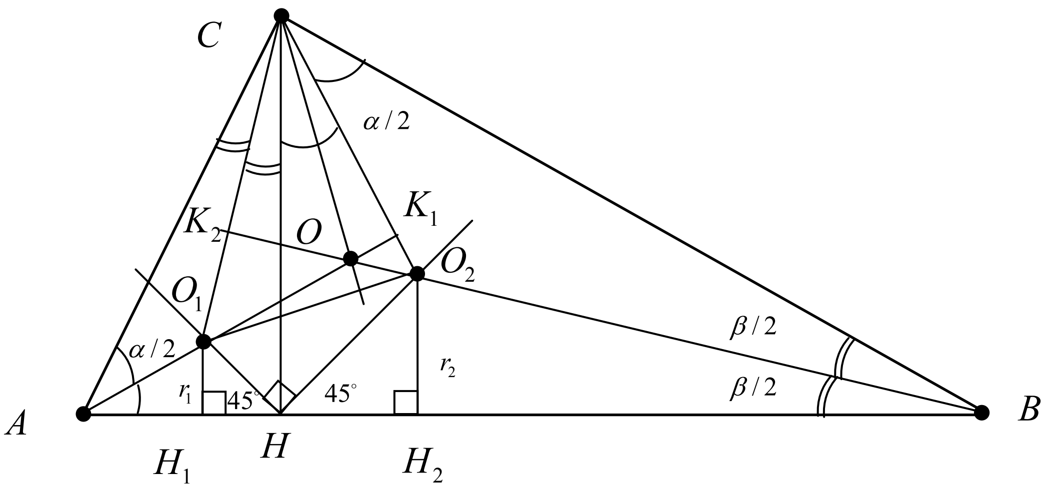
$$f(t) \le -4 \text{ для кожного } t \in [-1;0) \text{ і } f(t) \ge 4 \text{ для кожного } t \in (0,1].$$

Але останнє й означає що при будь-якому $t \in [-1;0) \cup (0;1]$ справджується нерівність $|f(t)| \ge 4$.

Задача №3

Нехай CH – висота прямокутного трикутника ABC, яка проведена до гіпотенузи AB, а точки O_1, O_2 і O – є центрами кіл вписаних у трикутники ACH, BCH і ABC відповідно. Доведемо, що виконуються наступні умови:

1) $CO \perp O_1O_2$ і 2) $CO = O_1O_2$.



1) Доведемо спочатку, що прямі CO і O_1O_2 є перпендикулярними.

Для цього розглянемо $\triangle O_1CO_2$ і покажемо, що точка O є точкою перетину висот цього трикутника.

Отже, нехай бісектриса AO_1 кута A трикутника ACB перетинає сторону CO_2 трикутника O_1CO_2 у точці K_1. Тоді з трикутника AK_1C маємо, що

$$\angle AK_1C = 180^0 - \angle CAK_1 - \angle ACK_1 = 180^0 - \angle CAK_1 - \left(\angle ACO + \angle OCK_1\right) =$$

$$= 180^0 - \frac{\alpha}{2} - \left(45^0 + \left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 90^0.$$ Тому O_1K_1 є висотою $\triangle O_1CO_2$.

Нехай далі бісектриса AO_2 кута B трикутника ACB перетинає сторону CO_1 трикутника O_1CO_2 у точці K_2. Тоді з трикутника BK_2C маємо, що

$$\angle BK_2C = 180^0 - \angle CBK_2 - \angle BCK_2 = 180^0 - \angle CBK_2 - \left(\angle BCO + \angle OCK_2\right) =$$

$$= 180^0 - \frac{\beta}{2} - \left(45^0 + \left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right)\right) = 90^0.$$ Тому O_2K_2 є висотою $\triangle O_1CO_2$.

Оскільки висоти O_1K_1 і O_2K_2 трикутника O_1CO_2 перетинаються у точці O, то пряма CO буде перпендикулярною стороні O_1O_2 цього трикутника.

2) Доведемо тепер справедливість рівності $CO = O_1O_2$.

I спосіб.

Розглянемо трикутники OCB і O_2HB. Вони подібні за двома кутами, бо $\angle CBO = \angle HBO_2 = \dfrac{\beta}{2}$, $\angle OCB = \angle O_2HB = 45^0$. Тому $\dfrac{OC}{CB} = \dfrac{O_2H}{HB}$, звідки

$$O_2H = \frac{OC \cdot HB}{CB}.$$

З подібності трикутників COA і HO_1A (за двома кутами $\angle OAC = \angle O_1AH = \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle ACO = \angle AHO_1 = 45^0$) маємо, що $\dfrac{OC}{AC} = \dfrac{O_1H}{AH}$, звідки

$$O_1H = \frac{AH \cdot OC}{AC}.$$

З прямокутного трикутника O_1HO_2 за теоремою Піфагора маємо

$$O_1O_2 = \sqrt{HO_2^2 + HO_1^2} = \sqrt{\frac{OC^2 \cdot HB^2}{CB^2} + \frac{AH^2 \cdot OC^2}{AC^2}} = OC \cdot \sqrt{\frac{HB^2}{CB^2} + \frac{AH^2}{AC^2}} =$$

$$= OC \cdot \sqrt{\frac{HB^2}{AB \cdot BH} + \frac{AH^2}{AB \cdot AH}} = OC \cdot \sqrt{\frac{HB}{AB} + \frac{AH}{AB}} =$$

$$= OC \cdot \sqrt{\frac{AH + HB}{AB}} = OC \cdot \sqrt{\frac{AB}{AB}} = OC.$$

Отже, $CO = O_1O_2$.

II спосіб.

Нехай H_1 і H_2 – основи перпендикулярів, опущених з центрів (O_1 і O_2) кіл, вписаних в трикутники ACH і BCH відповідно. Тоді довжини відрізків O_1H_1 і O_2H_2 є радіусами r_1 і r_2 кіл вписаних в трикутники ACH і BCH відповідно.

З рівнобедреного прямокутного $\triangle O_1H_1H$ маємо, що $O_1H = r_1\sqrt{2}$.

Аналогічно, з прямокутного $\triangle O_2H_2H$ маємо, що $O_2H = r_2\sqrt{2}$.

Оскільки відрізки HO_1 і HO_2 належать бісектрисам суміжних кутів CHA і CHB, то $\angle O_1HO_2 = 90^\circ$. Тому з прямокутного $\triangle O_1HO_2$ за теоремою Піфагора маємо справедливість рівності $O_1O_2^2 = 2\left(r_1^2 + r_2^2\right)$.

Нехай далі r – радіус кола, вписаного в трикутник ACB. Оскільки точка O є центром цього кола (і належить бісектрисі прямого кута ACB), то $CO = r\sqrt{2}$, або ж $CO^2 = 2r^2$.

Покажемо тепер справедливість рівності $O_1O_2^2 = CO^2$.

Очевидно, що для цього достатньо довести справедливість рівності

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2. \qquad (11.3)$$

З а у в а ж и м о, що насправді, справедливість рівності (11.3) є наслідком узагальненої теореми Піфагора. Проте, доведемо цю рівність без використання вказаного твердження.

Для цього скористаємося подібністю прямокутних трикутників AHC, CHB та ACB (наприклад, за гострим кутом).

Очевидно, що $\triangle AHC \sim \triangle ACB$ з коефіцієнтом подібності $k_1 = AC / AB$. Тоді: півпериметр p_1 трикутника AHC можна виразити через півпериметр p трикутника ACB наступним чином $p_1 = k_1 p = \dfrac{AC}{AB} p$, а площу S_1 трикутника AHC через площу S трикутника ACB як $S_1 = k_1^2 \cdot S_2 = \left(\dfrac{AC}{AB} \right)^2 \cdot S_2$.

Тому радіус r_1 кола вписаного у трикутник ACB (за відомою формулою) можна подати у вигляді
$$r_1 = \frac{S_1}{p_1} = \frac{\left(\dfrac{AC}{AB} \right)^2 \cdot S_2}{\dfrac{AC}{AB} p} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{S_2}{p} = \frac{AC}{AB} \cdot r . \qquad (11.3.1)$$

З подібності $\triangle CHB$ та $\triangle ACB$ випливає справедливість аналогічної рівності
$$r_2 = \frac{BC}{AB} \cdot r . \qquad (11.3.2)$$

Зі співвідношень (11.3.1) та (11.3.2) маємо наступну рівність
$$r_1^2 + r_2^2 = \left(\frac{AC}{AB} \cdot r \right)^2 + \left(\frac{BC}{AB} \cdot r \right)^2 = \left(\frac{AC^2 + BC^2}{AB^2} \right) \cdot r^2 = r^2 .$$

Таким чином, оскільки $r_1^2 + r_2^2 = r^2$, то $CO^2 = 2r^2 = 2\left(r_1^2 + r_2^2\right) = O_1O_2^2$.

Звідки $CO = O_1O_2$.

<u>**Д о п о в н е н н я .**</u>

Нехай CH – висота прямокутного трикутника опущена на гіпотенузу. І нехай f_b, f_a, f_c – відповідні лінійні елементи (ті, що вимірюються в одиницях довжини) в подібних трикутниках AHC, CHB і ACB.

Доведіть (**узагальнену теорему Піфагора**), що має місце рівність $f_a^{\,2} + f_b^{\,2} = f_c^{\,2}$, та поясніть, чому теорема Піфагора є наслідком з цього твердження.

Задача №4

I спосіб.

Нехай a, b, c і d – довільні числа, сума яких дорівнює 1. Доведемо, що має місце нерівність $$a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd-2da \ge -\frac{1}{4}. \qquad (11.4.1)$$

Подамо ліву частину $L(a,b,c,d)$ даної нерівності у наступному вигляді
$$L(a,b,c,d) = -\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2\right).$$
та встановимо найменше значення виразу $L(a,b,c,d)$ для довільних чисел a, b, c і d, сума яких дорівнює 1. Очевидно, що
$$-\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2\right) \ge -\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$$
для довільних чисел a, b, c і d (зокрема таких, сума яких дорівнює 1).
Більше того, оскільки
$\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2\right)=0$ тоді і лише тоді, коли $a=b=c=d$, то
$$-\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2\right) \ge -4a^2.$$
Таким чином, для довільних дійсних чисел a, b, c і d які задовольняють умову $a+b+c+d=1$, найменше значення виразу $L(a,b,c,d)$ досягається коли $a=b=c=d$. Звідки маємо, що:
$$\min_{a+b+c+d=1} L(a,b,c,d) = L(a,b,c,d)\Big|_{\begin{cases}a+b+c+d=1\\ a=b=c=d\end{cases}} = L(a,a,a,a)\Big|_{a=\frac{1}{4}} = -4\cdot\frac{1}{16} = -\frac{1}{4}.$$
Але ж це й означає, що для довільних дійсних чисел a, b, c і d, які задовольняють умову $a+b+c+d=1$, справджується нерівність (11.4.1).

II спосіб.

$$a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd-2da \ge -\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\left(a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd-2da\right) \ge -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\left(a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd-2da\right)+1 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\left(a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd-2da\right)+(a+b+c+d)^2 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2cd+d^2-2da+a^2\right)-$$
$$-4ab-4bc-4cd-4da+a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(a-b)^2+2(b-c)^2+2(c-d)^2+2(d-a)^2+$$
$$+a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(a-b)^2+2(b-c)^2+2(c-d)^2+2(d-a)^2+(a-b+c-d)^2 \ge 0.$$

III спосіб.

Подамо нерівність (11.4.1) у вигляді

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-da\right)+\left(\frac{1}{4}-ab-bc-cd-da\right)\geq 0. \quad (11.4.2)$$

Очевидно, що для доведення даної нерівності достатньо буде показати, що кожен з двох доданків у лівій частині нерівності (11.4.2) є невід'ємним при довільних числах a, b, c і d, які задовольняють умову $a+b+c+d=1$.

Оскільки для довільних чисел a, b, c і d справджуються нерівності

$$a^2-2ab+b^2\geq 0, \qquad b^2-2bc+c^2\geq 0,$$
$$c^2-2cd+d^2\geq 0, \qquad d^2-2da+a^2\geq 0,$$

то має місце нерівність

$$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2ab-2bc-2cd-2da\geq 0,$$

яка й означає невід'ємність першого доданку в лівій частині нерівності (11.4.2).

Тепер покажемо, що для довільних дійсних чисел a, b, c і d, які задовольняють умову $a+b+c+d=1$, справджується нерівність

$$\frac{1}{4}-ab-bc-cd-da\geq 0.$$

Оскільки $ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)$ і $b+d=1-(a+c)$, то ліву частину останньої нерівності можна подати у вигляді

$$(a+c)^2-(a+c)+\frac{1}{4}\geq 0, \qquad \text{або ж} \qquad \left((a+c)-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0.$$

Справедливість останньої нерівності не викликає сумнівів. І тому ліва частина нерівності (11.4.2) є невід'ємною, як сума невід'ємних доданків.

IV спосіб.

Доведемо, що для чисел a, b, c і d, сума яких дорівнює 1, справджується нерівність

$$a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd-2da+\frac{1}{4}\geq 0. \quad (11.4.3)$$

Введемо наступні позначення $a-\frac{1}{4}=m$, $b-\frac{1}{4}=n$, $c-\frac{1}{4}=p$, $d-\frac{1}{4}=q$.

Тоді $m+n+p+q=0$, та $a=m+\frac{1}{4}$, $b=n+\frac{1}{4}$, $c=p+\frac{1}{4}$, $d=q+\frac{1}{4}$.

Звідки $a^2=m^2+\frac{m}{2}+\frac{1}{16}$, $b^2=n^2+\frac{n}{2}+\frac{1}{16}$, $c^2=p^2+\frac{p}{2}+\frac{1}{16}$, $d^2=q^2+\frac{q}{2}+\frac{1}{16}$.

Отже,

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2+p^2+q^2+\frac{1}{2}(m+n+p+q)+\frac{1}{4}=$$
$$=m^2+n^2+p^2+q^2+\frac{1}{4}.$$

Обчислимо далі суму

$$-2ab-2bc-2cd-2da=-2(ab+bc+cd+da)=$$

$$=-2\left(\left(m+\frac{1}{4}\right)\left(n+\frac{1}{4}\right)+\left(n+\frac{1}{4}\right)\left(p+\frac{1}{4}\right)+\left(p+\frac{1}{4}\right)\left(q+\frac{1}{4}\right)+\left(q+\frac{1}{4}\right)\left(m+\frac{1}{4}\right)\right)=$$

$$=-2\left(mn+np+pq+qm+\frac{1}{4}(m+n+p+q)+\frac{1}{4}\right)=-2\left(mn+np+pq+qm+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=-2(m+p)(n+q)-\frac{1}{2}=2(m+p)^2-\frac{1}{2}.$$

Таким чином $\quad a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2bc-2cd-2da+\frac{1}{4}=$

$$=m^2+n^2+p^2+q^2+\frac{1}{4}+2(m+p)^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=m^2+n^2+p^2+q^2+2(m+p)^2.$$

Тому нерівність (11.4.3) можна записати у вигляді

$$m^2+n^2+p^2+q^2+2(m+p)^2\ge 0, \qquad (11.4.4)$$

яка справджується при довільних m,n,p,q. Причому, рівність у ній досягається за умов коли $\begin{cases} m=0, n=0 \\ p=0,\ q=0 \end{cases}$, або, що теж саме, при $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

Задача №5

Нехай a, b, c і d – дані числа. За умовою задачі кожну секунду вони змінюються на інші числа – A_k, B_k, C_k і D_k – за наступним правилом

Крок (час)	A_k	B_k	C_k	D_k
0	a	b	c	d
1	$a+b$	$b+c$	$c+d$	$d+a$
2	$(a+b)+(b+c)$	$(b+c)+(c+d)$	$(c+d)+(d+a)$	$(d+a)+(a+b)$
	…	…	…	…

1) Не важко бачити, що на кожному кроці сума чисел (A_k, B_k, C_k, D_k) подвоюється у порівнянні із сумою чисел на попередньому кроці:

$$S_0=A_0+B_0+C_0+D_0=a+b+c+d;$$

$$S_1=A_1+B_1+C_1+D_1=(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)=2^1\cdot S_0;$$

$$S_2=A_2+B_2+C_2+D_2=(A_1+B_1)+(B_1+C_1)+(C_1+D_1)+(D_1+A_1)=2^1\cdot S_1=2^2\cdot S_0.$$

Тому на i-му кроці (через i секунд) сума чисел A_i, B_i, C_i і D_i становитиме

$$S_i=2^i\cdot S_0=2^i\cdot(a+b+c+d).$$

Припустимо, що через деякий час, а саме на k-му кроці ($k\ne 0$), дістали початкові числа a, b, c і d. Тоді:

з одного боку – сума одержаних чисел дорівнює $a+b+c+d=S_0$;

з іншого боку – сума чисел дорівнює $\quad 2^k\cdot(a+b+c+d)=2^k\cdot S_0$.

Тому має місце рівність $2^k\cdot S_0=S_0$. Звідки $\quad S_0\cdot(2^k-1)=0$.

Оскільки $k\ne 0$, то $2^k-1\ne 0$. Отже, $\quad S_0=a+b+c+d=0$.

2) Нехай $a+b=m$, $b+c=n$. Тоді $c+d=-m$, $d+a=-n$, а числа A_k, B_k, C_k, D_k на кожному кроці набувають вид

Крок (час)	A_k	B_k	C_k	D_k
0	a	b	c	d
1	m	n	$-m$	$-n$
2	$m+n$	$n-m$	$-(m+n)$	$-(n-m)$
	…	**…**	**…**	**…**

Більше того, на кожному i-му кроці ($i \geq 1$) мають місце рівності:

$$C_i = -A_i, \quad D_i = -B_i. \qquad (11.5.1)$$

Для $i=1;2$ це очевидно.

Припустимо, що співвідношення (11.5.1) виконуються при $i=k$. Тоді мають місце рівності $C_k + D_k = -(A_k + B_k)$, $D_k + A_k = -(B_k + C_k)$. Але це й означає, що $C_{k+1} = -A_{k+1}$, $D_{k+1} = -B_{k+1}$

Отже, за принципом математичної індукції для кожного $i \geq 1$ мають місце рівності (11.5.1).

3) Позначимо далі через $P_i = A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 + D_i^2$, $i \geq 1$. Тоді:

$$P_1 = 2m^2 + 2n^2 = 2^1\left(m^2+n^2\right);$$

$$P_2 = (m+n)^2 + (n-m)^2 + (m+n)^2 + (n-m)^2 = 4m^2 + 4n^2 = 2^2\left(m^2+n^2\right).$$

Покажемо, що при кожному натуральному $i \geq 1$ має місце рівність:

$$P_i = 2 \cdot P_{i-1} = 2^{i-1} \cdot P_1. \qquad (11.5.2)$$

Для $i=1;2$ це очевидно.

Припустимо, що рівність (11.5.2) виконується при $i=k$. Тоді

$$P_{k+1} = A_{k+1}^2 + B_{k+1}^2 + C_{k+1}^2 + D_{k+1}^2 = 2A_{k+1}^2 + 2B_{k+1}^2 = 2\left(\left(A_k+B_k\right)^2 + \left(B_k+C_k\right)^2\right) =$$

$$= 2\left(A_k^2 + B_k^2 + B_k^2 + C_k^2 + 2A_kB_k + 2B_kC_k\right) = 2\left(A_k^2 + B_k^2 + B_k^2 + C_k^2 + 2B_k\left(\underbrace{A_k + C_k}_{=0}\right)\right) =$$

$$= 2\left(A_k^2 + B_k^2 + B_k^2 + C_k^2\right) = 2P_k = 2 \cdot 2^{k-1} \cdot P_1 = 2^k \cdot P_1.$$

Отже, за принципом математичної індукції для $i \geq 1$ має місце рівність (11.5.2).

4) За припущенням, на k-му кроці ($k \neq 0$), дістали початкові числа a, b, c і d. Тому на $(k+1)$-му кроці матимемо числа $(a+b),(b+c),(c+d),(d+a)$. Тоді:

з одного боку – сума квадратів одержаних чисел дорівнює $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+d)^2 + (d+a)^2 = 2(a+b)^2 + 2(b+c)^2 = P_1$,

з іншого боку – сума квадратів одержаних чисел повинна дорівнювати $P_{k+1} = 2^{k+1}\left(m^2+n^2\right) = 2^k \cdot P_1$.

Тому має місце рівність $2^k \cdot P_1 = P_1$. Звідки $P_1 \cdot \left(2^k - 1\right) = 0$.

Оскільки $k \neq 0$, то $2^k - 1 \neq 0$. Отже, $P_1 = 2(a+b)^2 + 2(b+c)^2 = 0$.

Більше того, для довільного натурального $i \geq 1$ виконується умова $P_i = 0$, яка означає, що починаючи з першого кроку (вже після 1-ої секунди)

$$A_1 = B_1 = C_1 = D_1 = 0,$$

і тому на кожному наступному кроці ($i > 1$), зокрема на k-му ($k \neq 0$), ми матимемо усі нулі, тобто, $A_k = B_k = C_k = D_k = 0$.

За припущенням на k-му кроці ($k \neq 0$), дістали початкові числа a, b, c і d, що можливо лише за умов коли $a = b = c = d = 0$.

Таким чином, єдиним розв'язком даної задачі є четвірка $a = b = c = d = 0$.

Доповнення.

Доведіть аналогічне твердження для 2; 3 і n ($n \in N$) літер (записаних на дошці), які змінюються за тим самим правилом.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Германович П.Ю. Сборник задач по математике на сообразительность. Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, **1960**. – 224с.
2. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников. Пособие для учителей М.: «Просвещение», **1982**. – 96с.

***

3. Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике. М.: Просвещение, **2002.** – 208с.
4. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике, М.: МЦНМО, **2005**. – 560с.
5. Ященко И.В. Приглашение на математический праздник. 2-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, **2005**. – 104с.
6. Фомин А.А., Кузнецова Г.М. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады – М.: Дрофа, **2006**. – 159с.
7. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. Изд. 4-е, испр./ Под редакцией В.О. Бугаенко. М.: МЦНМО, **2008**. – 96с.

***

8. Вышенский В.А., Карташев Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И. Сборник задач киевских математических олимпиад, Киев, **1984**. – 240с.
9. Коваль Т.В. 400 задач з математичних олімпіад. 8–11 класи. – Тернопіль: Мандрівець, **2004.** – 80с.
10. Ясінський В.А. Олімпіадні задачі. Випуск 1: Навчальний посібник – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, **2004.** – 40с.
11. Довбыш Р.И., Потемкина Л.Л., Трегуб Н.Л., Лиманский В.В., Оридорога Л.Л., Кулеско Н.А. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями. – Донецк: ООО ПКФ «БАО», **2005**. – 336с.
12. Лось В.М., Тихієнко В.П. Математика: навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач: Навч. посібник. – К.: Кондор, **2005** – 312с.
13. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., **2005**. – 344с.
14. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язання . –Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, **2005.** – 208с.
15. Беседін Б.Б., Бірюкова Г.М., Ганзера Г.О., Кадубовська В.М., Кадубовський О.А., Плесканьова Л.Г., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв’язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2007: Навчальний посібник – Слов’янськ, **2008**. – 40 с.

Internet ресурси

1. **Київські олімпіади з математики – http://www.matholymp.kiev.ua/index.php**
2. **"Математические олимпиады и олимпиадные задачи"** (декілька тисяч олімпіадних задач російських і міжнародних математичних змагань) – **http://zaba.ru/**.
3. **Фізико-математичний журнал "Квант"** (завдання різних математичних олімпіад за 1971–2002рр) – **http://kvant.mccme.ru**
4. **Соросівська олімпіада для учнів – http://issep.rssi.ru**.
5. **International Mathematical Olympiad – http://imo.math.ca/**

Підприємець Маторін Б.І.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.

Підписано до друку 30.12.08 р.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 2,75.
Зам. № 72. Тираж 200 прим.

84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс (06262) 3-20-99; тел. (0626) 66-53-56

Слов'янський державний педагогічний університет

– один із престижних та прогресивних вищих навчальних закладів України.

СДПУ більш як 65 років посідає провідні позиції на ринку освітніх послуг.

З нашого університету розпочинається історія розвитку вищої педагогічної освіти в Донбасі.

СЕРІЯ: ВИКЛАДАЧІ СДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ

ВИПУСК 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ II ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ – 2008

До уваги абітурієнтів

Слов'янський державний педагогічний університет оголошує прийом студентів на **2009 – 2010** навчальний рік на денну та заочну форми навчання для підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційними рівнями

бакалавр, спеціаліст, магістр

за рахунок коштів державного бюджету, фізичних і юридичних осіб.

Строки навчання: бакалавр – 4 роки; спеціаліст – 1 рік на базі бакалавра; магістр – 1 рік на базі бакалавра, спеціаліста.

Перелік СЕРТИФІКАТІВ
УКРАЇНСЬКОГО ЦЕНТРУ ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ОСВІТИ,
(вступних випробувань)

які будуть зараховуватися для конкурсного відбору вступників на підготовку за напрямами (спеціальностями) для здійснення прийому на

фізико-математичний факультет

Слов'янського державного педагогічного університету в 2009 році:

Напрям підготовки. Спеціалізація	**Сертифікати. Вступні випробування**
6.040201 **Математика**. Спеціалізація: **основи інформатики**	1) українська мова та література (сертифікат), 2) математика (сертифікат)
6.040203 **Фізика.** Спеціалізація: **основи інформатики**	1) українська мова та література (сертифікат), 2) фізика (сертифікат) або математика (сертифікат)

Контактна інформація

84116, Донецька область, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Приймальна ректора: (06262) 3-23-54
Приймальна комісія: (06262) 3-97-50
Деканат фізико-математичного факультету
Тел.: (06262) 3-26-59