МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Беседін Б.Б., Кадубовський О.А., Кадубовська В.М.,

Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В., Рубан М.М.

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ – 2011

6 – 11 класи

Рекомендовано вченою радою

Слов'янського державного педагогічного університету

в якості навчального посібника

для проведення факультативних занять з математики

Слов'янськ – 2012

Серія заснована у 2008 році

УДК [51:37.091.322](07)
ББК 22.1
О – 543

Беседін Б.Б., Кадубовський О.А., Кадубовська В.М., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В., Рубан М.М.
ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2011 (ВИПУСК 10, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям...): Навчальний посібник – Слов'янськ, 2012. – 84 с.

Адресовано вчителям та викладачам математики, як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням ЗОШ та студентам математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ.

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ДРУКУ

вченою радою Слов'янського державного педагогічного університету,

протокол № 7 від 28.02.2012 р.

Рецензенти: кандидат фіз.-мат. наук ЖУЧОК Ю.В., Інститут інформаційних технологій Луганського національного університету імені Тараса Шевченка, доцент кафедри математичного аналізу та алгебри

кандидат фіз.-мат. наук ВЕЛИЧКО В.Є., Слов'янський державний педагогічний університет, доцент кафедри алгебри.

Відповідальний за випуск: кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри ГМВМ Кадубовський О.А.

ВІД АВТОРІВ

«Математика – це мистецтво розв'язувати задачі, які раніше не розв'язував»

«Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!»

Д. Пойа[1].

Даний посібник є **десятий** випуском серії **«ВИКЛАДАЧІ СДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ...»** заснованої у 2008 році. Посібник містить розв'язання задач II етапу (районного) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, який проводився 26 листопада 2011 року відповідно до наказу УОН № 584 від 10.10.2011.

Як і в попередніх випусках для більшості задач олімпіади пропонується кілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого із запропонованих методів. Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в певному розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головна мета авторів посібника – «донести» до вчителів і учнів якомога більше корисних математичних ідей і принципів та показати їх застосування.

Нагадаємо, що принципами в математиці називають деякі прості, майже очевидні, твердження, аксіоми або методи, які використовуються в доведеннях математичних теорем. Дуже часто учні зустрічаються з ними при розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Перш за все учні, які беруть участь в олімпіадах, повинні володіти значною кількістю принципів. Нажаль шкільна програма не передбачає знайомства з більшістю із них. З основними математичними принципами можна ознайомить в наведеній літературі, зокрема в [13][2].

---

[1] **Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 452 с.**

[2] **Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2005. – 344с.**

Від авторів

В посібнику до окремих задач наводяться «доповнення», сенс яких полягає: у формулюванні двоїстої або схожої задачі,

або ж в узагальненні запропонованої задачі.

На думку авторів такі доповнення повинні активізувати і зацікавити учнів при підготовці до майбутніх олімпіад.

Колектив авторів посібника та керівництво фізико-математичного факультету СДПУ висловлює щиру подяку всім вчителям міста Слов'янськ, які беруть участь в організації та проведенні як учнівських олімпіад з математики, так і семінарів, присвячених аналізу їх результатів.

Автори посібника висловлюють щиру подяку співробітникам кабінету математики Донецького інституту післядипломної освіти за надані архівні матеріали.

Маємо надію, що представлений посібник буде корисним керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням, стане для багатьох з них поштовхом до більш змістовних міркувань і буде спонукати до систематичного ознайомлення з тим чи іншим розділом математики.

Вчіться творчому пошуку в процесі розв'язування задач!
З найщирішими побажаннями, викладачі кафедри геометрії та методики викладання математики фізико-математичного факультету Слов'янського державного педагогічного університету.

25.01.2012

ЗМІСТ

УМОВИ ЗАДАЧ

6 клас

1. (15 балів) Морська вода містить 5% солі (за масою). Скільки кілограмів прісної води треба додати до 40 кг морської води, щоб кількість солі в суміші становила 2%?
2. (15 балів) Два автобуси вирушили одночасно від однієї площі за різними маршрутами. У одного рейс туди і назад триває 48 хвилин, а у іншого 1 година 12 хвилин. Через який час автобуси знову зустрінуться на цій площі?
3. (20 балів) Як, маючи дві посудини місткістю 5л і 7л, налити з водопровідного крану 6 л?
4. (20 балів) Пройшовши 3/8 довжини моста, віслючок Іа-Іа, озирнувшись, помітив автомобіль, що наближається зі швидкістю 60 км/год. Якщо віслючок побіжить назад, то зустрінеться з автомобілем на початку моста; якщо вперед, то автомобіль наздожене його наприкінці моста. З якою швидкістю бігає Іа-Іа?
5. (30 балів) Двозначне число помножили на суму його цифр. Отримали 814. Знайдіть це число.

7 клас

1. (15 балів) Зарплатня працівника підвищилась на 10%, а в наступному році підвищилась ще на 20%. На скільки всього підвищилась зарплатня?
2. (15 балів) Відомо, що в січні чотири п’ятниці та чотири понеділка. На який день тижня випадає 1 січня?
3. (20 балів) Як посадити 10 яблунь, щоб знайшлося 5 рядків, у кожному з яких рівно 4 яблуні?
4. (20 балів) Відрізок, довжина якого 50 см, поділений трьома точками на чотири нерівні частини. Відстань між серединами крайніх частин 30 см. Обчисліть відстань між серединами середніх частин відрізка.

5. (30 балів) Вася, Микола, Петро, Степан – учні 4-го, 5-го, 6-го та 7-го класів – відправилися в ліс за грибами. П'ятикласник не знайшов жодного білого гриба, а Петро та учень четвертого класу – по 8 штук. Вася та п'ятикласник знайшли багато красноголовців і покликали Миколу в компанію. Семикласник і Микола глузували з Петра, що зірвав мухомор. Хто в якому класі навчається?

8 клас

1. (15 балів) Знайдіть останню цифру числа 2009^{2011}.
2. (15 балів) Треба поділити 7 яблук на 12 чоловік порівну, розрізаючи кожне яблуко не більше, ніж на 5 частин. Як це зробити?
3. (20 балів) У чотирикутнику $ABCD$ продовження протилежних сторін AB і CD перетинаються під кутом 20°; продовження протилежних сторін BC і AD також перетинаються під кутом 20°. Доведіть, що два кути чотирикутника рівні, а два інших різняться на 40°.
4. (20 балів) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} a+b+c=7 \\ b+c+m=5 \\ c+m+a=3 \\ m+a+b=0. \end{cases}$
5. (30 балів) Довести, що в будь-якому шістдесятизначному числі, десятковий запис якого не містить нулів, можна закреслити кілька цифр так, що число, що вийшло в результаті цього, буде ділитися на 1001.

9 клас

1. (15 балів) Довести нерівність $a^4+b^4 \ge a^3b+b^3a$ при $a \ge 0$, $b \ge 0$.
2. (15 балів) У хорі число дівчаток відносилось до числа хлопчиків як 4:3. Після того, як до хору прийшли двоє новеньких, це співвідношення стало 3:2. Скільки хлопчиків було в хорі спочатку?
3. (20 балів) В паралелограмі $ABCD$ сторони AB і BC дорівнюють 4 і 7 відповідно. Бісектриси AK і BM кутів паралелограма перетинаються в

точці O (точки K і M лежать на сторонах BC і AD відповідно). У скільки разів площа п'ятикутника $OKCDM$ більша за площу $\triangle AOB$?

4. (20 балів) Розв'язати рівняння $x^3 - y^3 = 7$ в натуральних числах.
5. (30 балів) Про ціле число n і просте число p відомо, що числа $5n-1$ та $n-10$ діляться на p. Довести, що число $2000n+13$ теж ділиться на p.

10 клас

1. (15 балів) Розв'язати нерівність $|x-1| + |x+1| < 4$.
2. (15 балів) На площині дано відрізок AB. Де може бути розташована точка C, щоб $\triangle ABC$ був гострокутним?
3. (20 балів) Яке число менше $\sqrt{2009} + \sqrt{2011}$ чи $2\sqrt{2010}$?
4. (20 балів) Доведіть, що сума двох простих чисел ділиться на 12, якщо їх різниця дорівнює 2, а менше число більше ніж 3.
5. (30 балів) $P(x)$ – многочлен четвертого степеня такий, що $P(1) = P(-1)$ та $P(2) = P(-2)$. Доведіть, що $P(x) = P(-x)$ для будь-якого x.

11 клас

1. (15 балів) Обчисліть суму: $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + ... + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$.
2. (15 балів) В трапеції $ABCD$ довжина основи AD дорівнює $2\sqrt{2}$, а довжина основи BC дорівнює $\sqrt{2}$. $\angle A = 15^\circ$, $\angle D = 30^\circ$. Знайдіть довжину бічної сторони AB.
3. (20 балів) При яких значеннях a квадратні рівняння $x^2 + ax + 1 = 0$ та $x^2 + x + a = 0$ мають спільний корінь?
4. (20 балів) Функція $f(x)$ задовольняє при всіх значеннях x умову $f(x) = x \cdot f(1-x) + 1$. Знайдіть цю функцію.
5. (30 балів) Знайдіть цілу частину числа $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{256}}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

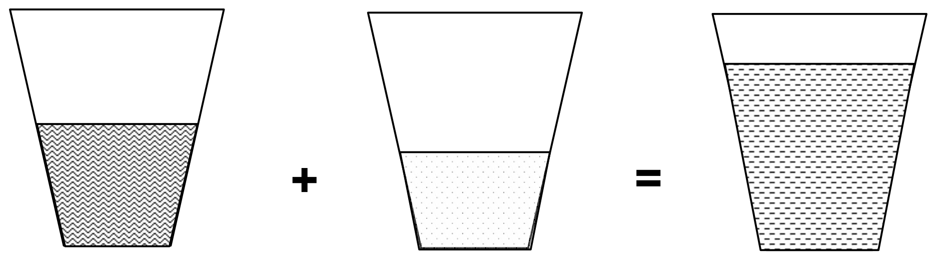
6 клас

Задача №1

I спосіб (за допомогою рівняння)

Нехай до 40 кг морської води (яка містить 5% солі за масою) треба додати x кг прісної води, щоб утворився 2%-ий розчин солі.

5%-ий розчин солі   Прісна вода 2%-ий розчин солі



Морська вода	**100%**	**40 кг**	Прісна вода	**100%**	x **кг**	**Розчин солі**	**100%**	$40+x$ **кг**
Сіль	5%	$2=\dfrac{40\cdot 5}{100}$ кг	Сіль	0%	0 кг	Сіль	2%	$\dfrac{(40+x)\cdot 2}{100}$ кг
Вода	95%	38 кг	Вода	100%	x кг	Вода	98%	$\dfrac{(40+x)\cdot 98}{100}$ кг

Тоді має місце рівняння $2+0=\dfrac{(40+x)\cdot 2}{100}$, звідки $(40+x)\cdot 2=200$, $40+x=100$, $x=60$.

Зауважимо, що шуканий x можна було би одержати й з іншого рівняння, прирівнявши сумарну вагу чистої води у морській і прісній воді до ваги чистої води у кінцевому розчині солі, тобто розв'язавши рівняння

$$38+x=\frac{(40+x)\cdot 98}{100}.$$

II спосіб (розв'язування за питаннями)

1) Скільки кілограмів чистої солі міститься у 40 кг морської води?

(*Пригадайте правило знаходження «відсотка від числа»*).

Розв'язання задач

Оскільки морська вода містить 5% солі (за масою), то у 40 кг морської води міститься точно $\frac{40}{100\%} \cdot 5\% = 2$ кг (чистої) солі.

2) Яка маса 2% розчину солі, в якому міститься 2 кг чистої солі?

(*Пригадайте правило знаходження «числа за його відсотком»*).

Після доливання прісної води кількість 2 кг солі в одержаному розчині стала становити 2%. Тому загальна маса одержаного розчину становить

$$\frac{2}{2\%} \cdot 100\% = 100 \text{ (кг)}.$$

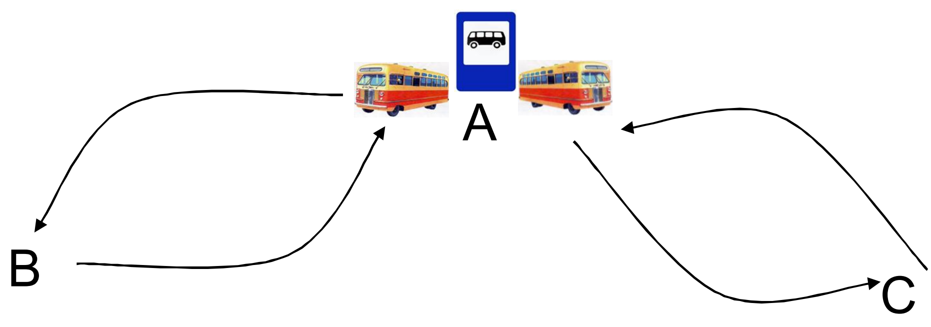
3) Скільки кілограмів прісної води треба додати до 40 кг морської води, щоб сіль у розчині становила 2%?

До 40 кг морської води слід додати $100 - 40 = 60$ (кг) прісної води.

Відповідь: 60 кг.

Задача №2

За умовою два автобуси (*перший* і *другий*) вирушили одночасно від однієї площі (пункту A) за різними маршрутами: перший із пункту A у пункт B, другий – із A в пункт C. У першого рейс із A в B і назад триває 48 хвилин, а у другого (із A в C і назад) – 1 годину 12 хвилин, або ж 72 хвилини.



Зауважимо, що умовою задачі вимагається з'ясувати, через який час автобуси зустрінуться у пункті A наступного разу, тобто через який <u>найменший час</u> відбудеться їх зустріч у пункті A.

<u>**І спосіб**</u>

Оскільки у перші свої рейси автобуси вирушили із пункту A одночасно, то їх наступна зустріч у пункті A повинна відбутися через такий час T (у хв.), який є найменшим спільним кратним чисел 48 і 72.

З того що $\text{НСК}(48;72)=\text{НСК}\left(3^1\cdot 2^4;3^2\cdot 2^3\right)=3^2\cdot 2^4=144$ випливає, що автобуси знову зустрінуться у пункті A через 144 хвилини, або що теж саме, через 2 години 24 хвилини.

<u>**ІІ спосіб**</u>

Нехай до наступної зустрічі у пункті A перший автобус зробить a рейсів (із A в B і назад), а другий автобус зробить b рейсів (із A в C і назад). Тоді першому автобусу для здійснення a рейсів необхідно витратити $48a$ хвилин, а другому (для здійснення b рейсів) – $72b$ хвилин.

Оскільки у перші свої рейси автобуси вирушили із пункту A одночасно, то їх наступна зустріч у пункті A повинна відбутися через однаковий час, тобто повинна мати місце рівність $48a=72b$, де a,b – натуральні числа. Звідки

$$2a=3b. \qquad (6.2.1)$$

Очевидно, що найменшими натуральними числами a і b, при яких має місце рівність (6.2.1), є числа $a=3$ і $b=2$.

Отже, до наступної зустрічі у пункті A перший автобус зробить 3 рейси, другий – 2 рейси, а зустріч відбудеться через $48\cdot 3=144$ хвилини.

Таким чином, перший і другий автобуси знову зустрінуться у пункті A через 2 години 24 хвилини.

Відповідь: 2 години 24 хвилини.

Задача №3

Зауважимо, що умовою задачі <u>не передбачається третя посудина</u>, в яку можна зливати проміжні місткості даних посудин!

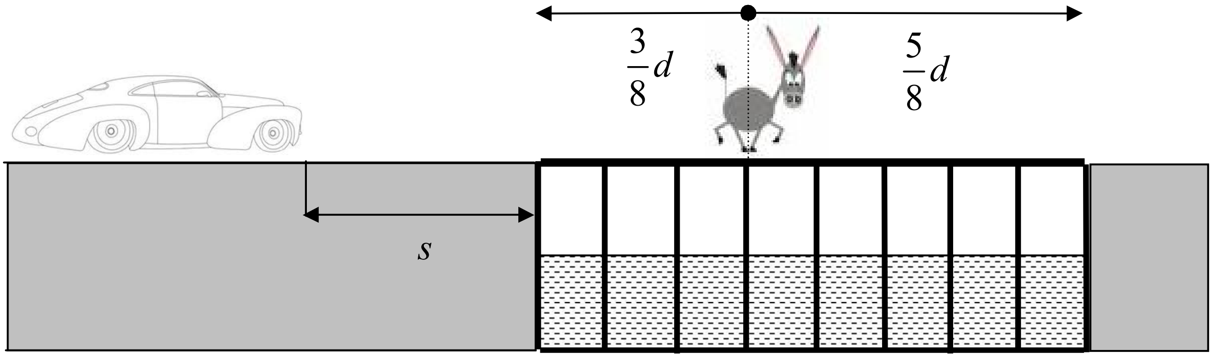
Спосіб, у який можна налити з водопровідного крану 6 л, маючи дві посудини місткістю 5л і 7л, подамо у вигляді наступної таблиці.

Розв’язання задач

№ етапу	Посудина місткістю 5 літрів	Зміст етапів			Посудина місткістю 7 літрів
		**Перелік умовних позначень дій:** «$\Downarrow$» – наливання води у посудину; «$\leftarrow$» – переливання води із однієї посудини в іншу; «$\Uparrow$» – виливання води із посудини.			
1)	**0**			$\Downarrow$	**7**
2)	**5**		$\leftarrow$		**2**
3)	**0**	$\Uparrow$			**2**
4)	**2**		$\leftarrow$		**0**
5)	**2**			$\Downarrow$	**7**
6)	**5**		$\leftarrow$		**4**
7)	**0**	$\Uparrow$			**4**
8)	**4**		$\leftarrow$		**0**
9)	**4**			$\Downarrow$	**7**
10)	**5**		$\leftarrow$		**6**

Задача №4

! Нагадаємо, що основними величинами в задачах «на рух» є *швидкість руху* V, *час руху* T, та *відстань* S, яку долає об’єкт руху, що рухається зі швидкістю V на протязі часу T. Крім того при рівномірному русі, тобто при русі зі сталою швидкістю, ці величини пов’язані рівністю $S = V \cdot T$.



Нехай d – довжина моста. Якщо віслючок пробіжить («назад») відстань $\frac{3}{8}d$ (3/8 довжини моста), то автомобіль проїде деяку відстань s до початку моста. Якщо віслючок пробіжить («вперед») відстань $\frac{5}{8}d$ (5/8 довжини моста), то авто проїде відстань $s + d$.

Таким чином, якщо віслючок за певний час t пробіжить відстань $\frac{5}{8}d - \frac{3}{8}d = \frac{2}{8}d = \frac{1}{4}d$ (1/4 довжини моста), то за такий самий час t авто подолає відстань рівну $(s+d)-s=d$, тобто подолає відстань, рівну довжині моста.

Оскільки за однаковий час t віслючок долає відстань у 4 рази меншу, ніж відстань, яку долає авто за той самий час t, то швидкість віслючка у чотири рази менша, ніж швидкість авто. Отже, швидкість віслючка становить

$$60:4=15 \text{ км/год.}$$

Відповідь: 15 км/год.

Задача №5

Нехай x – шукане двозначне число, y – сума його цифр. За умовою добуток числа x на суму y його цифр дорівнює 814. Тому має місце рівність

$$x \cdot y = 814.$$

Розкладемо число 814 на прості множники:

$$\begin{array}{r|l} 814 & 2 \\ 407 & 11 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array}$$

Звідки $814 = 2 \cdot 11 \cdot 37$.

Оскільки числа x і y є натуральними, добуток яких дорівнює 814, то з урахуванням розкладу $814 = 2 \cdot 11 \cdot 37$ і того, що x є двозначним числом, можливими є лише наступні випадки:

$$1)\ \begin{cases} x = 2 \cdot 11 = 22 \\ y = 37 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x = 2 \cdot 37 = 74 \\ y = 11 \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} x = 11 \cdot 37 = 407 \\ y = 2. \end{cases}$$

Оскільки число y повинно дорівнювати сумі цифр шуканого числа x, то 1)-ий і 3)-ій випадки не задовольняють умову задачі.

Очевидно, що сума цифр числа 74 становить 11. Отже, 74 є шуканим числом.

Відповідь: 74.

Розв’язання задач

!? Двозначне число помножили на суму його цифр. Отримали число 210. Знайдіть це число.

7 клас

Задача №1

<u>І спосіб</u>

Нехай Z – початкова зарплатня працівника (до підвищень).

1) Нехай далі Z_1 – зарплатня працівника після першого підвищення. Оскільки перше збільшення зарплатні відбулось на 10%, то має місце пропорція

$$\begin{array}{lll} 100\% & \sim & Z \\ 110\% & \sim & Z_1 \end{array}$$

Звідки маємо рівність $\dfrac{100}{110} = \dfrac{Z}{Z_1}$, або ж $Z_1 = \dfrac{Z \cdot 110}{100} = 1{,}1 \cdot Z$.

2) Нехай тепер Z_2 – зарплатня працівника після другого підвищення. Оскільки друге збільшення зарплатні відбулось на 20%, то має місце пропорція

$$\begin{array}{lll} 100\% & \sim & Z_1 \\ 120\% & \sim & Z_2 \end{array}$$

Звідки маємо рівність $\dfrac{100}{120} = \dfrac{Z_1}{Z_2}$, або ж $Z_2 = \dfrac{Z_1 \cdot 120}{100} = 1{,}2 \cdot Z_1 = 1{,}2 \cdot 1{,}1 \cdot Z = 1{,}32 \cdot Z$.

3) Тепер знайдемо скільки відсотків становить число Z_2 від числа Z.

Для цього складемо пропорцію

$$\begin{array}{lll} 100\% & \sim & Z \\ x\% & \sim & Z_2 \end{array} \quad \text{або, що теж саме} \quad \begin{array}{lll} 100\% & \sim & Z \\ x\% & \sim & 1{,}32Z \end{array}$$

Звідки маємо рівність $x = \dfrac{1{,}32 \cdot Z \cdot 100}{Z} = 132$. Отже, величина Z_2 більше величини Z на 32%.

II спосіб

Нехай Z – початкова зарплатня працівника (до підвищень).

Оскільки підвищення на 10% є рівносильним множенню на коефіцієнт 1,1, то після *першого підвищення* зарплатня працівника становила

$$Z_1 = 1{,}1 \cdot Z \text{ (гр.од.).}$$

Аналогічно, оскільки підвищення на 20% є рівносильним множенню на коефіцієнт 1,2, то після *другого підвищення* зарплатня працівника становила

$$Z_2 = 1{,}2 \cdot Z_1 = 1{,}2 \cdot 1{,}1 \cdot Z = 1{,}32 \cdot Z \text{ (гр.од.).}$$

Оскільки множення на коефіцієнт 1,32 є рівносильним підвищенню на 32%, то після двох послідовних підвищень кінцева зарплатня працівника збільшилася на 32% у порівнянні з початковою зарплатнею.

Відповідь: 32%.

!? Розв'яжіть **задачу 1** в загальному вигляді, тобто дайте відповідь на запитання задачі у випадку, коли зарплатня двічі послідовно збільшувалася на $p\%$ і $q\%$.

Задача №2

пн	1	8	15	22	29
вт	2	9	16	23	30
ср	3	10	17	24	31
чт	4	11	18	25	
пт	5	12	19	26	
сб	6	13	20	27	
вс	7	14	21	28	

«понеділок»

пн		7	14	21	28
вт	1	8	15	22	29
ср	2	9	16	23	30
чт	3	10	17	24	31
пт	4	11	18	25	
сб	5	12	19	26	
вс	6	13	20	27	

«вівторок»

пн		6	13	20	27
вт		7	14	21	28
ср	1	8	15	22	29
чт	2	9	16	23	30
пт	3	10	17	24	31
сб	4	11	18	25	
вс	5	12	19	26	

«середа»

пн		5	12	19	26
вт		6	13	20	27
ср		7	14	21	28
чт	1	8	15	22	29
пт	2	9	16	23	30
сб	3	10	17	24	31
вс	4	11	18	25	

«четвер»

пн		4	11	18	25
вт		5	12	19	26
ср		6	13	20	27
чт		7	14	21	28
пт	1	8	15	22	29
сб	2	9	16	23	30
вс	3	10	17	24	31

«п'ятниця»

пн		3	10	17	24	31
вт		4	11	18	25	
ср		5	12	19	26	
чт		6	13	20	27	
пт		7	14	21	28	
сб	1	8	15	22	29	
вс	2	9	16	23	30	

«субота»

пн		2	9	16	23	30
вт		3	10	17	24	31
ср		4	11	18	25	
чт		5	12	19	26	
пт		6	13	20	27	
сб		7	14	21	28	
вс	1	8	15	22	29	

«неділя»

Нехай 1 січня припадає на понеділок, тоді 8, 15, 22 і 29 січня теж припадають на понеділки – а це суперечить умові. Отже, 1 січня не може бути понеділком.

Розв'язання задач

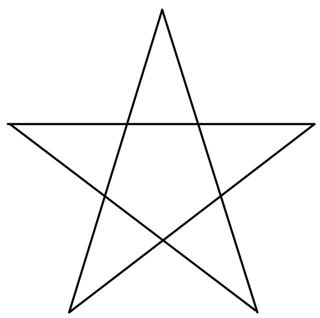
Нехай 1 січня припадає на вівторок, тоді 7, 14, 21 і 28 припадають на понеділки, а 4, 11, 18, 25 – на п'ятниці, а це відповідає умові. Отже, 1 січня – вівторок.

Неважко впевнитись, що інших випадків не може бути (вони суперечать умові), бо:

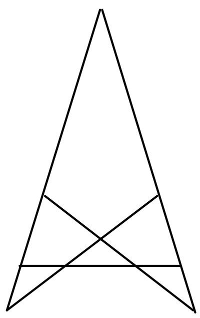
- ✓ якщо 1 січня середа, четвер або п'ятниця, то матимемо в січні 4 понеділки та 5 п'ятниць;
- ✓ якщо ж 1 січня понеділок або субота, або неділя, то матимемо в січні 5 понеділків та 4 п'ятниці.

Відповідь: вівторок.

Задача №3



I спосіб



II спосіб

Приклади шуканих способів висадження 10 яблунь так, щоб знайшлося 5 рядків, у кожному з яких рівно по 4 яблуні, наведено на рисунках ліворуч.

Наведемо міркування, за допомогою яких можна знайти «усі суттєво різні» способи (висадження яблунь), що задовольняють умову задачі. Для цього дану задачу переформулюємо наступним чином:

Як провести п'ять (різних) прямих, що дають у перетинах точно 10 (різних) точок, причому на кожній прямій міститься точно по 4 точки?

Оскільки необхідно провести саме п'ять прямих, на кожній з яких повинно бути по чотири точки, то кожну з п'яти прямих кожна з решти 4 прямих обов'язково перетинають. Таким чином, кожні дві прямі перетинаються. Звідки випливає, що серед п'яти шуканих прямих

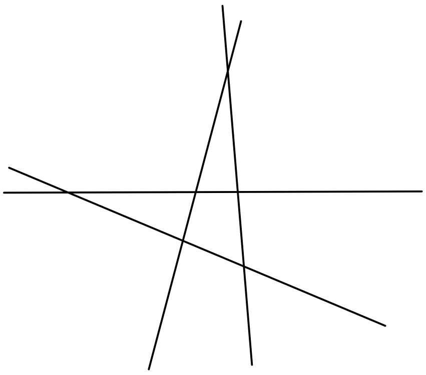
1) немає паралельних прямих.

Крім того,

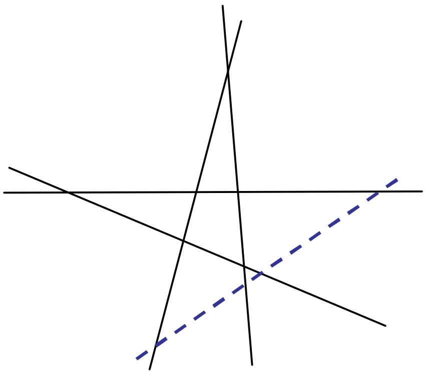
2) жодні три з п’яти прямих не можуть перетинатися в одній точці, бо з припущення про обернене, на жодній з трьох таких прямих не може виявитися ще 3 точки (крім спільної), як результат перетину з іншими двома прямими.

Таким чином, шукані п’ять прямих повинні задовольняти умови 1) і 2). Взаємне розташування чотирьох із п’яти шуканих прямих (на площині), що задовольняють умови 1) і 2), може бути лише таким, як на рисунку $a)$.

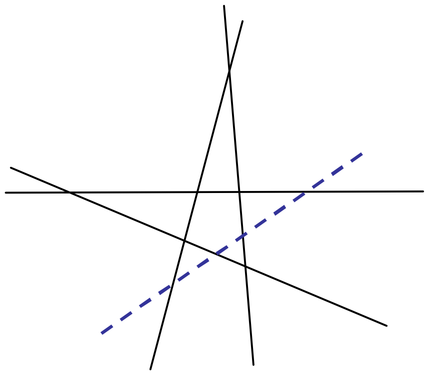
П’яту пряму слід провести також із дотриманням вимог 1) і 2) – рис. $b) - f)$.



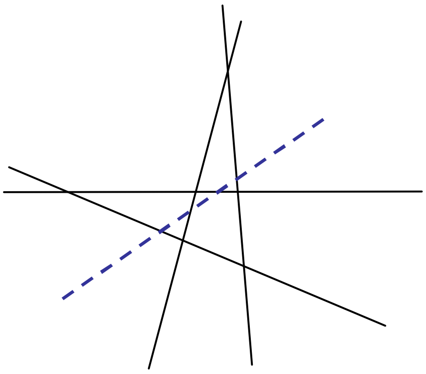
$a)$



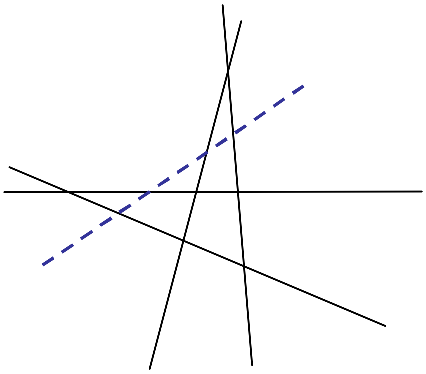
$b)$



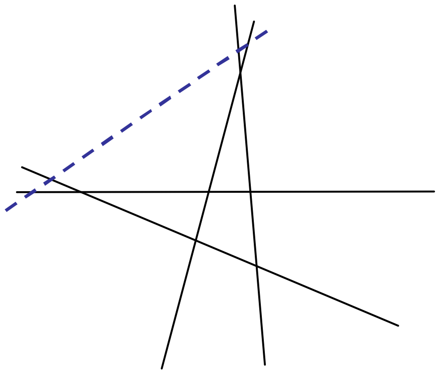
$c)$



$d)$

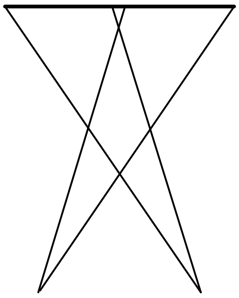


$e)$

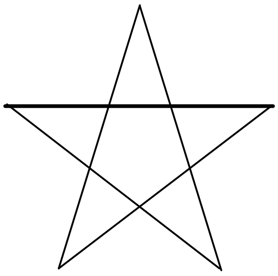


$f)$

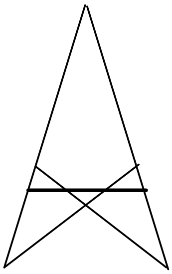
З урахуванням рисунків $b) - f)$, всі суттєво різні шукані способи можна подати наступним чином.



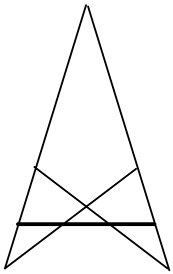
1



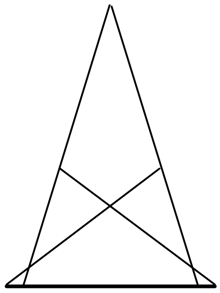
2



3



4



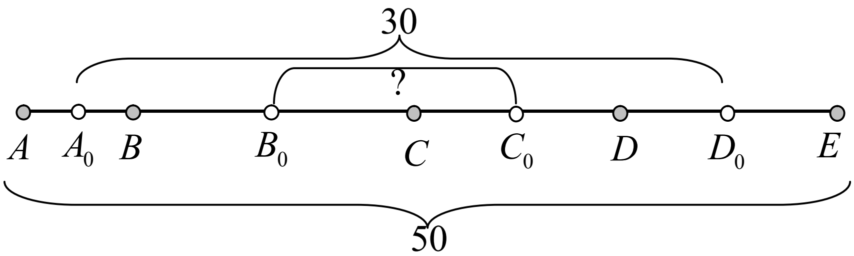
5

Розв’язання задач

Задача №4

Нехай AE – даний відрізок, точка B належить відрізку AE, точка C – відрізку BE, а точка D – відрізку CE.

Нехай далі A_0 – середина відрізка AB, B_0 – середина відрізка BC, C_0 – середина відрізка CD, а D_0 – середина відрізка DE. Тоді, згідно введених позначень та з урахуванням умови задачі, довжина відрізка AE становить 50 см, а довжина відрізка A_0D_0 – 30 см. Необхідно обчислити довжину відрізка B_0C_0.



І с п о с і б

1) Оскільки довжина відрізка A_0D_0 становить 30 см, то сума довжин відрізків AA_0 і D_0E становить $50-30=20$ см.

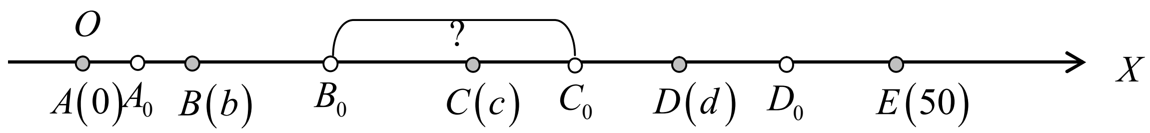
2) Оскільки B_0 і D_0 середини відрізків BC і DE відповідно, то сума довжин відрізків AB і DE становить $2\times 20=40$ см. Звідки довжина відрізка BD становить $50-40=10$ см.

3) Згідно введених позначень точка C належить відрізку BD, а точки B_0 і C_0 є серединами відрізків BC і CD відповідно. Тому довжину відрізка BD можна подати як суму довжин відрізків BC і CD, а бо ж як подвоєну суму довжин відрізків B_0C і CC_0, або ж як подвоєну довжину відрізка B_0C_0.

Оскільки довжина відрізка BD становить 10 см, то довжина відрізка B_0C_0 становить 5 см.

<u>II спосіб</u>

Розглянемо координатну пряму **з початком** O у точці A, **додатній напрям якої** співпадає із напрямом «направленого відрізка» AE та такою **одиницею виміру**, при якій точка E має координату 50.



Нехай далі точка B має координату b, точка C – координату c, а точка D – координату d. Тобто: $A(0)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $E(50)$. Тоді за формулою обчислення координати середини відрізка точки A_0, B_0, C_0 і D_0 мають координати $A_0\left(\frac{b}{2}\right)$, $B_0\left(\frac{b+c}{2}\right)$, $C_0\left(\frac{c+d}{2}\right)$, $D_0\left(\frac{d+50}{2}\right)$.

За умовою довжина відрізка A_0D_0 становить 30 см, тому має місце рівність

$\frac{d+50}{2}-\frac{b}{2}=\frac{d-b+50}{2}=30$, звідки $d-b+50=60$, або ж $d-b=10$.

Шукану довжину відрізка B_0C_0 можна подати у вигляді

$$\frac{c+d}{2}-\frac{b+c}{2}=\frac{c+d-b-c}{2}=\frac{d-b}{2}.$$

Таким чином, довжина відрізка B_0C_0 становить $\frac{d-b}{2}=\frac{10}{2}=5$ см.

Відповідь: 5 см.

Задача №5

За умовою кожен з чотирьох учнів є представником одного з чотирьох класів – 4, 5, 6 або ж 7 класу.

ім'я	*Василь*				*Микола*				*Петро*				*Степан*			
клас	4	5	6	7	4	5	6	7	4	5	6	7	4	5	6	7

Розв’язання задач

Для з’ясування питання, хто з них навчається в якому класі, будемо використовувати таблиці, в яких зазначатиметься неможливість учня бути представником певного класу.

1) Оскільки п’ятикласник не знайшов жодного білого гриба, а Петро та учень четвертого класу – по 8 штук, то з цього робимо висновок, що Петро не може бути учнем 5 класу, та учнем 4 класу.

ім’я	*Василь*				*Микола*				*Петро*				*Степан*			
клас	4	5	6	7	4	5	6	7	~~4~~	~~5~~	6	7	4	5	6	7

2) Оскільки Василь та п’ятикласник знайшли багато красноголовців і покликали Миколу в компанію, то робимо висновок, що ні Василь, ні Микола не можуть бути учнями 5 класу. І тому **в 5 класі може навчатися лише Степан**.

ім’я	*Василь*				*Микола*				*Петро*				*Степан*			
клас	4	~~5~~	6	7	4	~~5~~	6	7	~~4~~	~~5~~	6	7	~~4~~	5	~~6~~	~~7~~

3) Оскільки семикласник і Микола глузували з Петра (який зірвав мухомор), то ні Микола, ні Петро не можуть бути учнями 7 класу. І тому **лише Петро може навчатися у 6 класі**.

ім’я	*Василь*				*Микола*				*Петро*				*Степан*			
клас	4	~~5~~	~~6~~	7	4	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~4~~	~~5~~	6	~~7~~	~~4~~	5	~~6~~	~~7~~

Таким чином, Микола може бути лише учнем 4 класу, і тоді Василь – семикласник.

Відповідь: Василь – учень 7 класу, Микола – 4 класу, Петро – 6, а Степан – 5 класу.

8 клас

Задача №1

Оскільки

$$2009^{2011}=\left(2000+9\right)^{2011}=\underbrace{\left(2000+9\right)\cdot\left(2000+9\right)\cdot\left(2000+9\right)\cdot\ldots\cdot\left(2000+9\right)}_{2011\,\textit{разів}}=$$

$$=\underbrace{\left(2\cdot10^3+9\right)\cdot\left(2\cdot10^3+9\right)\cdot\ldots\cdot\left(2\cdot10^3+9\right)}_{2011\,\textit{разів}}=A\cdot10+9^{2011},\quad A\in N,$$

то остання цифра числа 2009^{2011} співпадає з останньою цифрою числа 9^{2011}.

Для початкових натуральних n розглянемо значення степенів цифри дев'ять:

$9^1=\boxed{9}$, $9^2=8\boxed{1}$, $9^3=8\boxed{1}\cdot9=72\boxed{9}$, $9^4=72\boxed{9}\cdot9=656\boxed{1}$, $9^5=656\boxed{1}\cdot9=5904\boxed{9}$.

Не важко бачити наступну ***закономірність***:

якщо показник n є парним числом, то остання цифра числа 9^n дорівнює 1,

якщо ж n є непарним числом, то остання цифра числа 9^n дорівнює 9.

Таким чином, останньою цифрою числа 2009^{2011} є цифра 9.

Відповідь: 9.

Задача №2

Порівну поділити 7 яблук між 12 особами можна наступним чином:

1 крок: поділити 7 яблук на дві групи *першу* і *другу* – по *три* і *чотири* яблука відповідно;

2 крок: поділити кожне з трьох яблук (першої групи) на чотири рівні частини. В результаті будемо мати 12 однакових частин («четвертинок»), які можна порівну розділити між 12 особами;

3 крок: поділити кожне з чотирьох яблук (другої групи) на три рівні частини. В результаті будемо мати 12 однакових частин («третинок»), які можна порівну розділити між 12 особами.

Таким чином, при вказаному способі розділу кожному з 12 осіб дістанеться точно $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$ від всієї яблучної маси 7 яблук.

Зауважимо, що задачу розв’язано з урахуванням:

1) можливості («вміння») розрізати кожне з яблук на не більше ніж 5 частин *однакового розміру* та

2) того факту, що всі сім яблук *одного розміру*, або 3 з них одного розміру і решта 4 – також одного розміру.

<u>**Доповнення**</u>

Задача стає більш цікавою, якщо в ній вимагатиметься довести, що іншого способу «розділення порівну», крім наведеного, не існує.

Тому зараз доведемо, що іншого способу, крім наведеного, не існує.

1) *Кожне яблуко розрізається принаймні один раз.*

Якщо припустити, що якесь одне яблуко не розрізалось зовсім, то кожному з 12 осіб повинно дістатися принаймні 1 яблуко, а разом 12, чого бути не може оскільки яблук всього 7.

2) *Кожне яблуко розрізається більше ніж на дві рівні частини.*

Якщо припустити, що якесь одне яблуко розрізали лише один раз (на дві частини), то кожному з 12 осіб повинно дістатися принаймні по пів яблука, а разом 6. Для 12 половинок знадобиться рівно 6 яблук, а сьоме треба було би розділити на 12 рівних частин, що забороняється робити за умовою задачі.

3) *Кожне з яблук не може розрізатися більше ніж на 4 рівні частини.*

Якщо припустити, що якесь одне яблуко розрізали на п’ять рівних частин, то кожному з 12 осіб повинно дістатися принаймні по $\frac{1}{5}$ яблука, а разом $\frac{12}{5}$. Для утворення 12 «п’ятиринок» знадобиться принаймні 3 яблука, причому 3 «п’ятиринки» залишиться. І тому кожному з 12 осіб повинно дістатися ще по одній «п’ятиринці». Отже, кожному з 12 осіб повинно дістатися принаймні по $\frac{2}{5}$ яблука, а разом $\frac{24}{5}$. Для утворення 24 «п’ятиринок» знадобиться принаймні

5 яблук, причому 1 «п'ятиринка» залишиться. І тому знов таки кожному з 12 осіб повинно дістатися ще по одній «п'ятиринці». Отже, кожному з 12 осіб повинно дістатися принаймні по $\frac{3}{5}$ яблука, а разом $\frac{36}{5} > 7$ яблук, чого бути не може, бо є лише 7 яблук. Тобто, прийшли до протиріччя.

4) З пунктів 1), 2) і 3) випливає, що кожне із 7 яблук може бути розділене або на 3 рівні частини, або на 4 рівні частини. Причому

4.1) *усі сім яблук не можуть бути розділені на однакове число рівних частин;*

Якщо припустити що кожне з яблук розділене на 3 рівні частини, то разом маємо 21 «третинок», які не можна порівну поділити між 12 особами;

так само, якщо припустити що кожне з яблук розділене на 4 рівні частини, то разом маємо 28 «четвертинок», які не можна порівну поділити між 12 особами.

4.2) Таким чином, є певне число $1 \le x < 7$ яблук, кожне з яких треба розділити на 3 рівні частини, а кожне з решти $(7 - x)$ яблук – треба розділити на чотири рівних частини. Причому, загальне число $3x + 4(7 - x) = 28 - x$ «третинок» і «четвертинок» повинно бути кратним числу 12.

Число $28 - x$ ($1 \le x < 7$) є кратним числу 12 лише у випадку, коли $x = 4$.

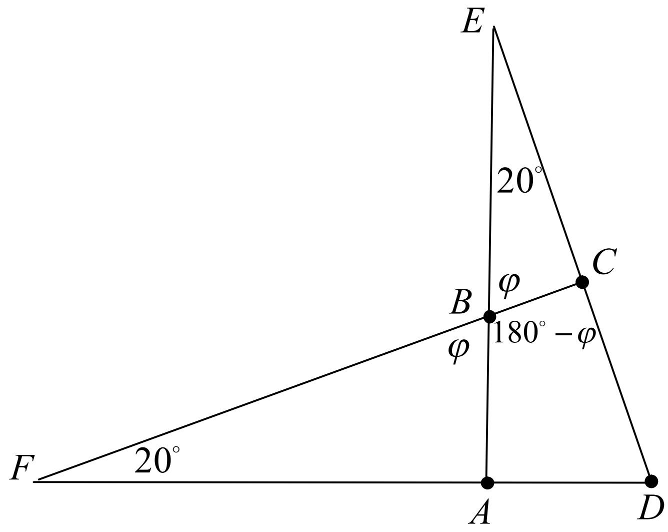
Таким чином, доведено, що дана задача має єдиний розв'язок: треба 4 яблука поділити на «третинки», а решту 3 яблука – на «четвертинки».

Задача №3

Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, у якому продовження протилежних сторін AB і CD перетинаються у точці E під кутом 20°, а продовження протилежних сторін BC і AD перетинаються у точці F також під кутом 20°.

Доведемо, що два кути чотирикутника $ABCD$ є рівними, а різниця двох інших (більшого і меншого) становить 40°.

Розв'язання задач



Нехай $\angle ABF = \varphi$, тоді $\angle CBE = \angle ABF = \varphi$ (як вертикальні), а $\angle ABC = 180^\circ - \varphi$ (як суміжний із кутом $\angle ABF$ або ж $\angle CBE$).

1) Очевидно, що $\angle ABC$ є зовнішнім кутом трикутника ABF при вершині B. І тому за властивістю зовнішнього кута трикутника має місце рівність $\angle BAF = \angle ABC - \angle ABF = 180^\circ - \varphi - 20^\circ$. Звідки $\boxed{\angle BAD = \varphi + 20^\circ}$, як суміжний із кутом $\angle BAF$.

2) Аналогічно, $\angle ABC$ є зовнішнім кутом трикутника BCE при вершині B. І тому за властивістю зовнішнього кута трикутника має місце рівність $\angle BCE = \angle ABC - \angle BEC = 180^\circ - \varphi - 20^\circ$. Звідки $\boxed{\angle BCD = \varphi + 20^\circ}$, як суміжний із кутом $\angle BAF$.

3) Розглянемо чотирикутник $ABCD$. В ньому (за доведеним вище): $\angle A = \angle C = \varphi + 20^\circ$, $\boxed{\angle B = 180^\circ - \varphi}$. Оскільки сума внутрішніх кутів довільного (опуклого) чотирикутника становить 360°, то

$$\angle D = 360^\circ - \angle A - \angle C - \angle B = 360^\circ - 2\left(\varphi + 20^\circ\right) - \left(180^\circ - \varphi\right) =$$

$$= 360^\circ - 2\varphi - 40^\circ - 180^\circ + \varphi = \boxed{180^\circ - \varphi - 40^\circ}.$$

Таким чином, чотирикутник $ABCD$, який задовольняє умову задачі, є таким, що: $\angle A = \angle C$, а $\angle B - \angle D = 40^\circ$.

Задача №4

I спосіб («додавання»)

$$\begin{cases} a+b+c=7 \\ b+c+m=5 \\ c+m+a=3 \\ m+a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=7 \\ b+c+m=5 \\ c+m+a=3 \\ 3a+3b+3c+3m=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=7 \\ b+c+m=5 \\ c+m+a=3 \\ a+b+c+m=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=7 \\ b+c+m=5 \\ c+m+a=3 \\ m=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b+c=7 \\ b+c=7 \\ c+a=5 \\ m=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b+c=7 \\ c=5 \\ m=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=5 \\ m=-2. \end{cases}$$

II спосіб (за методом Гауса – «послідовного виключення змінних у двох напрямках»)

$$\begin{cases} a+b+c=7 \\ b+c+m=5 \\ c+m+a=3 \\ m+a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1a+1b+1c+0m=7 \\ 1a+1b+0c+1m=0 \\ 1a+0b+1c+1m=3 \\ 0a+1b+1c+1m=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1a+1b+1c+0m=7 \\ 0a+0b-1c+1m=-7 \\ 0a-1b+0c+1m=-4 \\ 0a+1b+1c+1m=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1a+1b+1c+0m=7 \\ 0a+1b+1c+1m=5 \\ 0a-1b+0c+1m=-4 \\ 0a+0b-1c+1m=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1a+1b+1c+0m=7 \\ 0a+1b+1c+1m=5 \\ 0a+0b+1c+2m=1 \\ 0a+0b-1c+1m=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1a+1b+1c+0m=7 \\ 0a+1b+1c+1m=5 \\ 0a+0b+1c+2m=1 \\ 0a+0b+0c+3m=-6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1a+1b+1c+0m=7 \\ 0a+1b+1c+1m=5 \\ 0a+0b+1c+2m=1 \\ 0a+0b+0c+m=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1a+1b+1c+0m=7 \\ 0a+1b+1c+0m=7 \\ 0a+0b+1c+0m=5 \\ 0a+0b+0c+m=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1a+1b+0c+0m=2 \\ 0a+1b+0c+0m=2 \\ 0a+0b+1c+0m=5 \\ 0a+0b+0c+m=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1a+0b+0c+0m=0 \\ 0a+1b+0c+0m=2 \\ 0a+0b+1c+0m=5 \\ 0a+0b+0c+m=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=5 \\ m=-2. \end{cases}$$

Відповідь: $a=0;\ b=2;\ c=5;\ m=-2.$

Розв'язання задач

Задача №5

1) Спочатку покажемо, що *будь-яке шестизначне число, яке складається з шести однакових цифр (відмінних від нуля), ділиться на* число 1001.

Дійсно, нехай a – одна з дев'яти цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 або ж 9.

Тоді шестизначне число $\overline{aaaaaa}$ можна подати у вигляді

$$\overline{aaaaaa} = \overline{aaa} \cdot 1000 + \overline{aaa} \cdot 1 = 1001 \cdot \overline{aaa}.$$

З останнього й маємо справедливість зазначеного твердження.

2) Серед шістдесяти цифр шістдесятизначного числа (десятковий запис якого не містить нулів) за принципом Діріхлє міститься щонайменше $\left[\frac{60}{9}\right] + 1 = 7$ однакових цифр. Тут $[q]$ – ціла частина числа q, тобто найменше ціле число, що не перевищує q. Наприклад: $[2{,}3] = 2$, $[0{,}1] = 0$, $[-2{,}3] = -3$.

Таким чином, викресливши всі цифри 60-значного числа, окрім шести із існуючих семи зазначених цифр, одержимо шукане число, яке, з урахуванням пункту 1), обов'язково ділиться на число 1001.

Зауважимо, що умову задачі можна <u>значно посилити</u>, вимагаючи доведення існування зазначеного числа, одержаного викреслюванням цифр 46-значного числа, десятковий запис якого не містить нулів.

!? Дослідіть задачу про існування шуканого числа (що ділиться на 1001), одержаного викреслюванням цифр шістдесятизначного числа, десятковий запис якого *містить нулі*.

! Більш загальне формулювання принципу Діріхлє можна подати наступним чином: «якщо m кроликів розсаджено у n клітках, то принаймні в одній клітці знаходиться не менше ніж $\left[\frac{m}{n}\right]$ кроликів, та принаймні в одній клітці знаходиться не більше за $\left[\frac{m}{n}\right]$ кроликів»

9 клас

Задача №1

$$a^4+b^4\ge a^3b+b^3a \quad\Leftrightarrow\quad a^4-a^3b-b^3a+b^4\ge 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3(a-b)-b^3(a-b)\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad (a-b)\left(a^3-b^3\right)\ge 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad (a-b)^2\left(\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\ge 0.$$

Остання нерівність є вірною при будь-яких, зокрема додатних, дійсних a і b.

Задача №2

Нехай спочатку у хорі було x хлопчиків та y дівчаток. За умовою спочатку їх відношення становило

$$\frac{y}{x}=\frac{4}{3}\text{, звідки } y=\frac{4}{3}x. \qquad (9.2.1)$$

Оскільки $x, y\in N$, то число хлопчиків повинно бути кратним трьом.

Після приходу до хору двох «новеньких» чисельність хлопчиків та дівчаток змінилася. А відношення числа y' дівчаток до числа x' хлопчиків стало становити

$$\frac{y'}{x'}=\frac{3}{2}. \qquad (9.2.2)$$

Оскільки $\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$, то $\frac{y'}{x'}>\frac{y}{x}$. Звідки слідує, що серед двох новеньких не могло бути 2 хлопчиків.

1) Припустимо, що серед двох новеньких 1 дівчинка і 1 хлопчик. Тоді, з урахуванням (9.2.2), повинна виконуватися рівність $\frac{y+1}{x+1}=\frac{3}{2}$, або ж $2y+2=3x+3$, звідки $2y=3x+1$. Оскільки $y=\frac{4}{3}x$, то з урахуванням останньої

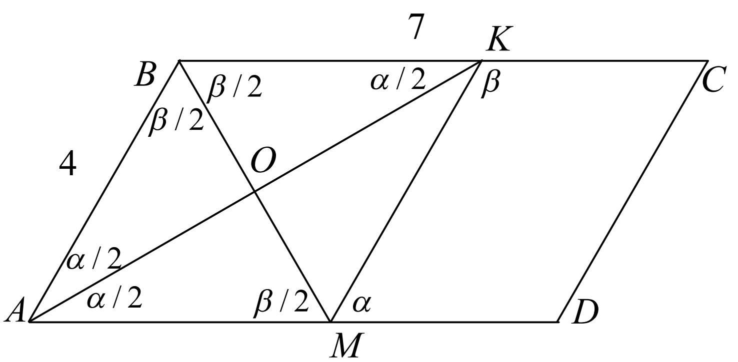
рівності маємо рівняння $2\cdot\frac{4}{3}x=3x+1$, або ж $8x=9x+3$. Звідки $x=-3$, що не задовольняє умову задачі.

2) Тепер розглянемо випадок, коли серед двох новеньких виявилося 2 дівчинки. Тоді, з урахуванням (9.2.2), повинна виконуватися рівність $\frac{y+2}{x}=\frac{3}{2}$, або ж $2y+4=3x$, звідки $2y=3x-4$. Оскільки $y=\frac{4}{3}x$, то з урахуванням останньої рівності маємо рівняння $2\cdot\frac{4}{3}x=3x-4$, або ж $8x=9x-12$. Звідки $x=12$. Отже, спочатку в хорі було 12 хлопчиків та 16 дівчаток.

Відповідь: 12.

!? У класі 25% відмінників, серед яких кожна третя дівчина. Вісім хлопців не є відмінниками. Знайти кількість учнів класу, якщо у класі дівчат і хлопців порівну.

Задача №3



Нехай $ABCD$ – паралелограм, в якому довжини сторін AB і BC дорівнюють 4 і 7 (лін.од.) відповідно, а бісектриси AK і BM кутів паралелограма перетинаються в точці O. Знайдемо відношення площі п'ятикутника $OKCDM$ до площі трикутника AOB.

<u>І спосіб</u>

Нехай $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$. Тоді за властивостями паралелограма мають місце наступні рівності $\angle BCD=\alpha$, $\angle CDA=\beta$, $\alpha+\beta=180^\circ$.

1) За умовою AK – бісектриса кута $\angle BAC=\alpha$, то $\angle BAK=\angle KBD=\alpha/2$. Тому (за властивістю паралельних AD, BC і січної AK) $\angle BKA=\angle KAD=\alpha/2$.

Звідки трикутник ABK при основі AK має рівні кути і тому є рівнобедреним, тобто, $AB = BK = 4$.

Оскільки BM – бісектриса кута $\angle ABC = \beta$, то $\angle ABM = \angle MBC = \beta/2$, то (за властивістю паралельних AB, CD і січної BM) $\angle AMB = \angle MBC = \beta/2$. Звідки трикутник BAM при основі BM має рівні кути і тому є рівнобедреним, тобто, $AB = AM = 4$.

Оскільки в (опуклому) чотирикутнику $ABKM$ протилежні сторони AM і BK є паралельними і рівними, то чотирикутник $ABKM$ (за ознакою паралелограма) є паралелограмом. Більше того, оскільки сторони AB і BK є рівними, то паралелограм $ABKM$ є ромбом. Звідки $AK \perp BM$ і, наприклад з останнього, випливає, що $S_{\vartriangle AOB} = S_{\vartriangle MOK} = \dfrac{1}{4} S_{ABKM}$. (9.3.1)

2) За умовою $AD = 7$ і тому $MD = 3$. Оскільки $ABKM$ паралелограм, то $KM \parallel AB$. Звідки $KM \parallel CD$. І тому чотирикутник $KCDM$ є паралелограмом.

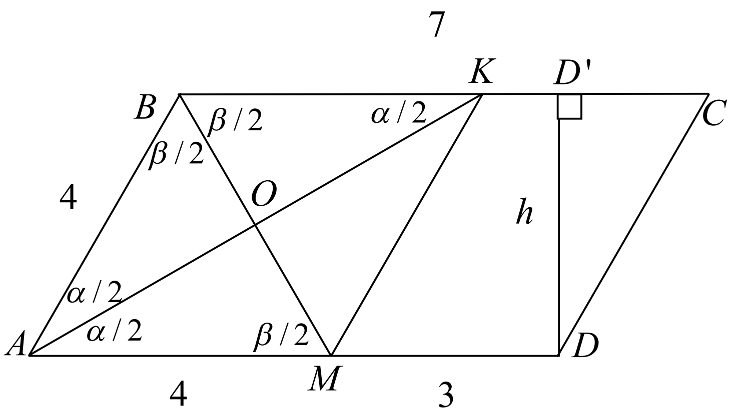
Оскільки $AD \parallel BC$, то висоти паралелограмів $ABKM$ і $MKCD$, опущені на сторони AM і MD відповідно, є рівними. Звідки

$$\frac{S_{ABKM}}{S_{MKCD}} = \frac{4}{3},\ \frac{S_{ABKM}}{4} = \frac{S_{MKCD}}{3},\ S_{\vartriangle AOB} = \frac{S_{MKCD}}{3}, \text{ або ж } \qquad 3S_{\vartriangle AOB} = S_{MKCD}. \qquad (9.3.2)$$

З урахуванням (9.3.1) і (9.3.2), маємо $3S_{\vartriangle AOB} + S_{\vartriangle AOB} = S_{MKCD} + S_{\vartriangle MOK}$, звідки

$$4S_{\vartriangle AOB} = S_{OKCDM}, \text{ або ж } \frac{S_{OKCDM}}{S_{\vartriangle AOB}} = 4.$$

<u>**II спосіб**</u>



Нехай $DD' = h$ – висота паралелограма $ABCD$, а x – площа трикутника AOB.

Як було показано вище, чотирикутник $ABKM$ є ромбом зі стороною 4 (лін. од.).

Розв'язання задач

Оскільки діагоналі паралелограма ділять його на чотири рівновеликі трикутники (трикутники рівних площ), то площа паралелограма $ABKM$ становить $4x$ (кв.од.). Звідки площа трикутника ABM становить $2x$ (кв.од.). З іншого боку площу трикутника ABM можна подати у вигляді $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot h = \frac{1}{2} 4 \cdot h = 2h$. Звідки $S_{\triangle ABM} = 2x = 2h$. І тому $x = h$.

Розглянемо трапецію $BMDC$. Очевидно, що її площу можна подати у вигляді $S_{BMDC} = \frac{MD + BC}{2} \cdot h = \frac{7+3}{2} \cdot h = 5h = 5x$.

Оскільки $S_{\triangle BOK} = x$, то площа п'ятикутника $OKCDM$ становить $S_{OKCDM} = S_{\triangle BMDC} - S_{\triangle AOB} = 5x - x = 4x$. Таким чином $\frac{S_{OKCDM}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{4x}{x} = 4$.

Відповідь: 4.

Задача №4

Подамо дане рівняння $x^3 - y^3 = 7$ у наступному вигляді

$$(x-y)\cdot\left(x^2 + xy + y^2\right) = 7. \tag{9.4.1}$$

Оскільки $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2 > 0$ для будь-яких дійсних x, y, які одночасно не дорівнюють нулю, то другий множник рівняння (9.4.1) є додатним. Більше того, оскільки шукані x, y є натуральними числами, то при довільних натуральних x, y має місце $x^2 + xy + y^2 \geq 3$.

Оскільки права частина рівняння (9.4.1) є простим числом 7, то натуральні розв'язки цього рівняння існують лише за умов, коли ліва частина цього рівняння є добутком двох натуральних чисел 1 і 7.

З урахуванням умови $x^2 + xy + y^2 \geq 3$, маємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases} \tag{9.4.2}$$

Розв'яжемо систему (9.4.2):

$$\begin{cases} x = y+1 \\ (y+1)^2 + (y+1)y + y^2 = 7, \end{cases} \begin{cases} x = y+1 \\ 3y^2 + 3y - 6 = 0, \end{cases} \begin{cases} x = y+1 \\ (y+2)(y-1) = 0, \end{cases} \begin{cases} x = y+1 \\ \left[\begin{array}{l} y = -2 \notin N \\ y = 1 \in N. \end{array}\right. \end{cases}$$

Звідки $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$ Таким чином, єдиним розв'язком даного рівняння у натуральних числах є пара $(2;1)$.

Відповідь: $(2;1)$.

Задача №5

Оскільки ціле число $5n-1$ ділиться на просте число p, то $5n-1$ можна подати у вигляді

$$5n-1 = p \cdot k,\ k \in Z. \qquad (9.5.1)$$

Оскільки ціле число $n-10$ ділиться на просте число p, то $n-10$ можна подати у вигляді $n-10 = p \cdot l,\ l \in Z,$ (9.5.2)

звідки $n = p \cdot l + 10$, $5n = 5p \cdot l + 50$, або ж

$$5n-1 = 5p \cdot l + 49,\ l \in Z. \qquad (9.5.3)$$

З рівностей (9.5.1) і (9.5.3) маємо $p \cdot k = 5p \cdot l + 49$, або ж

$$p \cdot (k - 5l) = 49 = 7^2,\ k, l \in Z. \qquad (9.5.4)$$

Оскільки p є простим числом, то зі співвідношення (9.5.4) випливає, що просте p може бути лише числом 7.

Тепер покажемо, що число $2000n+13$ ділиться на p.

З урахуванням встановленого вище, достатньо показати, що величина $2000n+13$ ділиться на 7. Для цього подамо величину $2000n+13$ у вигляді

$$2000n + 13 = 285n \cdot 7 + 5n + 13 = (285n \cdot 7) + (2 \cdot 7) + (5n - 1). \qquad (9.5.5)$$

Очевидно, що кожен з перших двох доданків правої частини рівності (9.5.5) ділиться на 7, третій доданок $5n-1$ ділиться на 7 за умовою.

Звідки й випливає, що ліва частина $2000n+13$ рівності (9.5.5) ділиться на 7.

Розв'язання задач

10 клас

Задача №1

<u>I спосіб (метод інтервалів)</u>

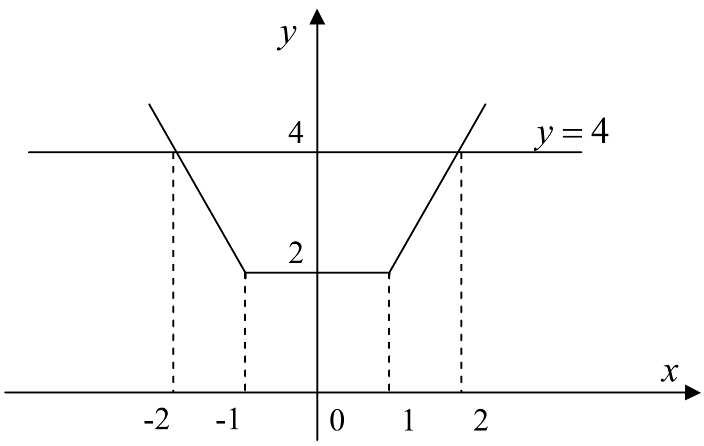
Задана нерівність $|x-1|+|x+1|<4$ є рівносильною сукупності трьох систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\ -x+1-x-1<4\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<1\\ -x+1+x+1<4\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 1\\ x-1+x+1<4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\ -2x<4\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<1\\ 2<4\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 1\\ 2x<4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\ x>-2\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<1\\ 2<4\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 1\\ x<2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x\le -1\\ -1\le x<1\\ 1\le x<2\end{array}\right.\Leftrightarrow -2<x<2.$$

<u>II спосіб (графічний)</u>

Побудуємо графіки функцій $f(x)=|x-1|+|x+1|$ і $\varphi(x)=4$.

Перший графік є сумою графіків $y=|x-1|$ і $y=|x+1|$.



На інтервалі $(-2;2)$ графік функції $y=f(x)$ розташовано нижче графіка функції $y=\varphi(x)$.

<u>III спосіб (за допомогою рівносильного переходу)</u>

Оскільки для кожного $x\in R$ обидві частини даної нерівності є додатними, то дана нерівність $|x-1|+|x+1|<4$ є рівносильною нерівності $\left(|x-1|+|x+1|\right)^2<16$.

Звідки маємо $(x-1)^2+2|x-1|\cdot|x+1|+(x+1)^2<16$, або ж $2x^2+2|x^2-1|+2<16$.

Тому $x^2 + |x^2 - 1| + 1 < 8$, звідки $|x^2 - 1| < 7 - x^2$.

Остання нерівність є рівносильною наступній системі

$$\begin{cases} x^2 - 1 > x^2 - 7 \\ x^2 - 1 < 7 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 < 8 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Відповідь: $(-2;2)$.

Зауважимо, що піднесення обох частин нерівності до квадрату в загальному випадку не є рівносильним перетворенням. Пояснимо останнє на прикладі числової нерівності: якщо вірну числову нерівність −1>−4 піднести до квадрату, то одержимо невірну числову нерівність 1>16. Таке протиріччя викликане саме тим, що обидві частини даної нерівності не були невід’ємними.

Задача №2

Введемо наступні позначення:

c – пряма, що визначається точками A і B;

a – пряма, що проходить через точку A перпендикулярно до прямої $c = (AB)$;

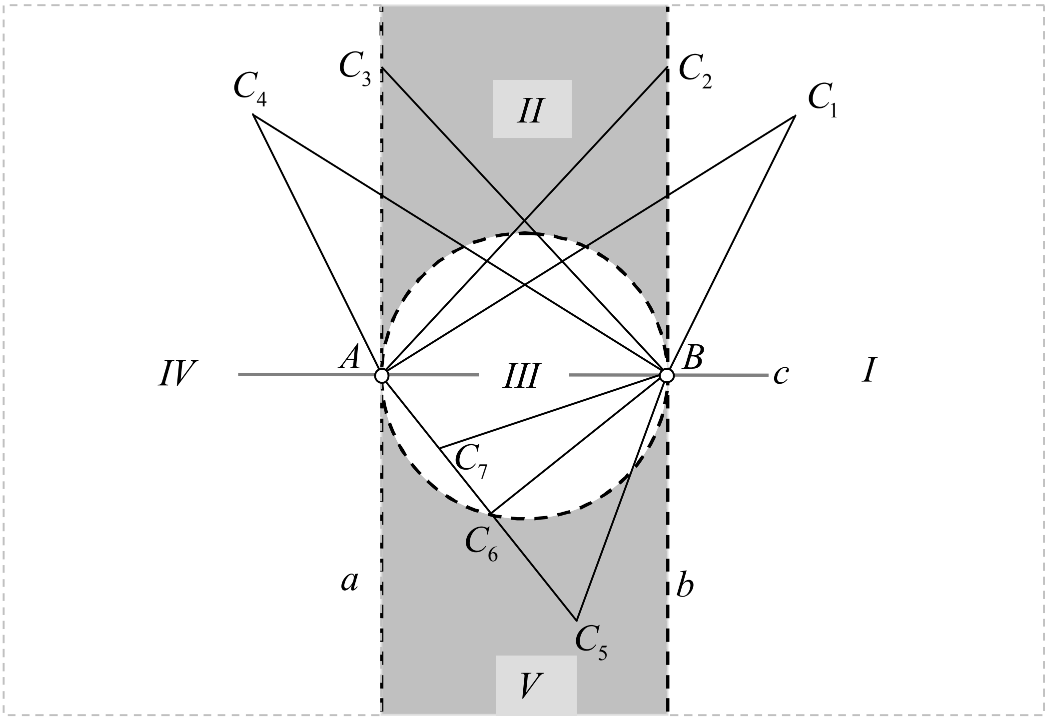
b – пряма, що проходить через точку B перпендикулярно до прямої $c = (AB)$;

ω – коло, побудоване на відрізку AB, як на діаметрі. Тоді:

якщо точка C належить прямій c, то трикутник ABC є виродженим і тому в подальшому слід *виключити з розгляду точки прямої* c;

якщо точка C належить прямій a чи b (наприклад, C_2 або C_4 відповідно), то трикутник ABC є прямокутним (оскільки $a \perp c$, $b \perp c$) і тому в подальшому ми повинні *виключити з розгляду також і точки прямих* a *і* b;

якщо точка C належить колу ω (наприклад C_6), то кут ACB є прямим, як такий, що спирається на діаметр AB і тому в подальшому ми повинні *виключити з розгляду також й точки кола* ω.



Очевидно, що прямі a, b і коло ω розбивають площину на п'ять «частин-областей», позначених на рис. як I, II, III, IV і V відповідно (область III – це множина внутрішніх точок круга, обмеженого колом ω).

Якщо точка C належить області I (наприклад C_1), то тупим буде кут ABC;
якщо точка C належить області IV (наприклад C_4), то тупим буде кут BAC.

Отже, шукані точки (вершини гострокутних трикутників ABC з фіксованими вершинами A і B) не можуть належати областям I і IV.

Якщо точка C належить області III (наприклад C_7), то тупим буде кут ACB, як зовнішній кут при вершині C_7 прямокутного трикутника BC_6C_7 ($\angle BC_6C_7 = 90^\circ$).

Якщо ж точка C належить області II або ж V (наприклад C_5), то кут ACB буде гострим, як гострий кут прямокутного трикутника BC_6C_5 ($\angle BC_6C_5 = 90^\circ$).

Таким чином, геометричним місцем вершин C гострокутних трикутників ABC (з фіксованими вершинами A і B) є точки областей II і V, виділених на рисунку.

Задача №3

Оскільки $2009 \cdot 2011 = (2010-1)(2010+1) = 2010^2 - 1 < 2010^2$, то

$$2\sqrt{2009 \cdot 2011} < 2\sqrt{2010^2}.$$

Додамо до лівої і правої частини останньої нерівності число 4020 та виконаємо наступні тотожні перетворення числових виразів

$$4020 + 2\sqrt{2009 \cdot 2011} < 4020 + 2\sqrt{2010^2},$$

$$2009 + 2\sqrt{2009 \cdot 2011} + 2011 < 2010 + 2\sqrt{2010^2} + 2010, \text{ звідки}$$

$$\left(\sqrt{2009} + \sqrt{2011}\right)^2 < \left(\sqrt{2010} + \sqrt{2010}\right)^2, \text{ або ж } \sqrt{2009} + \sqrt{2011} < 2\sqrt{2010}.$$

Відповідь: $\sqrt{2009} + \sqrt{2011} < 2\sqrt{2010}$.

__Доповнення__

Спробуємо узагальнити цю задачу для будь-яких невід'ємних чисел $a-1$ і $a+1$, коли $a \in N$. Оскільки $(a-1)(a+1) = a^2 - 1 < a^2$, то $2\sqrt{(a-1)(a+1)} < 2\sqrt{a^2}$.

Додамо до лівої і правої частини останньої нерівності величину $2a$. Причому в лівій частині подамо $2a$ як $a-1+a+1$, а в правій – як $a+a$. Матимемо нерівність виду $(a-1) + 2\sqrt{(a-1)(a+1)} + (a+1) < a + 2\sqrt{a^2} + a$, звідки

$$\left(\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}\right)^2 < \left(\sqrt{a} + \sqrt{a}\right)^2, \text{ або ж } \sqrt{a-1} + \sqrt{a+1} < 2\sqrt{a}.$$

Таким чином, використовуючи представлене узагальнення даної задачі, її можна пропонувати щорічно (оновлюючи роки) в якості олімпіадної задачі.

Відповідь: $\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1} < 2\sqrt{a}$.

Задача №4

Кожне натуральне число можна подати за допомогою чисел виду: $6n-5$, $6n-4$, $6n-3$, $6n-2$, $6n-1$ або ж $6n$, де $n \in N$.

За умовою задачі треба дослідити прості числа не менші за 11. Зрозуміло, що всі вони будуть непарними і тому можуть бути представлені у вигляді $6n-1$

або ж $6n-5$ (числа виду $6n$, $6n-2$, $6n-4$ діляться на 2, а числа виду $6n-3$ діляться на 3, і тому не можуть бути простими).

Кожне натуральне число виду $6n-5$, яке є не меншим за 7, можна подати у вигляді $6k+1$, $k \in N$ (для цього достатньо покласти $k=n-1$). Таким чином, кожне просте число, яке є не меншим за 7, можна подати у вигляді $6n-1$ або ж $6n+1$. Проте слід розуміти, що не кожне число виду $6n \pm 1$ ($n \in N$) є простим. Так, наприклад: $25 = 6 \cdot 4 + 1 = 5 \cdot 5$; $35 = 6 \cdot 6 - 1 = 5 \cdot 7$.

За умовою задачі треба дослідити лише ті прості числа (не менші за 11), різниця яких дорівнює 2. З урахуванням зазначеного вище, кожну пару простих чисел, різниця яких дорівнює двом, можна подати за допомогою чисел виду $6n-1$ та $6n+1$. Очевидно, що для кожної такої пари простих чисел їх сума становить $12n$ і тому ділиться на 12.

Задача №5

Многочлен $P(x)$ четвертого степеня має вид

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k,$$

де в загальному випаду a, b, c, d, k – дійсні числа, причому $a \neq 0$.

За умовою многочлен $P(x)$ має наступні властивості

$$P(1) = P(-1), \tag{10.5.1}$$

$$P(2) = P(-2). \tag{10.5.2}$$

Оскільки $P(1) = a + b + c + d + k$, а $P(-1) = a - b + c - d + k$, то з урахуванням (10.5.1), має місце рівність $a - b + c - d + k = a + b + c + d + k$, звідки

$$b = -d. \tag{10.5.3}$$

Оскільки $P(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + k$, а $P(-2) = 16a - 8b + 4c - 2d + k$, то з урахуванням (10.5.2), має місце рівність

$16a + 8b + 4c + 2d + k = 16a - 8b + 4c - 2d + k$, звідки

$$4b = -d. \tag{10.5.4}$$

З рівностей (10.5.3) і (10.5.4) випливає, що $b = d = 0$. І тому многочлен $P(x)$, для якого виконуються умови (10.5.1) і (10.5.2), має вид

$$P(x) = ax^4 + cx^2 + k. \qquad (10.5.5)$$

Крім того, для довільного дійсного x справджується умова

$$P(-x) = a(-x)^4 + c(-x)^2 + k = ax^4 + cx^2 + k = P(x), \qquad (10.5.5)$$

що й треба було довести.

11 клас

Задача №1

I спосіб

Згрупувавши доданки, використаємо формулу перетворення суми тригонометричних функцій у добуток

$$\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + ... + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ =$$
$$= \left(\cos 20^\circ + \cos 160^\circ\right) + \left(\cos 40^\circ + \cos 140^\circ\right) + \left(\cos 60^\circ + \cos 120^\circ\right) +$$
$$+ \left(\cos 80^\circ + \cos 100^\circ\right) + \cos 180^\circ =$$
$$= 2\cos\frac{160^\circ + 20^\circ}{2}\cos\frac{160^\circ - 20^\circ}{2} + 2\cos\frac{140^\circ + 40^\circ}{2}\cos\frac{140^\circ - 40^\circ}{2} +$$
$$+2\cos\frac{120^\circ + 60^\circ}{2}\cos\frac{120^\circ - 60^\circ}{2} + 2\cos\frac{100^\circ + 80^\circ}{2}\cos\frac{100^\circ - 80^\circ}{2} - 1 =$$
$$= 2\cos 90^\circ \cos 70^\circ + 2\cos 90^\circ \cos 50^\circ + 2\cos 90^\circ \cos 30^\circ + 2\cos 90^\circ \cos 10^\circ - 1 =$$
$$= 2\cos 90^\circ \left(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ + \cos 30^\circ + \cos 10^\circ\right) - 1 = -1.$$

II спосіб

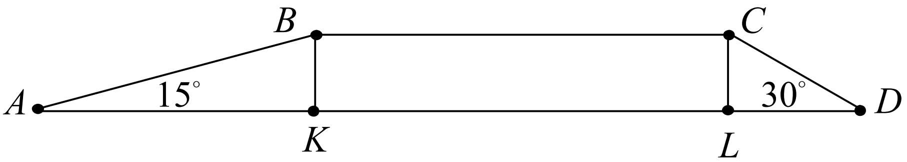
Скориставшись співвідношенням $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$ отримаємо

$$\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + ... + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ =$$
$$= \left(\cos 20^\circ + \cos 160^\circ\right) + \left(\cos 40^\circ + \cos 140^\circ\right) + \left(\cos 60^\circ + \cos 120^\circ\right) +$$
$$+ \left(\cos 80^\circ + \cos 100^\circ\right) + \cos 180^\circ =$$
$$= \cos 20° - \cos 20° + \cos 40° - \cos 40° + ... + \cos 80° - \cos 80° - 1 = -1.$$

Відповідь: -1.

Задача №2

<u>І спосіб</u>



У заданій трапеції *ABCD* проведемо висоти *BK* та *CL*, позначимо їх довжину через *x*. Тоді у трикутнику *CLD* *CD*=2*x* за властивістю катета, що лежить навпроти кута $30°$.

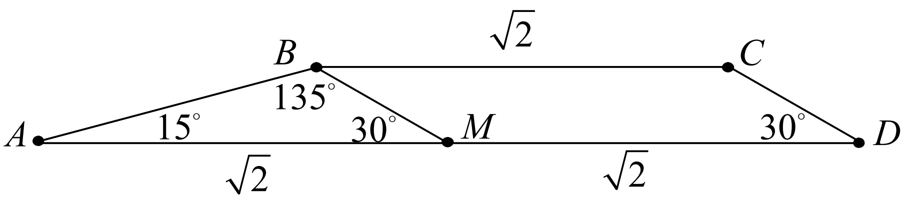
$$AK = AD - LD - KL,\ AK = \sqrt{2} - \sqrt{3}x.$$

У прямокутному трикутнику ABK

$$AK = BK\,\mathrm{ctg}15^{\circ} = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{1-\cos 30°}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{3}+2.$$

Отже маємо рівняння $\sqrt{2} - \sqrt{3}x = \sqrt{3}x + 2x$, розв’язавши яке, отримуємо, що $x = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Тоді $AB = \dfrac{BK}{\sin 15°} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 1$.

<u>ІІ спосіб</u>



Проведемо $BM \parallel CD$. Чотирикутник $BCDM$ є паралелограмом, тому $BC = DM = \sqrt{2}$.

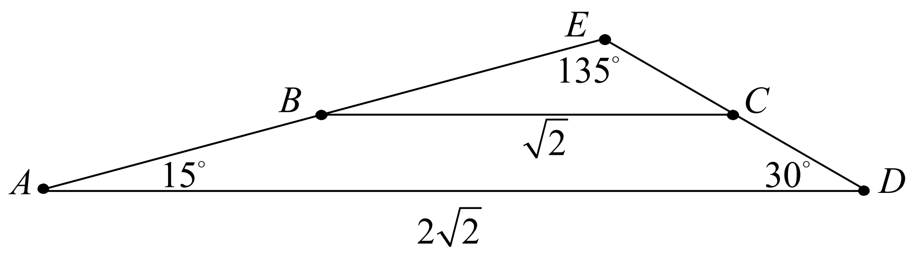
У трикутнику AMB маємо:

$$AM = \sqrt{2},\ \angle BAM = 15°,\ \angle BMA = 30°,\ \angle ABM = 135°.$$

За теоремою синусів маємо

$$\frac{AM}{\sin 135°} = \frac{AB}{\sin 30°},\ \text{звідки}\ AB = \frac{AM \cdot \sin 30°}{\sin 135°} = \frac{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

III спосіб



Продовжимо бічні сторони трапеції до їх перетину у точці E. В одержаному трикутнику AED відрізок BC є паралельним до основи AD і дорівнює половині AD, а значить є середньою лінією трикутника, отже, $AB=\frac{1}{2}AE$.

Скориставшись у отриманому трикутнику теоремою синусів, маємо $\frac{AD}{\sin 135°}=\frac{AE}{\sin 30°}$, звідки $AE=\frac{AD\cdot\sin 30°}{\sin 135°}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$. Тому $AB=1$.

Відповідь: 1.

Задача №3

I спосіб

Нехай x_0 є спільним коренем заданих рівнянь, тоді має місце рівність $x_0^2+ax_0+1=x_0^2+x_0+a$, звідки отримуємо

$$ax_0-x_0+1-a=0; \qquad a(x_0-1)-(x_0-1)=0; \qquad (x_0-1)(a-1)=0.$$

Розглянемо два можливі випадки:

1) Якщо $a=1$, то обидва рівняння не мають коренів, а значить умова задачі не виконується.

2) Якщо $x_0=1$, тоді, підставивши його в будь-яке з рівнянь, отримаємо $a=-2$.

II спосіб

Нехай x_0 є спільним коренем заданих рівнянь, тоді, підставивши його в кожне із заданих рівнянь, виразимо із кожного рівняння a через x_0.

Розв'язання задач

1) $x_0^2 + ax_0 + 1 = 0$. Якщо $x_0 = 0$, то отримуємо суперечності,

при $x_0 \neq 0$ $a = \dfrac{-1 - x_0^2}{x_0}$;

2) $x_0^2 + x_0 + a = 0$, $a = -x_0^2 - x_0$.

Оскільки в обох випадках a є одним і тим же числом, отримуємо рівняння $-x_0^3 - x_0{}^2 + x_0{}^2 + 1 - 0$, яке має єдиний розв'язок $x_0 = 1$.

Підставивши його в будь-яке з рівнянь, отримаємо $a = -2$.

Відповідь: -2.

Задача №4

Оскільки $f(x) = x \cdot f\left(1 - x\right) + 1$, то $f\left(1 - x\right) = \left(1 - x\right) \cdot f(x) + 1$.

Позначивши $f(x) = a, f(1 - x) = b$, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} f(x) = x \cdot f(1 - x) + 1 \\ f(1 - x) = (1 - x) \cdot f(x) + 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a = xb + 1 \\ b = (1 - x)a + 1. \end{cases}$$

Із першого рівняння виразимо b і підставимо у друге рівняння:

$$b = \frac{a - 1}{x}; \qquad \frac{a - 1}{x} = \left(1 - x\right)a + 1.$$

Звідки $\left(1 - x + x^2\right)a = x + 1$, тому $a = \dfrac{x + 1}{x^2 - x + 1}$.

Отже, шукана функція має вид $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - x + 1}$.

Відповідь: $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - x + 1}$.

Задача №5

<u>I спосіб</u>

Для знаходження цілої частини заданого числа, оцінимо його знизу та згори. Для цього доведемо, а потім використаємо наступні дві нерівності.

1) Доведемо, що для будь якого натурального числа виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$. Для доведення праву частину нерівності помножимо та розділимо на спряжене число, яке є додатнім. Отримаємо

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2) Аналогічно доводимо, що для будь якого натурального числа $n > 1$ виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$.

Маємо наступну низку нерівностей:

$$2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1};$$

$$2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2};$$

$$2\sqrt{5} - 2\sqrt{4} < \frac{1}{\sqrt{4}} < 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3};$$

$$\ldots$$

$$2\sqrt{257} - 2\sqrt{256} < \frac{1}{\sqrt{256}} < 2\sqrt{256} - 2\sqrt{255}.$$

Додавши почленно нерівності, отримаємо

$$2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{257} - \sqrt{256}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{256}} <$$

$$< 2\left(\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{256} - \sqrt{255}\right).$$

Звідси $2\left(-\sqrt{2} + \sqrt{257}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{256}} < 2\left(-1 + \sqrt{256}\right)$.

Очевидно, що $2\left(\sqrt{256} - 1\right) = 30$. Доведемо, що $2\left(\sqrt{257} - \sqrt{2}\right) > 2$. Для доведення нерівності будемо порівнювати не самі додатні числа, а їх квадрати.

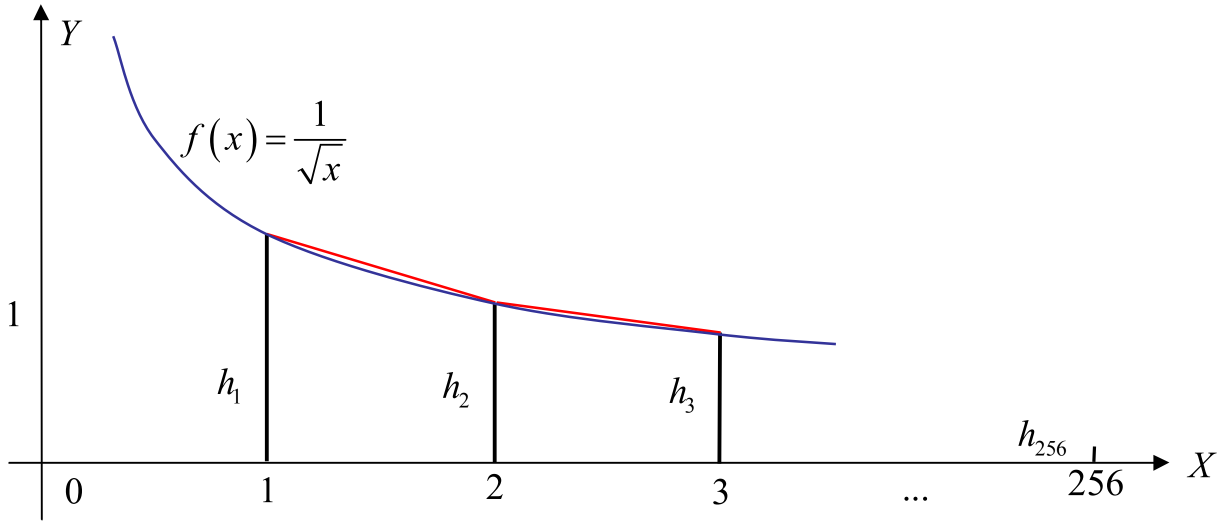
$$4(259 - 2\sqrt{2 \cdot 257}) > 841,\ 8\sqrt{514} < 195,\ 64 \cdot 514 < 195^2.$$

Отримана правильна числова нерівність свідчить про вірність доводжуваної нерівності.

Отже, $29 < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{256}} < 30$, звідки $30 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{256}} < 31$, а це означає, що ціла частина заданого в умові задачі числа дорівнює 30.

II спосіб

Нехай $Z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{256}} = h_1 + h_2 + ... + h_{256} = \sum_{i=1}^{256} h_i$, де $h_i = \frac{1}{\sqrt{i}}$.



Подамо досліджувану величину Z у наступному вигляді:

$$Z = h_1 + h_2 + ... + h_{256} = \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_{256}}{2} + \frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{h_2 + h_3}{2} + ... + \frac{h_{254} + h_{255}}{2} + \frac{h_{256} + h_{256}}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \sum_{i=1}^{255} \left(\frac{h_i + h_{i+1}}{2} \cdot 1 \right) = \frac{17}{32} + \sum_{i=1}^{255} \left(\frac{h_i + h_{i+1}}{2} \cdot 1 \right).$$

Зауважимо, що кожен з доданків останньої суми виражає площу S_i трапеції, основами якої є (паралельні) відрізки довжин h_i та h_{i+1}. Крім того, висота кожної такої трапеції становить 1.

Розглянемо функцію $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$. Очевидно, що $h_i = f(i)$. Крім того, оскільки $y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$, $y'' = \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}}$, то на проміжку $[1; +\infty)$ мають місце нерівності

$$f'(x) < 0, \qquad f''(x) > 0.$$

Звідки на вказаному проміжку функція $y = f(x)$ монотонно спадає, а її графік є опуклим донизу.

Нагадаємо, що геометричний зміст визначеного інтеграла $\int_1^{256} x^{-\frac{1}{2}} dx$ полягає в тому, що його значення дорівнює площі «криволінійної трапеції», тобто фігури обмеженої згори графіком функції $y = f(x)$, знизу – віссю OX, зліва – прямою $x = 1$, а з права – прямою $x = 256$.

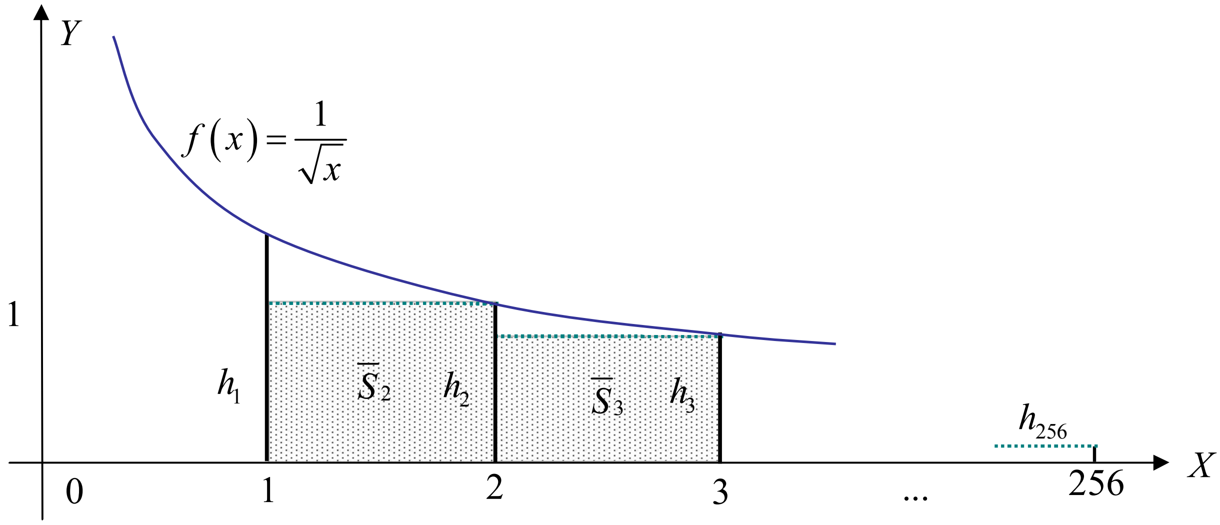
З огляду на монотонність та опуклість до низу графіка функції $y=f\left(x\right)$, має місце нерівність $\sum\limits_{i=1}^{255}\left(\frac{h_i+h_{i+1}}{2}\cdot 1\right)>\int\limits_1^{256}x^{-\frac{1}{2}}dx$.

Оскільки $\int\limits_1^{256}x^{-\frac{1}{2}}dx=2\sqrt{x}\Big|_1^{256}=2\left(\sqrt{256}-\sqrt{1}\right)=30$, то $\sum\limits_{i=1}^{255}\left(\frac{h_i+h_{i+1}}{2}\cdot 1\right)>30$.

І тому $Z=\frac{17}{32}+\sum\limits_{i=1}^{255}\left(\frac{h_i+h_{i+1}}{2}\cdot 1\right)>\frac{17}{32}+30=30\frac{17}{32}$.

Тепер оцінимо величину Z згори. Для цього розглянемо суму

$$Z'=Z-1=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1+\ldots+\frac{1}{\sqrt{256}}\cdot 1=\sum_{i=2}^{256}h_i\cdot 1=\sum_{i=2}^{256}\overline{S}_i\ .$$



Зауважимо, що кожен з доданків суми Z' виражає площу $\overline{S}_i$ того прямокутника, одною парою протилежних сторін якого є відрізки довжини h_i, а іншою парою – відрізки довжини 1.

З огляду на монотонність та опуклість до низу графіка функції $y=f\left(x\right)$, має місце нерівність $\sum\limits_{i=2}^{256}\overline{S}_i<\int\limits_1^{256}x^{-\frac{1}{2}}dx$.

Оскільки $\int\limits_1^{256}x^{-\frac{1}{2}}dx=30$, то $Z'=Z-1=\sum\limits_{i=2}^{256}\overline{S}_i<30$. Звідки $Z=1+\sum\limits_{i=2}^{256}\overline{S}_i<31$.

Таким чином, задане число $Z=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{256}}$ задовольняє умовам

$$30\frac{17}{32}<Z<31.$$

І тому ціла частина числа Z дорівнює 30.

Відповідь: 30.

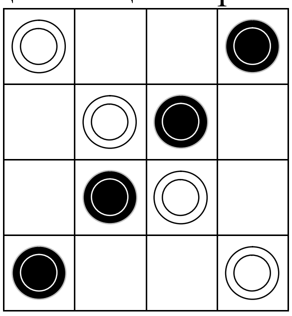
УМОВИ ЗАВДАНЬ ІІІ ЕТАПІВ (ОБЛАСНИХ) ВСЕУКРАЇНСЬКИХ ОЛІМПІАД З МАТЕМАТИКИ

2001 рік[3]

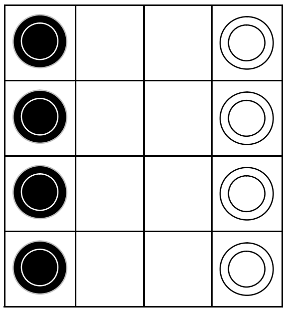
7 клас

1. Відстань між пунктами A і B – 80 км, між пунктами B і C – 300 км, між C і D – 120 км, а між D і A – 100 км. Яка відстань між A і C?
2. За допомогою якого мінімального числа доданків, які містять у своєму записі лише цифри 3, можна в сумі одержати число 111111?
3. У таблиці розміщено чорні та білі шашки. За один хід дозволяється пересунути дві довільні шашки одного кольору вздовж вертикалі або горизонталі в одному або протилежних напрямках на одну клітинку. Чи можна за скінченне число ходів:

   1) від таблиці 1 перейти до таблиці 2?

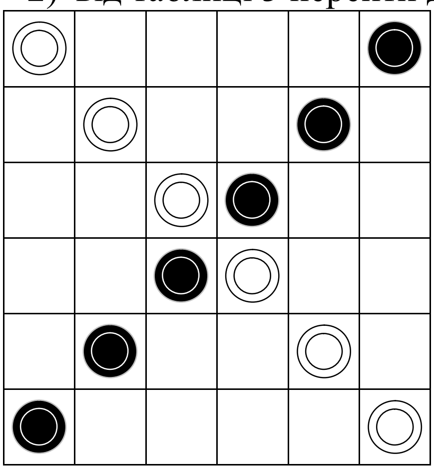


Таблиця 1

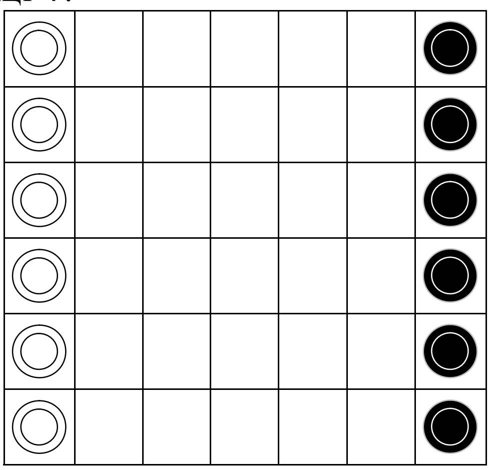


Таблиця 2

   2) від таблиці 3 перейти до таблиці 4?



Таблиця 3



Таблиця 4

4. 1) Чи можна числа 1, 2, … , 15 розбити на дві групи так, щоб суми квадратів чисел в групах були рівними?

   2) Чи можна виконати цю процедуру для чисел 1, 2, 3, …, 999?

[3] Розв’язання кожної задачі оцінюється в 7 балів

8 клас

1. Розв'язати рівняння $\left||x|-2\right| = x$.
2. Турист пройшов половину шляху між пунктами A і B зі швидкістю 4 км/год, а решту шляху до B – зі швидкістю 6 км/год. На зворотному шляху від B до A $\frac{2}{3}$ цього шляху він пройшов зі швидкістю, яка дорівнює середній швидкості руху у напрямку від A до B, а решту шляху – зі швидкістю 5 км/год. Знайти відстань між пунктами A і B, якщо відомо, що на зворотний шлях турист витратив на 2 хвилини менше ніж на весь шлях від A до B. (Зазначена середня швидкість дорівнює відношенню відстані між A і B до всього часу руху у напрямку від A до B).
3. Чи існують цілі числа k і l такі, що має місце рівність
$$k^3 + l^3 = 2001?$$
4. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ обрали відповідно точки M, N, P і Q так, що відрізки MN і PQ є перпендикулярними. Нехай O точка перетину MN і PQ. Доведіть, що має місце рівність
$$P_{AMOQ} + P_{CPON} = P_{BMOP} + P_{DNOQ}.$$
(Тут P_F – периметр фігури F)

5. Є кучка з 2001 сірника. Двоє грають у гру, а саме по черзі роблять наступні дії:
   - обирається довільна кучка, яка містить більше одного сірника і ділиться на дві менші кучки;
   - гра продовжується до тих пір, поки кожна кучка не буде містити один сірник.
   - при кожному діленні кучки на дві записується добуток чисел сірників в утворених нових кучках;
   - мета гравця, який «ходить» першим зіграти так, щоб сума усіх записаних чисел ділилася на 1000.

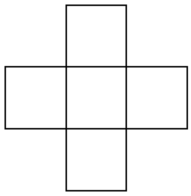
   Чи може другий гравець завадити першому у досягненні його мети?

9 клас

1. Для довільних додатних a і b доведіть нерівність
$$\frac{|a|}{\sqrt{b}} + \frac{|b|}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$
2. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x\,|\,x\,| + y\,|\,y\,| = 1 \\ [x] + [y] = 1 \end{cases}$$

(Тут $[t]$ – ціла частина числа t, тобто найменше ціле число, яке не перевищує t)

3. На колі фіксовано дві точки A і B, а третя точка C рухається по колу. Знайти геометричне місце точок M перетину медіан трикутників ABC.
4. Два рівних квадрата утворюють пр. перетині восьмикутник . Дві точки цього восьми кутника ділять його на чотири чотирикутника. Доведіть, що ці діагоналі є взаємно перпендикулярними.
5. З листа у клітинку вирізали квадрат 8×8. Яке найбільше число фігур, зображених на рисунку нижче, можна вирізати з цього квадрата?



10 клас

1. Для кожного натурального n розв'яжіть рівняння
$$\sin^2 x+\sin(2x)\cdot\sin(4x)+\sin(3x)\cdot\sin(9x)+...+\sin(nx)\cdot\sin(n^2x)=1.$$
2. Для кожного натурального числа n позначимо $a(n)=n^2+n+1$. Через S позначимо множину всіх значень $a(n)$, $n\geq1$.
   1) Доведіть, що для кожного натурального n число $a(n)\cdot a(n+1)$ належить множині S.
   2) Доведіть, що існують натуральні n і k більші за 2001 та такі, що число $a(n)\cdot a(k)$ не належить множині S.
3. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел a,b,c,d,e виконується нерівність
$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\geq\left(a+b+c+d\right)\cdot e.$$
4. П'ятикутник $ABCD$ вписано у коло. Відомо, що промені AE і CD перетинаються у точці P, а промені ED і BC – у точці Q так, що $PQ\parallel AB$. Доведіть, що $DA=DB$.
5. Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а інші його вершини – у білий. За один крок дозволяється обрати довільну «чорну» вершину та замінити колір на альтернативний у неї та ще у двох сусідніх вершинах (альтернативним до чорного кольору слід вважати білий і навпаки). Чи можна за декілька вказаних кроків перефарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

11 клас

1. Для кожного натурального n розв'яжіть рівняння
   $$\sin^2 x + \sin(2x)\cdot\sin(4x) + \sin(3x)\cdot\sin(9x) + ... + \sin(nx)\cdot\sin(n^2x) = 1.$$
2. Числова послідовність $a_1, a_2, ...$, в якій $a_1 = 2$, $a_2 = 500$ і $a_3 = 2000$ при всіх натуральних $n \ge 2$
   $$\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}.$$
   Доведіть, що всі члени цієї послідовності є натуральними числами, причому a_{2001} ділиться без остачі на 2^{2001}.

3. Знайти всі функції f, які визначено на всій числовій осі та однозначно задовольняють наступним умовам
   3) рівняння $f(x) = 0$ має єдиний корінь;
   4) для будь-яких $x, y \in R$ виконується рівність
   $$f\left(y + f(x)\right) = f\left(x^2 - y\right) + 4f(x)\cdot y.$$
4. Поза площиною α задано точку A. Доведіть, що для кожної прямої l площини α в цій площині існує така пряма $m \parallel l$ (m не співпадає з l), що для кожної точки $M \in m$ спільний перпендикуляр до мимобіжних прямих l і AM буде проходити через середину відрізка AM.
5. Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а інші його вершини – у білий. За один крок дозволяється обрати довільну «чорну» вершину та замінити колір на альтернативний у неї та ще у двох сусідніх вершинах (альтернативним до чорного кольору слід вважати білий і навпаки). Чи можна за декілька вказаних кроків перефарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

Умови завдань ІІІ етапів (обласних) Всеукраїнських олімпіад з математики

2002 рік

7 клас

5. (10 б.) Чи існують такі числа x та y, що $x^2 + x + y^2 - y = 2001$?
6. (10 б.) Число a дорівнює $13^{2001} \cdot 17^{2002}$. Яке з чисел $13a$, $17a$, $19a$ має більше дільників? Скільки дільників має кожне з цих чисел?
7. (20 б.) На кінцях смужки в клітину 1×40 стоїть по шашці. Грають двоє, ходи роблять по черзі. За хід дозволяється зсунути яку-небудь шашку в напрямку іншої на одну, дві або три клітини. Перестрибувати через шашки не можна. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто виграє: перший (той хто починає) чи другий гравець? Як повинен грати переможець?
8. (20 б.) Квадрат розбито на п'ять прямокутників так, що його вершини належать різним прямокутникам, площі яких рівні між собою, а п'ятий прямокутник – квадрат. Довести, що інші чотири прямокутника рівні (тобто мають однакові розміри).
9. (30 б.) З шахової дошки розміром 7×7 вирізали одну клітину. Чи можна покрити частину яка залишилась прямокутниками розміром 1×4 без накладень, якщо вирізана клітина: а) центральна; б) має обру сторону з кутовою клітиною; в) кутова?

8 клас

1. (10 б.) Нещодавно я чув таку розмову:
   – Якщо рік, коли мені виповнилось 43 роки, помножити на рік, коли мені виповнилось 45 років та поділити на рік мого народження, то отримаємо рік, коли…
   – Достатньо! – перервав його співрозмовник. – Я можу назвати рік твого народження.

   Назвіть його і ви.
2. (10 б.) Цифри числа $\overline{3a1}$ написали 2002 раз і отримали число яке ділиться на 11. Чому дорівнює a? Те саме питання для випадку, коли цифри числа $\overline{3a1}$ записали 2001 раз підрід, і отримали число яке ділиться на 11.
3. (20 б.) Чи існує трикутник , який можна розділити а) на 12; б) на 5 рівних трикутників?
4. (20 б.) У Петра є запаяний акваріум у вигляді паралелепіпеду з деякої кількість води всередині. Петро помітив, що коли він ставить акваріум на горизонтальну поверхню будь-якою гранню, рівень води в ньому знаходиться нижче верхньої грані на 3 см. Петро припускає що його акваріум має форму куба. Чи вірне припущення Петра?
5. (30 б.) Дана пряма та дві точки. Побудуйте трикутник, в якому основи двох висот будуть співпадати з заданими точками, а третя висота буде лежати на заданій прямій.

9 клас

1. (10 б.) П'ятизначне число,яке є повним квадратом, записується за допомогою цифр 0, 4, 8, 8, 8. Знайти це число.
2. (10 б.) Доведіть, що ціла частина числа $\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2$, де n – натуральне число, є непарним числом. Знайдіть це число?
3. (20 б.) Кожна точка площини пофарбована в один з двох кольорів – червоний або білий – довільним чином. Довести, що знайдеться трикутник з кутами 30^0, 60^0, 90^0 та з меншої стороною, яка рівна 1, всі вершини мають один колір.
4. (20 б.) Послідовність чисел $\{a_k\}$, $k=-n,-n+1,-n,\ldots,n-1,n$ така, що $a_k=a_{-k}$ для всіх k та $a_{-n}+a_{-n+1}+\ldots+a_{n-1}+a_n=1$. Знайти значення виразу
$$\frac{a_{-n}}{1+2^n}+\frac{a_{-n+1}}{2+2^n}+\frac{a_{-n+2}}{2^2+2^n}+\ldots+\frac{a_n}{2^{2n}+2^n}.$$
5. (30 б.) Ціле число a має властивість, що число $3a$ можна представити у виді x^2+2y^2, де x, y – цілі. Довести, що число a можна представити в такому ж виді.

10 клас

1. (10 б.) На стороні AB квадрата $ABCD$ взята точка E, а на стороні CD – точка F, причому $AE:EB=1:2$, $CF=FD$; M та N – точки перетину DE та BF з AC відповідно. Знайти суму $\angle EMN+\angle EBN$. Відповідь вкажіть в градусах.
2. (10 б.) Розкласти на множники:
$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!}.$$
3. (20 б.) Знайти всі многочлени $P(x)$, які задовольняють умові $P(x+x^2)=P(x)+P(x^2)$.
4. (20 б.) Нехай $a_1,\ldots,a_n\ge 0$. Довести, що
$$\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}\le\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)^2+\left(\frac{\max(a_1+\ldots+a_n)}{2}\right)^2.$$
5. (30 б.) На дошці написані числа $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n}$. За один крок дозволяється зітерти будь-які два числа x та y і на писали замість них число $x+y-xy$. Ці дії повторюються до тих пір, поки не залишиться останнє число. Знайти його найбільше і найменше можливі значення.

11 клас

1. (10 б.) В трикутнику ABC $CB=a$, $AC=b$. Бісектриса CD та медіана AM перетинаються в точці O. Знайти $CO:OD$.
2. (10 б.) Довести, що рівняння
$$(x-a)(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

має три кореня, враховуючи $a < b < c$.

3. (20 б.) Доведіть, що не існує різних степенів двійки з натуральним показником, які відрізняються лише порядком цифр в десятковому записі.
4. (20 б.) Кожна точка простору пофарбована в один з двох кольорів – червоний або білий – довільним чином. Довести, що знайдеться рівнобічний трикутник зі стороною 1, всі вершини якого мають один колір.
5. (30 б.) Розв’яжіть функціональне рівняння:
$$f(x^2 - x + 2^y) = f(x) + f(-1 + y^3).$$
Функція $y = f(x)$ визначена при $x \in (-\infty;+\infty)$.

2003 рік

7 клас

1. (15 б.) Якщо до загаданого числа приписати праворуч 0 і результат відняти з числа 143, то отримаємо потроєне загадане число. Яке число загадано?
2. (15 б.) При якому значенні x вираз $\dfrac{6}{|x-3|+2}$ приймає найбільше значення?
3. (20 б.) Числа 2003 та 200 при діленні на натуральне число x дають однакові остачі. Знайти число x.
4. (20 б.) Петро по одній дістає і складає в дві стопки чорні та червоні картки (не обов’язково по черзі). Класти картку на іншу картку того ж кольору заборонено. 10-а та 11-а картки білу червоні, а 25-а – чорна. Якого кольору була 26-а картка?
5. (30 б.) В таблиці 27×37 клітин стоять числа від 1 до 999 (всі по разу). З 64 сум по всім можливим вертикалям та горизонталям вибрали кратні 4. Чи може сума всіх сум які залишилися по горизонталям та вертикалям бути втричі більше суми обраних?

8 клас

1. (15 б.) Між п’ятою та шостою годинами стрілка хвилин знаходиться на 3 позначки хвилин пізніше годинникової стрілки. Який зараз час?
2. (15 б.) У вузлах сітки 3×100 стоять червоні точки (кожна копірка сітки є квадратом, в кожному рядку – 100 точок і в кожному стовбці – 3 точки). Скільки можна провести всіляких прямих, які проходять рівно через три червоні точки?
3. (20 б.) Учень підніс до квадрату декілька алгебраїчних виразів, кожне з яких є многочленом, а потім склав їх. Чи міг він отримати вираз
$$x^2 + y^2 + z^2 + 3y + 4x + xz + 1?$$
4. (20 б.) Довжини сторін довільного трикутника рівні a, b, c, також $a \le b \le c$. Довести, що $a^2 + b^2 + c^2 < 2(bc + ac)$.

5. (30 б.) В трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 3\angle C$. Точка D на стороні BC має таку властивість: $\angle ADC = 2\angle C$. Довести, що $AB + AD = BC$.

9 клас

1. (15 б.) Розв’язати рівняння
$$|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0.$$
2. (15 б.) Як розрізати прямокутник, який не є квадратом, на дві конгруентні частини, з яких можна скласти ромб?
3. (20 б.) Кожна точка площині пофарбована в один з трьох кольорів (всі три кольори присутні). Довести, що знайдеться прямокутний трикутник, всі вершини якого пофарбовано в різні кольори.
4. (20 б.) Чи можна у всіх клітинках а) таблиці 2000×2000, б) таблиці 2002×2002 розставити числа $+1$ або -1 так, щоб в симетричних відносно центра клітинах стояли протилежні числа, а сума чисел будь-якого рядка дорівнювала нулю, і сему чисел будь-якого стовпця дорівнювала нулю?
5. (30 б.) Дано 6 точок, попарні відстані між якими відмінні та ніякі 3 точки не лежать на одній прямій. Розглядаються всілякі трикутники з вершинами в цих точках. Довести, що знайдеться один і той же відрізок, який є найменшою стороною в одному з цих трикутників і найбільшою – в іншому.

10 клас

1. (15 б.) Прямокутник розбито на клітини 1×1. Всередині кожної клітини записано число (не обов’язково ціле). Відомо, що сума всіх чисел в кожному горизонтальному рядку рівна 1, а сума чисел в кожному вертикальному стовпці рівна 3. Чи може кількість всіх клітин в прямокутнику бути 1234?
2. (15 б.) При яких значеннях параметра a сума квадратів дійсних коренів рівняння $x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8 = 0$ є найменшою? Чому вона дорівнює?
3. (20 б.) В вершинах решітки $n \times n$ рас положено n^2 точок (кожна комірка решітки – квадрат розміру 1×1). Скільки існує всіляких квадратів з вершинами в цих точках (сторони квадратів не обов’язково паралельні рядкам і стовпцям решітки)?
4. (20 б.) В кут з вершиною M вписано два кола з радіусами r та R ($r < R$), які перетинаються в точках A та B. Нехай C та D – точки дотику однієї зі сторін кута з колами ($MC < MD$), $MA = d$. Виразити за допомогою r, R та d:
   а) радіуси кіл, які описані навколо трикутників ACD та BCD;
   б) довжини відрізків MC та MD.
5. (30 б.) Нехай $x, y, z > 0$, $xyz = 1$. Довести, що
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 3 \geq x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

11 клас

1. (15 б.) Знайти такі цифри a, b, c, для яких $\dfrac{1}{\overline{0,abc}} = a + b + c$. Де $\overline{0,abc}$ – десятковий дріб з цифрами a, b, c після коми.
2. (15 б.) Розглянемо множину многочленів виду
$$p(x) = 2002x^{2002} + a_1x^{2001} + a_2x^{2000} + \ldots + a_{2001}x + a_{2000}$$
де $|a_i| \le 1, i = 1,\ldots,2002$. Знайти найменше число a, при якому дійсні нулі всіх многочленів лежать на відрізку $[-a; a]$.
3. (20 б.) Чи існують такі раціональні числа a, b, c, d, для яких
$$\left(a + b\sqrt{2}\right)^2 + \left(c + d\sqrt{2}\right)^2 = 7 + 5\sqrt{2}.$$
4. (20 б.)
а) Довести, що сума квадратів відстаней від точки сфери, яка описана навколо куба з ребром x, до вершин куба не залежить від розташування точки на сфері. Чому рівна ця сума?
б) Довести, що сума квадратів відстаней від точки сфери, яка описана навколо правильного тетраедра всі ребра якого рівні x, до вершин тетраедра не залежить від розташування точки на сфері. Чому рівна ця сума?
5. (30 б.) Довести, що:
а) з чотирьох додатних чисел можна вибрати два числа x та y такі, що
$$\sqrt{3}|x - y| < 1 + xy;$$
б) з семи додатних чисел можна вибрати два числа x та y такі, що
$$|x - y| < \left(2 - \sqrt{3}\right)(1 + xy).$$

2004 рік

7 клас

1. (5 б.) Розв'язати
$$\left|\left|4|x|-3\right|-2\right|=3.$$

2. (5 б.) З пункту A в пункт B виїхав велосипедист, а через 15 хвилин слідом за ним виїхав автомобіль (велосипедист та автомобіль рухаються зі сталими швидкостями). Рівно на половині шляху від A до B автомобіль наздогнав велосипедиста. Коли автомобіль прибув в пункт B, велосипедисту залишилось ще проїхати третину шляху. За який час велосипедист подолає шлях від пункту A в пункт B?

3. (10 б.) Дано прямокутний трикутник ABC ($\angle A<45^0, \angle C=90^0$), на сторонах AC та AB вибрані точки D і E відповідно, так що $BD=AD$ та $CB=CE$. Нехай відрізки BD та CE перетинаються в точці O. Довести, що $\angle DOE=90^0$.

4. (10 б.) Три учня, які відвідували заняття математичного кружка, під час перерви вирішили пограти в «слова». Кожен з них записав по 50 різних слів. А потім слова які зустрілися хоча б у двох з цих учнів були викреслені. Після цього у першого учня залишилося 23 слова, у другого – 32 слова, а у третього – 26 слів. Коли учитель математики дізнався про це, він сказав дітям, що принаймні хоча б одне слово було записано всіма трьома учнями. Як вчитель зумів зробити такий висновок?

5. (10 б.) Як у виразі $\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*\frac{3}{4}*\frac{4}{5}*\ldots*\frac{97}{98}*\frac{98}{99}*\frac{99}{100}$, який містить 99 дробів замінити всі зірочка знаками арифметичних операцій так, щоб значення отриманого арифметичного виразу дорівнювало нулю?

6. (15 б.) Петро вибрав три різні цифри a, b, c ($a \neq b, b \neq c, c \neq a$) та записав всілякі різноманітні тризначні натуральні числа, десятинний запис кожного з яких містить всі три вибрані цифри, але не може починатися з нуля. Виявилось, що сума всіх записаних чисел дорівнює 3376. Визначте, які саме цифри було вибрано, та доведіть, що інших варіантів не існує.

7. (15 б.) Дана горизонтальна клітчата смужка розмірами 1×2004. В кожній з п'яти крайніх зліва клітин розташовано по одній фішці. Двоє гравців по черзі беруть одну з фішок та переміщують її на декілька клітин праворуч (перестрибувати через фішки не дозволяється). Програє той, хто не зможе зробити свій хід. Довести, що той гравець, який починає гру, може грати таким чином, щоб забезпечити собі перемогу.

8 клас

1. (5 б.) Побудуйте графік функції $y=\dfrac{5x^2-|x|}{x+|x|}$.
2. (5 б.) Сума тангенса гострого кута і котангенса другого гострого кута прямокутного трикутника рівна 1. обчислити значення тангенса більшого острого кута цього трикутника.
3. (10 б.) Для яких натуральних n число n^4-22n^2-46 ділиться на $n+5$?
4. (10 б.) Розв'язати рівняння $\left(\dfrac{37}{21}x\right)^3=p$, де p – середнє арифметичне чисел $A=\dfrac{158^2+158\cdot185+185^2}{158+185}$ та $A=\dfrac{158^2-158\cdot185+185^2}{185-158}$.
5. (10 б.) Знайти всі такі натуральні числа B, для яких з трьох наступних тверджень два істинні, а два хибні:
   1) $B+41$ є квадратом натурального числа;
   2) $B-21$ ділиться на 10 без остачі;
   3) $B-48$ є квадратом натурального числа.
6. (15 б.) За допомогою циркуля та лінійки поділіть кут 35^0 на 7 рівних частин.
7. (15 б.) В рівнобічному трикутнику ABC з основою AC на боковій стороні BC вибрана точка M, така що $\angle ABM=90^0$ та $AM=2BK$. Знайти кути трикутника ABC.

9 клас

1. (5 б.) Розв'язати рівняння
$$\sqrt{x^5+x^3+x-42}=x\sqrt{2-x}\,.$$
2. (5 б.) На координатній площині задано чотири точки: $A_1(0;0)$, $A_2(0;2)$, $A_3(-2;-2)$, $A_4(4;0)$. Для кожної точки A вказати множину всіх точок площини, для яких вона є найближчою серед трьох інших точок. Відповідь обґрунтувати.
3. (10 б.) Знайти всі такі дійсні числа $x_0<3$, що для деяких натуральних чисел a,b,c число X_0 є більшим коренем рівняння $(a-x)(b-x)=c$.
4. (10 б.) Знайти всі такі натуральні числа n, що в десятковому записі чисел $6n$, $9n$, $13n$ всі цифри від 0 до 9 зустрічаються по одному разу.
5. (10 б.) Деякі сторони клітин шахової дошки пофарбовані в червоний колір, всі інші – в синій колір. Дозволяється обрати деяку клітину дошки та перефарбувати в протилежний колір всі її стороні одночасно. Чи завжди можна декількома такими перефарбуваннями домогтися того, щоб синіми стало менше чверті від загальної кількості сторін клітин?
6. (15 б.) Нехай додатні числа a,b,c та дійсні числа x,y,z такі, що $ax+by+cz=0$. Довести нерівність

$$\left(a+\sqrt{ab}+b\right)xy+\left(b+\sqrt{bc}+c\right)yz+\left(c+\sqrt{ca}+c\right)zx\le 0.$$

7. (15 б.) На дошці намальовано трикутник ABC. Висота AH та бісектриса AL цього трикутника перетинають вписане в трикутник коло в різних точках M та N, P та Q відповідно. Після цього рисунок зітерли, залишив лише точки H, M та Q. Відновити трикутник ABC.

10 клас

1. (5 б.) Нехай α, β, γ – такі гострі кути, що $\cos\alpha = tg\beta$, $\cos\beta = tg\gamma$, $\cos\gamma = tg\alpha$. Довести, що
$$\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$
2. (5 б.) Нехай a – таке дійсне число, що числа a^2+a та a^3+2a є раціональними. Довести що число a також є раціональним.
3. (10 б.) Довести, що не існує таких непарних натуральних чисел a, b та c, що числа ab^3-2003, bc^3+2005, ca^3-2007 є квадратами натуральних чисел.
4. (10 б.) Знайти всі такі дійсні числа x, які не є цілими і при цьому задовольняють рівності
$$x+\frac{2004}{x}=[x]+\frac{2004}{[x]},$$
де $[x]$ – ціла частина числа x, тобто – найбільше ціле число, яке не перевищує x.
5. (10 б.) Нехай в трикутнику ABC точки M та N є серединами сторін BC і AC відповідно. Відомо, що точка перетину висот трикутника ABC співпадає з точкою перетину медіан трикутника AMN. Знайти величину кута ABC.
6. (15 б.) Довести, що якщо $x, y, z > 0$ та $x+y+z=1$, то виконується нерівність
$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge\frac{x^2+y^2+z^2+1}{2}.$$
7. (15 б.) Кожне натуральне число пофарбовано в один з двох кольорів – синій або жовтий, причому чисел кожного з кольорів нескінченно багато. Відомо, що сума будь-яких 2003 попарно різних чисел синього кольору є числом синього кольору, а сума будь-яких 2003 попарно різних чисел жовтого кольору є числом жовтого кольору. Визначити якого кольору буде число 2004, якщо число 1 пофарбовано синім кольором. Обґрунтуйте відповідь.

11 клас

1. (5 б.) Знайти всі значення параметру a, при яких рівняння $\sqrt{2-ax}+2=x$ має тільки один дійсний корінь.

2. (5 б.) Дано трикутник ABC, в якому $\angle B = 90^0$. Серединний перпендикуляр до сторони AB перетинає сторону AC в точці M, а серединний перпендикуляр до сторони AC перетинає продовження сторони AB за вершину B в точці N. Відомо, що відрізки MN та BC рівні та перетинаються під прямим кутом. Знайти величини всіх кутів трикутника ABC (в градусах).

3. (10 б.) Відомо, що $\dfrac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x+y+z)} = \dfrac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x+y+z)} = a$. Довести, що
$$\cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(z+x) = a.$$

4. (10 б.) Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нехай точки E та F є основами перпендикулярів, які опущено з точки A на прямі A_1D та A_1C відповідно, а точки P та Q є основами перпендикулярів, які опущено з точки B_1 на прямі A_1C_1 та A_1C відповідно. Довести, що $\angle EFA = \angle PQB_1$.

5. (10 б.) Довести, що якщо $x, y, z > 0$ та $x+y+z=1$, то виконується нерівність
$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y} \geq \frac{x^2+y^2+z^2+1}{2}.$$

6. (15 б.) Знайти всі такі визначені на множині $(0;+\infty)$ функції f, що для довільного $x>0$ виконується нерівність $f(x)>0$ та при всіх $x>0$ та $y>0$ має місце рівність
$$f\bigl(xf(y)\bigr) + f(x) + f(y) = f(x+y).$$

7. (15 б.) Кожне натуральне число пофарбовано в один з двох кольорів – синій або жовтий, причому чисел кожного з кольорів нескінченно багато. Відомо, що сума будь-яких 2003 попарно різних чисел синього кольору є числом синього кольору, а сума будь-яких 2003 попарно різних чисел жовтого кольору є числом жовтого кольору. Визначити якого кольору буде число 2004, якщо число 1 пофарбовано синім кольором. Обґрунтуйте відповідь.

2005 рік

7 клас

1. (5 б.) Є двоє піскових годинників на 5 і на 7 хвилин. Яйце вариться 11 хвилин. Як можна відміряти цей час за допомогою даних годинників?
2. (5 б.) У республіці пройшли вибори у парламент. Всі, хто голосував за партію «Лимон», полюбляють лимони, а серед виборців, що голосували за інші партії, 90% лимони не люблять. Скільки відсотків голосів набрала партія «Лимон», якщо рівно 46% від тих, що голосували, полюбляють лимони?
3. (10 б.) Доведіть, що $n^2 + 2n + 12$ не ділиться на 121 при всіх цілих n.
4. (10 б.) Чи можна розрізати трьохклітинний куточок на чотири рівні частини?
5. (10 б.) У середині гострого кута AOB взяли точку M. Точки M_1 і M_2 є симетричними точці M (дзеркально розташовані) відносно сторін OA і OB відповідно. Довести, що $\angle M_1OM_2 = 2\angle AOB$.
6. (15 б.) Дідусь, бабуся, тато і мати підійшли вночі до мосту (з одного боку) ы бажають перейти через нього. У них є на усіх один ліхтарик, без якого не можливо й кроку ступити. Міст витримує тільки двох чоловік. Тато може перейти міст за одну хвилину, мати – за 2 хвилини, дідусь – за 5 хвилин, а бабуся – за 10 хвилин. Як їм усім перейти міст за 17 хвилин?
7. (15 б.) Микола відправився за грибами між вісьма і дев'ятьма годинами ранку в момент, коли годинна і хвилинна стрілки його годинника були сполучені. До дому він повернувся між двома ы трьома годинами дня, при цьому стрілки цього годинника були спрямовані в протилежні сторони. Скільки продовжувалася його прогулянка?

8 клас

1. (5 б.) «Довести, що $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = ...$». Яке ціле число в цьому твердженні пропущено?
2. (5 б.) Доведіть, що серед будь-яких 11-ти натуральних чисел знайдуться два, різниця яких ділиться на 10.
3. (10 б.) Числа x, y, z задовольняють нерівностям $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. Доведіть, що величина $t = x^4 + y^4 + z^4 - x^3y - y^3z - z^3x$ також задовольняє нерівність $0 \le t \le 1$.
4. (10 б.) Знайдіть усі цілі числа, що починаються цифрою 1 та такі, що при її перестановці у кінець числа, воно збільшиться утричі.
5. (10 б.) У випуклому шестикутнику $ABCDEF$ точки $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ – середини сторін AB, BC, CD, DE, EF, FA відповідно. M – так точка, що $A_1B_1C_1M$ – паралелограм ($A_1B_1 \parallel C_1M$; $B_1C_1 \parallel A_1M$). Довести, що $D_1E_1F_1M$ також є паралелограмом.

6. (15 б.) Знайдіть всі натуральні x та y, для яких $x^2+255=2^y$.
7. (15 б.) Зголоднілий їжачок знайшов сейф із їжею. Сейф було зачинено кодовим замком, який складається із 100 кнопок із лампочками, що розташовані у квадраті 10×10. При натисканні на будь-яку кнопку, усі лампочки, що стоять із нею в одному рядку (як у горизонтальному, так і у вертикальному) загальним числом 19, змінюють свій стан (починають світитися, або ж гаснуть відповідно). Лише коли усі лампочки почнуть світитися, їжачок може дістатися до їжі. Скільки кнопок повинен натиснути їжак, щоб як найшвидше дістатися їжі?

9 клас

1. (5 б.) «Довести, що $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=...$». Яке ціле число в цьому твердженні пропущено?
2. (5 б.) Розв'яжіть рівняння $x^2+4=4x\cos(xy)$.
3. (10 б.) В трапеції $ABCD$ з основою AD $AB=BC$, $AC=CD$ і $BC+CD=AD$. Знайдіть кути трапеції.
4. (10 б.) Числа x,y,z задовольняють нерівностям $0\le x\le1$, $0\le y\le1$, $0\le z\le1$. Доведіть, що величина $t=x^4+y^4+z^4-x^3y-y^3z-z^3x$ також задовольняє нерівність $0\le t\le1$.
5. (10 б.) Знайдіть усі цілі числа, що починаються цифрою 1 та такі, що при її перестановці у кінець числа, воно збільшиться утричі.
6. (15 б.) У випуклому п'ятикутнику $ABCDE$ площа кожного з трикутників ABC, BCD, CDE, DEA, EAB дорівнює 1. Знайти площу п'ятикутника.
7. (15 б.) Зголоднілий їжачок знайшов сейф із їжею. Сейф було зачинено кодовим замком, який складається із 100 кнопок із лампочками, що розташовані у квадраті 10×10. При натисканні на будь-яку кнопку, усі лампочки, що стоять із нею в одному рядку (як у горизонтальному, так і у вертикальному) загальним числом 19, змінюють свій стан (починають світитися, або ж гаснуть відповідно). Лише коли усі лампочки почнуть світитися, їжачок може дістатися до їжі. Скільки кнопок повинен натиснути їжак, щоб як найшвидше дістатися їжі?

10 клас

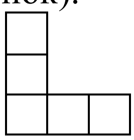
1. (5 б.) Нехай $a^2+b^2=6ab$. Чому може бути рівним $\dfrac{a+b}{a-b}$?
2. (5 б.) Доведіть, що сума тангенсів тупокутного трикутника є від'ємною.
3. (10 б.) Нехай S – площа довільного трикутника зі сторонами a, b і c; γ – кут, протилежний стороні c. Довести, що має місце нерівність
$$\sin\frac{\gamma}{2}<\frac{4S}{(a+b)^2-c^2}.$$

4. (10 б.) Доведіть, що у будь-якому опуклому $2n$-кутнику знайдеться діагональ, що не є паралельною до жодної з його сторін.

5. (10 б.) В трикутнику ABC $BC = 2AC$, а D – така точка на стороні BC, що $\angle DAC = \angle ABC$. Пряма AD перетинає бісектрису зовнішнього кута при вершині C у точці M. Доведіть, що $AM = AB$.
6. (15 б.) Дійсні числа x, y, z (не обов'язково цілі!) є такими, що числа $k = \frac{1+xy}{x-y}$, $l = \frac{1+yz}{y-z}$ і $m = \frac{1+zx}{z-x}$ є цілими. Доведіть, що числа $|k|$, $|l|$, $|m|$ є попарно простими.
7. (15 б.) Нехай P – многочлен із цілими коефіцієнтами. Послідовність $\{a_n\}$ утворюється наступним чином: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = P(a_n)$. Відомо, що $a_{2005} = 0$. Чому може дорівнювати a_{1001}?

11 клас

1. (5 б.) Розв'язати рівняння $\left[\frac{1}{\sin x}\right] + \left[\frac{1}{\cos x}\right] = 0$, де $[p]$ – ціла частина числа p (найбільше ціле число, що не перевищує p).
2. (5 б.) Нехай $a, b > 0$, $a + b = 2$. Доведіть справедливість нерівності
$$a^4b + b^4a \geq 2\left(a^2b + b^2a - 1\right).$$
3. (10 б.) Над планетою, що має форму кулі, літають три супутники. Доведіть, що у будь-який момент часу на поверхні планети є точка, з якої жоден із супутників не видно. Супутники вважаються точеними (розмірами супутників можна нехтувати).
4. (10 б.) Дійсні числа x, y, z (не обов'язково цілі!) є такими, що числа $k = \frac{1+xy}{x-y}$, $l = \frac{1+yz}{y-z}$ і $m = \frac{1+zx}{z-x}$ є цілими. Доведіть, що числа $|k|$, $|l|$, $|m|$ є попарно простими.
5. (10 б.) Радіуси двох кіл відповідно 1 і 3 (лін.од.), відстань між центрами яких дорівнює 10. Знайти геометричне місце серед відрізків, що сполучають точки даних кіл.
6. (15 б.) Яку найменшу кількість клітинок можна вирізати шахової дошки 8×8 так, щоб із залишку не можна було вирізати (вздовж ліній клітинок) жодного V-пентаміно (див. рисунок).



7. (15 б.) Нехай P – многочлен із цілими коефіцієнтами. Послідовність $\{a_n\}$ утворюється наступним чином: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = P(a_n)$. Відомо, що $a_{2005} = 0$. Чому може дорівнювати a_{1001}?

Умови завдань III етапів (обласних) Всеукраїнських олімпіад з математики

2006 рік[4]

7 клас

1. Відновити приклад на множення натуральних чисел, якщо сума цифр першого множника дорівнює сумі цифр другого.

$$\begin{array}{rrrrr} & * & * & * & 1 \\ \times & & & 2 & * \\ \hline * & * & 3 & * & * \\ * & 4 & * & * & * \\ \hline 5 & * & * & * & * \end{array}$$

2. Кілька зошитів коштують 2 грн., а стільки ж олівців - 1 грн. 76 к. Скільки коштує 6 зошитів якщо вартість кожного зошита менша за 50 к.?
3. Чи можна розмістити на площині 6 точок і сполучити їх відрізками, що не перетинаються, так, щоб кожна з них була сполучена рівно з трьома іншими точками?
4. У деякому місті 90% населення говорить українською, а 80% – російською. Який відсоток населення міста говорить обома мовами?
5. Скількома способами із відрізків довжиною 7 см і 12 см можна скласти відрізок довжиною 1м?
6. Футбольні клуби «Шахтар», «Динамо» і «Дніпро» провели міні турнір у два кола, в якому за перемогу зараховувалося 2, за нічию – 1, і за програш – 0 очок. У першому колі «Шахтар» нір азу не програв, «Динамо» не зробило жодної нічиєї, а «Дніпро» ні разу не виграв. У другому колі «Шахтар» жодного разу не виграв, «Динамо» ні разу не програло, «Дніпро» жодного разу не зробив нічиєї. В результаті для визначення переможця довелося провести ще один матч. Як зіграли в другому колі «Шахтар» і «Динамо»?

8 клас

1. Дванадцять осіб несуть 12 хлібин. Кожен чоловік несе по 2 хлібини, жінка – по $\frac{1}{2}$ хлібини, а дитина – по $\frac{1}{4}$ хлібини. Скільки було чоловіків, жінок і дітей окремо?
2. Знайти співвідношення між a, b і c, якщо
$$x+\frac{1}{x}=a,\ y+\frac{1}{y}=b,\ xy+\frac{1}{xy}=c.$$
3. Який з дробів ближчий до одиниці: правильний, чи обернений до нього – неправильний?

[4] Розв’язання кожної задачі оцінюється в 10 балів

4. Чи можна розмістити на площині 6 точок і сполучити їх відрізками, що не перетинаються, так, щоб кожна з них була сполучена рівно з чотирма іншими точками?
5. Чи можна у довільному прямокутнику, площа якого дорівнює $\frac{1}{2005}$ розмістити кілька кругів, що не перетинаються, так, щоб сума їх радіусів дорівнювала 2005?
6. Три сторони опуклого чотирикутника рівні між собою, а кут між його діагоналями дорівнює a. Знайти кут між бісектрисами кутів, що прилягають до четвертої сторони чотирикутника?

9 клас

1. Знайти, при яких натуральних значеннях a і b число $4ab+22a+47b$ ділиться на a^2+7b^2+811.
2. Які цілі значення може набувати дріб $\frac{x^2+x+1}{xy-1}$, якщо x і y – натуральні числа?
3. Довести, що рівняння $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2005}$ не має коренів серед натуральних чисел.
4. Від прямокутника 324×141 мм відрізають кілька квадратів зі стороною 141 мм доти, поки не залишиться прямокутник із стороною, меншою за 141 мм. Потім від цього прямокутника знову відрізають квадрати, довжина сторін яких дорівнює меншій стороні прямокутника. Процес цей повторюють, доки це можливо. Чому дорівнюватиме сторона останнього квадрата?
5. На скільки частин 4 прямі можуть розбити площину?
6. Пряма, паралельна до дотичної, що проходить через вершину вписаного в коло трикутника, перетинає його бічні сторони і відтинає від трикутника чотирикутник, який можна вписати в коло. Довести це.
7. Дано довільний трикутник ABC і точку X поза ним: AM, BN, CQ – медіани трикутника ABC. Доведіть, що площа одного із трикутників XAM, XBN, XCQ дорівнює сумі площ двох інших трикутників.

10 клас

1. Знайти всі функції, які при всіх значеннях x і y задовольняють рівняння $f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy$.
2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-\{x\}}-\sqrt{x-[x]}=\frac{2}{3}$, в якому $[x]$ – ціла, а $\{x\}$ – дробова частини числа x.
3. Квадрат будь-якого простого числа, більшого за три, при діленні на 24 дає остачу, що дорівнює 1. Довести це.

4. Знайти найменше значення функції $y = ax^m + \frac{b}{x^n}$ на множині $x > 0$ ($a > 0$, $b > 0$, m, n – натуральні числа).
5. Довести, що при довільному a існує трикутник зі сторонами $\sqrt{a^2 - a + 1}$, $\sqrt{a^2 + a + 1}$, $\sqrt{4a^2 + 3}$ і площа його не залежить від a.
6. На дошці була зображена трапеція $ABCD$. В ній провели середню лінію EF і перпендикуляр OK з точки перетину її діагоналей на одну із основ трапеції. Потім весь малюнок витерли, залишивши тільки відрізки EF і OK. Як відновити дану трапецію?
7. На скільки частин розбивають простір чотири площини, що проходять через одну точку і ніякі три площини не мають спільних прямих?

11 клас

1. Знайти всі функції f, які задовольняють рівняння
$$f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{x^4 - 1}{x^2}.$$
2. Розв'язати рівняння $\log_7 x \cdot \log_6 x = 4\log_6 x + 3\log_7 x - 12$.
3. Довести тотожність
$$a^2 + ab \cdot \frac{\sin\left(\angle C - \frac{180^\circ}{n}\right)}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} = c^2 + bc \cdot \frac{\sin\left(\angle A - \frac{180^\circ}{n}\right)}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)},$$
де a, b, c – сторони трикутника ABC, $n \in N$, $n \geq 3$.
4. Побудувати графік функції
$$y = \cos\left|\operatorname{tg} x\right|.$$
5. Нехай маємо циркуль і лінійку з цілими поділками. Для яких натуральних n за допомогою цих інструментів можна побудувати відрізок довжиною $\sqrt{n}$, якщо кожний з цих інструментів дозволяється використовувати не більше двох разів.
6. На скільки частин можуть розбивати простір 5 площин, що проходять через одну точку і ніякі три площини не мають спільної прямої?
7. Довести, що у довільному тетраедрі $ABCD$ сума квадратів площ його перерізів MKM_1K_1, MLM_1L_1, LKL_1K_1, де M, L, K, M_1, L_1, K_1 – середини сторін AB, AC, BC, CD, BD, AD відповідно, дорівнює чверті суми квадратів площ усіх його граней.

2007 рік[5]

7 клас

1. В одному магазині ціни зменшили на 10%, а потім ще на 10%. А в іншому магазині ціни знизили на 20%. Що вигідніше для покупця?
2. Що більше 2^{300} чи 3^{200}?
3. Доведіть, що якщо з тризначного числа відняти тризначне число, яке записано тими ж цифрами, що й перше, але в зворотному порядку, то модуль різниці, яку дістали, ділиться на 9 та 11.
4. Розв'яжіть рівняння: $\left|\left|2x-1\right|-4\right|=5$.
5. В кімнаті,що має форму прямокутника, є 10 стільців. Розмістіть їх так, щоб уздовж кожної стіни стояла однакова кількість стільців.

8 клас

1. Спростити вираз: $\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}}$.
2. Розкладіть на множники $(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2$.
3. В трикутнику ABC кут A більше за кут C на 30°. Точка K належить стороні AC, $AB=BK$. Знайти кут KBC.
4. Довести, що сума кубів трьох послідовних цілих чисел ділиться на 9.
5. Декілька футбольних команд проводять турнір в одне коло. Довести, що в будь-яку мить турніру знайдуться дві команди, які зіграли до цієї миті однакову кількість матчів.

9 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{5}{4}p^2x^2-px^2+x^2-2px+1=0$.
2. Нехай $ABCD$ – прямокутник з центром O, точка E належить стороні CD, N – середина BC, а P – точка перетину BE з NO. Відомо, що $PE=OE$. В якому відношенні точка E ділить сторону CD даного прямокутника?
3. Доведіть, що для будь-яких a і b є вірною нерівність
$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\geq(a+b+1)^2.$$
4. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ проведено діагональ AC, а в трикутники ABC і ACD вписано кола. З'ясувалось, що точки дотику цих кіл з відрізком AC співпадають. Нехай E,F,G,H – точки дотику кіл зі сторонами AB, BC, CD і DA відповідно. Доведіть, що точки E,F,G,H належать одному колу.
5. Знайти всі трійки цілих невід'ємних чисел x,y,z, для яких $2^x15^y=7^z+1$.

[5] Розв'язання кожної задачі оцінюється в 10 балів

6. Дано рівнобедрений трикутник ABC, в якому $CA = CB$. Оберемо точку P на тій з двох дуг AC описаного навколо цього трикутника кола, якій не належить вершина B. Нехай D – основа перпендикуляра, опущеного з C на PB. Доведіть, що $PB - PA = 2PD$.
7. У квадраті 5×5 розташували 17 фігурок, які мають форму квадратів 2×2 та займають по чотири клітинки. Доведіть, що існує клітинка даного квадрата, яка накривається не менше, ніж п'ятьма фігурками.

11 клас

1. a – ірраціональне число. Довести, що функція $f(x) = \cos x + \cos(ax)$ не є періодичною.
2. Довести, що трикутник із кутами α, β, γ є рівнобедреним в тому, і лише тому випадку, коли
$$\operatorname{tg}\tfrac{\alpha-\beta}{2} + \operatorname{tg}\tfrac{\beta-\gamma}{2} + \operatorname{tg}\tfrac{\gamma-\alpha}{2} = 0.$$
3. l_a, l_b, l_c – довжини бісектрис кутів A, B і C $\triangle ABC$, а m_a, m_b, m_c – довжини його відповідних медіан. Довести нерівність
$$\frac{l_a}{m_b} + \frac{l_b}{m_c} + \frac{l_c}{m_a} > 1.$$
4. Радіуси описаного та вписаного кіл трикутника дорівнюють R та r відповідно. Знайти відстань між центрами вписаного та описаного кіл.
5. Довести, що кожне ціле число є сумою п'яти кубів цілих чисел.
6. l_a, l_b, l_c – довжини бісектрис кутів A, B і C $\triangle ABC$, а m_a, m_b, m_c – довжини його відповідних медіан; p – півпериметр; R і r – радіуси описаного та вписаного кіл. Довести нерівність
$$l_a^6 + l_b^6 + l_c^6 \le p^4\left(p^2 - 12Rr\right) \le m_a^6 + m_b^6 + m_c^6.$$
7. Знайти всі функції $f(x)$, які при кожних дійсних x та y задовольняють рівність $f\left(x + y^3\right) = f(x) + f^3(y)$.

2008 рік[6]

7 клас

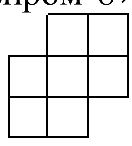
1. Два учня – високий та маленький – вийшли одночасно з одного й того ж будинку в одну школу. В одного з них крок був на 20% коротший, ніж у іншого, але він встигав за той же час робити на 20% більше кроків, ніж інший. Хто з них раніше прийшов до школи?
2. Відомо, що $a+b=5$, $ab=4$. Знайдіть значення виразу a^3+b^3.
3. Знайти всі трійки простих чисел x,y,z, такі, що $19x-yz=1995$.
4. Чи можна розділити 13 аркушів паперу між 6-ма учнями так, щоб при цьому кожний аркуш виявився розрізаним не більше, ніж на три частини (або зовсім не розрізався) та кожний учень отримав одну і ту саму кількість шматочків паперу.
5. Знайти максимальне значення n, для якого число $3\cdot 33\cdot 333\cdot \ldots \cdot \underbrace{33\ldots3}_{55}$ ділиться на 3^n.

8 клас

1. Ціна вхідного квитку складала 20 гривень. Після зниження вхідної плати кількість глядачів збільшилась на 25%, а прибуток збільшився на 12,5%. Скільки став коштувати квиток після зниження ціни?
2. При яких цілих значеннях параметру a рівняння $x\cdot(a-1)^2=(a+4)(a-1)$ має цілі корені?
3. Нехай H – точка перетину висот трикутника ABC. Відомо, що $AB=CH$. Знайти величину кута ACB.
4. Обчислити суму $\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+zx}$, якщо $xyz=1$.
5. На куб із воску сіли спочити декілька бджіл (їх можна вважати точками). При цьому з’ясувалося, що на кожній грані кількість бджіл різна. Знайти найменшу кількість бджіл, які могли спочивати на кубі.

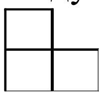
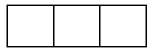
9 клас

1. Нехай $x^2+y^2=1$. Доведіть, що
$$(x-a)^2+(y-b)^2=(1-ax-by)^2+(ay-bx)^2.$$
2. Знайдіть всі пари цілих чисел a і b, які задовольняють нерівність
$$a^2+b^2+3<2a+4b.$$
3. Чи можна розрізати дошку розміром 8×8 на одну фігурку виду



[6] Розв’язання кожної задачі оцінюється в 10 балів

та фігурки виду

$a)$  $b)$ .

4. Трикутник ABC – правильний зі стороною a, D – середина AB, E та F – точки на BC та AC. Середини FE, DE та C належать одній прямій. Середини DE, DF та B належать одній прямій. Доведіть, що $BE = \frac{a}{2}$. Знайдіть AF.
5. Дана система рівнянь $x^4 = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$, $y^4 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}$, $z^4 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$. Знайдіть x^6, y^6, z^6.
6. Нехай $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Довести, що $\frac{a^2}{2} + \frac{b^3}{3} + \frac{c^6}{6} \geq abc$.
7. Кола $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ з центрами A, B, C відповідно дотикаються одне одного зовнішнім чином. Причому X, Y, Z – точки дотику ω_1 і ω_2, ω_1 і ω_3, ω_2 і ω_3 відповідно. Точка M – середина тієї хорди ω_3, продовження якої буде спільною дотичною ω_1 і ω_3 у точці X. Довести, що $\angle CYM = \angle CZM$.

10 клас

1. Довести, що якщо $\left|x - y + \frac{1}{4}\right| \leq x$, то $y \geq 0$ і $\left|x - y - \frac{1}{4}\right| \leq y$.
2. Довжини сторін трикутника є простими числами. Довести, що площа цього трикутника не може бути цілим числом.
3. При яких значеннях параметра p система
$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 = p \\ xyz = p \end{cases}$$
має 3 розв'язки.
4. x, y і z – додатні числа, такі, що $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$. Довести, що при кожному натуральному n виконується нерівність
$$\left(\frac{x}{y}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^n + \left(\frac{z}{x}\right)^n \geq \left(\frac{y}{x}\right)^n + \left(\frac{z}{y}\right)^n + \left(\frac{x}{z}\right)^n.$$
5. a, b, c, x, y, z – числа, що задовольняють умови
$$\begin{cases} a + b + c = x + y + z = ax + by + cz = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$
Знайти найбільше можливе значення числа $a^2 + x^2$.

6. Обчислити добуток
$$\cos\tfrac{\pi}{1001}\cdot\cos\tfrac{2\pi}{1001}\cdot\ldots\cdot\cos\tfrac{500\pi}{1001}.$$
7. ABC – рівнобедрений трикутник ($AB = AC = 1$, $BC = a$). Точки A_1, B_1, C_1 обрані на сторонах BC, CA, AB відповідно, таким чином, що трикутник $A_1B_1C_1$ подібний до трикутника ABC ($A_1B_1 = A_1C_1 = \tfrac{B_1C_1}{a}$) та $AB_1 = x$. P та Q основи перпендикулярів, що опущені з точок B_1 і C_1 на BC. Знайти довжину відрізка PQ.

11 класу

1. Довжини сторін трикутника є простими числами. Довести, що площа цього трикутника не може бути цілим числом.
2. Знайти всі функції f, для яких при будь-яких дійсних x і y виконуються нерівності
$$f(x+y)\le f(x)+f(y)\le x+y.$$
3. x, y і z – додатні числа, такі, що $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$. Довести, що при кожному натуральному n виконується нерівність
$$\left(\frac{x}{y}\right)^n+\left(\frac{y}{z}\right)^n+\left(\frac{z}{x}\right)^n\ge\left(\frac{y}{x}\right)^n+\left(\frac{z}{y}\right)^n+\left(\frac{x}{z}\right)^n.$$
4. a, b, c, x, y, z – числа, що задовольняють умови
$$\begin{cases} a+b+c=x+y+z=ax+by+cz=0 \\ a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$
Знайти найбільше можливе значення числа a^2+x^2.
5. На сфері, що обмежує кулю радіуса 1, лежить центр кулі радіуса r. Знайти площу поверхні тіла, що є спільною частиною цих куль.
6. Знайти найбільше значення виразу $\frac{x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}$, за умов, що x і y – числа з відрізка $[0;1]$.
7. ABC – рівнобедрений трикутник ($AB = AC = 1$, $BC = a$). Точки A_1, B_1, C_1 обрані на сторонах BC, CA, AB відповідно, таким чином, що трикутник $A_1B_1C_1$ подібний до трикутника ABC ($A_1B_1 = A_1C_1 = \tfrac{B_1C_1}{a}$) та $AB_1 = x$. P та Q основи перпендикулярів, що опущені з точок B_1 і C_1 на BC. Знайти довжину відрізка PQ.

Умови завдань III етапів (обласних) Всеукраїнських олімпіад з математики

2009 рік[7]

7 клас

1. Велосипедист проїхав $\frac{5}{7}$ шляху і ще 40 км. Йому залишилось проїхати 0,75 шляху без 118 км. Яку довжину має його шлях?
2. Перша зліва цифра чотирьохзначного числа 7. Якщо цю цифру перенести на останнє місце, то число зменшиться на 864. Знайти чотирьохзначне число.
3. Доведіть, що для любого натурального n, число $n^3+2n^2+6n+27$ – складене.
4. Усі парні натуральні числа від 2 до 2008 написали поряд:

   246810 ... 20062008.

   Знайдіть кількість цифр у здобутому числі. Відповідь обґрунтуйте.
5. У результаті вимірювання сторін і однієї діагоналі чотирикутника отримали числа: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Яка довжина діагоналі?

8 клас

1. На які прості натуральні числа можна скоротити дріб $\frac{7m+45}{5m+30}$?

   Тут m – натуральне число.
2. Знайдіть усі натуральні A такі, що $A+16$ і $A-16$ – повні квадрати.
3. Яке число більше: 3^{669} чи 2^{1003}?
4. Розріжте клітчастий прямокутник 4×12 по лініях сітки на непарну кількість фігурок, серед яких немає прямокутників, у тому числі й квадратів.
5. У трикутника ABC основа $AC=5$, висота $BH=1$ та $AH=3$, $HC=2$. Визначте $\angle ABC$.

9 клас

1. Знайдіть усі натуральні числа A такі, що $A+64$ та $A-64$ – повні квадрати.
2. У трапеції $ABCD$ діагоналі AC та BD перпендикулярні. Бічна сторона AB перпендикулярна основам AD та BC, $AD=a$, $BC=b$. Знайдіть AB.
3. З клітчастого квадрата 8×8 вирізали кутову клітинку. Отриману фігуру розріжте на непарне число ділянок по лініях сітки. Серед ділянок не повинно бути прямокутників, у тому числі й квадратів.
4. Набір з необов'язково попарно різних чисел назвемо «добрим», якщо будь-яке з чисел набору дорівнює або сумі, або добутку двох інших чисел. Знайдіть усі «добрі» набори (набори, які відрізняються тільки порядком чисел, вважаються однаковими).
5. Розв'яжіть нерівність $x^8-x+\frac{3}{4}>0$.

---

[7] Розв'язання кожної задачі оцінюється в 10 балів

10 клас

1. Знайти всі такі x, для яких виконуються нерівності
$$\sin x \le \operatorname{tg} x \le \operatorname{ctg} x \le \cos x.$$
2. x, y та z – додатні числа, добуток яких дорівнює 1. Довести, що виконується нерівність
$$x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$
3. Знайти всі цілі числа n, такі, що число $n^2 - 7n + 16$ – квадрат цілого числа.
4. В квадраті розміром 9×9 клітинок, деякі клітинки було пофарбовано в червоний колір, деякі інші в зелений, а решту залишили непофарбованими. З'ясувалось, що якщо шаховий король пройде з довільної непофарбованої клітинки на довільну іншу непофарбовану клітинку, то він обов'язково пройде і через червону і через зелену клітинки. (*За один хід короля можна поставити на клітинку, що має з даною хоча б одну спільну точку.*) Яка найбільша кількість непофарбованих клітинок могла залишитись в квадраті?
5. ABC – рівнобедрений трикутник ($AC = BC$). Бісектриса кута A, вдвічі довша за бісектрису кута C. Знайдіть кути трикутника.

11 клас

1. Довести, що для довільних додатних x, y та z виконується нерівність
$$(x + y + z)\left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}\right) \ge 9.$$
2. Знайти всі функції f, що визначені при всіх дійсних значеннях змінної, такі, що для довільних x, y та z виконується нерівність:
$$f(x)f(yz) + f(xy) + f(xz) + 1 \le 0.$$
3. Довести, що число $2008^{2009} + 2009^{2008} + 2008 \cdot 2009$ не є квадратом цілого числа.
4. В квадраті розміром 9×9 клітинок, деякі клітинки було пофарбовано в червоний колір, деякі інші в зелений, а решту залишили непофарбованими. З'ясувалось, що якщо шаховий король пройде з довільної непофарбованої клітинки на довільну іншу непофарбовану клітинку, то він обов'язково пройде і через червону і через зелену клітинки. (*За один хід короля можна поставити на клітинку, що має з даною хоча б одну спільну точку.*) Яка найбільша кількість непофарбованих клітинок могла залишитись в квадраті?
5. ABC – рівнобедрений трикутник ($AC = BC$). Бісектриса кута A, вдвічі довша за бісектрису кута C. Знайдіть кути трикутника.

Умови завдань ІІІ етапів (обласних) Всеукраїнських олімпіад з математики

2010 рік[8]

7 клас

1. Розв'язати рівняння: $\dfrac{(1-|x|)(1+4x)}{(2x-2)(4|x|-1)}=0$.
2. Сума двох двозначних чисел дорівнює 147. Обидва числа записали в зворотному порядку і склали. Чому може дорівнювати їх сума? Приведіть всі ймовірні варіанти відповідей.
3. Чайку годують з катера, що пливе по морю. Вниз кидають шматок хліба, чайка за 3 секунди підіймає хліб з поверхні моря, а потім за 12 секунд наздоганяє катер. Увійшовши до затоки, катер зменшив швидкість в два рази. За який час тепер чайка наздожене катер , після того, як вона підійме шматок хліба?
4. Числа a,b,c такі, що вирази $\dfrac{a+b}{c},\dfrac{b+c}{a},\dfrac{c+a}{b}$ приймають однакові значення. Які?
5. На клітчастому папері намалювали прямокутник по лініям сітки. Всередині прямокутника виявилось одиничних відрізків сітки на 90 більше, ніж вузлів. Виявіть розміри прямокутника.

8 клас

1. Усі парні натуральні числа від 2 до 2008 виписали одне за одним: 2,4,6,8,…, 2006,2008. Знайдіть кількість цифр у числі.
2. Знайдіть хоча б один розв'язок ребусу МАТЕ+МАТИ-КА=2009, де МАТЕ і МАТИ – чотирицифрові, а КА – двоцифрове число. Однакові букви позначають однакові цифри, а різні букви позначають різні цифри. Відповідь обґрунтуйте.
3. Алі-Баба та кожен з 40 розбійників знайшли однакову кількість глеків (принаймні по два глеки) та виявили на дні кожного з глеків однакову кількість золотих монет (принаймні по дві монети). Дізнавшись загальну кількість знайдених монет, дружина Алі-Баби одразу здогадалась, що глеків було 287. Скільки монет було у всіх глеках?
4. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x^2=x-y \\ 2xy+y-z=x^2+y^2 \\ (y-z)^2=z-x. \end{cases}$
5. Чи можна розставити у таблиці 5×5 різні натуральні числа таким чином, щоб різниця будь-яких двох сусідніх дорівнювала або 4, або 7? (Числа у таблиці вважаються сусідніми, якщо вони стоять поруч в одному рядку чи в одному стовпці. При обчисленні різниці від більшого числа віднімається менше.)

[8] Розв'язання кожної задачі оцінюється в 10 балів

9 клас

1. Футбольна команда «Шахтар» бере участь у груповому турнірі кубку УЄФА. Група складається з п'яти команд. Кожна команда грає з кожною рівно один раз. За перемогу в матчі нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку – 0 очок. По закінченні групового турніру три команди, які набрали найбільшу кількість очок, виходять до наступного етапу кубка. Яку найменшу кількість очок треба набрати команді «Шахтар», щоб вона напевно вийшла до наступного етапу? Відповідь обґрунтуйте.
2. Розв'яжіть систему рівнянь
$$x^4=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2},\quad y^4=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2},\ z^4=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}.$$
3. Доведіть, що при всіх дійсних $a,b,c>0$ справджується нерівність
$$\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(c+a\right)^2\ge\left(ab+S\right)\left(bc+S\right)\left(ac+S\right).$$
Тут $S=ab+bc+ac$.
4. Знайдіть усі многочлени $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ з цілими коефіцієнтами a,b,c і d такі, що $P(x)$ є кратним 8 при будь-яких натуральних значеннях x. Відповідь обґрунтуйте.
5. На гіпотенузі BC прямокутного трикутника ABC відмічені точки D і E такі, що $AD\perp BC$ та $AD=DE$. На стороні AC відмічена точка F така, що $EF\perp BC$. Знайдіть кут ABF.

10 клас

1. a, b і c – довжини сторін трикутника. Довести, що має місце нерівність
$$\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}<1.$$
2. x, y і z – додатні числа, добуток яких дорівнює 1. Доведіть, що виконується нерівність
$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+3\ge 2\left(x+y+z\right).$$
3. Знайти всі цілі розв'язки $\left(m;n\right)$ рівняння $\left(5+3\sqrt{2}\right)^n=\left(7+4\sqrt{2}\right)^m$.
4. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC дано такі точки C_1, A_1 і B_1 відповідно, що відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точки. Доведіть, що $S_{\vartriangle ABC}\ge 4S_{\vartriangle A_1B_1C_1}$, де S – площа трикутника.
5. Задано нескінченний клітчастий лист паперу, всі клітинки якого є білими. За один хід обирається довільний квадрат або 3×3 клітинки, або 4×4 клітинки та всі клітинку в ньому перефарбовуються (Тобто, всі білі клітинки всередині обраного квадрату становляться чорними, а всі чорні – білими). Чи можна за декілька таких ходів добитися, що б був зафарбованим лише прямокутник 4×6 клітинок.

11 клас

1. a, b, c – сторони трикутника. Довести, що
$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}<\frac{1}{8}.$$
2. x, y, z – додатні числа, добуток яких дорівнює 1. Довести, що виконується нерівність
$$x^2+y^2+z^2+3 \geq x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$
3. Знайти всі розв’язки в цілих числах рівняння
$$\left(4+\sqrt{3}\right)^n=\left(11+6\sqrt{3}\right)^m.$$
4. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC обрано точки C_1, A_1 та B_1 відповідно, таким чином, що відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці. Довести, що
$$S_{\triangle ABC} \geq 4S_{\triangle A_1B_1C_1},$$
де S – площа трикутника.
5. Дано нескінчений клітчатий аркуш паперу, всі клітинки якого білі. За один хід обирається довільний квадрат або 3×3 клітинки, або ж 4×4 клітинки, і всі клітинки в ньому перефарбовуються. (Тобто всі білі клітинки в обраному квадраті стають чорними, а всі чорні – білими). Чи можна за кілька таких ходів досягти того, що буде зафарбовано лише прямокутник 4×6 клітинок.

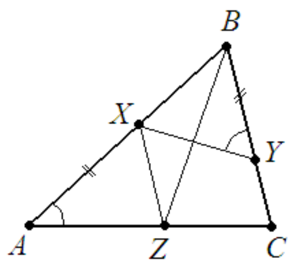
2011 рік[9]

7 клас

1. Ціна автомобіля спочатку зросла на 7%, а потім знизилася на 15 %. На скільки відсотків змінилася ціна автомобіля після двох переоцінок?.
2. Із дошки 8×8 по клітинках вирізали 12 прямокутників 1×2. Чи обов'язково із частини, яка залишилася, можна «по клітинках» вирізати прямокутник 1×3? Відповідь обґрунтуйте.
3. Антон і Рома написали на 1000 картках усі цілі числа від 0 до 999. Після цього розділили усі картки між собою. Кожний із них виклав усі свої картки в ряд і одержав багатоцифрове число. Чи можуть багатоцифрові числа Антона і Роми співпасти? Відповідь обґрунтуйте.
4. Яку найбільшу кількість різних натуральних чисел можна вибрати так, щоб сума будь-яких трьох із них була простим числом? Відповідь обґрунтуйте.
5. На математичну олімпіаду прийшли 125 семикласників, причому кожний був знайомий рівно з 10 семикласниками. Оскільки задачі виявилися складними, то через деякий час олімпіаду покинула деяка кількість семикласників. З'ясувалося, що кожний семикласник, який залишився на олімпіаді, знову мав однакову кількість знайомих серед тих семикласників, що залишилися розв'язувати задачі. Чи були знайомі серед тих семикласників, що пішли з олімпіади? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. При яких натуральних n серед чисел $n, n+1, n+2, ..., n^2$ можна вибрати 4 попарно різних числа a, b, c, d, для яких виконується рівність $ab = cd$. Відповідь обґрунтуйте.
2. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC вибрані точки X, Y і Z так, що $AX = BY$, $XZ \parallel BC$ і при цьому $\angle XYB = \angle BAC$. Доведіть, що BZ – бісектриса кута ABC.



3. Знайти усі пари (x, y) натуральних чисел, які задовольняють рівнянню:
$$9x^2 + 3y = y^2 + 8.$$
4. Двоє гравців по черзі ставлять королів на шахову дошку: перший гравець – білих королів, другий – чорних. Не дозволяється ставити свого короля під бій короля супротивника. Програє той, хто на зможе зробити хід. Хто виграє при правильній грі?

[9] Розв'язання кожної задачі оцінюється в 10 балів

5. У Андрійка є 2010 монет, серед яких щонайменше 1006 монет справжні. Відомо, що всі справжні монети важать однаково, а вага будь-якої фальшивої монети відрізняється від ваги справжньої. При цьому різні фальшиві монети можуть мати різну вагу. Чи зможе Андрійко, за не більше ніж 2007 зважувань, на терезах без гир, знайти хоча б одну справжню монету?

9 клас

1. Доведіть, що якщо для додатних чисел a, b і c справджується рівність
$$x\left(a^2+ab+b^2\right)+y\left(b^2+bc+c^2\right)=\left(x+y\right)\left(c^2+ca+a^2\right),$$
то
$$x\left(b-c\right)=y\left(a-b\right).$$
2. Буратіно на полі чудес посадив дерево, на якому виросло 185 однакових за зовнішнім видом монет. Від мудрої Старої Черепахи Тортіли він дізнався, що серед цих монет рівно 7 є фальшивими, причому всі фальшиві монети важать однаково, усі справжні монети також важать однаково, але фальшива монета легша за справжню. Чи зможе Буратіно за три зважування на шалькових терезах без гір вибрати для Папи Карла 23 справжні монети?
3. У трапеції $ABCD$ точки P і Q є серединами основ AD і BC відповідно ($BC < AD$). Відомо, що $AB = BC$, а точка P лежить на бісектрисі кута ABC. Знайдіть відношення довжин відрізків BD і PQ.
4. Учасник обласної олімпіади юних математиків у своїй роботі стверджує, що він знайшов такі цілі числа m і n, що дріб $\frac{7m+4}{5m+1}$ скоротився на натуральне число $p>1$, а дріб $\frac{7n+4}{5n+1}$ – на натуральне число $q>p$. Чи правий він?
5. Гриць та Олег по черзі (першим робить свій хід Гриць) зафарбовують клітинки таблиці розміром 2011×2011 (розділеної на 2011^2 клітинок розміром 1×1). За один хід гравець може зафарбувати таку ще не зафарбовану клітинку, що в одному рядку з нею не більше одної зафарбованої клітинки. Переможеним вважається той гравець, хто не може зробити свій черговий хід. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу?

10 клас

1. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x^5 - 10y^3 + 9z = 0, \\ y^5 - 10z^3 + 9x = 0, \\ z^5 - 10x^3 + 9y = 0. \end{cases}$
2. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точки E і F обрано на сторонах BC і AB відповідно. Нехай O – точка перетину відрізків AE і CF. Відомо, що в чотирикутники $OFBE$ та $OADC$ можна вписати кола. Доведіть, що
   а) в чотирикутник $ABCD$ також можна вписати коло;
   б) кола, вписані в трикутники ACD і ABC, дотикаються одне до одного.
3. Знайти всі такі пари додатних раціональних чисел (x, y), що числа
$$\{x\} + \left\{\frac{1}{y}\right\} \text{ та } \{y\} + \left\{\frac{1}{x}\right\}$$
будуть цілими. Тут $\{x\} = x - [x]$, а $[x]$ – найбільше ціле число, яке не перевищує x.
4. Нехай x та y – будь-які дійсні числа. Доведіть, що
$$\left(x^2 - x + 1\right)\left(y^2 - y + 1\right) \geq 2(x + y)(x - 1)(y - 1).$$
При яких значеннях x та y досягається знак рівності?
5. Шаховий король обійшов шахову дошку, побувавши на кожному полі по одному разу і повернувся останнім ходом на початкове поле. Доведіть, що при цьому король зробив парну кількість діагональних ходів.

11 клас

1. Розв’язати рівняння $1 + 3\sqrt{3} \cdot 12^x = 3\sqrt{3} \cdot 27^x - 64^x$.
2. Для довільних дійсних чисел x, y, z, що належать числовому проміжку $[0, 1]$, доведіть нерівність
$$\left(x^4 + y^4 + z^4\right) + \left(x^5 + y^5 + z^5\right) + (x - y)^6 + (y - z)^6 + (z - x)^6 \leq 6.$$
3. Дано рівнобедрений трикутник ABC $(AC = BC)$, BM – його медіана. На цій медіані відмітили точку N так, що $\angle BAN = \angle CBM$. Доведіть, що бісектриса кута CNM перпендикулярна прямій AN.
4. Чи існує опуклий многогранник, у якого:
   а) немає трьох граней з однаковою кількістю ребер;
   б) всі грані мають різну кількість ребер?
5. Знайти дроби $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}$ і $\dfrac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$, якщо числа α, β і γ вибрані так, що обидва дроби додатні і один з них втричі більший за другого.

2012 рік[10]

7 клас

1. Обчисліть без калькулятора:

$$\frac{2012}{2012201220122012^2-2012201220122011\cdot 2012201220122013}.$$

2. Доведіть, що
$$\left(a+b\right)^2-\left(c+d\right)^2+\left(a+c\right)^2-\left(b+d\right)^2=2\left(a-b\right)\left(a+b+c+d\right).$$
3. На сторонах шестикутника записаного по одному числу, а у кожній його вершині – число, яке дорівнює сумі двох чисел на сторонах, що виходять з вершини. Після цього всі числа на сторонах і в одній з вершин стерли. Чи можна відновити стерте число у вершині? Відповідь обґрунтуйте.
4. Знайдіть найменше натуральне число, більше від одиниці, яке ділиться на 2. 3, 5, 7 та при ділені на 11 дає в залишку 1.
5. В клітинках 4×4 розставлені числа, як показано на рис. 1. На кожному кроці дозволяється взяти п’ять клітинок, що утворюють фігурку, зображену на рис. 2, і додати до чисел, які стоять у цих клітинках по одиниці (фігурку можна повертати і перевертати). Чи можна, виконавши деяку кількість таких кроків, зробити всі числа в таблиці рівними? Відповідь обґрунтуйте.

2	0	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	2

Рис. 1

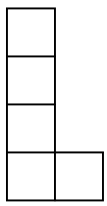


Рис. 2

8 клас

1. Знайдіть всі цілі числа p, для яких рівняння $x^2+px+2011=0$ має цілий корінь.
2. Гриб вважаємо поганим, якщо у ньому більше, ніж 6 хробаків. Хробака назвемо голодним, якщо він з’їв не більше $1/7$ гриба. П’ята частина всіх грибів у лісі погана. Доведіть, що голодних хробаків не менше, ніж $1/30$ від всіх хробаків.
3. Чи можна не більше, ніж за 99 зважувань на терезах без гірок знайти найлегшу і найважчу монети серед 67 монет, будь-які дві з яких мають різну вагу? Відповідь обґрунтуйте.
4. Доведіть, що пряма, яка проходить через середину сторони трикутника і є паралельною до бісектриси протилежного кута, розбиває цей трикутник на два многокутники однакового периметра.

[10] Розв’язання кожної задачі оцінюється в 10 балів

5. У клітинках розміром 8×8 записані попарно різні натуральні числа, кожне з яких є простим або добутком двох простих чисел. Відомо, що для будь-якого числа a з таблиці в тому самому рядку або в тому самому стовпчику існує число, яке не є взаємно простим з a. Знайдіть найбільшу можливу кількість простих чисел в таблиці.

9 клас

1. Цілі числа a, b, c задовольняють умову $ab+bc=1$. Доведіть, що число $A=\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)$ є повним квадратом деякого натурального числа.
2. Петро і Дмитро виїхали опівдні з міста A до міста B на велосипедах. Одночасно з B до A на велосипеді виїхав Юрко. Усі вони їдуть зі сталими, але різними швидкостями. О другій годині дня Дмитро був рівно посередині між Петром і Дмитром. О котрій годині Петро був рівно посередині між Дмитром і Юрком, якщо відомо, що цей момент усі троє були ще у дорозі? Відповідь обґрунтуйте. (У цій задачі мається на увазі, що хлопчики, доїхавши до пунктів A і B відповідно, не припиняють рухатись та їдуть далі).
3. Дано вписаний чотирикутник $ABCD$. Нехай P – середина дуги AD кола, описаного навколо цього чотирикутника, яка не містить точок B і C, M – точка перетину відрізка AC і BP, а N – точка перетину відрізка BD і CP. Відомо, що $MP=NP$. Доведіть, що прямі BC та AD паралельні.
4. Чи існує опуклий 2012–кутник, в якого всі кути дорівнюють цілому числу градусів? Відповідь обґрунтуйте.
5. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел x, y і z має місце нерівність $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}\geq\dfrac{x+y+z}{2}$.

10 клас

1. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$
2. a, b, c – сторони трикутника. x і y – додатні числа, такі, що $(x-1)(y-1)\geq 1$. Доведіть, що $a^2x+b^2y\geq c^2$.
3. Знайти всі пари натуральних чисел (m, n), такі, що $n^m\cdot m!=m^n\cdot n!$ (і довести, що інших не існує).
4. Навколо гострокутного трикутника ABC описано коло. Висоти трикутника з вершини A та C перетинають коло в точках E та F відповідно. D – довільна точка на (меншій) дузі AC, K – точка перетину AB і DF, L – точка перетину BC і DE. Довести. Що прямі KL, AE і CF перетинаються в одній точці.
5. n – ціле число. $m=n^2+2011$ – 45-цифрове число, в запису якого немає нулів. Довести, що в числі m можна закреслити декілька цифр (але не всі), так що отримане в результаті число буде ділитись на 273.

Умови завдань III етапів (обласних) Всеукраїнських олімпіад з математики

11 клас

1. Розв’язати рівняння $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.
2. Чи існує опуклий 13–кутник, який можна розрізати на квадрати та рівносторонні трикутники?
3. Навколо гострокутного трикутника ABC описано коло. Висоти трикутника з вершин A та C перетинають коло в точках E та F відповідно. D – довільна точка на (меншій) дузі AC, K – точка перетину AB і DF, L – точка перетину BC і DE. Довести, що прямі KL, AE і CF перетинаються в одній точці.
4. Які значення може приймати x, y, z такі, що $x+y+z=3$ і $x^2+y^2+z^2=7$.
5. Додатні числа x, y, z такі, що: $x^2+xy+\frac{y^2}{3}=10$, $\frac{y^2}{3}+z^2=5$, $z^2+zx+x^2=13$. Які значення може набувати вираз $xy+2yz+3zx$?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Апостолова Г.В., Перші зустрічі з параметрами. – К.: Факт, **2004**.
2. Апостолова Г.В., Хитромудрий модуль. – К.: Факт, **2006**.
3. Апостолова Г.В., Ясінський В.В., Антьє і мантиса числа. – К.: Факт, **2006**.
4. Бардушкин В.В., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А., Фадеичева Т.П., Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах. Факультативный курс. – М.: МГИЭТ (ТУ), **2003**. – 224 с.
5. Березина Л. Ю., Графы и их применение: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, **1979**. – 143 с.
6. Бродский Я.С, Слипенко А.К., Функциональные уравнения. – К.: Вища школа. Головное изд–во, **1983**. – 96 с.
7. Виленкин Н. Я., Индукция. Комбинаторика: Пособие для учителей. - М.: Просвещение, **1976**. – 48 с.
8. Галкин Е. В., Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учебное пособие для учащихся 7–11 кл. – Челябинск: Взгляд, **2005**. – 271 с.
9. Германович П.Ю., Сборник задач по математике на сообразительность: Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, **1960**. – 224с.
10. Голубев В.И., Решение сложных и нестандартных задач по математике. – М: ИЛЕКСА, **2007**. – 252 с.
11. Головина Л. И., Яглом И. М., Индукция в геометрии. – М., Физматгиз, **1961**. – 101 с.
12. Гончарова І. В., Скафа О.І., Евристики в геометрії: факультативний курс: Книга для вчителя. – Х.: Основа, **2004**.
13. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С., Задачи с параметрами. – К.: РИА «Текст»; МП «ОКО», **1992**. – 290 с.
14. Дзигіна Л. Б., Програма підготовки учнів до участі в математичних олімпіадах. Математика в школах України: Науково–методичний журнал. – Основа, **2009**. – **№ 16/18.** – С. 76–89.
15. Екимова М. А., Кукин Г. П., Задачи на разрезание. - М.: МЦНМО, **2002**. – 122 с.
16. Канель–Белов А. Я., Ковальджи А. К., Как решают нестандартные задачи. Изд. 4–е, испр./ Под редакцией В. О. Бугаенко. - М.: МЦНМО, **2008**. – 96с.
17. Козко А. И., Чирский В. Г., Задачи с параметром и другие сложные задачи. – М.: МЦНМО, **2007**. – 296с.
18. Линдгрен Г., Занимательные задачи на разрезание. Пер. с англ. Ю. Н. Сударева. Под ред. и с послесл.И, М. Яглома. - М., Мир, **1977**. - 256 с.
19. Летчиков А. В., Принцип Дирихле. Задачи с указаниями и решениями. – Издательство: Удмуртского университета, **1992**. – 108 с.
20. Ліпчевський Л. В., Остапчук У. В., Розв’язування нерівностей. Нестандартні способи доведення нерівностей: Навчально – методичний посібник. – Біла Церква, КОІПОПК, **2004**.
21. Мельников О. И., Занимательные задачи по теории графов. – Минск: ТетраСистемс, **2001**. – 144 с.
22. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С., Алгебра: Підручник для 8–х класів з поглибленим вивченням математики. – Х.: Гімназія, **2008**.
23. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С., Геометрія: Підручник для 8–х класів з поглибленим вивченням математики. – Х.: Гімназія, **2008**.

Рекомендована література

24. Петраков И. С., Математические олимпиады школьников: Пособие для учителей. - М.: Просвещение, **1982**. – 96 с.
25. Прасолов В. В., Задачи по планиметрии, в 2 ч. – М.: Наука, **1991**.
26. Репета В. К., Клешня Н. О., Коробова М. В., Репета Л. А., Задачі з параметрами. – К.: Вища школа, **2006**.
27. Седракян Н. М., Авоян А. М., Неравенства. Методы доказательства / Пер. с арм. Г. В. Григоряна. – М.: ФИЗМАТЛИТ, **2002**. – 256 с.
28. Шаповалов А. В., Принцип узких мест. – М.: МЦНМО, **2006**. – 24 с.
29. Шень А., Игры и стратегии с точки зрения математики. – М.: МЦНМО, **2007**. – 40 с.
30. Шень А., Математическая индукция. – 3–е изд., дополн. – М.: МЦНМО, **2007**. – 32 с.
31. Ясінський В., Теорія лишків та її застосування до розв'язування олімпіадних задач. - **№ 1/2**. - Математика в школі: Науково–методичний журнал, **2009.** – С. 35–40.
32. Ясінський В., Наконечна Л., Принцип Штурма та його використання під час розв'язування олімпіадних екстремальних задач. - **№ 9.** - Математика в школі: Науково–методичний журнал, **2009.** – С. 33–40.
33. Ясінський В. А., Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції. – Х.: Основа, **2005**.

Математичні олімпіади і турніри в Україні

34. Вышенский В. А., Карташев Н. В., Михайловский В. И., Ядренко М. И., Сборник задач киевских математических олимпиад. - Киев, **1984**. – 240 с.
35. Вишенський В. А., Карташов М. В., Київські математичні олімпіади 1984–1993 рр.: Збірник задач. – К.: Либідь, **1993**. – 144с.
36. Вишенський В. А., Ганюшкін О. Г., Українські математичні олімпіади: Довідник. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с.
37. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Математичні олімпіади школярів України. 1991–2000. – К.: Техніка, **2003**. – 541 с.
38. Федак І. В., Готуємося до олімпіади з математики: Посібник для ЗНЗ. – Чернівці, **2003**.
39. Басанько А. М., Романенко А. О., За лаштунками підручника з математики: Збірник розвиваючих задач для учнів 5 – 7 класів. – Тернопіль: Підручники і посібники, **2004**.
40. Коваль Т. В., 400 задач з математичних олімпіад. 8–11 класи. – Тернопіль: Мандрівець, **2004.** – 80 с.
41. Лейфура В. М., Змагання юних математиків України. 2003 рік. – Х.: Основа, **2004**.
42. Ясінський В. А., Олімпіадні задачі. Випуск 1: Навчальний посібник. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, **2004.** – 40 с.
43. Довбыш Р. И., Потемкина Л. Л., Трегуб Н. Л., Лиманский В. В., Оридорога Л. Л., Кулеско Н. А., Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями. – Донецк: ООО ПКФ «БАО», **2005**. – 336 с.
44. Лось В. М., Тихієнко В. П., Математика: навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач: Навч. посібник. – К.: Кондор, **2005** – 312 с.
45. Сарана О. А., Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. – К.: А.С.К., **2005**. – 344 с.
46. Ясінський В. А., Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язання. –Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, **2005.** – 208 с.
47. Ясінський В. А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад: методический материал / В. А. Ясінський. – Х.: Основа, **2006**. – (Б–ка ж–лу «Математика в школах України»)
48. Готуємось до олімпіади з математики/ Упорядн. А. Б. Веліховська, О. В. Гримайло. – Х.: Основа, **2007**. – 160 с. – (Б–ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 2 (50)).

49. Вороний О. М., Готуємось до олімпіади з математики. Книга 1. – Х.: Основа, **2008**. – 128 с. – (Б–ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 5 (65)).
50. Вороний О. М., Готуємось до олімпіади з математики. Книга 2. – Х.: Основа, **2008**. – 141, [3] с. – (Б–ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 6 (66)).
51. Анікушин А. В., Арман А. Р., Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2006–2007. – К.: Літера, **2008** – 135 с.
52. Анікушин А. В., Арман А. Р., Математичні олімпіадні змагання школярів. 2006–2007. – К.: Літера, **2008** – 224 с.
53. Анікушин А. В., Арман А. Р., За ред. Рубльова Б. В. Всеукраїнські математичні бої – 2009. – Дніпропетровськ: Інновація, **2010** – 96 с.
54. Анікушин А. В., Арман А. Р., За ред. Рубльова Б. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України 2007–2008 та 2008 – 2009. – Львів: Каменяр, **2010** – 552 с.

Математичні олімпіади і турніри в Росії

55. Агаханов Н. Х., Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006. Окружной и финальный этапы. – М.: МЦНМО, **2007**. – 468 с.
56. Агаханов Н. Х., Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1 / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.; под общ. ред. С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. – М.: Просвещение, **2008**. – 192 с.
57. Агаханов Н. Х., Математика. Областные олимпиады. 8–11 классы / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.]. – М. : Просвещение, **2010**. – 239с.
58. Агаханов Н. Х., Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2 / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский; [под общ. ред. С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. – М.: Просвещение, **2009**. – 159 с.
59. Агаханов Н. Х., Математика. Районные олимпиады. 6–11 классы / Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. – М.: Просвещение, **2010**. – 192 с.
60. Агаханов Н. Х., Математика. Международные олимпиады / Н.Х. Агаханов, П. А. Кожевников, Д. А. Терешин. – М.: Просвещение, **2010**. – 127 с.
61. Балаян Э. Н., 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Э. Н. Балаян. – 3–е изд. – Ростов н/Д: Феникс, **2008**. – 364, [1] с.: ил. – (Библиотека учителя).
62. Баранова Т. А., Блинков А. Д., Кочетков К. П., Потапова М. Г., Семёнов А. В., Весенний Турнир Архимеда. Олимпиада для 5–6 классов. Задания с решениями, технология проведения. – М.: МЦНМО, **2003**. – 128 с.
63. Болтянский В. Г., Леман А. А. Сборник задач московских математических олимпиад. – М., Просвещение, **1965**. - 384 с.
64. Бончковский Р. Н. Московские математические олимпиады 1935 и 1936 годов. – ОНТИ НКТП СССР, **1936**. - 82 с.
65. Вавилов В. В., Задачи отборочных математических олимпиад. – М.: МГУ, **1992**. – 61 с.
66. Галкин Е. В., Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учебное пособие для учащихся 7–11 кл. – Челябинск: Взгляд, **2004**. – 448 с.
67. Гальперин Г. А., Толпыго А. К., Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, **1986**. – 303с.
68. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В., Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, **1994**. – 272 с.
69. Горбачев Н. В., Сборник олимпиадных задач по математике, М.: МЦНМО, **2005**. – 560 с.
70. Егоров А. А., Раббот Ж. М. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика. – М.: Бюро Квантум, **2006**. – (Библиотечка «Квант»)

Рекомендована література

71. Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями): Пособие для учителей 5–8 классов. Под редакцией К. П. Сикорского, изд. 2–е, переработ. – М., Просвещение, **1971**. – 304 с.
72. Математика в задачах: Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / Под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова. – М.: МЦНМО, **2009**. – 488 с.
73. Московские математические регаты / Сост. А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц. – М.: МЦНМО, **2007**. – 360 с.
74. Олимпиада «Ломоносов» по математике (2005–2008). — М.: Издательство ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ, **2008**. – 48 с.
75. Федоров Р. М., Канель–Белов А. Я., Ковальджи А. К., Ященко И. В., Московские математические олимпиады 1993—2005 г./ Под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, **2006**. – 456 с.
76. Севрюков П. Ф., Подготовка к решению олимпиадных задач по математике / – Изд. 2–е. – М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, **2009**. – 112 с.
77. Спивак А. В., Тысяча и одна задача по математике. - М.: Просвещение, **2002.** – 208 с.
78. Фомин А. А., Кузнецова Г. М. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады. – М.: Дрофа, **2006**. – 159 с.
79. Фомин Д. В., Санкт–Петербургские математические олимпиады. – СПб.: Политехника, **1994**. - 309 с.
80. Ященко И. В., Приглашение на математический праздник. – М.: МЦНМО, **2005**. – 104 с.
81. Олимпиадные задания по математике. 9–11 классы: решение олимпиадных задач повышенной сложности / сост. В. А. Шеховцов. – Волгоград: Учитель, **2009**. – 99 с.

Математичні олімпіади за часів СРСР

82. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренок Ю. В., Математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение: Учеб. лит., **1997**. – 208 с.
83. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, **1975**. – 112 с.
84. Бугулов Е. А., Толасов Б. А., Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам. – Орджоникидзе, **1962**. – 226 с.
85. Васильев Н. Б., Егоров А. А., Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков. – М.: Учпедгиз, **1963**. – 53 с.
86. Васильев Н. Б., Гуттенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л., Заочные математические олимпиады. – 2–е изд. – М.: Наука, **1987**. – 176 с.
87. Васильев Н. Б., Егоров А. А., Задачи всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, **1988**. – 288 с.
88. Петраков И. С., Математические олимпиады школьников: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, **1982**. – 96 с.
89. Ю. М. Рябухин, В. П. Солтан, Б. И. Чиник, Кишиневские математические олимпиады. – Кишинев: Штиинца, **1983**. - 76 с.
90. Савин А. П., Физико-математические олимпиады: Сборник. - М.: Знание, **1977**. – 160 с.
91. Шустеф Ф. М., Фельдман А. М., Гуревич В. Ю., Сборник олимпиадных задач по математике. Под ред. Ф.М. Шустеф. - Минск: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения БССР, **1962**. - 84 с.

Міжнародні та закордонні математичні олімпіади

92. Берник В. И., Жук И. К., Мельников О. В., Сборник олимпиадных задач по математике. – Мн.: Нар. асвета, **1980**. – 144 с.
93. Васильев Н. Б., Егоров А. А., Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, **1988**. – 288 с.
94. Конягин С. В., Тоноян Г. А., Шарыгин И. Ф., Зарубежные математические олимпиады / Под ред. И. Н Сергеева. – М.: Наука. Гл. ред. физ.–мат. лит., **1987**. – (Б–ка мат. кружка). – 416 с.
95. Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я., Венгерские математические олимпиады. Пер. с венг, Ю. А. Данилова. Под ред. и с предисл. В. М. Алексеева. М.: Мир, **1976**. – 543 с.
96. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Львів: Євро світ, **1999**. – 128 с.
97. Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А., Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги: Пособие для учащихся. – 4–е изд., испр. и доп. – М.: Просвещение, **1976**. – 288 с.
98. Страшевич С., Бровкин Е., Польские математические олимпиады. Предисл, А. Пелчинского и А. Шинцеля. Пер. с польск. Ю. А. Данилова под ред, В.М. Алексеева. - М.: Мир, **1978**. - 338 с.
99. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады / Сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. – М.: Дрофа, **1998**. – 160 с.

Internet ресурси

1. http://matholymp.org.ua/ – **Київські олімпіади з математики** (сайт київських та всеукраїнських олімпіад та турнірів з математики, де можна знайти тексти завдань, результати та умови проведення математичних змагань, що проходили в Україні протягом останніх років);
2. http://kvant.mirror1.mccme.ru/ – **Фізико–математичний журнал «Квант»** (завдання різних математичних олімпіад за 1971–2002рр);
3. http://www.imo-official.org – **Сайт міжнародних олімпіад з математики**.
4. http://olimpiada.ru/ – Олимпиады для школьников;
5. math.rusolymp.ru/ – Всероссийская олимпиада по математике;
6. http://mathkang.ru/ – Российская страница международного математического конкурса «Кенгуру»;
7. http://www.kangaroo.com.ua/index.php – Українська сторінка міжнародного конкурсу «Кенгуру»;
8. http://olympiads.mccme.ru/mmo/ – Московская математическая олимпиада школьников;
9. http://www.pdmi.ras.ru/~olymp/ – Санкт–Петербургские математические олимпиады;
10. http://www.turgor.ru/ – Турнир городов Международная математическая олимпиада для школьников;
11. http://www.mccme.ru/ – Сайт Московского Центра Непрерывного Математического Образования;
12. http://zaba.ru/, http://problems.ru/ – Задачная база олимпиадных задач (декілька тисяч олімпіадних задач російських і міжнародних математичних змагань).

ВИПУСКИ СЕРІЇ:
«Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям...»

№, рік	Назва	Автори
№ 1, 2008	ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2007	Беседін Б.Б., Бірюкова Г.М., Ганзера Г.О., Кадубовська В.М., Кадубовський О.А., Плесканьова Л.Г., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.
№ 2, 2009	ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2008	Беседін Б.Б., Ганзера Г.О., Кадубовський О.А., Плесканьова Л.Г., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.
№ 3, 2009	Моделювання сучасного уроку математики в школі	Н.І. Труш, Б.Б. Беседін, Г.М. Бірюкова, Л.Г. Плесканьова.
№ 4, 2009	Олімпіадні задачі з інформатики: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з інформатики 2007, 2008	В.Є. Величко, М.М. Рубан, В.П. Батуніна, С.Є. Устінов
№ 5, 2010	ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2009	Кадубовський О.А., Беседін Б.Б., Ганзера Г.О., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.
№ 6, 2010	Олімпіадні задачі з інформатики: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з інформатики 2009	В.Є. Величко, М.М. Рубан, Є.М. Пірус, С.Є. Устінов
№ 7, 2010	Педагогічна практика студентів: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних вузів	Н.І.Труш, Б.Б.Беседін, Р.В.Олійник, В.М.Рибєнцев, О.М.Сипченко. В.П.Саврасов, В.В.Волков.
№ 8, 2011	ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2010 р.	Беседін Б.Б., Кадубовський О.А., Кадубовська В.М., Сьомкін В.С., Труш Н.І., Чуйко О.В.
№ 9, 2011	ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ З ІНФОРМАТИКИ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з інформатики – 2010 р.	Рубан М.М., Устінов С.Є.

Навчальне видання

Беседін Борис Борисович, **Кадубовський** Олександр Анатолійович, **Кадубовська** Валентина Миколаївна, **Сьомкін** Володимир Семенович, **Труш** Неля Іванівна, **Чуйко** Олена Вікторівна, **Рубан** Микола Миколайович

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2011, Випуск 10

Навчальний посібник

для студентів фізико-математичних спеціальностей та вчителів математики

Видавничий центр «Маторін»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДЦ №74, видане Державним комітетом інформаційної політики, телебачення та радіомовлення України від 10.02.2004 р.

Підписано до друку 05.02.2011.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 3,5.
Зам. №   . Тираж 150 прим.

84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс (06262) 3-20-99; тел. (0626) 66-53-56