СЛОВ'ЯНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

СЕРІЯ: ВИКЛАДАЧІ СДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ...

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II етапу
Всеукраїнської олімпіади
з математики – 2009

ВИПУСК 5

Умови

Відповіді

Розв'язання

Слов'янськ – 2010

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ – 2009

6 – 11 класи

Слов'янськ – 2010

Серія заснована у 2008 році

УДК 371.384:51 (076)
ББК 22.1
О – 543

Кадубовський О.А., Беседін Б.Б., Ганзера Г.О., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв’язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2009 (ВИПУСК 5, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям...): Навчальний посібник – Слов’янськ, 2010. – 44 с.

Адресовано в першу чергу вчителям математики, як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням та студентам математичних факультетів педагогічних вузів.

РОЗГЛЯНУТО
ТА РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ
в якості навчального посібника для проведення факультативних занять з математики
НА ЗАСІДАННІ

– Вченої ради фізико-математичного факультету СДПУ (протокол № _ від __.__.2010р.)

– Вченої ради Слов’янського державного педагогічного університету (протокол № _ від __.__.2010р.)

Рецензенти: кандидат фіз.-мат. наук ЖУЧОК Ю.В., Інститут інформаційних технологій Луганського національного університету імені Тараса Шевченка, доцент кафедри математичного аналізу та алгебри

кандидат фіз.-мат. наук ВЕЛИЧКО В.Є., Слов'янський державний педагогічний університет, завідувач кафедри алгебри.

Відповідальний за випуск: кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри ГМВМ Кадубовський О.А.

ВІД АВТОРІВ

„Математика – це мистецтво розв'язувати задачі, які розв'язувати не вмієш"

„Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!"

Д. Пойа[1].

Даний посібник є **п'ятим** випуском серії **„ВИКЛАДАЧІ СДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ..."** заснованої у 2008 році. Посібник містить розв'язання задач ІІ етапу (районного) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, який проводився 29 листопада 2009 року відповідно до наказу УОН № 587 від 23.10.2009 р.

Як в попередніх випусках для більшості задач олімпіади пропонується кілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого із запропонованих методів. Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в певному розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головна мета авторів посібника – «донести» до вчителів і учнів якомога більше корисних математичних ідей і принципів та показати їх застосування.

Нагадаємо, що принципами в математиці називають деякі прості, майже очевидні, твердження, аксіоми або методи, які використовуються в доведеннях математичних теорем. Дуже часто з ними зустрічаються учні при розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Перш за все учні, які беруть участь в олімпіадах, повинні володіти значною кількістю принципів. Нажаль шкільна програма не передбачає знайомства з більшістю із них. З основними математичними принципами можна ознайомить в наведеній літературі, зокрема в [13][2].

[1] **Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 452 с.**
[2] **Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2005. – 344с.**

Від авторів

В посібнику до окремих задач наводяться „доповнення”, сенс яких полягає: у формулюванні двоїстої або схожої задачі,

або ж в узагальненні запропонованої задачі.

На думку авторів такі доповнення повинні активізувати і зацікавити учнів при підготовці до майбутніх олімпіад.

Автори посібника та керівництво фізико-математичного факультету СДПУ висловлює щиру подяку всім вчителям міста Слов’янськ, які беруть участь в організації та проведенні як учнівських олімпіад з математики, так і семінарів, присвячених аналізу їх результатів. Автори посібника висловлюють подяку викладачу кафедри алгебри Рубану Миколі Миколайовичу за активну участь у підготовці посібника.

Автори мають надію, що представлений посібник буде корисним не лише керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням, а й стане для багатьох з них поштовхом для більш глибокого вивчення математики в цілому.

Вчіться творити та винаходити в процесі розв’язування задач!
З найщирішими побажаннями, викладачі кафедри геометрії та методики викладання математики фізико-математичного факультету Слов’янського державного педагогічного університету.

30.12.2009

ЗМІСТ

УМОВИ ЗАДАЧ

6 клас

1. (15 балів) Що більше 15% від числа 240, чи число, 75% якого дорівнює 27?
2. (15 балів) Учень прочитав книгу за три дні. В перший день він прочитав 0,2 всієї книги і ще 16 сторінок, на другий день 0,3 залишку і ще 20 сторінок. В третій день 0,75 залишку і останні 30 сторінок книги? Скільки сторінок у книзі?
3. (20 балів) Хлопчик і дівчинка виміряли кроками відстань 143 м, 20 разів їхні кроки збігалися. Крок хлопчика 65 см. Чому дорівнює довжина кроку дівчинки?
4. (20 балів) Щоб пронумерувати сторінки великої наукової роботи, знадобилось 3389 цифр. Скільки сторінок у роботі?
5. (30 балів) У шестицифровому числі перша цифра співпадає з четвертою, друга з п’ятою, третя – з шостою. Доведіть, що це число кратне 7,11,13.

7 клас

1. (15 балів) Влітку ціну на лижі знизили на 10%, а взимку підняли на 10%. Порівняти ціну на лижі цією зимою та минулою (у відсотках)?
2. (15 балів) Кожний з трьох гравців записує сто слів, після цього записи порівнюються. Якщо слово зустрічається хоча б у двох, то його викреслюють зі всіх списків. Чи можлива ситуація, що у першого гравця залишилося 54 слова, у другого 75 слів, а у третього 80 слів?
3. (20 балів) Розмістити 6 точок на чотирьох прямих так, щоб на кожній з них було по три точки.
4. (20 балів) Знайти всі трійки простих чисел $a,\ b,\ c$ таких що $7a - bc = 105$.
5. (30 балів) Шестицифрове число ділиться на 8. Яку найменшу суму цифр воно може мати? Яку найбільшу суму цифр може мати таке число?

8 клас

1. (15 балів) Через п'ять років вік брата буде відноситись до віку сестри як $8:7$. Скільки років кожному з них зараз, якщо рік тому брат був вдвічі старший від сестри?
2. (15 балів) Довести, що коли $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$, де a, b, c – дійсні числа, то $a=b=c$.
3. (20 балів) Точка P – середина висоти, яка проведена до основи BC рівнобедреного трикутника ABC. Пряма BP перетинає бічну сторону AC у точці M. Доведіть, що $CM=2AM$.
4. (20 балів) На дошці записано число 12345678910111213…. Яка цифра буде стояти на 2009 місці?
5. (30 балів) Доведіть, що серед будь-яких ста цілих чисел, можна вибрати кілька (можливо, одне) різниця яких ділиться на 100.

9 клас

1. (15 балів) Обчислити значення виразу $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.
2. (15 балів) При яких цілих значеннях a рівняння $x(a-1)^2=(a+4)(a-1)$ має цілі розв'язки?
3. (20 балів) Розкладіть на множники x^5+x+1.
4. (20 балів) У рівнобедреному трикутнику ABC ($AC=BC$) провели медіану CC_1 і бісектрису AA_1. Знайдіть кут ACB, якщо $AA_1=2CC_1$.
5. (30 балів) В кожній клітині дошки 5×5 сидить жук. В деякий момент всі жуки переповзають на сусідні клітини (сусідніми вважаються ті, що мають спільну сторону). Доведіть, що після того як всі жуки переповзуть, знайдеться клітина, на якій сидітимуть принаймні два жуки.

УМОВИ ЗАДАЧ

10 клас

1. (15 балів) Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x-5}{x}\right|\left(x^2-x-12\right)\le 0$.
2. (15 балів) При якому значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2-ax+a-1=0$ буде найменшою?
3. (20 балів) Доведіть, що не існує чотирьох різних додатних чисел a,b,c,d таких, що $a+b=c+d$ та $a^3+b^3=c^3+d^3$.
4. (20 балів) Доведіть, що сума медіан трикутника менше периметра, але більше півпериметра трикутника.
5. (30 балів) В бібліотеці не більше 5000 книжок. Якщо їх зв'язувати по 6, по 7, по 5, то залишиться одна книга, якщо зв'язувати по 11, то зайвих книжок не буде. Скільки книжок в бібліотеці?

11 клас

1. (15 балів) Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x-5}{x}\right|\left(x^2-x-12\right)\le 0$.
2. (15 балів) Розв'яжіть рівняння $x^4+1=2x^2\sin y$.
3. (20 балів) Чому дорівнює сума дійсних коренів рівняння $f\left(x\right)=0$, якщо всі дійсні значення x задовольняють рівність $f\left(2x+1\right)=4x^2+14x$?
4. (20 балів) Доведіть, що на координатній площині не існує правильного трикутника, всі вершини якого мають цілі координати.
5. (30 балів) Дно прямокутної коробки викладено плитками розміром 2×2 та 1×4. Плитки висипали з коробки і загубили одну плитку 2×2. Замість неї дістали плитку розміром 1×4. Доведіть, що викласти тепер дно коробки не вдасться.

ВІДПОВІДІ

6 клас

1) обидва числа є рівними;
2) 270 сторінок;
3) 11 або 55 см;
4) 1124 сторінок.

7 клас

1) ціна товару зменшилась на 1%;
4) $(17;7;2)$, $(17;2;7)$;
5) 1; 51.

8 клас

1) Брату 3 роки, сестрі – 2 роки;
4) цифра 0 (12345678910… 704 705 70|6)

9 клас

1) 6;
2) $-4;0;1;2;6$;
3) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)$;
4) $\angle ACB=108^0$.

10 клас

1) $x\in[-3;0)\cup(0;4]\cup\{5\}$;
2) $a=1$;
5) 2101 або ж 4411 книжок.

11 клас

1) $x\in[-3;0)\cup(0;4]\cup\{5\}$;
2) $x_1=-1,\ y_1=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; $x_2=-1,\ y_2=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.
3) -5.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

6 клас

Задача №1

Нехай X перше число, а Y – друге. Тоді:
оскільки число X становить 15% від числа 240, то

$$X = 240 \cdot \frac{15}{100} = \frac{24 \cdot 15}{10} = 12 \cdot 3 = 36;$$

оскільки 75% від числа Y становить 27, то $Y = 27 \cdot \frac{100}{75} = 27 \cdot \frac{4}{3} = 9 \cdot 4 = 36$.

Відповідь: числа є рівними.

Задача №2

Нехай у книзі всього x сторінок, а y_1, y_2 і y_3 – кількість сторінок книги, яку учень прочитував у перший, другий і третій день відповідно.

За умовою в перший день учень прочитав 0,2 всієї книги і ще 16 сторінок, що згідно введених позначень становить $y_1 = 0,2x + 16$.

В другий день учень прочитав 0,3 залишку і ще 20 сторінок, тому

$$y_2 = 0,3\left(x - y_1\right) + 20.$$

В третій день учень прочитав 0,75 залишку і останні 30 сторінок книги, тому

$$y_3 = 0,75\left(x - y_1 - y_2\right) + 30.$$

Оскільки за три дні учень прочитав усю книгу (всі x сторінок книги), то справджується рівність $x = y_1 + y_2 + y_3 =$

$$= y_1 + y_2 + 0,75\left(x - y_1 - y_2\right) + 30 = 0,75x + 0,25y_1 + 0,25y_2 + 30 =$$

$$= 0,75x + 0,25y_1 + 0,25\left(0,3x - 0,3y_1 + 20\right) + 30 =$$

$$= 0,75x + 0,25y_1 + 0,075x - 0,075y_1 + 5 + 30 = 0,825x + 0,175y_1 + 35 =$$

$$= 0,825x + 0,175\left(0,2x + 16\right) + 35 = 0,825x + 0,035x + 2,8 + 35 = 0,86x + 37,8.$$

Отже, $x = 0,86x + 37,8$ або ж $0,14x = 37,8$. Звідки $14x = 3780$, $x = 270$.

Відповідь: у книзі 270 сторінок.

Задача №3

Оскільки при вимірюванні відстані у 143 м дівчинка і хлопчик стартували з однієї точки (називатимемо її початковою), то перше співпадіння слідів дівчинки і хлопчика відбулося на такій відстані від початкової точки, яка є найменшим спільним кратним довжин їх кроків.

Слід також розуміти, що останнє – ДВАДЦЯТЕ – співпадіння їх слідів відбулося у кінцевій точці – на відстані 143 м від початкової точки. Тому перше співпадіння їх слідів відбулося на відстані $\frac{143}{20}=7{,}15$ м або ж 715 см від початкової точки.

Нехай h – довжина кроку дівчинки. За умовою довжина кроку хлопчика – 65 см, а перше співпадіння слідів відбулося на відстані 715 см від початкової точки. Тому $\text{НСК}(65,h)=715$. Оскільки $65=5\cdot 13$ а $715=5\cdot 13\cdot 11$, то в розкладі числа h на прості множники обов'язково буде присутнім множник 11^1.

Тоді умові $\text{НСК}(65,h)=715$ будуть задовольняти чотири числа

1) $h=11$; 2) $h=11\cdot 5=55$; 3) $h=11\cdot 13=143$ і 4) $h=5\cdot 13\cdot 11=715$.

Проте, оскільки середній крок людини не перебільшує 100 см, то числа $h=143$ і $h=715$ не задовольняють умові задачі.

Крок $h=11$ см здається мало ймовірним, хоча не має жодних підстав категорично відкинути таку можливість.

Тому для довжини кроку дівчинки існує дві можливості – 11 або 55 см.

Відповідь: 11 або 55 см.

Розв'язання задач

Задача №4

Очевидно, що для нумерації перших 9 сторінок роботи (починаючи з 1-ої) знадобиться 9 цифр.

Кожна наступна сторінка – з 10 по 99 включно – буде нумеруватися 2-ма цифрами. Загальна кількість таких сторінок становить 99-10+1=90. Тому для їх нумерації знадобиться ще $2\cdot 90=180$ цифр.

Кожна сторінка починаючи з 100-ої буде нумеруватися 3-ма цифрами. Оскільки загальна кількість тризначних чисел становить $9\cdot 10\cdot 10=900$, то для нумерації 900 сторінок з 100-ої по 999 знадобиться $3\cdot 900=2700$ цифр.

Таким чином для нумерації перших 999 (9+90+900) сторінок знадобиться 9+180+2700=2889 цифр.

Решту $3389-2889=500$ цифр було використано для нумерації сторінок починаючи з 1000-ої. Оскільки для нумерації кожної такої сторінки використовується по 4 цифри, то занумеровано було $500:4=125$ таких сторінок. Причому остання сторінка має номер 1124.

Відповідь: 1124 сторінок.

Задача №5

Нехай x – задане шестицифрове число. Оскільки за умовою перша цифра числа співпадає з четвертою, друга – з п'ятою, а третя – з шостою, то число x можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} x=\overline{abcabc} &= a\cdot 100000+b\cdot 10000+c\cdot 1000+a\cdot 100+b\cdot 10+c= \\ &= a\cdot\left(100000+100\right)+b\cdot\left(10000+10\right)+c\cdot\left(1000+1\right)= \\ &= a\cdot 100\cdot 1001+b\cdot 10\cdot 1001+c\cdot 1001= \\ &= 1001\cdot\left(a\cdot 100+b\cdot 10+c\right)=7\cdot 11\cdot 13\cdot\left(100a+10b+c\right) \end{aligned}$$

Таким чином, оскільки задане число має вид $x=7\cdot 11\cdot 13\cdot\left(100a+10b+c\right)$, то воно є кратним числам 7, 11 і 13.

7 клас

Задача №1

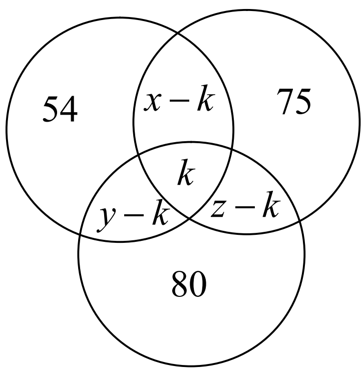
Нехай a – початкова ціна лиж (минулої зими). Влітку їх ціна знизилась на 10% і тому становила $a-0{,}1a=0{,}9a$ (грош.од.). Узимку ціна знову піднялася, на 10% й тому стала рівна $0{,}9a+0{,}1\cdot 0{,}9a=0{,}99a$ (грош.од.).

Оскільки $\dfrac{a-0{,}99a}{a}\cdot 100\%=\dfrac{0{,}01a}{a}\cdot 100\%=1\%$, то відносно минулої зими ціна товару знизилась на 1%.

Відповідь: ціна товару зменшилась на 1%.

Задача №2

Припустимо, що ситуація, зазначена в умові задачі, є можливою. Тоді (за умовою) після того, коли кожний з трьох гравців записав по сто слів, виявилося наступне:



у першого і другого x однакових слів;

у першого і третього – y однакових слів;

у другого і третього – z однакових слів;

у всіх трьох одночасно – k однакових слів.

Тому повинні справджуватись наступні рівності

$$100=54+x+y-k,\qquad 100=75+x+z-k,\qquad 100=80+y+z-k.$$

Звідки $300=54+75+80+x-k+y-k+z-k+k$ або ж $x+y+z-2k=91$.

З іншого боку $\begin{cases}x+y=46+k\\ x+z=25+k\\ y+z=20+k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2z=-1+k\\ 2y=41+k\\ 2x=51+k\end{cases}$ або ж $2(x+y+z)-3k=91$.

Тому для визначення цілих не від'ємних чисел x,y,z,k маємо систему

$\begin{cases}x+y+z-2k=91\\ 2(x+y+z)-3k=91\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z-k=0\\ -k=91\end{cases}$. Звідки $k=-91\notin\mathbb{Z}_+$, що суперечить умові задачі. Отже, вказана в умові задачі ситуація є неможливою.

Відповідь: НІ, вказана ситуація є неможливою.

Розв'язання задач

Задача №3

Розв'яжемо спочатку наступну задачу:

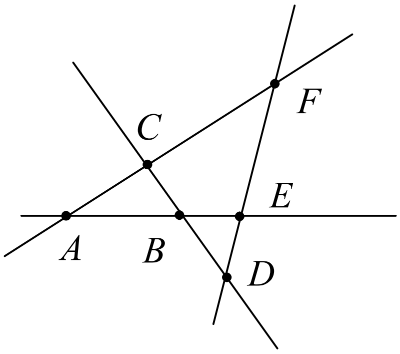


Рис. 7.3.1

навести приклад розташування чотирьох різних прямих на площині так, щоб на кожній з прямих містилося по три точки, загальна кількість яких становить шість.

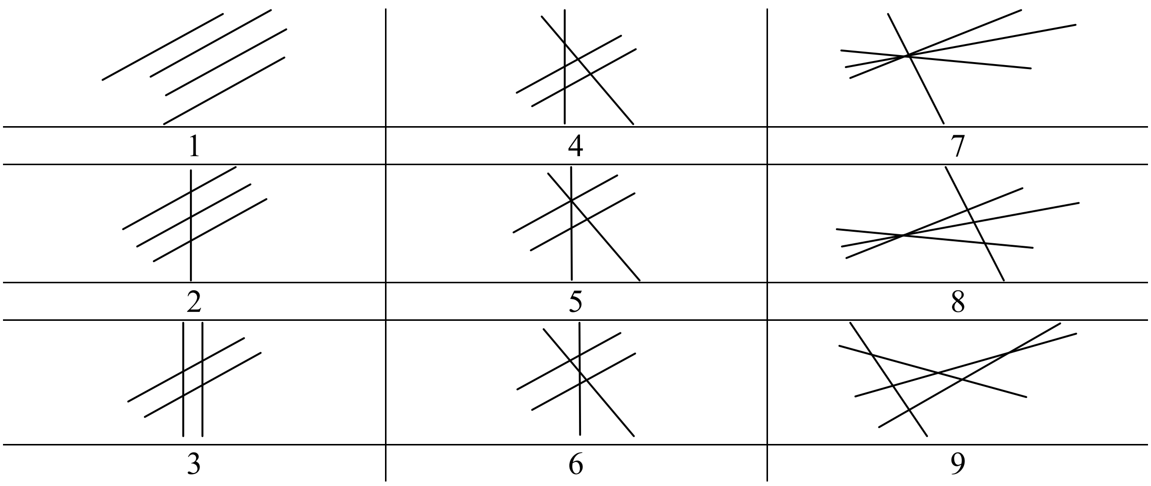
Припустимо, що необхідну конфігурацію побудовано, а A, B, C, D, E, F – вказані шість точок. Оскільки на кожній з чотирьох прямих міститься точно по три точки, то після видалення однієї з таких прямих (наприклад тієї, яка містила точки D, E, F) залишиться три прямі, на кожній з яких міститься точно по дві точки. Точки A, B і C повинні утворювати трикутник, бо за інших умов вони не будуть визначати трьох різних прямих, на кожній з яких містилося би точно по дві точки. Отже, шукану фігуру можна побудувати наступним чином:

1) зафіксувати три точки A, B і C (що не лежать на одній прямій) та провести через них три прямі;

2) провести четверту пряму, яка перетинає кожну з трьох прямих AB, BC і AC, наприклад у точках E, D і F відповідно.

В результаті одержимо фігуру, що задовольняє умові задачі.

Нижче наведено всі суттєво різні випадки взаємного розміщення чотирьох різних прямих на площині.



Тоді відповідь на поставлену в умові задачу можна сформулювати наступним чином:

у випадках 1–8 розмістити шість точок так, щоб на кожній з прямих містилося би по три точки не можливо;

якщо ж чотири прямі розташовані так, як показано на рис. 7.3.1 (випадок 9), то, з точністю до перепозначення точок і прямих, розміщення 6 точок так, щоб на кожній з прямих було по три точки – єдине, що вказане на зазначеному рисунку.

Задача №4

Перепишемо рівність $7a - bc = 105$ наступним чином $7(a-15) = bc$. Оскільки числа a, b, c і 7 є простими, то одне з чисел b або c дорівнює 7.

Якщо $b = 7$, то $a - 15 = c$. Звідки $a - c = 15$. Оскільки a і c є простими числами, різниця яких є непарним числом, то $c = 2$, $a = 17$. Інших простих чисел, різниця яких є непарним числом 15 не існує.

Якщо ж $c = 7$, то $a - 15 = b \Rightarrow a - b = 15$. Тому $b = 2$, $a = 17$. Інших простих чисел, різниця яких є непарним числом 15 не існує.

Таким чином, існує дві трійки простих чисел $a = 17$, $b = 7$, $c = 2$ і $a = 17$, $b = 2$, $c = 7$, що задовольняють рівності $7a - bc = 105$.

Відповідь: $(17;7;2)$, $(17;2;7)$.

Задача №5

Відомо, що натуральне число ділиться на 8, тоді і лише тоді, коли три його останні цифри – нулі, або утворюють число яке ділиться на 8.

Очевидно, що 6-значним числом з найменшою сумою цифр, є число 100000. Оскільки воно закінчується трьома нулями, то воно ділиться на вісім. Тому найменша сума цифр шестизначного числа кратного восьми становить один.

Для визначення (шестизначного числа кратного восьми) з найбільшою сумою цифр проведемо наступні міркування: очевидно, що шукане число x має найбільшу суму цифр лише у випадку коли має вигляд $x = \overline{999{*}{*}{*}}$, де замість зірочок стоятимуть цифри, що утворюють 3-значне число (з найбільшою сумою цифр), яке повинно ділитися на 8. Таким чином, знаходження шуканого 6-значного числа зводиться до відшукання саме 3-значного числа з найбільшою сумою цифр, яке ділиться на вісім. Оскільки число 888 ділиться на 8, то потрібно пересвідчитись у тому, чи не знайдеться іншого 3-значного числа більшого за 888, яке ділиться на 8 і сума цифр якого більше 24 (8+8+8).

Треба перевірити лише наступні числа: 889, 898, 988, 899, 989, 998 та 999. Вказану множину чисел можна скоротити до 898, 988, 998 – оскільки лише вони є парними (і можливо діляться на 8). Легко пересвідчитись, що жодне з чисел 898, 988, 998 не ділиться на 8.

Отже, шукане 6-значне число, сума цифр якого є найбільшою є саме число 999888, сума цифр якого становить 51.

8 клас

Задача №1

I спосіб.

Позначимо вік брата як x, а сестри – y. Тоді за умовою повинні справджуватися рівності $\frac{x+5}{y+5}=\frac{8}{7}$ та $\frac{x-1}{y-1}=\frac{2}{1}$.

Розв'яжемо отриману систему:

$$\begin{cases}\dfrac{x+5}{y+5}=\dfrac{8}{7}\\ \dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{2}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x+35=8y+40\\ x-1=2y-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x-8y=5\\ x=2y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14y-7-8y=5\\ x=2y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\ x=3\end{cases}.$$

Отже, зараз брату 3 роки, а сестрі 2 роки.

II спосіб.

Введемо коефіцієнт пропорційності x років. Тоді через 5 років брату буде $8x$, а сестрі $7x$ років. Рік тому брату було $8x-6$ років, а сестрі $7x-6$ років.

Оскільки рік тому брат був вдвічі старший від сестри , то $8x-6=2(7x-6)$.

Звідки $x=1$. Отже, зараз брату $8x-5=3$ роки, а сестрі $7x-5=2$ роки.

III спосіб.

	Зараз	Рік тому	Через 5 років
Вік брата	x	$x-1$	$x+5$
Вік сестри	y	$y-1$	$y+5$
Різниця	$x-y$	$x-y$	$x-y$
Відношення років	$\frac{x}{y}$	$\frac{x-1}{y-1}=2\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{x-y}{y-1}=1\Rightarrow$ $\Rightarrow\boxed{x-y}=y-1;$ $x=2y-1$	$\frac{x+5}{y+5}=\frac{8}{7}\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{x-y}{y+5}=\frac{1}{7}\Rightarrow$ $\Rightarrow\boxed{x-y}=\frac{y+5}{7}$

$$y-1=\frac{y+5}{7};$$

$$7y-7=y+5\Rightarrow 6y=12\Rightarrow y=2$$

$$x=3.$$

Відповідь: брату 3 роки, а сестрі 2 роки.

Задача №2

I спосіб.

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2ac+2bc\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=0\\a-c=0\\b-c=0\end{cases}\Rightarrow a=b=c.$$

II спосіб.

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc\Leftrightarrow a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc=0.$$

Розглянемо останню рівність як квадратне рівняння відносно змінної a. Тоді умову задачі (про умови коли наведена рівність є вірною) можна сформулювати наступним чином: *знайти усі такі значення змінної a, що є розв'язками рівняння* $a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc=0$.

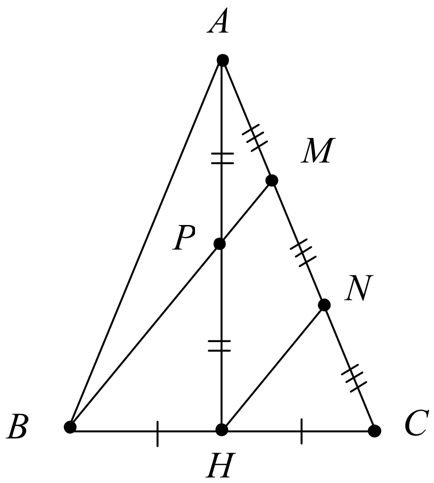
$$D=(b+c)^2-4\left(b^2+c^2-bc\right)=b^2+c^2+2bc-4b^2-4c^2+4bc=-3(b-c)^2.$$

Розв'язання задач

Оскільки рівняння $a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc=0$ має дійсні розв'язки тоді і лише тоді, коли $D\geq 0$, то $-3(b-c)^2\geq 0$, що можливо лише за умов коли $b=c$.

Але ж тоді $a=\dfrac{b+c}{2}=b=c$.

Задача №3



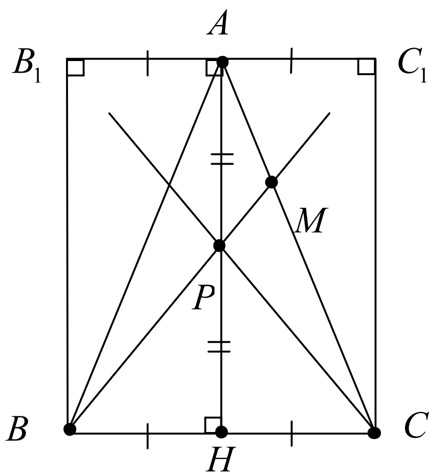
Нехай P – середина висоти AH, яка проведена до основи BC рівнобедреного трикутника ABC. Нехай пряма BP перетинає бічну сторону AC у точці M. Доведемо, що $CM=2AM$.

I спосіб.

Нехай N – середина відрізка CM. Тоді HN є середньою лінією $\triangle CBM$ і тому $HN\parallel BM$. Розглянемо $\triangle AHN$. Оскільки $AP=PH$ (за умовою), а $PM\parallel HN$ (бо $HN\parallel BM$), то за теоремою Фалеса $AM=MN$.

Таким чином, $AM=MN=NC$. Звідки $CM:MA=2:1$.

II спосіб.

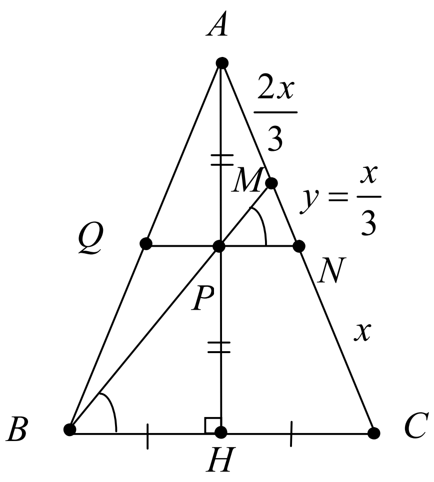


Через точку A проведемо пряму l паралельно стороні BC. І нехай B_1 і C_1 – основи перпендикулярів опущених на пряму l із точок B і C відповідно.

Тоді чотирикутник BB_1C_1C є прямокутником, центром симетрії якого є точка P. Тому точка P є точкою перетину діагоналей BC_1 і CB_1 прямокутника BB_1C_1C.

Оскільки P є серединою діагоналі CB_1, а точка A – серединою сторони B_1C_1, то точка M є точкою перетину медіан трикутника CC_1B_1. Тому за властивістю точки перетину медіан має місце відношення $CM:MA=2:1$.

ІІІ спосіб.



Через точку P проведемо пряму l паралельну стороні основі BC.

Нехай l перетинає сторони AB і AC у точках Q і N відповідно. Тоді за теоремою Фалеса PN є середньою лінією $\triangle AHC$. Тому $PN=\frac{1}{2}HC$.

Оскільки $HC=\frac{1}{2}BC$, то $PN=\frac{1}{2}HC=\frac{1}{4}BC$.

За побудовою $PN \parallel BC$. Тому $\triangle PMN$ є подібним $\triangle BMC$ з коефіцієнтом подібності $k=4$. Звідки $CN:NM=3:1$. Оскільки $AN=NC$, то $NM:MA=1:2$. Отже, $CM:MA=2:1$.

Задача №4

І спосіб.

Для запису числа було використано: 9 однозначних чисел – 9 цифр; всі двозначні числа – 90 чисел – 180 цифр. Разом цифри та двозначні числа в запису даного числа визначають 189 позицій (цифр). З'ясуємо «скільки значним» числом є передостаннє число у запису даного числа.

Загальна кількість позицій, що залишилися, становить $2009-189=1820$.

Оскільки $\left[\frac{1820}{3}\right]=606$ ($[q]$ – ціла частина числа q – найменше ціле число, яке не перевищує q), то передостаннє число у запису даного числа є тризначним. Отже, було використано ще принаймні 606 тризначних чисел. Це числа з 100 по 705 включно. Для запису вказаних 606 тризначних чисел було використано 1818 цифр.

Таким чином було використано $1\cdot 9+2\cdot 90+3\cdot 606=2007$ цифр, наступне число 706 займе відповідно 2008, 2009 та 2010 позиції в даному числі.

Таким чином, 2009 цифрою в запису даного числа буде цифра нуль (0).

Розв’язання задач

Задача №5

Покажемо спочатку справедливість твердження для ста довільних натуральних чисел. Відомо, що при діленні натурального числа на 100 можна отримати 100 різних остач: 0, 1, 2, …, 99. Нехай $n_1, n_2, ..., n_{100}$ – довільні 100 різних натуральних чисел. Без втрати загальності можна вважати, що $n_1 < n_2 < ... < n_{100}$. Тоді можливими є виключно наступні два випадки:

1) **є принаймні два числа n_1 і n_2, які мають однакову остачу r при діленні на** 100. Тобто, $n_1 = 100m_1 + r$, $n_2 = 100m_2 + r$. Тоді їх різниця $n_2 - n_1 = 100m_2 + r - 100m_1 - r = 100(m_2 - m_1)$ обов’язково буде ділитися на 100;

2) **всі числа мають різні остачі**. Тобто, серед них існує число, що має остачу r рівну 0. І тому ділиться на 100.

Нехай тепер $z_1, z_2, ..., z_{100}$ – довільні 100 різних цілих чисел.

Без втрати загальності можна вважати, що $z_1 < z_2 < ... < z_{100}$. Тоді можливими є виключно два наступні випадки:

1) **або існує число z_j, яке закінчується двома нулями або саме є нулем**, і тому ділиться на 100;

2) **або ж такого числа не існує**. Тоді

кожне додатне ціле число z_+ можна подати у вигляді $z_+ = 100m + r$, де $m \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, а $0 < r \le 99$;

кожне ж від’ємне ціле число z_- подамо у вигляді $z_- = -100m + r$, де $m \in \mathbb{N}$, а $0 < r \le 99$. Наприклад: $-23 = -100 \cdot 1 + 77$, $-123 = -100 \cdot 2 + 77$.

Оскільки (за припущенням) серед ста цілих чисел не має такого, що закінчується двома нулями або ж нуля, то є принаймні два числа z_i та z_j ($z_j > z_i$), які мають однакову остачу r при діленні на 100.

Оскільки $z_j - z_i = \pm 100m_j + r - (\pm 100m_i + r) = \begin{cases} 100(m_j - m_i), & z_i > 0 \\ 100(m_j + m_i), & z_i \cdot z_j < 0 \\ 100(-m_j + m_i), & z_j < 0 \end{cases}$, то

різниця $z_j - z_i$ ділиться на 100.

9 клас

Задача №1

І спосіб.

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{3^2+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{3^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=\left|3+\sqrt{2}\right|+\left|3-\sqrt{2}\right|=3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=6.$$

ІІ спосіб.

Нехай $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=x$, $x>0$. Тоді $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2=x^2$.

Звідки $11+6\sqrt{2}+2\sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}}+11-6\sqrt{2}=x^2$,

$22+2\sqrt{11^2-\left(6\sqrt{2}\right)^2}=x^2$, $22+2\sqrt{121-72}=x^2$,

$22+2\sqrt{49}=x^2$, $36=x^2$. Оскільки $x>0$, то $x=6$.

ІІІ спосіб.

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)}{\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)}=$$

$$=\frac{22+2\sqrt{11+6\sqrt{2}}\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}}=\frac{22+2\sqrt{121-72}}{\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}}=\frac{36}{\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\frac{36}{\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}}\Rightarrow\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2=36$$

Тому $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=6$.

Відповідь: $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=6$.

Додатки. Нехай $a,b,c>0$.

$$\sqrt{a+b\sqrt{c}}=\sqrt{a+2\frac{b}{2}\sqrt{c}+\left(\frac{b}{2}\right)^2+c-\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}+c\right)^2-\frac{b^2-4(a-c)}{4}}.$$

Якщо $b^2=4(a-c)$, то $\sqrt{a+b\sqrt{c}}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}+c\right)^2}=\left|\frac{b}{2}+c\right|=\frac{b}{2}+c$.

Аналогічно, якщо $b^2=4(a-c)$, то $\sqrt{a-b\sqrt{c}}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-c\right)^2}=\left|\frac{b}{2}-c\right|$.

Розв'язання задач

Задача №2

I спосіб.

Нехай $a=1$. Тоді дане рівняння набуває вид $x\cdot 0=0$, розв'язками якого є всі дійсні, зокрема цілі числа. І тому при $a=1$ дане рівняння має цілі розв'язки.

Нехай тепер $a\neq 1$. Тоді дане рівняння є рівносильним рівнянню

$$x=\frac{(a+4)(a-1)}{(a-1)^2} \text{ або ж } x=\frac{a+4}{a-1}.$$

З'ясуємо, при яких цілих $a\neq 1$ число $x=\frac{a+4}{a-1}$ є цілим числом.

Очевидно, що число $x=\frac{a+4}{a-1}=\frac{a-1+5}{a-1}=\frac{a-1}{a-1}+\frac{5}{a-1}=1+\frac{5}{a-1}$ є цілим тоді і лише тоді, коли число $a-1$ є дільником числа 5. Оскільки число 5 ділиться лише на числа ± 1 і ± 5, то число $x=1+\frac{5}{a-1}$ є цілим тоді і лише тоді, коли $|a-1|=1$ або $|a-1|=5$. Звідки маємо, що (у випадку цілих $a\neq 1$) рівняння $x=\frac{a+4}{a-1}$ має цілі розв'язки виключно при $a=0;2;6;-4$.

З урахуванням першого випадку остаточно маємо:

при $a=1$ $x\in\mathbb{Z}$; при $a=-4$ $x=0$; при $a=0$ $x=-4$;

при $a=2$ $x=6$; при $a=6$ $x=2$.

II спосіб.

Якщо $a=1$, то дане рівняння набуває вид $x\cdot 0=0$, розв'язками якого є всі дійсні, зокрема цілі числа. І тому при $a=1$ дане рівняння має цілі розв'язки.

Якщо $a\neq 1$, то дане рівняння є рівносильним рівнянню

$$x=\frac{(a+4)(a-1)}{(a-1)^2} \text{ або ж } x=\frac{a+4}{a-1}.$$

Очевидно, що при цілих $a\neq 1$ число $x=\frac{a+4}{a-1}$ є цілим числом тоді і лише тоді, коли або $a+4=0$, або число $|a-1|$ є дільником числа $|a+4|$.

Оскільки кожен з дільників додатного числа не перевищує його половини, то повинна справдуватися нерівність $|a-1| \le \frac{1}{2}|a+4|$.

Знайдемо розв'язки одержаної нерівності $2|a-1| \le |a+4|$.

$$2|a-1| \le |a+4| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < -4 \\ 2-2a \le -a-4 \end{cases} \\ \begin{cases} -4 \le a < 1 \\ 2-2a \le a+4 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ 2a-2 \le a+4 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < -4 \\ a \ge 6 \end{cases} \\ \begin{cases} -4 \le a < 1 \\ a \ge -\frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ a \le 6 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ -\frac{2}{3} \le a < 1 \\ 1 < a \le 6 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in \left[-\frac{2}{3};1\right) \cup (1;6].$$

Отже, цілими розв'язками нерівності $2|a-1| \le |a+4|$ є числа $0;2;3;4;5;6$.

Очевидно, що: при $a=0$ $x=-4$; при $a=2$ $x=6$; при $a=3$ $x=\frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}$, при $a=4$ $x=\frac{8}{3} \notin \mathbb{Z}$; при $a=5$ $x=\frac{9}{4} \notin \mathbb{Z}$; при $a=6$ $x=2$.

Таким чином (при цілих $a \ne 1$) число $x=\frac{a+4}{a-1}$ є цілим числом тоді і лише коли або $a=-4$, або ж $a=0;2;6$.

Відповідь: дане рівняння має цілі розв'язки лише при $a=-4;0;1;2;6$.

Задача №3

<u>I спосіб.</u>

$$x^5+x+1 = x^5-x^2+x^2+x+1 =$$
$$= x^2\left(x^3-1\right)+x^2+x+1 =$$
$$= x^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)+x^2+x+1 = .$$
$$= \left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)$$

II спосіб (Метод невизначених коефіцієнтів)

Подамо вираз x^5+x+1 в наступному вигляді:

$$x^5+x+1=$$

$$=x^5+x^4-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x+1=$$

$$=x^5+x^4+x^3-x^4-x^3-x^2+x^2+x+1=$$

$$=x^5+x^4+x^3-(x^4+x^3+x^2)+x^2+x+1=$$

$$=x^3(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=$$

$$=(x^3-x^2+1)(x^2+x+1).$$

III спосіб.

Нехай $x^5+x+1=\left(x^3+ax^2+bx+1\right)\left(x^2+cx+1\right)$. Тоді

$$\left(x^3+ax^2+bx+1\right)\left(x^2+cx+1\right)=$$

$$=x^5+x^4\left(c+a\right)+x^3\left(1+ac+b\right)+x^2\left(a+bc+1\right)+x\left(c+b\right)+1.$$

Оскільки

$$x^5+x+1=$$

$$=x^5+x^4\left(c+a\right)+x^3\left(1+ac+b\right)+x^2\left(a+bc+1\right)+x\left(c+b\right)+1, \text{ то}$$

$$\begin{cases} c+a=0 \\ 1+ac+b=0 \\ a+bc+1=0 \\ c+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-a \\ 1-a^2+b=0 \\ a-ab+1=0 \\ c=1-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=a+1 \\ 1-a^2+a+1=0 \\ -a+a\left(a+1\right)-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-a-2=0 \\ a^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=-1.$$

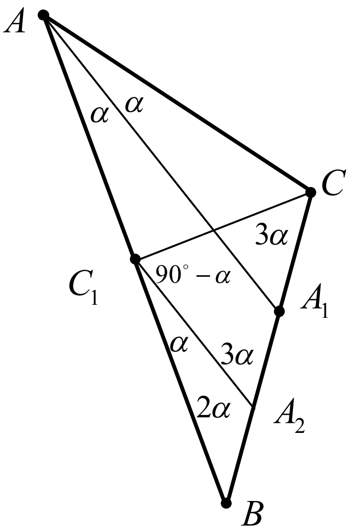
Оскільки $a=-1$, то $b=0$, $c=1$.

Тому $x^5+x+1=\left(x^3-x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)$.

Відповідь: $x^5+x+1=\left(x^3-x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)$.

Задача №4

Нехай ABC – даний рівнобедрений трикутник ($AC = BC$), AA_1 – бісектриса, а CC_1 – медіана Відомо, що $AA_1 = 2CC_1$. Знайдемо кут ACB.



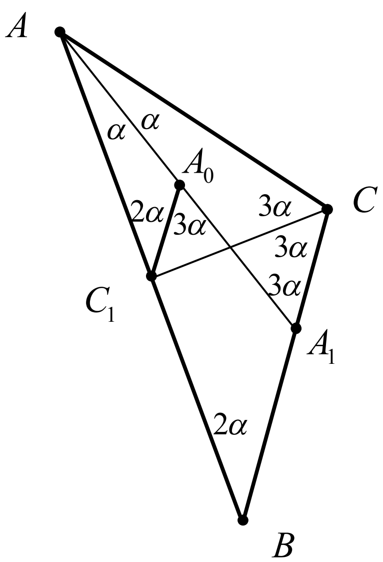
I спосіб.

Через точку C_1 проведемо пряму паралельну бісектрисі AA_1 і нехай вона перетинає сторону BC у точці A_2. Тоді за теоремою Фалеса C_1A_2 є середньою лінією трикутника BAA_1 і тому $C_1A_2 = A_0A_1 = C_1C$.

Нехай далі $\angle CAB = 2\alpha$. Тоді $\angle CBA = 2\alpha$, $\angle A_1AB = \angle A_2C_1B = \alpha$. Тому $\angle C_1A_2C = 3\alpha$ як зовнішній кут трикутника C_1BA_2 при вершині A_2. Оскільки трикутник A_2C_1C є рівнобедреним, то $\angle C_1CA_2 = 3\alpha$.

За умовою CC_1 – медіана рівнобедреного трикутника з основою AB. Звідки $\angle CC_1B = 90^\circ$. Тому $\angle CC_1A_2 = 90^\circ - \alpha$. Таким чином, сума кутів трикутника CC_1A_2 становить $90^\circ - \alpha + 3\alpha + 3\alpha = 90^\circ + 5\alpha$ або ж 180°. Звідки $5\alpha = 90^\circ$, або ж $\alpha = 18^\circ$. Отже $4\alpha = 72^\circ$ і тому $\angle ACB = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

II спосіб.



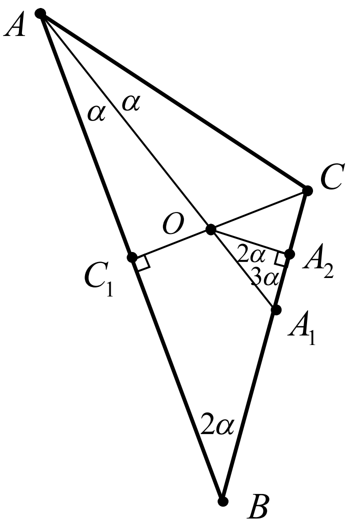
Нехай A_0 – середина бісектриси AA_1. Тоді C_1A_0 середня лінія трикутника BAA_1 і тому $C_1A_0 \parallel BA_1$.

Нехай далі $\angle CAB = 2\alpha$. Тоді $\angle A_1AB = \alpha$. Оскільки $C_1A_0 \parallel BA_1$, то $\angle AC_1A_0 = \angle ABC = 2\alpha$. Тому $\angle C_1A_0A_1 = 3\alpha$ як зовнішній кут трикутника AC_1A_0 при вершині A_0.

Оскільки $C_1A_0 \parallel BA_1$ і $A_0A_1 = C_1C$, то чотирикутник $A_1C_1A_0C$ є рівнобедреною трапецією (поясніть чому). Тому $\angle A_0A_1C = \angle C_1CA_1 = 3\alpha$.

За умовою CC_1 є медіаною рівнобедреного трикутника з основою AB. Звідки $\angle ACC_1 = \angle BCC_1 = 3\alpha$. Тоді з прямокутного трикутника AC_1C маємо, що $5\alpha = 90^\circ$. І тому $\angle ACB = 108^\circ$

III спосіб.



Нехай O – точка перетину бісектриси AA_1 і висоти CC_1 рівнобедреного $\triangle ABC$ з основою AC. Тоді O – точка перетину бісектрис трикутника. Нехай A_2 основа перпендикуляру опущеного із точки O на сторону BC. Тоді $OC_1 = OA_2$.

За властивістю точки перетину бісектрис мають місце наступні рівності

$\begin{cases} \dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{CA+CB}{AB} \\ \dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{AC+AB}{BC} \end{cases}$. Звідки $\begin{cases} \dfrac{CC_1}{OC_1} = \dfrac{2CA+AB}{AB} \\ \dfrac{AA_1}{OA_1} = \dfrac{2AC+AB}{BC} \end{cases}$ або ж

$\begin{cases} \dfrac{CC_1}{OC_1} = \dfrac{2CA+AB}{AB} \\ \dfrac{OA_1}{2CC_1} = \dfrac{BC}{2AC+AB} \end{cases}$. Тому $\dfrac{CC_1}{OC_1} \cdot \dfrac{OA_1}{2CC_1} = \dfrac{2CA+AB}{AB} \cdot \dfrac{BC}{2AC+AB}$. Отже,

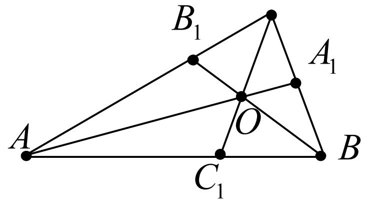
$\dfrac{OA_1}{2OC_1} = \dfrac{BC}{AB}$. Оскільки $OC_1 = OA_2$, $AB = 2C_1B$ то $\dfrac{OA_1}{2OA_2} = \dfrac{BC}{2C_1B}$ або ж $\dfrac{OA_2}{OA_1} = \dfrac{C_1B}{BC}$.

Розглянемо прямокутні трикутники C_1BC і A_2OA_1. З того що $\dfrac{OA_2}{OA_1} = \dfrac{C_1B}{BC}$ випливає, що трикутники C_1BC і A_2OA_1 є подібними. Тому $\angle A_2OA_1 = \angle C_1BC = 2\alpha$.

Не важко бачити, що $\angle AA_1C = 3\alpha$, як зовнішній кут AA_1B при вершині A_1. Тоді з прямокутного трикутника A_2OA_1 маємо, що $3\alpha + 2\alpha = 90^\circ$. Звідки $\alpha = 18^\circ$. І тому $\angle ACB = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Доповнення

Властивість точки перетину бісектрис трикутника



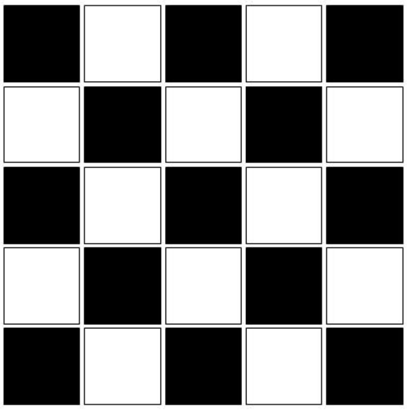
Нехай O – точка перетину бісектрис AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC. Тоді з трикутників CAC_1 і CBC_1 за властивістю основи бісектриси трикутника мають місце відношення $\dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$, $\dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{BC}{BC_1}$.

Тому $\dfrac{CO}{OC_1} = \dfrac{AC}{AC_1} = \dfrac{BC}{BC_1} = \dfrac{AC+BC}{AC_1+BC_1} = \dfrac{CA+CB}{AB}$.

Аналогічно $\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{AC+AB}{CB}$; $\dfrac{BO}{OB_1} = \dfrac{BA+BC}{AC}$.

Задача №5

І спосіб.



Розфарбуємо дошку, як показано на малюнку, вона складається з 13 чорних та 12 білих клітин. Легко бачити, що всі жуки, які розташовані в чорних клітинах, при переповзанні обов'язково попадуть саме на білу клітину, а жуки з білих клітин переповзуть до чорних. Оскільки «чорних» жуків 13, а білих клітин лише 12, то за *принципом Діріхлє* в одній білій клітині будуть сидіти що найменше два «чорних» жука.

Таким чином, після того як жуки переповзуть, рухаючись за правилом, визначеним в умові (перетинаючи саме спільні сторони а не вершини квадратів), знайдеться клітина, яка буде містити принаймні два жука.

Зауваження.
Легко помітити, що розв'язок по суті не залежить від вибору кольору розфарбування та й від розфарбування взагалі. Можна, наприклад, було для заповнення клітин вибрати два будь-яких знаки (букви, цифри тощо). Принципово був використаний той факт, що клітин одного кольору більше ніж іншого. Тепер сформулюємо сам ***принцип Діріхлє.***

Нехай в n коробках поміщено k предметів. Якщо кількість предметів більше кількості коробок ($k > n$), то існує хоча б одна коробка, у якій міститься щонайменше 2 предмета.

ІІ спосіб

Доведення проведемо від супротивного. Для цього простежимо за **траєкторіями** руху «змінного жука». А саме: оберемо довільну але фіксовану клітинку на дошці. Оскільки кожен жук обов'язково переповзає на іншу клітинку, то визначає тим самим наступну клітинку траєкторії. Отже, під ***траєкторією*** будемо розуміти послідовність клітинок дошки (починаючи з довільної) в якій кожну наступну клітинку визначає витіснений жук.

Розв'язання задач

Встановимо основні властивості траєкторій:

1) **довжина найменшої траєкторії становить 2** (дві клітинки): жуки міняються місцями;

2) **кожна траєкторія є траєкторією без самоперетинів**: якщо припустити обернене, то в клітинці перетину виявиться два жуки, чого за припущенням бути не може.

3) **кожна траєкторія є замкненою**: якщо припустити обернене, то в останній клітинці виявиться два жуки, а в першій жодного, чого за припущенням не може бути.

4) **довжина кожної траєкторії є «парною»** (складається з парної кількості клітинок): справедливість випливає з того, що в замкненій траєкторії сумарна кількість рухів праворуч дорівнює сумарній кількості рухів ліворуч, а сумарна кількість рухів униз дорівнює сумарній кількості рухів угору.

Таким чином, якщо припустити, що існує таке «переповзання» жуків при якому в кожній клітинці виявиться по одному жуку, то воно складається із траєкторій, що не перетинаються і задовольняють вказаним властивостям. Оскільки довжина кожної такої траєкторії є парною, то загальна кількість клітин усіх траєкторій може становити щонайбільше 24 клітинок дошки. Траєкторія останнього жука повинна бути замкненою та не перетинати інші траєкторії, що можливо лише тоді, коли жук залишається на місці. Чого не може бути за умовою (або ж за четвертою властивістю).

III спосіб

1	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**1**

Заповнимо таблицю числами 1 і 0, як показано на малюнку. Зрозуміло, що ні в яких двох сусідніх клітинах цієї таблиці не знаходяться ні дві одиниці ні два нулі. Легко бачити, що всі жуки, які розташовані в клітинах з числами 1, при переповзанні обов'язково попадуть в клітину з числом 0, а жуки з клітин з числом 0 переповзуть в клітини з числом 1.

Тобто числа 0 і 1 поміняють свої місця розташування, при цьому сума всіх чисел таблиці не повинна змінитися, оскільки за умовою задачі кожен жук переповз в сусідню клітину. Така властивість таблиці зберігати величину суми при зміні будь-яких відповідних значень сусідніх клітин називається *інваріантом* цієї таблиці.

Сума всіх чисел вихідної таблиці дорівнює 13. Але замінивши 12 нулів відповідно 12 одиницями, а 13 одиниць 13 нулями, в сумі отримаємо число 12, що на 1 менше за початкову суму. Інваріант таблиці порушено, тому можна стверджувати, що подібна зміна місць розташування жуків не можлива, а значить при обов'язковій такій зміні принаймні два жуки будуть знаходитися в одній клітині.

Доповнення.

Інваріант – це величина, яка залишається незмінною при тих або інших перетвореннях. У деяких задачах інваріант – це величина, яка змінюється монотонно, тобто тільки збільшується або тільки зменшується.

10 клас

Задача №1

$$\left|\frac{x-5}{x}\right|\left(x^2-x-12\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \begin{cases} x\ne 0 \\ x^2-x-12\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \begin{cases} x\ne 0 \\ (x+3)(x-4)\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \begin{cases} x\ne 0 \\ -3\le x\le 4 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Відповідь: $x\in[-3;0)\cup(0;4]\cup\{5\}$.

Задача №2

І спосіб.

За оберненою теоремою Вієта рівняння $x^2-ax+a-1=0$ має два корені, що визначаються рівностями $x_1=1$ і $x_2=a-1$.

Звідки маємо, що $x_1^2+x_2^2=1+(a-1)^2$.

Не важко бачити, що вираз $1+(a-1)^2$ приймає найменше значення рівне 1 при $a=1$.

Розв'язання задач

II спосіб.

Нехай x_1 і x_2 – дійсні корені квадратного рівняння $x^2 - ax + a - 1 = 0$, тоді

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 .$$

Тому за теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1x_2 = a - 1 \end{cases}$.

Звідки $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2(a-1) = a^2 - 2a + 1 + 1 = (a-1)^2 + 1$.

Вираз $1 + (a-1)^2$ приймає найменше значення рівне 1 при $a = 1$.

Відповідь: $a = 1$.

Задача №3

Доведення проведемо метод від супротивного. А саме: припустимо, що існують чотири різні додатні числа a, b, c, d такі, що виконуються умови $a + b = c + d$ і $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$, тобто, вони визначаються системою $\begin{cases} a + b = c + d \\ a^3 + b^3 = c^3 + d^3 \end{cases}$.

Очевидно, що $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Тому останню систему можна подати у вигляді $\begin{cases} a + b = c + d \\ (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (c+d)^3 - 3cd(c+d) \end{cases}$.

Зрозуміло, що останнє рівняння, за умов виконання першого, дає рівність $ab = cd$. Тому маємо наступну систему $\begin{cases} a + b = c + d \\ ab = cd \end{cases}$.

Оскільки числа a, b, c, d є додатними, то

$$\begin{cases} a + b = c + d \\ (a+b)^2 = (c+d)^2 \\ ab = cd \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = c + d \\ ab = cd \\ a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2cd + d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = c + d \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - c = d - b \\ a^2 - c^2 = d^2 - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = d - b \\ (a-c)(a+c) = (d-b)(d+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = d - b \\ a + c = d + b \end{cases}.$$

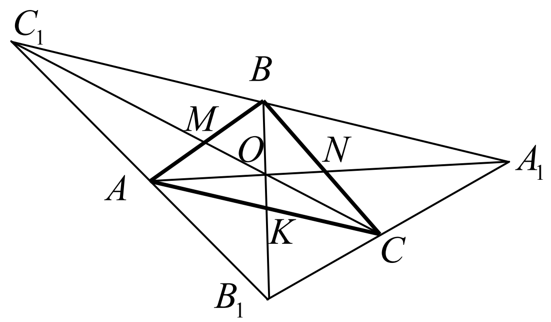
З останньої системи випливає, що $a = d$, але це суперечить умові задачі $(a \neq d)$.

Отже, наше припущення є хибним. І тому не існує чотирьох різних додатних чисел a,b,c,d , які задовольняють умові задачі.

Відповідь: не існують.

Задача №4

I спосіб.



Продовжимо медіани трикутника та відкладемо на їх продовженнях відрізки рівні відповідним медіанам. У чотирикутнику $ABCB_1$ діагоналі AC і BB_1 в точці перетину діляться навпіл, тоді чотирикутник $ABCB_1$ є паралелограмом. Аналогічно ABA_1C те ж паралелограм. Маємо $B_1C \parallel AB$ і $AB \parallel CB_1$. Тобто $AB \parallel A_1B_1$. Аналогічно $A_1C_1 \parallel AC$, $B_1C_1 \parallel BC$.

Розглянемо деякі трикутники і використаємо для них нерівність трикутника:

$$\triangle ABB_1: \quad AB + AB_1 > BB_1 \quad (AB_1 = BC),$$
$$\triangle ABA_1: \quad AB + BA_1 > AA_1 \quad (BA_1 = AC),$$
$$\triangle BCC_1: \quad BC + BC_1 > CC_1 \quad (BC_1 = AC).$$

Почленно додаючи нерівності отримаємо

$$AB + AB_1 + AB + BA_1 + BC + BC_1 > BB_1 + AA_1 + CC_1 .$$

У правій частині нерівності маємо подвійний периметр трикутника, а праворуч подвійна сума медіан цього трикутника, тоді

$$AN + BK + CM < AB + BC + AC . \qquad (1)$$

Далі

$$\triangle KCB_1: \quad KB_1 + \frac{AC}{2} > B_1C \quad (KB_1 = BK ,\ CB_1 = AB),$$
$$\triangle NBA_1: \quad NA_1 + \frac{BC}{2} > A_1B \quad (NA_1 = AN ,\ BA_1 = AC),$$
$$\triangle AMC_1: \quad MC_1 + \frac{AB}{2} > AC_1 \quad (MC_1 = MC ,\ AC_1 = BC).$$

Почленно додаючи нерівності отримаємо

$$KB_1 + NA_1 + MC_1 + \frac{AC + BC + AB}{2} > B_1C + A_1B + AC_1 = AB + BC + AC .$$

Таким чином, $$AN + BK + CM > \frac{AB + BC + AC}{2} \qquad (2)$$

З урахуванням (1) і (2) $\frac{AB + BC + AC}{2} < AN + BK + CM < AB + BC + AC.$

<u>ІІ спосіб.</u>

Нехай O – точка перетину медіан AN, BK і CM трикутника ABC. Оскільки

$$OA + OB > AB, \quad OA + OC > AC, \quad OB + OC > BC,$$

то, додаючи почленно ці три нерівності, одержимо, що

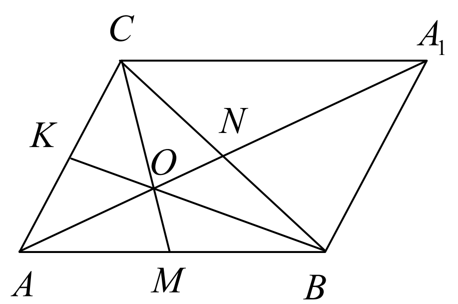
$$2\left(OA + OB + OC\right) > AB + BC + AC.$$

Враховуючи, що $AO = \frac{2}{3}AN$, $OC = \frac{2}{3}CM$, $BO = \frac{2}{3}BK$ отримаємо

$$2 \cdot \frac{2}{3}(AN + BK + CM) > AB + BC + AC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AN + BK + CM > \frac{3}{4}(AB + BC + AC) > \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$$

(Ми довели більш сильну нерівність $AN + BK + CM > \frac{3}{4}\left(AB + BC + AC\right)$)



Отже, $AN + BK + CM > \frac{1}{2}\left(AB + BC + AC\right)$

Відкладемо на продовженні медіани AN за точку N відрізок NA_1, рівний AN. Тоді ABA_1C – паралелограм. Тому $BA_1 = AC$, $2AN = AA_1$, $AA_1 < AB + BA_1 = AB + AC$.

Звідки $$AN < \frac{1}{2}\left(AB + AC\right).$$

Аналогічно доведемо, що $BK < \frac{1}{2}\left(AB + BC\right)$, $CK < \frac{1}{2}\left(AC + BC\right)$.

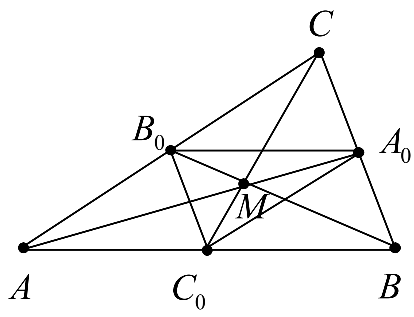
Додаючи почленно ці три нерівності, одержимо:

$$AN + BK + CM < AB + BC + AC.$$

Остаточно: $$\frac{AB + BC + AC}{2} < AN + BK + CM < AB + BC + AC.$$

III спосіб.

Нехай A_0, B_0, C_0 – середини сторін BC, AC і AB відповідно. Тоді $m_a = AA_0$, $m_b = BB_0$ і $m_c = CC_0$ є медіанами, а відрізки A_0B_0, B_0C_0 і A_0C_0 середніми лініями трикутника ABC. Позначимо через M точку перетину медіан $\triangle ABC$. Тоді за властивістю точки перетину медіан трикутника справджуються рівності:



$$\frac{AM}{MA_0} = \frac{2}{1}, \quad \frac{BM}{MB_0} = \frac{2}{1}, \quad \frac{CM}{MC_0} = \frac{2}{1}.$$

Звідки $AM = \frac{2}{3}m_a$, $BM = \frac{2}{3}m_b$, $CM = \frac{2}{3}m_c$.

За «нерівністю трикутника» з трикутників AMB, BMC і CMA маємо нерівності

$$\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > AB \ (3); \quad \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c > BC \ (4); \quad \frac{2}{3}m_c + \frac{2}{3}m_a > AC \ (5).$$

З нерівностей (3)–(5) випливає, що $\frac{4}{3}m_a + \frac{4}{3}m_b + \frac{4}{3}m_c > AB + BC + CA$. Звідки

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}\left(AB + BC + CA\right) > \frac{1}{2}\left(AB + BC + CA\right).$$

Оскільки A_0B_0, B_0C_0 і A_0C_0 є середніми лініями $\triangle ABC$, то

$$A_0B_0 = \frac{AB}{2}, \qquad A_0C_0 = \frac{AC}{2}, \qquad B_0C_0 = \frac{BC}{2}.$$

Тоді за «нерівністю трикутника» з трикутників AA_0C_0, BB_0A_0 і CC_0B_0 маємо нерівності

$$\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC > m_a \ (6); \quad \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AB > m_b \ (7); \quad \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC > m_c \ (8).$$

З нерівностей (6)–(8) випливає, що $AB + BC + CA > m_a + m_b + m_c$.

Задача №5

I спосіб.

Нехай q – число книжок у бібліотеці. За умовою їх не більше 5000. Відомо, що якщо їх зв'язувати по 6, по 7 або ж по 5, то залишиться одна книга. Тому

$$q = \text{НСК}\left(5;6;7\right) \cdot l + 1 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot l + 1 = 210l + 1, \ l \in \mathbb{N}.$$

Якщо ж книжки зв'язувати по 11, то зайвих книжок не буде. І тому

$$q = 11k\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Таким чином, $q = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot l + 1 = 11k \ \Rightarrow 210l + 1 = 11k \ \Rightarrow q = 209l + l + 1 = 11k$.

Очевидно, що q ділиться на 11 тоді і лише тоді, коли число $(l+1)$ ділиться на q. Тому $l + 1 = 11m$ ($m \in \mathbb{N}$) звідки $l = 11m - 1$. Отже, число книжок у бібліотеці можна подати у вигляді

$$q = 209(11m - 1) + 11m = 11m \cdot 210 - 209 =$$

$$= 2310m - 209\,,\ m \in \mathbb{N}\,.$$

Оскільки $q \le 5000$, то $2310m - 209 \le 5000$. Звідки $2310m \le 5209$. Тому $m \le \left[\dfrac{5209}{2310}\right]$, $m \in \mathbb{N}$. Останній умові задовольняють лише два натуральні числа

$$m = 1 \qquad \text{і} \qquad m = 2\,.$$

Таким чином, у бібліотеці може бути або $q = 2310 \cdot 1 - 209 = 2101$, або ж $q = 2310 \cdot 2 - 209 = 4411$ книжок.

<u>II спосіб.</u>

Нехай в бібліотеці N книжок ($N < 5000$). Тоді, з урахуванням того що $N - 1$ ділиться на 10 (бо ділиться на 5 і 6), саме число N закінчується цифрою 1.

Тому в подальшому нас будуть цікавити саме ті чотиризначні числа N, які:

1. закінчуються 1;
2. діляться на 11.

З іншого боку, шукані числа N є такими, що числа $N - 1$:

1) діляться на 3 (оскільки діляться на 6);
2) діляться на 7.

Далі будемо «поступово відбирати» числа використовуючи ознаки ділення чисел на 11, 3, 7.

Ознака ділення на 11. На 11 діляться ті й тільки ті числа, у яких сума цифр, що займають непарні місця, або дорівнює сумі цифр, що займають парні місця, або відрізняється від неї на число, що ділиться на 11.

Ознака ділення на 3. Число ділиться на 3 тоді й тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3.

Ознака ділення на 7. Число ділиться на 7 тоді й тільки тоді, коли результат віднімання подвоєної останньої цифри із цього числа без останньої цифри ділиться на 7 (наприклад, 364 ділиться на 7, тому що $36-(2\times 4)=28$ ділиться на 7).

Розглянемо далі числа виду $N=\overline{abc1}$,

де $1<a<5$; $a+c=b+1$ або $((a+c)-(b+1))\vdots 11$; $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

Важливо те, що $(N-1)$≥210*10=2100, або N≥2101 оскільки НСД(210,11)=1.

Не складно побудувати такі числа:

Для перевірки ділення на 3 і на 7 достатньо перебрати числа $N_1=(N-1)/10$.

З урахування сказаного вище маємо наступну таблицю:

N	N_1	$N_1\vdots 3$	$N_1\vdots 7$	N	N_1	$N_1\vdots 3$	$N_1\vdots 7$	N	N_1	$N_1\vdots 3$	$N_1\vdots 7$
4961	496	-	-	3971	397	-	-	2981	298	-	-
4851	485	-	-	3861	386	-	-	2871	287	-	-
4741	474	474	-	3751	375	375	-	2761	276	276	-
4631	463	-	-	3641	364	-	-	2651	265	-	-
4521	452	-	-	3531	353	-	-	2541	254	-	-
4411	**441**	**441**	**441**	3421	342	342	-	2431	243	243	-
4301	430	-	-	3311	331	-	-	2321	232	-	-
4191	419	-	-	3201	320	-	-	2211	221	-	-
4081	408	408	-	3091	309	309	-	**2101**	**210**	**210**	**210**

Таким чином, тільки два числа задовольняють умові задачі. Це числа 4411 та 2101.

Відповідь: 2101 або 4411 книжок.

Розв'язання задач

11 клас

Задача №1

$$\left|\frac{x-5}{x}\right|\left(x^2-x-12\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \begin{cases} x\ne 0 \\ x^2-x-12\le 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \begin{cases} x\ne 0 \\ (x+3)(x-4)\le 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \begin{cases} x\ne 0 \\ -3\le x\le 4 \end{cases}\end{array}\right. .$$

Відповідь: $x\in[-3;0)\cup(0;4]\cup\{5\}$.

Задача №2

I спосіб.

Оскільки $x=0$ не є коренем рівняння $x^4+1=2x^2\sin y$, то

$$x^4+1=2x^2\sin y \Leftrightarrow \frac{x^4+1}{2x^2}=\sin y.$$

Оскільки для довільного $y\in\mathbb{R}$ $-1\le\sin y\le 1$, то $-1\le\frac{x^4+1}{2x^2}\le 1 \Leftrightarrow 0<\frac{x^4+1}{2x^2}\le 1$.

$$\frac{x^4+1}{2x^2}\le 1 \Leftrightarrow x^4+1\le 2x^2 \Leftrightarrow x^4-2x^2+1\le 0 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2\le 0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. .$$

При $x=\pm 1$ рівняння $x^4+1=2x^2\sin y$ набуває вид $2=2\sin y$. Звідки $y=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

II спосіб.

$x=0$ не є коренем данного рівняння, тому $x^4+1=2x^2\sin y \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=2\sin y$.

Оскільки $x^2+\frac{1}{x^2}\ge 2$ (за нерівністю Коші), а $2\sin y\le 2$, то

$$x^2+\frac{1}{x^2}=2\sin y \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\frac{1}{x^2}=2 \\ 2\sin y=2 \end{cases}.\ \text{Звідки}\ \begin{cases} x^2=1 \\ \sin y=1 \end{cases}\ \text{або ж}\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ \sin y=1 \end{cases}.$$

III спосіб.

$$x^4+1=2x^2\sin y \Leftrightarrow x^4-2x^2+1=2x^2\sin y-2x^2 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2=2x^2\left(\sin y-1\right).$$

Оскільки для довільного $x\in\mathbb{R}$ $\left(x^2-1\right)^2\ge 0$, то $2x^2\left(\sin y-1\right)\ge 0$.

З того що $x=0$ не є коренем рівняння $\left(x^2-1\right)^2=2x^2\left(\sin y-1\right)$ випливає, що $2x^2\left(\sin y-1\right)\ge 0$ лише за умов коли $\sin y-1\ge 0$ або ж $\sin y\ge 1$, що є можливим лише коли $\sin y = 1$. Звідки $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. При $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ рівняння $\left(x^2 - 1\right)^2 = 2x^2\left(\sin y - 1\right)$ набуває вид $\left(x^2 - 1\right)^2 = 0$. Звідки $x^2 - 1 = 0$, або ж $x = \pm 1$. Тому $x_1 = -1$, $y_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x_2 = -1$, $y_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

IV спосіб.

Виділимо повний квадрат:

$$x^4 + 1 = 2x^2 \sin y \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 \sin y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 \sin y + \sin^2 y - \sin^2 y + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - \sin y)^2 + \cos^2 y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sin y = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \sin y \\ \left[\begin{array}{l} y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z. \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}.$$

Відповідь: $x_1 = -1$, $y_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x_2 = -1$, $y_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Задача №3

I спосіб.

$$f\left(2x + 1\right) = 4x^2 + 14x = \left(2x\right)^2 + 4x + 1 + 10x - 1 = \left(2x + 1\right)^2 + 5\left(2x + 1\right) - 6.$$

Введемо заміну $2x + 1 = t$. Тоді $f\left(2x + 1\right) = 4x^2 + 14x$ набуває виду

$$f\left(t\right) = t^2 + 5t - 6.$$

Оскільки рівність $f\left(2x + 1\right) = 4x^2 + 14x$ виконується при всіх дійсних значеннях x, то рівність $f\left(t\right) = t^2 + 5t - 6$ виконується при всіх значеннях t.

І тому функція $f\left(x\right)$ має вид $f\left(x\right) = x^2 + 5x - 6$, а рівняння $f\left(x\right) = 0$ набуває виду $x^2 + 5x - 6 = 0$.

Тому сума дійсних коренів рівняння $f\left(x\right) = 0$ становить $x_1 + x_2 = -5$.

II спосіб.

Очевидно, що коренями рівняння $f(2x+1)=0$ є числа $z_1=0$ і $z_2=-\frac{7}{2}$. Тоді коренями рівняння $f(x)=0$ будуть числа $x_1=2z_1+1=1$ і $x_2=2z_2+1=-6$. Тому $x_1+x_2=-5$.

Справедливість наведених міркувань випливає з наступних властивостей перетворень графіків функцій

Доповнення.

Розглянемо дві функції $y_1=f(x)$ та $y_2=f(ax+b)$, де $a\neq 0$. Тоді кількість нулів функції $y_1=f(x)$ (кількість розв'язків рівняння $f(x)=0$) співпадає з кількістю нулів функції $y_2=f(ax+b)$ (кількістю розв'язків рівняння $f(ax+b)=0$). Більше того, якщо припустити, що x_0 є нулем функції $y_1=f(x)$, то нулем функції $y_2=f(ax+b)$ буде число $x'=\frac{x_0-b}{a}$. І навпаки: якщо, x' – нуль функції $y_2=f(ax+b)$, то нулем функції $y_1=f(x)$ буде число $x_0=ax'+b$.

Зауваження.

Вказані властивості функцій мають місце виключно при лінійних замінах змінних $x'=ax+b$. Так наприклад, функції $f(x)=x-1$ і $f(x^2)=x^2-1$ мають різну кількість нулів.

III спосіб.

Якщо рівність $f(2x+1)=4x^2+14x$ виконується для будь якого дійсного значення x, то вона буде виконуватися і для $x=\frac{t-1}{2}$ ($t\in\mathbb{R}$), тобто, для довільного дійсного t справджується рівність

$$f(2x+1)=f\left(2\cdot\frac{t-1}{2}+1\right)=f(t)=4\cdot\frac{(t-1)^2}{4}+14\frac{t-1}{2}=(t-1)(t+6).$$

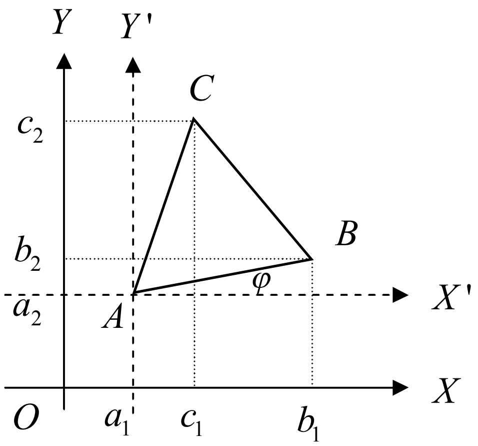
Очевидно, що $t_1=1$ і $t_2=-6$ – корені рівняння $f(t)=0$. Але ж тоді $x_1=1$ і $x_2=-6$ – корені рівняння $f(x)=0$. Тому $x_1+x_2=1-6=-5$.

Відповідь: -5.

Задача №4

I спосіб.

Доведемо, що на координатній (прямокутній декартовій) площині XOY не існує правильного трикутника, всі вершини якого мають цілі координати. Доведення проведемо методом від супротивного. А саме:



нехай $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ і $C(c_1,c_2)$ – вершини правильного трикутника, причому $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо прямокутну систему координат з початком у точці A та осями AX' і AY' паралельними осям OX і OY відповідно. Тоді відносно системи $X'AY'$ вершини трикутника ABC також мають цілі координати: $A=(0,0)$, $B=(b_1-a_1,b_2-a_2)$, $C=(c_1-a_1,c_2-a_2)$.

Нехай сторона AB утворює з віссю AX' кут φ. Тоді сторона AC утворює з віссю AX' кут $60^\circ+\varphi$. Позначимо через d сторону правильного трикутника. Тоді $c_1-a_1=d\cos\left(60^\circ+\varphi\right)=d\left(\cos60^\circ\cos\varphi-\sin60^\circ\sin\varphi\right)=$

$$=(d\cos\varphi)\cos60^\circ-(d\sin\varphi)\sin60^\circ=(b_1-a_1)\cdot\frac{1}{2}-(b_2-a_2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тому $(b_2-a_2)\cdot\sqrt{3}=b_1-a_1-2(c_1-a_1)$.

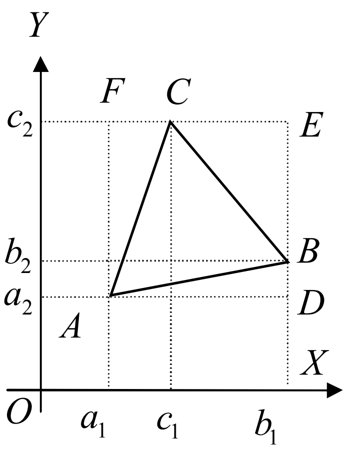
Оскільки $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in\mathbb{Z}$, то права частина останньої рівності є раціональним числом.

Якщо $a_2\neq b_2$, то ліва частина останньої рівності є числом ірраціональним. І тому приходимо до протиріччя.

Якщо ж $a_2=b_2$, то $\varphi=0^\circ$. Звідки $c_1-a_1=d\cos\left(60^\circ+\varphi\right)=d\cos60^\circ=\dfrac{d}{2}$.

Тому $c_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$, (c_2-a_2) – довжина висоти трикутника опущеної з вершини C. Тому $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}(c_2-a_2)\cdot(b_1-a_1)\in\mathbb{Q}$. З іншого боку – $S_{\triangle ABC}=\dfrac{d^2\sqrt{3}}{4}\notin\mathbb{Q}$. І знов приходимо до суперечності.

<u>II спосіб.</u>



Нехай $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ і $C(c_1, c_2)$ – вершини правильного трикутника, причому $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$. Тоді згідно позначень, зроблених на рисунку, маємо

$AD = b_1 - a_1$, $DB = b_2 - a_2$ звідки $S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$;

$BE = c_2 - b_2$, $EC = b_1 - c_1$ звідки $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}(c_2 - b_2)(b_1 - c_1)$;

$CF = c_1 - a_1$, $FA = c_2 - a_2$.звідки $S_{\triangle CFA} = \frac{1}{2}(c_1 - a_1)(c_2 - a_2)$.

Таким чином $S_{\triangle ABC} = S_{ADEF} - (S_{\triangle ADB} + S_{\triangle BEC} + S_{\triangle CFA}) =$

$$= (b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - \frac{1}{2}(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) - \frac{1}{2}(c_2 - b_2)(b_1 - c_1) - \frac{1}{2}(c_1 - a_1)(c_2 - a_2) =$$

$$= \frac{1}{2}(b_1 - a_1)(c_2 - a_2) + \frac{1}{2}(b_1 - a_1)(c_2 - a_2) -$$

$$-\frac{1}{2}(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) - \frac{1}{2}(c_2 - b_2)(b_1 - c_1) - \frac{1}{2}(c_1 - a_1)(c_2 - a_2) =$$

$$= \frac{1}{2}(b_1 - a_1)(c_2 - b_2) + \frac{1}{2}(c_2 - a_2)(b_1 - c_1) - \frac{1}{2}(c_2 - b_2)(b_1 - c_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(c_2 - b_2)(c_1 - a_1) + \frac{1}{2}(c_2 - a_2)(b_1 - c_1) = \frac{1}{2}(a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - \frac{1}{2}(a_2 - c_2)(b_1 - c_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (a_2 - c_2)(b_1 - c_1)\right).$$

Таким чином, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left((a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (a_2 - c_2)(b_1 - c_1)\right)$.

Якщо припустити, що $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$, то з останньої формули випливає, що $S_{\triangle ABC} \in \mathbb{Q}$ (є раціональним числом).

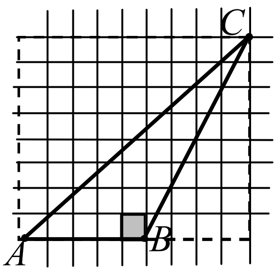
З іншого боку, для обчислення площі правильного трикутника є добре відомою формула $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Оскільки $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$, то $a^2 = AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 \in \mathbb{Z}$. Але ж тоді $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \notin \mathbb{Q}$ (не є раціональним числом). Отже, прийшли до суперечності. І тому на координатній площині не існує правильного трикутника з цілочисловими координатами.

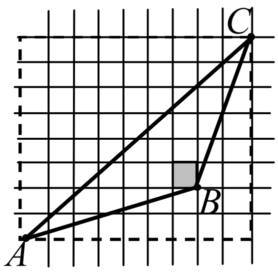
<u>ІІІ спосіб.</u>

Переформулюємо дану задачу у більш загальній постановці (без фіксованої системи координат), а саме:

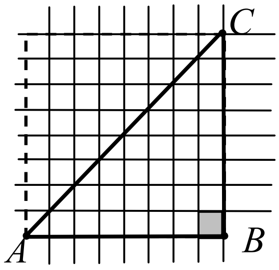
доведемо, що на «клітчастому полі» (клітинками є квадрати) не існує правильного трикутника з вершинами у вузлових точках.



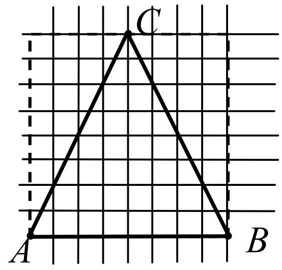
1-ий випадок



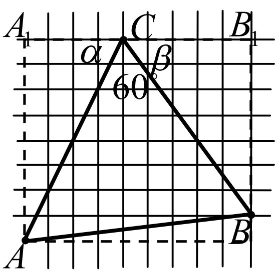
2-ий випадок



3-ій випадок



4-ий випадок



5-ий випадок

Припустимо, що на клітчастому полі існує правильний трикутник ABC з вершинами у вузлових точках. Тоді завжди існує (єдиний) «описаний» прямокутник з вершинами у вузлових точках, сторонам якого належать (можливо не всі) вершини $\triangle ABC$. Слід зазначити, що кожна сторона такого прямокутника містить принаймні дві вузлові точки.

Для довільного трикутника з вершинами у вузлових точках можливими є виключно наступні суттєво різні випадки:

1-ий: дві з трьох вершин трикутника співпадають з двома протилежними вершинами прямокутника, а третя належить стороні прямокутника і тому трикутник є *тупокутним*;

2-ий: дві з трьох вершин трикутника співпадають з двома протилежними вершинами прямокутника, а третя міститься всередині прямокутника і тому трикутник є *тупокутним*;

3-ій: вершини трикутника співпадають з вершинами прямокутника і тому трикутник є *прямокутним*.

4-ий: дві з трьох вершин трикутника співпадають з двома сусідніми вершинами описаного прямокутника, а третя належить протилежній стороні прямокутника;

5-ий: одна з трьох вершин трикутника співпадає з вершиною описаного прямокутника, а дві інші належать сторонам прямокутника, що не містять зазначену вершину.

Розв'язання задач

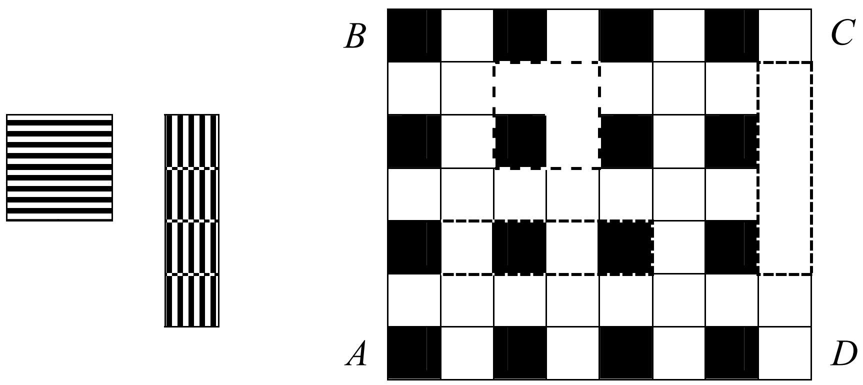
Покажемо неможливість існування правильного трикутника у 5-му випадку (в 4-му аналогічно). Отже, нехай фіксовано масштабну одиницю.

Тоді не важко бачити, що $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta \in \mathbb{Q}$ (як відношення катетів у відповідних прямокутних трикутниках CA_1A і CB_1B з вершинами у вузлових точках). Звідки $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \in \mathbb{Q}$.

З іншого боку оскільки $\alpha + \beta = 120^\circ$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}120^\circ = -\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Отримана суперечність свідчить про невірність припущення.

Задача №5

За умовою дно коробки (у формі прямокутника) можна викласти за допомогою плиток розміром 2×2 та 1×4.



Розфарбуємо прямокутну ділянку $ABCD$ (вказане дно) так, як показано на рисунку. Тоді при довільному розташуванні (укладці) плиток

1) кожна плитка розміром 2×2 містить точно 1 чорну і 3 білі клітинки;
2) кожна плитка розміром 1×4 містить

   або 2 чорні та 2 білі клітинки, або ж 0 чорних і 4 білих клітинки.

Тому парність числа чорних клітинок дна коробки співпадає з (визначається) парністю числа плиток розміром 2×2.

Оскільки при заміні плитки розміром 2×2 на плитку розміром 1×4 парність числа плиток розміром 2×2 змінюється, то за допомогою нового набору плиток дно вказаної прямокутної коробки викласти не вдасться.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Германович П.Ю. Сборник задач по математике на сообразительность. Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, **1960**. – 224с.
2. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников. Пособие для учителей М.: «Просвещение», **1982**. – 96с.
3. Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике. М.: Просвещение, **2002.** – 208с.
4. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике, М.: МЦНМО, **2005**. – 560с.
5. Ященко И.В. Приглашение на математический праздник. 2-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, **2005**. – 104с.
6. Фомин А.А., Кузнецова Г.М. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады – М.: Дрофа, **2006**. – 159с.
7. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. Изд. 4-е, испр./ Под редакцией В.О. Бугаенко. М.: МЦНМО, **2008**. – 96с.
8. Вышенский В.А., Карташев Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И. Сборник задач киевских математических олимпиад, Киев, **1984**. – 240с.
9. Коваль Т.В. 400 задач з математичних олімпіад. 8–11 класи. – Тернопіль: Мандрівець, **2004.** – 80с.
10. Ясінський В.А. Олімпіадні задачі. Випуск 1: Навчальний посібник – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, **2004.** – 40с.
11. Довбыш Р.И., Потемкина Л.Л., Трегуб Н.Л., Лиманский В.В., Оридорога Л.Л., Кулеско Н.А. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями. – Донецк: ООО ПКФ «БАО», **2005**. – 336с.

Рекомендована література

12. Лось В.М., Тихієнко В.П. Математика: навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач: Навч. посібник. – К.: Кондор, **2005** – 312с.
13. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., **2005**. – 344с.
14. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язання . –Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, **2005.** – 208с.

Internet ресурси

1. **Київські олімпіади з математики –** **http://www.matholymp.kiev.ua/index.php**
2. **"Математические олимпиады и олимпиадные задачи"** (декілька тисяч олімпіадних задач російських і міжнародних математичних змагань) – **http://zaba.ru/**.
3. **Фізико-математичний журнал "Квант"** (завдання різних математичних олімпіад за 1971–2002рр) **– http://kvant.mccme.ru**
4. **Соросівська олімпіада для учнів – http://issep.rssi.ru**.
5. **International Mathematical Olympiad – http://imo.math.ca/**

ВИПУСКИ СЕРІЇ:
Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям...

Номери випусків	Назва	Рік	Автори
Випуск 1	ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2007	**2008**	Беседін Б.Б., Бірюкова Г.М., Ганзера Г.О., Кадубовська В.М., Кадубовський О.А., Плесканьова Л.Г., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.
Випуск 2	ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2008	**2009**	Беседін Б.Б., Ганзера Г.О., Кадубовський О.А., Плесканьова Л.Г., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.
Випуск 3	Моделювання сучасного уроку математики в школі	**2009**	Н.І. Труш, Б.Б. Беседін, Г.М. Бірюкова, Л.Г. Плесканьова.
Випуск 4	Олімпіадні задачі з *інформатики*: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2007, 2008	**2009**	В.Є. Величко, М.М. Рубан, В.П. Батуніна, С.Є. Устінов
Випуск 5	ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2009	**2010**	Кадубовський О.А., Беседін Б.Б., Ганзера Г.О., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.

Підприємець Маторін Б.І.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.

Підписано до друку 30.12.08 р.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 2,75.
Зам. № 72. Тираж 200 прим.

84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс (06262) 3-20-99; тел. (0626) 66-53-56

Слов’янський державний педагогічний університет

засновано у 1939 році. Він є одним з престижних та відомих вищих навчальних закладів України; динамічно розвивається, запроваджуючи найновіші освітні технології і методики роботи, формуючи потужну матеріальну базу, утверджуючись на міжнародному рівні. Здійснює підготовку фахівців за 22 спеціальностями на 9 факультетах по денній та заочній формам навчання.

З нашого університету розпочинається історія розвитку вищої педагогічної освіти в Донбасі.

До уваги абітурієнтів

У 2010 році фізико-математичний факультет СДПУ оголошує прийом документів для вступу на перший курс для здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавра за наступними напрямами підготовки

Галузь знань: **0402** ***Фізико-математичні науки***	**Напрями підготовки:**	
	6.040201 Матема-тика*	**6.040203 Фізика***
	***Спеціалізація:* інформатика**	
Нормативні терміни навчання	4 роки (3 роки 10 місяців)	
Ліцензовані обсяги	125	65
Перелік конкурсних предметів у сертифікаті Українського центру оцінювання якості освіти (вступних екзаменів), за якими відбувається конкурс при вступі	1. Українська мова та література; 2. Математика; 3. Історія України *або* фізика *або* біологія	
Вартість одного року навчання (грн.) станом на 1.11.2009	2800	

Прийом заяв і документів, вступні екзамени, конкурсний відбір та зарахування на навчання вступників (на основі здобутої повної загальної середньої освіти) проводиться в такі строки

Початок прийому заяв та документів	**15 липня**
Закінчення прийому заяв та документів від осіб, які мають складати вступні випробування	**22 липня**
Закінчення прийому заяв та документів від осіб, які не складають вступних випробувань	**31 липня**
Строки проведення вступних екзаменів	**23–31 липня**
Термін оприлюднення рейтингового списку вступників	**не пізніше 1 серпня**
Терміни зарахування вступників **за державним замовленням** – **за кошти фізичних (юридичних) осіб** – після зарахування на місця державного замовлення	 **не пізніше 10 серпня** **не пізніше 25 серпня**

Контактна інформація

84116, Донецька область, м. Слов’янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Приймальна ректора: (06262) 3-23-54
Приймальна комісія: (06262) 3-97-50
Деканат фізико-математичного факультету
Тел.: (06262) 3-26-59