МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ — 2015

6 – 11 класи

Рекомендовано вченою радою

ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»

як навчальний посібник

для факультативних занять з математики

Слов'янськ — 2016

УДК 51 (075.3)
ББК 22.1 я 721
О-543

Олімпіадні задачі: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — 2015 : навчальний посібник / О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін, О. В. Чуйко, С. І. Воробйова. — Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», 2016. — 100 с. — (Викладачі ДДПУ — учням, студентам, вчителям, вип. 14).

Адресовано вчителям та викладачам математики, як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням ЗОШ та студентам математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ.

РЕКОМЕНДОВАНО
вченою радою Державного вищого навчального закладу
«Донбаський державний педагогічний університет»,
Протокол №6 від 28.01.2016 р.

Рецензенти:

кандидат фізико-математичних наук **В.Є. ВЕЛИЧКО**,
Донбаський державний педагогічний університет,
доцент кафедри алгебри

вчитель математики вищої категорії **І.Г. ВОЛОШИНА**,
Донецький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти, методист відділу математики.

Відповідальний за випуск:

кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри геометрії та методики викладання математики О.А. Кадубовський

Зміст

ВІД АВТОРІВ

«Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!.»

Д. Пойа[1]

Даний посібник є чотирнадцятим випуском серії «Викладачі ДДПУ — учням, студентам, вчителям» заснованої у 2008 році. Посібник містить розв'язання задач II етапу (районного, міського) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, який проводився 05 грудня 2015 року відповідно до наказу МОН України від 07.09.2015 за №915 «Про проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів у 2015/2016 навчальному році» та наказу Департаменту освіти і науки Донецької облдержадміністрації за №298 від 23.10.2015 «Про проведення II етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад у 2015-2016 навчальному році».

Як і в попередніх випусках для більшості задач олімпіади пропонується кілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого із запропонованих методів. Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в певному розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головна мета авторів посібника — «донести» до вчителів і учнів якомога більше корисних математичних ідей і принципів та показати їх застосування.

[1] Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 452 с.

Нагадаємо, що принципами в математиці називають деякі прості, майже очевидні, твердження, аксіоми або методи, які використовуються в доведеннях математичних теорем. Дуже часто учні зустрічаються з ними при розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Перш за все учні, які беруть участь в олімпіадах, повинні володіти значною кількістю принципів. Нажаль шкільна програма не передбачає знайомства з більшістю із них. З основними математичними принципами можна ознайомитись у наведеній літературі, зокрема в [13][2].

У посібнику до окремих задач наводяться «доповнення», сенс яких полягає:

— у формулюванні двоїстої або схожої задачі,

— або ж в узагальненні запропонованої задачі.

На думку авторів такі доповнення повинні активізувати і зацікавити учнів при підготовці до майбутніх олімпіад.

Колектив авторів посібника та керівництво фізико-математичного факультету державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет» висловлює щиру подяку всім вчителям міста Слов'янськ, які беруть участь в організації та проведенні як учнівських олімпіад з математики, так і семінарів, присвячених аналізу їх результатів.

Маємо надію, що представлений посібник буде корисним керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням, стане для багатьох з них поштовхом до більш змістовних міркувань і буде спонукати до систематичного ознайомлення з тим чи іншим розділом математики.

Вчіться творчому пошуку в процесі розв'язування задач!

Із найщирішими побажаннями, викладачі кафедри геометрії та методики викладання математики фізико-математичного факультету Державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет».

31.12.2015

[2]Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2005. – 344с.

ЧАСТИНА I.
УМОВИ ЗАДАЧ

6 клас

1. (*15 балів*) Учень розв'язав приклад на чернетці, а потім переписав розв'язання у зошит, але забув поставити дужки. У нього вийшло:

   $$6 \cdot 8 + 20 : 4 - 2 = 40.$$

   Розставте забуті дужки.
2. (*15 балів*) Знайти найменше натуральне число, що не є розв'язком нерівності

   $$6x < 2015.$$

3. (*20 балів*) Одна сторона трикутника дорівнює 20 см, друга сторона становить 80% від першої, а третя — 75% від суми перших двох. Знайти периметр трикутника.
4. (*20 балів*) Знайдіть суму непарних натуральних чисел від 1 до 99.
5. (*30 балів*) Сім гномів зібрали 29 грибів, причому жоден не приніс порожнього кошика. Довести, що хоча б двоє гномів зібрали однакову кількість грибів, якщо ніхто більше 7 грибів не знайшов.

7 клас

1. (*15 балів*) Відрізок AB, довжина якого 50 см, поділений трьома точками M, N, P на чотири нерівні частини. Відстань між серединами крайніх відрізків AM і PB становить 30 см. Обчисліть відстань між серединами відрізків MN і NP.
2. (*15 балів*) Як розрізати квадрат зі стороною 4 см на прямокутники, сума периметрів яких становить 25 см?

3. (*20 балів*) У мішку знаходяться кульки трьох кольорів — чорного, білого і синього. Яку найменшу кількість кульок треба витягнути з мішка, щоб серед них гарантовано було 5 кульок одного кольору?
4. (*20 балів*) При яких натуральних значеннях параметра a рівняння
$$ax = a + x + 5$$
має парні корені?
5. (*30 балів*) Вся площина розфарбована в чотири кольори. Чи обов'язково знайдеться пряма, яка містить принаймні три точки різного кольору?

8 клас

1. (*15 балів*) Доведіть, що вираз
$$(a + b)(a + b - 14) + 49$$
набуває невід'ємних значень при будь яких a і b.
2. (*15 балів*) Скільки води треба додати до 600 грамів 40 відсоткового розчину солі, щоб отримати 12 відсотковий розчин солі?
3. (*20 балів*) В трикутнику ABC точка K є серединою медіани BM, а промінь AK перетинає сторону BC у точці L. Знайти відношення $BL : LC$.
4. (*20 балів*) При яких значеннях параметра a рівняння
$$|2|x| - 3| = a$$
має чотири корені?
5. (*30 балів*) На площині дано шість точок загального положення (жодні три з них не лежать на одній прямій). Кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього кольору. Довести, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають один колір.

9 клас

1. (*15 балів*) Розглядають функції виду $y = x^2 + ax + b$, $a + b = 2015$. Доведіть, що графіки всіх таких функцій мають спільну точку.
2. (*15 балів*) З'ясувати вид трикутника, для якого медіана вдвічі менша за відповідну сторону. Відповідь обґрунтуйте.
3. (*20 балів*) Квадрат гіпотенузи у вісім разів більший за квадрат висоти, опущеної з вершини прямого кута. Знайти гострі кути прямокутного трикутника.
4. (*20 балів*) При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(x^2 + (2a-1)x - 2a\right)\left(x^2 + (1-a)x - a\right) = 0$$

має три різні корені?

5. (*30 балів*) На площині дано шість точок загального положення (жодні три з них не лежать на одній прямій). Кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього кольору. Довести, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають один колір.

10 клас

1. (*15 балів*) На даній прямій l знайти таку точку, сума відстаней від якої до двох даних точок M і N буде найменшою. Розглянути всі можливі випадки взаємного розташування M, N і l.
2. (*15 балів*) Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a і b виконується нерівність

$$\left(a^2 + b\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b^2}\right) \geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

3. (*20 балів*) Розв'яжіть у натуральних числах рівняння

$$x^2 - y^2 = 2015.$$

4. (*20 балів*) Навколо довільного $\triangle ABC$ описали коло ω та відмітили точки A', B', C' перетину продовжень бісектрис трикутника з цим

колом. Після чого $\triangle\, ABC$ та зазначені бісектриси з їх продовженнями витерли, залишивши на колі ω лише точки A', B', C'. За точками A', B', C' відновіть (побудуйте) $\triangle\, ABC$.

5. (*30 балів*) Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність $0 < x < 1$ є наслідком нерівності $ax^2 - x + 1 - a < 0$. (Тобто, знайти всі ті значення параметра a, при яких розв'язки **другої** нерівності є підмножиною розв'язків **першої** нерівності)

11 клас

1. (*15 балів*) Площі кругів, побудованих на сторонах трикутника, відносяться як $25 : 144 : 169$. Знайти відношення радіусів описаного та вписаного кіл такого трикутника.
2. (*15 балів*) Розв'яжіть у натуральних числах рівняння
$$x^3 - y^3 = 2015.$$
3. (*20 балів*) Знайти всі числа x, які належать відрізку $[0; 1]$, і задовольняють рівнянню
$$\sin^4\left(\cos^3(3x)\right) + \cos^4\left(\cos^3(3x)\right) = 1.$$
4. (*20 балів*) В гострокутному $\triangle\, ABC$ провели висоти AA', BB' і CC'. Після чого $\triangle\, ABC$ та зазначені висоти витерли, залишивши лише точки A', B', C'. За точками A', B', C' відновіть (побудуйте) $\triangle\, ABC$.
5. (*30 балів*) Розв'язати рівняння з параметром a
$$x + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a.$$

ЧАСТИНА II.
ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

6 клас

1. Відповідь: $6 \cdot (8 + 20) : 4 - 2 = 40$.

2. Відповідь: 336.

3. Відповідь: 63.

4. Відповідь: 2 500.

5. – задача на доведення.

7 клас

1. Відповідь: 5.

2. – задача на розрізання.

3. Відповідь: 13.

4. Відповідь: 3; 7.

5. Відповідь: Так.

8 клас

1. – задача на доведення.

2. Відповідь: 1400 грамів.

3. Відповідь: $1 : 2$.

4. Відповідь: $0 < a < 3$.

5. – задача на доведення.

9 клас

1. – задача на доведення; $(1;2016)$ – спільна точка.

2. `Відповідь`: трикутник є *прямокутним*.

3. `Відповідь`: $22,5^0;\ 67,5^0$.

4. `Відповідь`: $0; \pm\frac{1}{2}; \pm 1$.

5. – задача на доведення.

10 клас

1. `Відповідь`: якщо перетин прямої l та відрізка MN не є $\varnothing$, то шукана точка належить їх перетину; якщо пряма l не має спільних точок з відрізком MN, то шуканою точкою буде точка перетину прямої l з відрізком $M'N$, де M' – точка, що є симетричною т. M відносно l.

2. – задача на доведення.

3. `Відповідь`: $(1008;1007)$, $(204;199)$, $(84;71)$, $(48;17)$.

4. – задача на побудову; вершини A, B, C шуканого (вихідного) трикутника належать прямим, що містять висоти $\triangle\ A'B'C'$.

5. `Відповідь`: $a \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

11 клас

1. `Відповідь`: $13:4$.

2. `Відповідь`: $x = 14, y = 9$.

3. `Відповідь`: $x = \frac{\pi}{6}$.

4. – задача на побудову; вершини A, B, C шуканого (вихідного) трикутника належать прямим, що містять бісектриси $\triangle\ A'B'C'$.

5. `Відповідь`: якщо $a = 0$, то $x = 0$; якщо $a < 0$ або $0 < a < 1$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \geqslant 1$, то $x = a - \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4a-3}\right)$.

ЧАСТИНА III. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

6 клас

Задача 1.

Зауважимо, що за умовою задачі учень (переписуючи розв'язаний приклад) забув поставити саме **одну пару дужок**.

Оскільки ліва частина прикладу $6 \cdot 8 + 20 : 4 - 2 = 40$ містить 5 чисел, «відокремлених» один від одного знаками арифметичних операцій, то існують лише **10 можливих способів** розстановки однієї пари дужок, кожен з яких наведено нижче та перевірено щодо правильності одержаної числової рівності:

1.1) $\mathbf{(}6 \cdot 8\mathbf{)} + 20 : 4 - 2 = 48 + 5 - 2 = 51 \neq 40$,

1.2) $\mathbf{(}6 \cdot 8 + 20\mathbf{)} : 4 - 2 = (48 + 20) : 4 - 2 = 68 : 4 - 2 = 17 - 2 = 15 \neq 40$,

1.3) $\mathbf{(}6 \cdot 8 + 20 : 4\mathbf{)} - 2 = (48 + 5) - 2 = 53 - 2 = 51 \neq 40$,

1.4) $\mathbf{(}6 \cdot 8 + 20 : 4 - 2\mathbf{)} = 48 + 5 - 2 = 51 \neq 40$;

2.1) $6 \cdot \mathbf{(}8 + 20\mathbf{)} : 4 - 2 = 6 \cdot 28 : 4 - 2 = 6 \cdot 7 - 2 = 42 - 2 = \boxed{40 = 40}$,

2.2) $6 \cdot \mathbf{(}8 + 20 : 4\mathbf{)} - 2 = 6 \cdot (8 + 5) - 2 = 6 \cdot 13 - 2 = 78 - 2 = 76 \neq 40$,

2.3) $6 \cdot \mathbf{(}8 + 20 : 4 - 2\mathbf{)} = 6 \cdot (8 + 5 - 2) = 6 \cdot 11 = 66 \neq 40$;

3.1) $6 \cdot 8 + \mathbf{(}20 : 4\mathbf{)} - 2 = 48 + 5 - 2 = 51 \neq 40$,

3.2) $6 \cdot 8 + \mathbf{(}20 : 4 - 2\mathbf{)} = 48 + (5 - 2) = 51 \neq 40$;

4.1) $6 \cdot 8 + 20 : \mathbf{(}4 - 2\mathbf{)} = 48 + 20 : 2 = 48 + 10 = 58 \neq 40$.

Лише в одному з наведених випадків (випадок 2.1)) було одержано правильну числову рівність. Тому шукане положення дужок, які учень забув переписати, є наступним $6 \cdot \Bigg(8 + 20\Bigg) : 4 - 2 = 40$.

Відповідь: $6 \cdot (8 + 20) : 4 - 2 = 40$.

Задача 2.

! Нагадаємо, що:

1. **Розв'язком нерівності** (в однині) називають таке значення змінної x (тобто, таке число), при підстановці якого (замість змінної x) вихідна нерівність перетворюється на правильну числову нерівність.

Так, наприклад: натуральне число 10 є розв'язком даної нерівності $6x < 2015$ (бо $6 \cdot 10 < 2015$ є правильною числовою нерівністю), тоді як натуральне число 1000 не є розв'язком цієї нерівності (бо $6 \cdot 1000 < 2015$ не є правильною числовою нерівністю).

2. За правилом (теоремою про) **ділення з остачею**, для натуральних чисел a і b ($a > b$) має місце рівність $a = b \cdot \boxed{q} + r$, де a – ділене, b – дільник, q – неповна частка, r – остача, причому $r < b$, а r і q для фіксованих a і b визначаються однозначно.

Так, наприклад: для натуральних $a = 10$ і $b = 7$ має місце рівність $10 = 7 \cdot \boxed{1} + 3$.

Розв'язання

I спосіб

1) За правилом (теоремою про) ділення з остачею, має місце рівність $2015 = 6 \cdot 335 + 5$. Тому дану нерівність $6x < 2015$ можна подати у вигляді

$$6 \cdot x < 6 \cdot \boxed{335} + 5. \tag{6.2.1}$$

2) Не важко переконатися у тому, що найбільшим натуральним числом, яке є розв'язком даної нерівності є число 335, а найменшим натуральним числом, яке не є розв'язком цієї нерівності є число $335 + 1 = 336$.

II спосіб

Нехай x' – найменше натуральне число, що не є розв'язком нерівності $6x < 2015$.

1) Оскільки x' не є розв'язком нерівності $6x < 2015$, то числова нерівність $6 \cdot x' < 2015$ не є правильною, а тому для натурального x' справджується числова нерівність

$$6 \cdot x' \geqslant 2015. \tag{6.2.2}$$

Очевидно, що $2015 = (2015 : 6) \cdot 6 = \frac{2015}{6} \cdot 6 = 6 \cdot \frac{2015}{6}$ і тому останню нерівність можна подати у вигляді числової нерівності

$$6 \cdot x' \geqslant 6 \cdot \frac{2015}{6}. \qquad (6.2.3)$$

2) Розділивши на число 6 обидві частини нерівності (6.2.3), одержимо правильну нерівність

$$x' \geqslant \frac{2015}{6}. \qquad (6.2.4)$$

3) Перетворимо неправильний дріб $\frac{2015}{6}$ у мішаний дріб: $\frac{2015}{6} = \frac{6 \cdot 335 + 5}{6} = 335\,\frac{5}{6}$.

Очевидно, що число $x' = 336$ є найменшим натуральним числом, що задовольняє числовій нерівності (6.2.4). І тому число $x' = 336$ є найменшим натуральним числом, що не є розв'язком нерівності $6x < 2015$.

Відповідь: 336.

Задача 3.

1) За визначенням периметром трикутника називають суму довжин його сторін. Тому розв'язання задачі зводиться до знаходження довжин сторін трикутника.

2) Оскільки (за умовою задачі) довжина «першої» сторони трикутника дорівнює 20 см, а друга сторона становить 80% від неї, то довжина «другої» сторони трикутника становить $(20 \cdot 80) : 100 = 1600 : 100 = 16$ см.

3) З урахуванням умови задачі та пункту 2), сума довжин «першої» та «другої» сторін трикутника становить $20 + 16 = 36$ см.

4) Оскільки (за умовою задачі) довжина «третьої» сторони трикутника становить 75% від суми перших двох, то довжина «третьої» сторони трикутника становить $(36 \cdot 75) : 100 = 2700 : 100 = 27$ см.

Таким чином, периметр трикутника становить $20 + 16 + 27 = 63$ см.

Відповідь: 63.

Задача 4.

За умовою задачі необхідно підрахувати суму всіх непарних чисел від 1 до 99, тобто підрахувати величину

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 95 + 97 + 99.$$

1) Очевидно, що кількість натуральних чисел від 1 до 100 становить 100. Причому: кожне «перше» (починаючи з 1) є непарним числом, а кожне «друге» (починаючи з 2) є парним числом. Тобто, серед перших 100 натуральних чисел 50 непарних та 50 парних чисел. Таким чином **число доданків**, які входять до величини S становить **50** (25 пар доданків).

2) Не важко перевірити, що:
сума першого і останнього (50-го) доданків становить $1 + 99 = 100$,
сума другого і передостаннього (49-го) доданків становить $3 + 97 = 100$,
сума третього і 48-го доданків також становить $5 + 95 = 100$,
...
сума 25-го і 26-го доданків також становить 100.

3) Оскільки при перестановці доданків сума не змінюється, то

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 95 + 97 + 99 =$$

$$= (1 + 99) + (3 + 97) + (5 + 95) + ... + (25 \text{ доданок} + 26 \text{ доданок}) =$$

$$= \underbrace{100 + 100 + 100 + ... + 100}_{25 \text{ разів}} = 100 \cdot 25 = 2500.$$

Відповідь: 2 500.

Історична довідка до задачі 4.

За легендою, шкільний вчитель математики юного Гауса[3], щоб зайняти дітей на тривалий час, запропонував їм підрахувати суму натуральних чисел від 1 до 100. Гаус запримітив, що попарні суми з протилежних кінців однакові: $1+100 = 101$, $2+99 = 101$ і т.д., та миттєво одержав результат: 5050.

[3]Йоганн Карл Фрідріх Гаус (1777 – 1855) — німецький математик, механік, фізик і астроном. Вважається одним з найвеличніших математиків всіх часів, «королём математиків». Лауреат медалі Коплі (1838), іноземний член Шведської (1821) та Російської (1824) Академій наук, англійського Королівського товариства.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! Підрахувати суму всіх парних чисел від 2 до 100.

?! Перевірте, що суму S_n перших n натуральних чисел можна підрахувати за формулою $S_n = n \cdot (n+1) : 2$.

?! Перевірте, що суму S_n усіх непарних натуральних чисел від 1 до $2n-1$ можна підрахувати за формулою $S_n = n \cdot n$.

Задача 5.

За умовою задачі сім гномів зібрали 29 грибів, причому жоден не приніс порожнього кошика та ніхто більше 7 грибів не знайшов.

Доведемо, що за таких умов хоча б двоє гномів зібрали однакову кількість грибів.

Зауважимо, що в контексті даної задачі слова «**знайшов**», «**зібрав**» та «**приніс**» слід ототожнювати і сприймати як слова синоніми. Тобто, умовою задачі передбачається, що кожен із **знайдених** грибів було **зібрано**, покладено до кошика та **принесено** до кінцевого пункту (напр. домівки).

I спосіб

За умовою задачі кожен з гномів приніс від 1 до 7 грибів. Тобто, для кожного гнома число грибів, що він знайшов, обов'язково належить множині $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ (обирається виключно з чисел $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$).

Розглянемо всі можливі випадки:

1) всі 7-ро гномів знайшли по парній кількості грибів;

2) точно 1-ин з гномів знайшов непарне число грибів, а решта 6-ро – по парній кількості грибів;

3) точно 2-є з гномів знайшли по непарному число грибів, а решта 5-ро – по парній кількості грибів;

4) точно 3-є з гномів знайшли по непарному число грибів, а решта 4-ро – по парній кількості грибів;

5) точно 4-ро з гномів знайшли по непарному число грибів, а решта 3-є – по парній кількості грибів;

6) точно 5-ро з гномів знайшли по непарному число грибів, а решта 5-ро – по парній кількості грибів;

7) точно 6-ро з гномів знайшли по непарному число грибів, 7-ий – парну кількість грибів;

8) всі 7-ро гномів знайшли по непарному число грибів.

Проте у випадках **1)**, **3)**, **5)** і **7)** сумарне число знайдених грибів є парним, чого не може бути, бо за умовою задачі всі гноми разом зібрали непарну кількість 29 грибів.

У випадку **2)** шестеро гномів зібрали по парній кількості грибів. Оскільки зазначені числа належить множині $\{2;4;6\}$, то з 6-ти гномів щонайбільше **троє** зібрали попарно різну кількість грибів. Число грибів, які зібрав 4 (5 і 6) обов'язково співпаде з числом грибів одного з трьох із зазначених гномів. Звідки й випливає справедливість твердження. *Прикладом* (реалізації) випадку 2) може бути $5+2+2+4+4+6+6=29$.

У випадку **4)** четверо гномів зібрали по парній кількості грибів. Оскільки зазначені числа належить множині $\{2;4;6\}$, то з 4-ох гномів щонайбільше **троє** зібрали попарно різну кількість грибів. Число грибів, які зібрав 4-ий такий гном обов'язково співпаде з числом грибів одного з трьох із зазначених гномів. Звідки й випливає справедливість твердження. *Прикладом* (реалізації) випадку 4) може бути $1+3+5+2+4+6+6=29$.

У випадку **6)** п'ятеро гномів зібрали по непарній кількості грибів. Оскільки зазначені числа належить множині $\{1;3;5;7\}$, то з 5-ти гномів щонайбільше **четверо** зібрали попарно різну кількість грибів. Число грибів, які зібрав 5-ий такий гном обов'язково співпаде з числом грибів одного з 4-ох із зазначених гномів. Звідки й випливає справедливість твердження. *Прикладом* (реалізації) випадку 4) може бути $1+3+5+7+7+2+4=29$.

У випадку **8)** всі семеро гномів зібрали по непарній кількості грибів. Оскільки зазначені числа належить множині $\{1;3;5;7\}$, то з 7-ми гномів щонайбільше **четверо** зібрали попарно різну кількість грибів. Число грибів, які зібрав 5-ий (6 і 7) такий гном обов'язково співпаде з числом грибів одного з 4-ох із зазначених гномів. Звідки й випливає справедливість твердження. *Прикладом* (реалізації) випадку 4) може бути $1+3+5+7+1+5+7=29$.

Таким чином, у кожному з усіх 4-х принципово можливих випадках (2), 4), 6) і 8)) хоча б двоє гномів зібрали однакову кількість грибів.

II спосіб *– за допомогою «методу від супротивного»*

Нехай x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 та x_7 – число грибів, яке зібрав 1-ий, 2-ий, 3-ій, 4-ий, 5-ий, 6-ий та 7-ий гном відповідно.

Припустимо обернене, а саме: що *жодні два гноми не принесли однакову кількість грибів*. Тоді натуральні числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 та x_7 є різними і тому їх можна впорядкувати за зростанням. Без втрати загальності будемо вважати, що

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7. \tag{6.5.1}$$

1) Оскільки жоден з них не приніс порожнього кошика, то $x_1 \geqslant 1$, звідки:
$x_2 \geqslant x_1 + 1 \geqslant 2$, $x_3 \geqslant x_2 + 1 \geqslant 3$, $x_4 \geqslant x_3 + 1 \geqslant 4$,
$x_5 \geqslant x_4 + 1 \geqslant 5$, $x_6 \geqslant x_5 + 1 \geqslant 6$, $\boxed{x_7 \geqslant x_6 + 1 \geqslant 7}$.
2) З іншого боку, оскільки за умовою ніхто з гномів більше 7 грибів не знайшов, то $\boxed{x_7 \leqslant 7}$.

Очевидно, що одночасно дві умови $x_7 \geqslant 7$ та $x_7 \leqslant 7$ виконуються лише коли $x_7 = 7$. Але ж тоді, з урахуванням, нерівностей (6.5.1), мають місце рівності

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5,\ x_6 = 6,\ x_7 = 7. \tag{6.5.2}$$

Таким чином, з припущення про те, що жодні два гноми не принесли однакову кількість грибів, причому жоден не приніс порожнього кошика та ніхто більше 7 грибів не знайшов, ми дійшли висновку $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5,\ x_6 = 6,\ x_7 = 7$.

Але ж тоді $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 = 1+2+3+4+5+6+7 = 28$, що суперечить умову задачі (чого не може бути), бо за умовою задачі всі гноми (разом) зібрали точно 29 грибів.

Отже, наше припущення про те, що жодні два гноми не принесли однакову кількість грибів, є хибним («невірним», «неправильним»). А тому істинним («вірним», «правильним») є твердження про те, що принаймні двоє з гномів принесли (зібрали) однакову кількість грибів.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5.

Суть методу доведення від супротивного

«Отбросьте все невозможное, и то, что останется и будет ответом, каким бы невероятным он не казался!»

Цитата з книги: «Пригоди Шерлока Холмса»

Логічною основою методу доведення від супротивного є «**закон виключення третього**»: з двох супротивних тверджень одне завжди є істинним («правильним»), друге — хибним («неправильним»), а третього бути не може.

Завдяки цьому закону замість доведення певного твердження (під час використання методу доведення від супротивного) доводять, що супротивне йому твердження — хибне («неправильне»), і на цій підставі роблять висновок, що істинним («правильним») є саме доводжуване твердження.

7 клас

Задача 1.

Нехай AB – даний відрізок, точка N належить відрізку AB, точка M – відрізку AN, а точка P – відрізку NB.

Нехай далі A_0 – середина відрізка AM, B_0 – середина відрізка MN, C_0 – середина відрізка NP, а D_0 – середина відрізка PB. Тоді, згідно введених позначень та з урахуванням умови задачі, довжина відрізка AB становить 50 см, а довжина відрізка A_0D_0 – 30 см. Необхідно обчислити довжину відрізка B_0C_0.

I спосіб

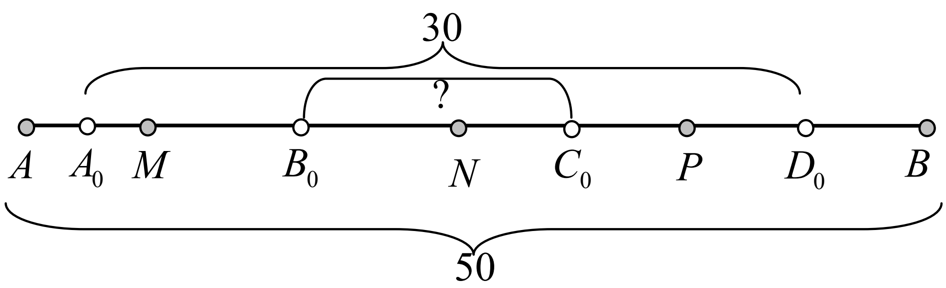


Рис. 1: до задачі 1

1) Оскільки довжина відрізка A_0D_0 становить 30 см, то сума довжин відрізків AA_0 і D_0B становить $50-30=20$ см.

2) Оскільки B_0 і C_0 середини відрізків MN і NP відповідно, то сума довжин відрізків AM і PB становить $2\cdot 20=40$ см. Звідки довжина відрізка MP становить $50-40=10$ см.

3) Згідно введених позначень точка N належить відрізку MP, а точки B_0 і C_0 є серединами відрізків MN і NP відповідно. Тому довжину відрізка MP можна подати як суму довжин відрізків MN і NP, а бо ж як подвоєну суму довжин відрізків B_0N і NC_0, або ж як подвоєну довжину відрізка B_0C_0.

Оскільки довжина відрізка MP становить 10 см, то довжина відрізка B_0C_0 становить 5 см.

II спосіб

Розглянемо координатну пряму з початком O у точці A, додатній напрям якої співпадає із напрямом «спрямованого відрізка» AB та такою одиницею виміру (масштабною одиницею), при якій точка B має координату 50.

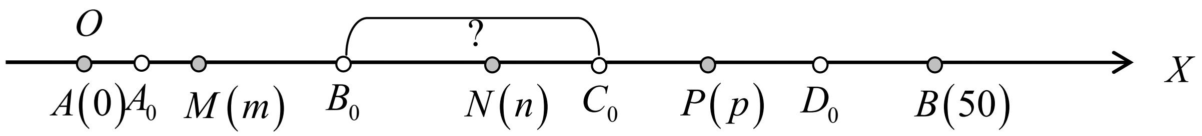


Рис. 2: до задачі 1

Нехай далі точка M має координату m, точка N – координату n, а точка P – координату p. Тобто: $A(0)$, $M(m)$, $N(n)$, $P(p)$, $B(50)$. Тоді за формулою обчислення координати середини відрізка точки A_0, B_0, C_0 і D_0 мають координати

$$A_0\left(\frac{m}{2}\right), \quad B_0\left(\frac{m+n}{2}\right), \quad C_0\left(\frac{n+p}{2}\right), \quad D_0\left(\frac{p+50}{2}\right).$$

За умовою задачі довжина відрізка A_0D_0 становить 30 см, тому має місце рівність

$$\frac{p+50}{2} - \frac{m}{2} = 30,$$

звідки $p + 50 - m = 50$, або ж $p - m = 10$.

Шукану довжину відрізка B_0C_0 можна подати у вигляді

$$B_0C_0 = \frac{n+p}{2} - \frac{m+n}{2} = \frac{n+p-m-n}{2} = \frac{p-m}{2}.$$

А оскільки $p - m = 10$, то довжина відрізка B_0C_0 становить $\frac{p-m}{2} = \frac{10}{2} = 5$ см.

Відповідь: 5.

Задача 2.

Один із шуканих способів розрізання квадрата зі стороною 4 см на прямокутники, сума периметрів яких становить 25 см, наведено на рисунку 3.

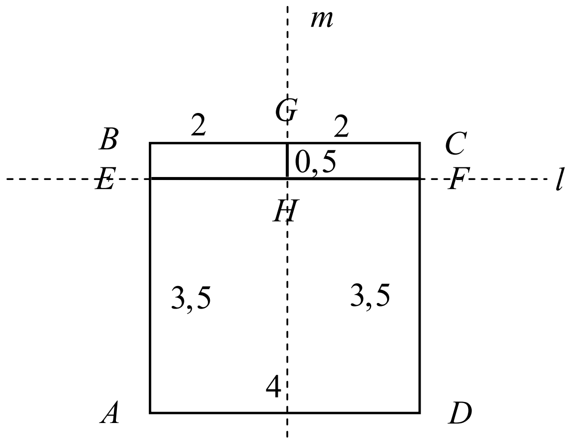


Рис. 3: до задачі 2

Наведемо відповідні пояснення («**обгрунтування відповіді**»).

Нехай $ABCD$ – квадрат, довжина сторони якого становить 4 см.

1) Проведемо пряму l, яка є паралельною до сторони AD та відстоїть від неї на відстані 3,5 см. І нехай l перетинає сторони AB і CD у точках E і F відповідно. Тоді одержані чотирикутники $EFDA$ та $BCFE$ є прямокутниками.

2) Проведемо пряму m, яка є паралельною до сторони AB та відстоїть від неї на відстані 2 см. І нехай m перетинає сторони BC і EF у точках G і H відповідно. Тоді одержані чотирикутники $BGHA$ та $GCFA$ є прямокутниками.

3) Тепер здійснимо розрізання квадрата $ABCD$ вздовж відрізків EF і GH. В результаті одержимо три прямокутника:

$EFDA$ – з довжинами сторін 4 і 3,5 см;

$BGHE$ – з довжинами сторін 2 і 0,5 см;

$GCFH$ – з довжинами сторін 2 і 0,5 см.

Таким чином сума периметрів зазначених прямокутників становить

$P_{EFDA} + P_{BGHE} + P_{GCFH} = 2(4 + 3,5) + 2(2 + 0,5) + 2(2 + 0,5) =$

$= 2 \cdot 7,5 + 2 \cdot 2,5 + 2 \cdot 2,5 = 15 + 5 + 5 = 25$ см.

?! Чи можна даний квадрат розрізати на меншу (більшу) кількість прямокутників, сума периметрів становить 25 см?

Задача 3.

За умовою задачі у мішку знаходяться кульки трьох кольорів – чорного, білого і синього.

З'ясуємо питання щодо найменшої кількості кульок, яку треба витягнути з мішка, щоб серед них **гарантовано** було 5 кульок одного кольору.

ІДЕЯ: один зі способів виймання кульок міг бути наступним: спочатку вийняли 4 кульки чорного кольору, потім 4 кульки білого кольору, а потім 4 кульки синього кольору.

Тобто існує такий спосіб виймання кульок, при якому серед 12 кульок немає 5 кульок одного кольору. Наступна навмання вийнята кулька обов'язково виявиться чорного, білого або ж синього кольору. Іншими словами, лише після виймання 13 кульки ми можемо гарантувати існування 5-ти кульок одного кольору.

Таким чином, найменша кількість кульок, яку треба витягнути з мішка, щоб серед них **гарантовано** було 5 кульок одного кольору, становить 13.

Відповідь: 13.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

?! Перевірте та доведіть справедливість наступного твердження:
У мішку знаходяться кульки n різних кольорів ($n \in N$). Тоді найменша кількість кульок m, яку треба витягнути з мішка, щоб серед них гарантовано було k ($k \in N$) кульок одного кольору становить

$$m = (k-1) \cdot n + 1.$$

?! Добре відомо, що в грі «**Що? Де? Коли?**» рахунок ведеться до 6 очок. Причому в кожному раунді 1 очко присуджується «команді знавців» або ж «команді телеглядачів» в залежності від правильності оголошеної знавцями відповіді. Увага питання:

Яке найменше число раундів у цій грі?

Яке найбільше число раундів у цій грі?

Відповідь обґрунтуєте!

Задача 4.

Зауважимо, що за діючими підручниками з математики для 6 класів загальноосвітніх навчальних закладів **парними числами** називають *натуральні числа, запис яких закінчується парною цифрою* $(0, 2, 4, 6, 8)$.

I спосіб

Очевидно, що дане рівняння можна подати у вигляді

$$(a-1)\cdot x = a+5. \tag{7.4.1}$$

1. Нехай $a = 1$, тоді (при $a = 1$) рівняння (7.4.1) набуває вид

$$0\cdot x = 6 \tag{7.4.2}$$

та взагалі не має розв'язків.

2. Нехай тепер $a \neq 1$, тоді рівняння (7.4.1) є лінійним рівнянням, і тому його єдиний розв'язок (корінь) можна подати у вигляді

$$x = \frac{a+5}{a-1}. \tag{7.4.3}$$

3. Тепер нарешті з'ясуємо питання щодо натуральних значень параметра a, при яких дріб $\frac{a+5}{a-1}$ є парним (натуральним) числом.

Очевидно, що шукані значення параметра a слід шукати серед тих натуральних a, при яких $(a+5)$ націло ділиться на $(a-1)$.

3.1) За умовою шукані a є натуральними числами, а з урахуванням пункту 1 та/або обмеження $a-1 \neq 0$ на знаменник дробу, – строго більшими за 1. Звідки $a \geqslant 2$.

3.2) Оскільки дільники натурального числа b, за винятком самого числа b, не можуть бути більшими за $\frac{b}{2}$, то $(a+5)$ націло ділиться на знаменник $(a-1)$ лише у випадку коли

$$a-1 \leqslant \frac{a+5}{2}, \tag{7.4.4}$$

звідки $2a-2 \leqslant a+5$, $a \leqslant 7$.

3.3) З урахуванням пунктів 3.1) та 3.2), достатньо дослідити ті натуральні значення параметра a, що задовольняють умову $2 \leqslant a \leqslant 7$.

Не важко перевірити:
якщо $a = 2$, то $x = \frac{2+5}{2-1} = 7$ – не є парним числом;
якщо $a = \mathbf{3}$, то $x = \frac{3+5}{3-1} = 4$ – **парне число**;
якщо $a = 4$, то $x = \frac{4+5}{4-1} = 3$ – не є парним числом;
якщо $a = 5$, то $x = \frac{5+5}{5-1} = \frac{10}{4}$ – не є натуральним числом;
якщо $a = 6$, то $x = \frac{6+5}{6-1} = \frac{11}{5}$ – не є натуральним числом;
якщо $a = \mathbf{7}$, то $x = \frac{7+5}{7-1} = 2$ – **парне число**.

Таким чином, дане рівняння має парні корені лише при $a \in \{3; 7\}$.

II спосіб

1. Якщо $a = 1$, то дане рівняння (7.4.1) не має розв'язків.

2. Нехай $a \neq 1$, тоді рівняння (7.4.1) є лінійним рівнянням, і тому його єдиний розв'язок (корінь) можна подати у вигляді

$$x = \frac{a+5}{a-1} = \frac{a-1+6}{a-1} = 1 + \frac{6}{a-1}. \tag{7.4.5}$$

Вираз $\frac{6}{a-1}$ має бути непарним числом. Це можливо якщо $a - 1 = 6$ (тобто, при $a = 7$) або ж коли $a - 1 = 2$ (тобто, при $a = 3$).

Таким чином, дане рівняння має парні корені лише при $a \in \{3; 7\}$.

III спосіб

Нехай $x = 2k$ ($k \in N$) – парний корінь даного рівняння $ax = a+x+5$. Тоді (за визначенням кореня рівняння) має місце правильна числова рівність $2ak = a + 2k + 5$. Звідки $2k(a - 1) = a + 5$, $2k(a - 1) = a - 1 + 6$,

$$(a-1)(2k-1) = 6. \tag{7.4.6}$$

Очевидно, що при $a = 1$ числова рівність (7.4.6) є неправильною. Крім того, оскільки $a, k \in N$, то числові множники ($(a - 1)$ і $(2k - 1)$) у лівій частині рівності (7.4.6) також є натуральними числами. Більше того: множник $(2k - 1)$ є непарним числом, а множник $(a - 1)$ – обов'язково парним числом, бо права частина рівності (7.4.6) є парним числом.

Оскільки $6 = 6{\cdot}1 = 2{\cdot}3$ – всі можливі представлення числа 6 у вигляді добутку парного і непарного множників, то рівність (7.4.6) є можливою лише у двох випадках $a - 1 = 6, 2k - 1 = 1$ або ж $a - 1 = 2, 2k - 1 = 3$.

Звідки $a = 7, k = 1$ або ж $a = 3, k = 2$. Останнє означає, що у випадку $a = 7$ дане рівняння має парний корінь $x = 2 \cdot 1 = 2$, а у випадку $a = 3$ – парний корінь $x = 2 \cdot 2 = 4$. Таким чином, $a = 3$ та $a = 7$ – всі можливі значення параметра a, при яких дане рівняння має парні корені.

Відповідь: 3; 7.

Задача 5.

1) Оскільки вся площина розфарбована в чотири кольори, то завжди знайдеться четвірка точок A, B, C і D, які мають попарно різний колір. Заради визначеності будемо вважати, що: точка A – «першого» кольору, точка B – «другого» кольору, точка C – «третього» кольору, а точка D – «четвертого» кольору.

2) Якщо так сталося, що деякі три із зазначених точок належать одній прямій, то в доведенні твердження немає потреби.

3) Дослідимо тепер випадок, коли жодні три з точок A, B, C, D не належать одній прямій. Для цього розглянемо трикутник, що визначається точками A, B, C. Тоді точка D може бути:

1 випадок) або внутрішньою точкою $\triangle ABC$ – рис. 4 $a)$,

2 випадок) або ж зовнішньою точкою $\triangle ABC$ – рис. 4 $b), c), d)$.

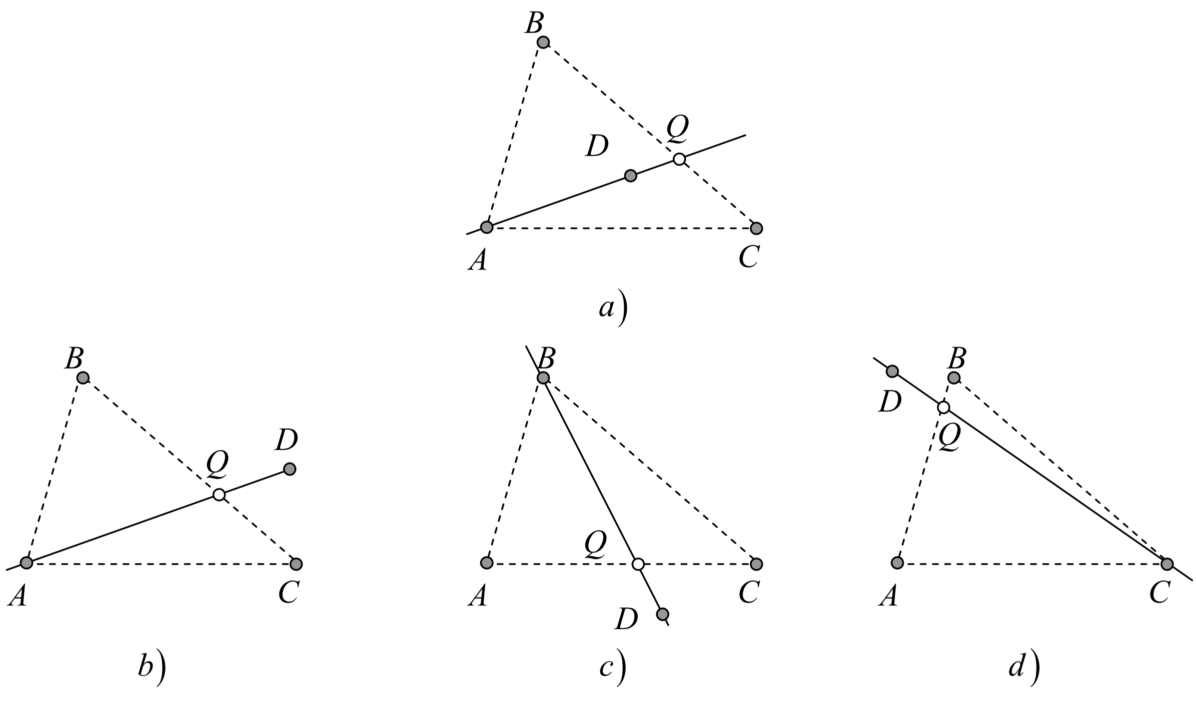


Рис. 4: до задачі 5

3.1) В першому випадку завжди перетинаються прямі AD і BC. Позначимо точку їх перетину як Q. За умовою, вся площина розфарбована у 4 кольори. Тому, з урахуванням домовленості, точка Q може мати 1-ий, 2-ий, 3-ій або ж 4 колір. Причому:

3.1.1) якщо точка Q має 1-ий або 4-ий колір, то пряма BC містить три точки B, Q, C різного кольору;

3.1.2) якщо ж точка Q має 2-ий або 3-ій колір, то пряма AD містить три точки A, D, Q різного кольору.

3.2) В другому випадку слід розглянути три різні підвипадки:

3.2.1) A і D належать різним півплощинам відносно прямої (BC) – рис. 4 $b)$;

3.2.2) B і D належать різним півплощинам відносно (AC) – рис. 4 $c)$;

3.2.3) C і D належать різним півплощинам відносно (AB) – рис. 4 $d)$.

Тоді очевидно, що в підвипадку 3.2.1) завжди існує точка Q перетину прямих (AD) і (BC); в підвипадку 3.2.2) – точка $Q = (BD) \cap (AC)$; в підвипадку 3.2.3) – точка $Q = (CD) \cap (AB)$.

Точка Q (в кожному з цих підвипадках) може мати виключно 1-ий, 2-ий, 3-ій або ж 4 колір. Причому:

3.2.1') якщо точка Q (в підвипадку 3.2.1) має 1-ий або 4-ий колір, то пряма BC містить три точки B, C, Q різного кольору, якщо ж 2-ий або 3-ій колір, то пряма AD містить три точки A, D, Q різного кольору;

3.2.2') якщо точка Q (в підвипадку 3.2.2) має 2-ий або 4-ий колір, то пряма AC містить три точки A, C, Q різного кольору, якщо ж 1-ий або 3-ій колір, то пряма BD містить три точки B, D, Q різного кольору;

3.2.3') якщо точка Q (в підвипадку 3.2.3) має 3-ій або 4-ий колір, то пряма AB містить три точки A, B, Q різного кольору, якщо ж 1-ий або 2-ій колір, то пряма CD містить три точки C, D, Q різного кольору.

Таким чином, на площині, яку розфарбовано у 4 кольори, завжди знайдеться пряма, що містить три точки різного кольору.

Відповідь: Так.

8 клас

Задача 1.

I спосіб

$(a+b)(a+b-14)+49=(a+b)^2-14\cdot(a+b)+49=$
$=(a+b)^2-2\cdot(a+b)\cdot 7+7^2=((a+b)-7)^2=(a+b-7)^2\geqslant 0$.

Звідки вираз $(a+b)(a+b-14)+49$ набуває невід'ємних значень при будь яких a і b.

II спосіб

Нехай $z=a+b$. Оскільки a і b будь-які, то z – будь-яке, а вираз $(a+b)(a+b-14)+49$ набуває вид $z(z-14)+49$.

І тому дану задачу можна переформулювати у наступному вигляді: «Довести, що вираз $z(z-14)+49$ набуває невід'ємних значень при при будь-якому z». Тоді очевидно, що
$z(z-14)+49=z^2-14\cdot z+49=z^2-2\cdot z\cdot 7+7^2=(z-7)^2\geqslant 0$.

III спосіб

$(a+b)(a+b-14)+49=$
$=((a+b-14)+14)(a+b-14)+49=$
$=(a+b-14)^2+14(a+b-14)+49=$
$=(a+b-14)^2+2(a+b-14)\cdot 7+7^2=$
$=(a+b-14+7)^2=(a+b-7)^2\geqslant 0$.

Таким чином, вираз $(a+b)(a+b-14)+49$ набуває невід'ємних значень при будь яких a і b.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

?! Доведіть, що вираз $(a+b)(a+b-2c)+c^2$ набуває невід'ємних значень при будь яких a, b і c.

?! При яких a, b і c значення виразу $(a+b)(a+b-2c)+c^2$ дорівнює 0?

Задача 2.

Скільки води треба додати до 600 грамів 40 відсоткового розчину солі, щоб отримати 12 відсотковий розчин солі?

Розв'язання.

1. Оскільки в 600 грамах початкового розчину солі міститься 40% («чистої») солі, то її маса становить

$$\frac{600}{100} \cdot 40 = 6 \cdot 40 = 240 \text{ грамів.}$$

2. Нехай x – маса («чистої») води, яку необхідно додати до 600 грамів початкового розчину солі, щоб отримати 12 відсотковий розчин солі.

Оскільки у новому 12% розчині солі міститься точно 240 грамів («чистої») солі, то має місце рівність

$$\frac{240}{600+x} \cdot 100 = 12,$$

звідки

$$\frac{20}{600+x} \cdot 100 = 1,$$

або ж

$$2000 = 600 + x.$$

І тому

$$x = 2000 - 600 = 1400.$$

Таким чином, до 600 грамів 40 відсоткового розчину солі треба додати 1400 грамів води, щоб отримати 12 відсотковий розчин солі.

Відповідь: 1400 грамів.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

?! Доведіть, що до m грамів $p\,\%$-го розчину солі слід додати

$$\boxed{\frac{m(p-q)}{q}}$$

грамів води, щоб одержати $q\,\%$-ий розчин солі ($0 < q < p$).

Задача 3.

В трикутнику ABC точка K є серединою медіани BM, а промінь AK перетинає сторону BC у точці L. Знайдемо відношення $BL : LC$.

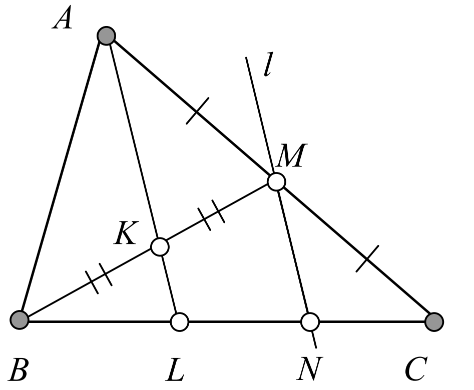


Рис. 5: до задачі 3

1. Через точку M проведемо пряму l паралельно до прямої AK. Оскільки пряма AK перетинає пряму BC, то за властивістю паралельних прямих l також перетинає пряму BC у певній точці. Позначимо її як N.

2. Розглянемо кут MBC та прямі KL і MN, що перетинають його сторони. Оскільки зазначені прямі паралельні (за побудовою) та відтинають відрізки однакової довжини на стороні BM кута MBC, то за теоремою Фалеса прямі KL та MN відтинають відрізки однакової довжини і на стороні BC кута MBC. Звідки

$$BL = LN. \tag{8.1.1}$$

3. Розглянемо кут ACB та прямі AL і MN, що перетинають його сторони. Оскільки зазначені прямі паралельні (за побудовою) та відтинають відрізки однакової довжини на стороні CA кута ACB, то за теоремою Фалеса прямі AL та MN відтинають відрізки однакової довжини і на стороні CB кута ACB. Звідки

$$CN = NL. \tag{8.1.2}$$

З урахуванням рівностей (8.1.1) та (8.1.2), маємо $BL = LN = NC$. Звідки $LC = 2 \cdot BL$. І тому $BL : LC = 1 : 2$.

Відповідь: $1 : 2$.

Задача 4.

З'ясуємо питання щодо значень параметра a, при яких рівняння

$$|2|x|-3|=a \tag{8.4.1}$$

має **чотири різні** корені.

I спосіб – *«за допомогою рівносильних конструкцій»*

$$|2|x|-3|=a \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2|x|-3=a \\ 2|x|-3=-a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} |x|=\frac{a+3}{2} \\ |x|=\frac{3-a}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{a+3}{2} \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=+\frac{a+3}{2} \\ x=-\frac{a+3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{3-a}{2} \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=+\frac{3-a}{2} \\ x=-\frac{3-a}{2} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant -3 \\ \left[\begin{array}{l} x=+\frac{a+3}{2} \\ x=-\frac{a+3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=+\frac{3-a}{2} \\ x=-\frac{3-a}{2} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=+\frac{a+3}{2} \\ x=-\frac{a+3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=+\frac{3-a}{2} \\ x=-\frac{3-a}{2} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \tag{8.4.2}$$

З останньої сукупності (8.4.2) слідує, що рівняння (8.4.1) може мати чотири різні корені лише при $a \in [0;3]$.

Проте при $a=0$ сукупність (8.4.2) набуває вид $\left[\begin{array}{l} x=+\frac{3}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \\ x=+\frac{3}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$, та має лише 2 різні корені;

при $a = 3$ сукупність (8.4.2) набуває вид $\left[\begin{array}{l} x = +3 \\ x = -3 \\ x = +0 \\ x = -0 \end{array}\right.$, та має лише 3 різні корені.

Нижче переконаємося, що при $a \in (0;3)$ сукупність (8.4.2) має чотири різні корені

$$x_1 = \frac{a+3}{2}, \quad x_2 = -\frac{a+3}{2}, \quad x_3 = +\frac{3-a}{2}, \quad x_4 = -\frac{3-a}{2}.$$

Якщо припустити, що $x_1 = x_2$, то з відповідної рівності $\frac{a+3}{2} = -\frac{a+3}{2}$ матимемо, що $a = -3 \notin (0;3)$;

якщо припустити, що $x_1 = x_3$, то з відповідної рівності $\frac{a+3}{2} = \frac{3-a}{2}$ матимемо, що $a = 0 \notin (0;3)$;

якщо припустити, що $x_1 = x_4$, то відповідна рівність $\frac{a+3}{2} = -\frac{3-a}{2}$ взагалі не має розв'язків;

якщо припустити, що $x_2 = x_3$, то відповідна рівність $-\frac{a+3}{2} = \frac{3-a}{2}$ не має розв'язків;

якщо припустити, що $x_2 = x_4$, то з відповідної рівності $-\frac{a+3}{2} = -\frac{3-a}{2}$ матимемо, що $a = 0 \notin (0;3)$;

якщо ж припустити, що $x_3 = x_4$, то з відповідної рівності $\frac{3-a}{2} = -\frac{3-a}{2}$ матимемо, що $a = 3 \notin (0;3)$.

Таким чином, рівняння (8.4.1) має чотири різні корені тоді і лише тоді, коли $0 < a < 3$.

II спосіб – *«функціонально-графічний»*

1. Розглянемо функцію $y = f(x) = |2|x| - 3|$.
Оскільки $f(-x) = |2|-x| - 3| = |2|x| - 3| = f(x)$, то графік функції $y = f(x) = |2|x| - 3|$ є симетричним відносно осі OY.

Далі скористаємося визначенням модуля дійсного числа для спрощення (для позбавлення від модулів) вигляду функції $f(x) = |2|x| - 3|$.

$$y = f(x) = |2|x| - 3| = \left[\begin{array}{ll} |2x-3|, & x \geqslant 0 \\ |-2x-3|, & x < 0 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{ll} |2x-3|, & x \geqslant 0 \\ |2x+3|, & x < 0 \end{array}\right. =$$

$$= \left[\begin{array}{lll} 2x-3, & \text{якщо} & x \geqslant 0,\ 2x-3 \geqslant 0 \\ -2x+3, & \text{якщо} & x \geqslant 0,\ 2x-3 < 0 \\ 2x+3, & \text{якщо} & x < 0,\ 2x+3 \geqslant 0 \\ -2x-3, & \text{якщо} & x < 0,\ 2x+3 < 0. \end{array}\right. = \left[\begin{array}{ll} +2x-3, & x \geqslant \frac{3}{2} \\ -2x+3, & 0 \leqslant x < \frac{3}{2} \\ +2x+3, & -\frac{3}{2} \leqslant x < 0 \\ -2x-3, & x < -\frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

2. Таким чином, графік даної функції $y = f(x)$ можна побудувати як об'єднання графіків функцій $f_1(x) = +2x-3$ $(x \geqslant \frac{3}{2})$, $f_2(x) = -2x+3$ $(0 \leqslant x < \frac{3}{2})$, $f_3(x) = +2x+3$ $(-\frac{3}{2} \leqslant x < 0)$ та $f_4(x) = -2x-3$ $(x < -\frac{3}{2})$, побудованих на відповідних проміжках – рис. 6.

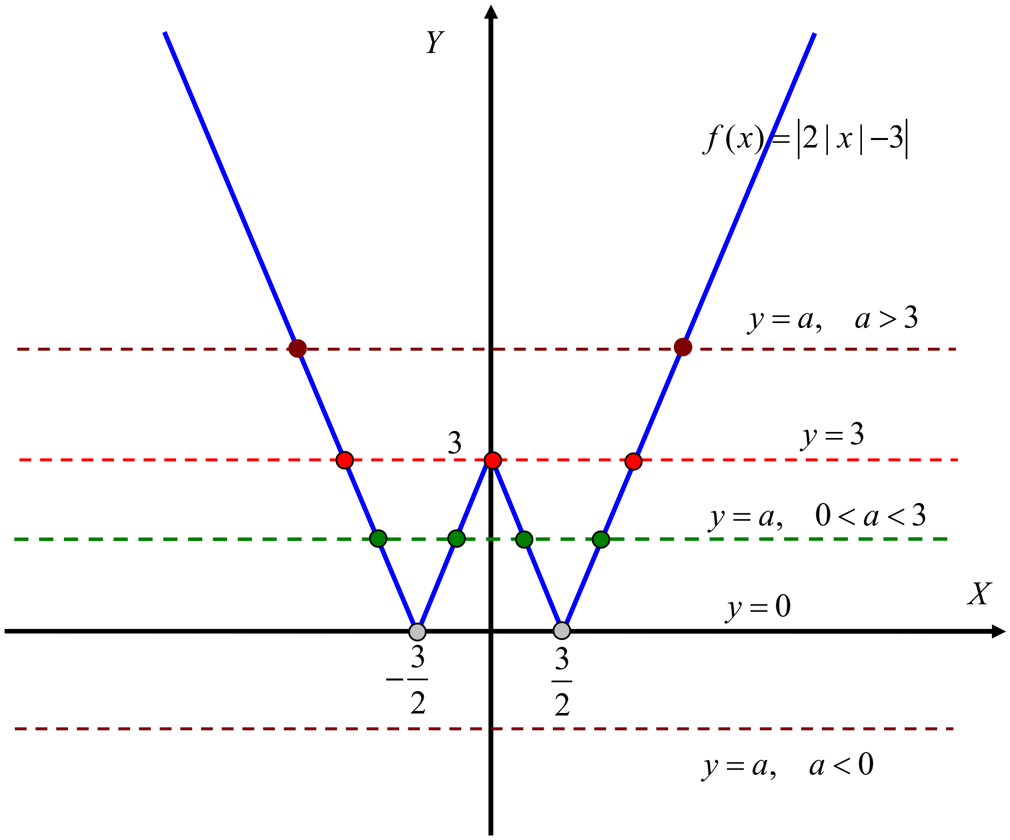


Рис. 6: до задачі 4

Добре відомо, що графіком сталої функції $y = a$ (при будь-якому значенні параметра a) є пряма, що проходить через точку $(0; a)$ і є паралельною до осі OX.

Також добре відомо, що корені рівняння $f(x) = g(x)$ співпадають з абсцисами точок перетину графіків функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$. Тобто, число дійсних коренів рівняння $f(x) = g(x)$ співпадає з числом точок перетину графіків зазначених функцій.

3. За допомогою ескізів графіків функцій $f(x) = |2|x| - 3|$ та $g(x) = a$, побудованих в одній координатній площині, з'ясуємо питання щодо кількості розв'язків даного рівняння – рис. 6.

Якщо $a < 0$, то графіки функцій $y = |2|x| - 3|$ та $y = a$ взагалі не мають спільних точок, а тому при $a < 0$ дане рівняння не має коренів;

якщо $a = 0$, то графіки зазначених функцій мають тільки дві спільні точки, і тому при $a = 0$ дане рівняння має точно два корені;

якщо $a = 3$, то графіки зазначених функцій мають тільки три спільні точки, і тому при $a = 3$ дане рівняння має точно три корені;

якщо $a > 3$, то графіки зазначених функцій мають тільки дві спільні точки, і тому при $a > 3$ дане рівняння має точно два корені;

якщо ж $0 < a < 3$, то графіки зазначених функцій мають чотири спільні точки, і тому при $0 < a < 3$ дане рівняння має точно чотири різні корені.

Відповідь: $0 < a < 3$.

Задача 5.

На площині дано шість точок загального положення (жодні три з них не лежать на одній прямій). Кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього кольору. Доведемо, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають один колір.

Доведення.

1. Нехай на площині задано шість точок A, B, C, D, E, F загального положення (жодні три з яких не лежать на одній прямій).

За умовою кожні дві точки сполучено відрізком червоного або синього кольору, та з кожної точки виходить п'ять відрізків. Тоді за принципом Діріхлє з кожної точки (зокрема точки A) виходить принаймні три відрізки одного кольору (червоного або синього).

2. Без втрати загальності будемо вважати, що відрізки AB, AC і AD одного кольору. Заради визначеності будемо вважати їх синіми – рис. 7.

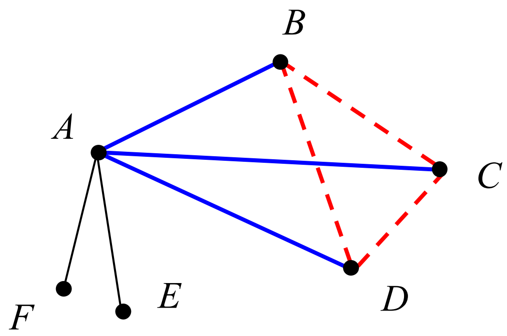


Рис. 7: до задачі 5

Якщо припустити, що при довільному розфарбуванні відрізків (у вказаний за умовою задачі спосіб) не існує трикутника зі сторонами одного кольору, то відрізок BC повинен бути червоного кольору (бо сторони AB і AC синього кольору). Так само відрізки CD і BD повинні бути червоного кольору. Але ж тоді всі сторони трикутника BCD червоного кольору. Приходимо до протиріччя з припущенням.

Отже наше припущення є хибним, і тому при довільому розфарбуванні відрізків у вказаний за умовою задачі спосіб існує принаймні один трикутник зі сторонами одного кольору.

9 клас

Задача 1.

Розглядають функції виду $y = x^2 + ax + b$, $a + b = 2015$. Доведемо, що графіки всіх таких функцій мають спільну точку.

I спосіб

Нехай $f(x) = x^2 + ax + b$ – одна із заданих функцій (довільна але фіксована). Оскільки для коефіцієнтів a і b виконується додаткова умова $a+b = 2015 \Leftrightarrow b = 2015-a$, то зазначену функцію можна подати у вигляді

$$f(x) = x^2 + ax + b = x^2 + ax + 2015 - a = x^2 + a(x - 1) + 2015.$$

Тоді не важко перевірити, що

$$f(1) = 1^2 + a \cdot (1 - 1) + 2015 = 1 + 0 + 2015 = 2016.$$

Звідки й випливає, що точка $Q(1; 2016)$ належить графіку кожної із зазначених функцій.

II спосіб

Нехай $f_1(x) = x^2+a_1x+b_1$ та $f_2(x) = x^2+a_2x+b_2$ – дві різні, довільні проте фіксовані функції із множини зазначених функцій. Тоді одночасно виконуються умови $a_1+b_1 = 2015$, $a_2+b_2 = 2015$. Звідки $a_1-a_2 = b_2-b_1$. Причому $a_1 = a_2 \Leftrightarrow b_1 = b_2$. Більше того, якщо $a_1 = a_2$ ($\Leftrightarrow b_1 = b_2$), то $f_1(x) = x^2+a_1x+b_1$ та $f_2(x) = x^2+a_2x+b_2$ задають одну й ту ж функцію і навпаки. Тому для різних функцій $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ коефіцієнти $a_1 \neq a_2$ ($\Leftrightarrow b_1 \neq b_2$).

Нехай далі, x_0 – абсциса (можливої) точки перетину графіків функцій $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$. Тоді повинна справджуватися рівність $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ або ж, що теж саме, $x_0^2+a_1x_0+b_1 = x_0^2+a_2x_0+b_2$, яку можна розглядати як рівняння відносно невідомого x_0. Звідки $a_1x_0+b_1 = a_2x_0+b_2$, $x_0(a_1-a_2) = b_2-b_1$. А через те, що для різних функцій $a_1-a_2 = b_2-b_1 \neq 0$, $x_0 = \frac{b_2-b_1}{a_1-a_2} = 1$. Звідки
$y_0 = f_1(x_0) = f_2(x_0) = 1^2 + a_2 \cdot 1 + b_2 = 1 + (a_2 + b_2) = 1 + 2015 = 2016$.

Таким чином, точка $Q(1; 2016)$ належить графіку кожної із зазначених функцій.

Задача 2.

З'ясуємо вид трикутника ABC, для якого довжина медіани CC_0 вдвічі менша за довжину відповідної сторони AB (C_0 – середина сторони AB).

I спосіб

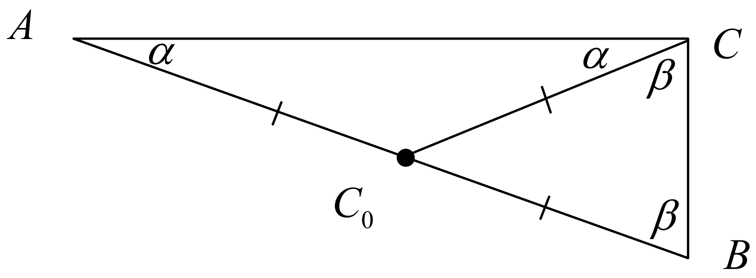


Рис. 8: до 1-го способу розв'язання задачі 2

1. Нехай $\angle A = \alpha$, а $\angle B = \beta$, $AB = c$. Оскільки C_0 – середина сторони AB, то $AC_0 = C_0B = \frac{c}{2}$. Крім того, за умовою $CC_0 = \frac{c}{2}$.

2. Розглянемо $\triangle\ AC_0C$. В ньому: $AC_0 = C_0C = \frac{c}{2}$. І тому (за означенням) $\triangle\ AC_0C$ є рівнобедреним трикутником з основою AC. Але ж тоді (за властивістю «кутів при основі рівнобедреного трикутника») $\angle ACC_0 = \angle CAC_0 = \alpha$.

3. Розглянемо $\triangle\ BC_0C$. В ньому: $C_0B = C_0C = \frac{c}{2}$. І тому (за визначенням) $\triangle\ BC_0C$ є рівнобедреним трикутником з основою BC. Але ж тоді (за властивістю «кутів при основі рівнобедреного трикутника») $\angle BCC_0 = \angle CBC_0 = \beta$.

4. За аксіомою вимірювання кутів має місце рівність

$$\angle ACB = \angle ACC_0 + \angle C_0CB = \alpha + \beta\,.$$

5. Розглянемо $\triangle\ ABC$. В ньому: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ (згідно введених позначень); $\angle ACB = \alpha + \beta$ (за доведеним у пункті **4.**).

Оскільки сума внутрішніх кутів довільного трикутника становить 180^0, то має місце рівність: $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180$, звідки $\alpha + \beta = 90^0$.

Таким чином, з урахуванням пункту **4.**, $\angle ACB = 90^0$. І тому трикутник ABC є *прямокутним.*

II спосіб

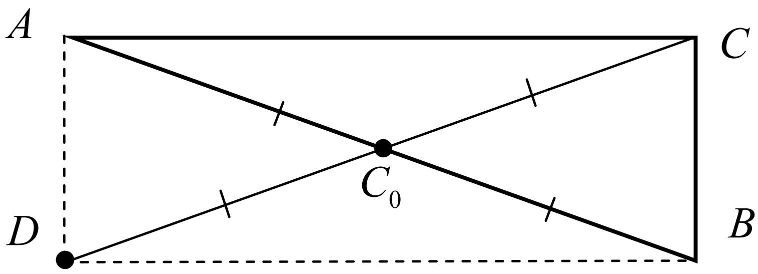


Рис. 9: до 2-го способу розв'язання задачі 2

1. Нехай $AB = c$. Оскільки C_0 – середина AB, то $AC_0 = C_0B = \frac{c}{2}$. Крім того, за умовою $CC_0 = \frac{c}{2}$.

2. На промені CC_0 за точку C_0 відкладемо відрізок C_0D, довжина якого дорівнює дожині медіани CC_0. Тоді (за аксіомою вимірювання відрізків) має місце рівність $CD = CC_0 + C_0D = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$.

3. Сполучимо точки A і D та B і D відрізками й розглянемо одержаний чотирикутник $ACBD$. В ньому: $AC_0 = C_0B$ – за умовою, згідно введених позначень; $CC_0 = C_0D$ – за побудовою. Таким чином, у чотирикутника $ACBD$ діагоналі точкою перетину C_0 діляться навпіл. І тому за ознакою паралелограма чотирикутник $ACBD$ є паралелограмом.

4. Згідно введених позначень, довжина діагоналі AB становить c; за пунктом 2. довжина діагоналі CD також становить c. Таким чином довжини діагоналей паралелограма $ACBD$ є рівними. І тому за ознакою прямокутника чотирикутник $ACBD$ є прямокутником.

Звідки й випливає, що $\angle ACB = 90^0$. І тому трикутник ABC є *прямокутним.*

III спосіб

Нехай $AB = c$. Оскільки C_0 – середина AB, то $AC_0 = C_0B = \frac{c}{2}$. Крім того, за умовою $CC_0 = \frac{c}{2}$.

Таким чином, точка C_0 є рівновіддаленою від вершин трикутника ABC. І тому (за визначенням) C_0 є центром кола ω, описаного навколо $\triangle ABC$. Оскільки сторона-хорда AB містить центр C_0 кола ω, то AB – діаметр кола ω. Але ж тоді градусна міра кута ACB, який спирається на діаметр AB, становить 90^0. І тому трикутник ABC є *прямокутним.*

IV спосіб

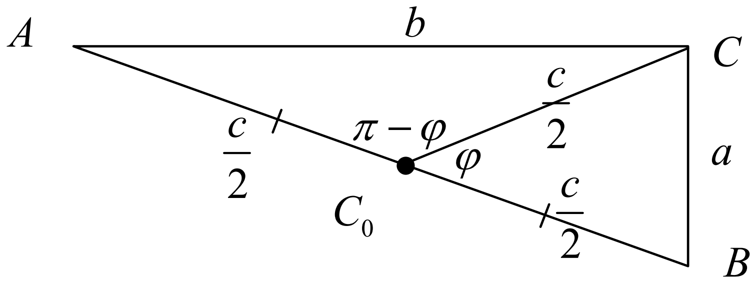


Рис. 10: до 4-го способу розв'язання задачі 2

1. Нехай $BC = a$, а $AC = b$, $AB = c$, C_0 – середина сторони AB, а $\angle BC_0C = \varphi$. Тоді: $AC_0 = C_0B = CC_0 = \frac{c}{2}$;
$\angle AC_0C = 180^0 - \varphi$ (за властивістю суміжних кутів).

2. Розглянемо $\triangle\ CC_0B$. Тоді за теоремою косинусів та, з урахуванням введених позначень, має місце рівність

$$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\varphi. \qquad (9.2.1)$$

3. Розглянемо $\triangle\ ACC_0$. Тоді за теоремою косинусів та, з урахуванням введених позначень, має місце рівність
$b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\left(180^0 - \varphi\right) \Rightarrow$

$$b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\varphi. \qquad (9.2.2)$$

4. Додавши ліві та праві частини рівностей (9.2.1) та (9.2.2), одержимо

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = c^2. \qquad (9.2.3)$$

Таким чином, для довжин сторін $\triangle\ ABC$ виконано умови оберненої теореми Піфагора. І тому $\triangle\ ABC$ є *прямокутним* з прямим кутом C.

V спосіб

За формулою для обчислення довжини медіани трикутника за довжинами його сторін має місце рівність $CC_0^2 = m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{2}$. Оскільки (за умовою) $CC_0 = \frac{c}{2}$, то $\frac{c^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{2}$, звідки $a^2 + b^2 = c^2$. І тому за оберненою теоремою Піфагора $\triangle\ ABC$ є *прямокутним.*

Відповідь: *прямокутний.*

Задача 3.

Нехай ABC – прямокутний трикутник з прямим кутом при вершині C, CH – висота, h – її довжина $\angle B = \beta$, c – довжина гіпотенузи AB, O – середина гіпотенузи AB.

I спосіб

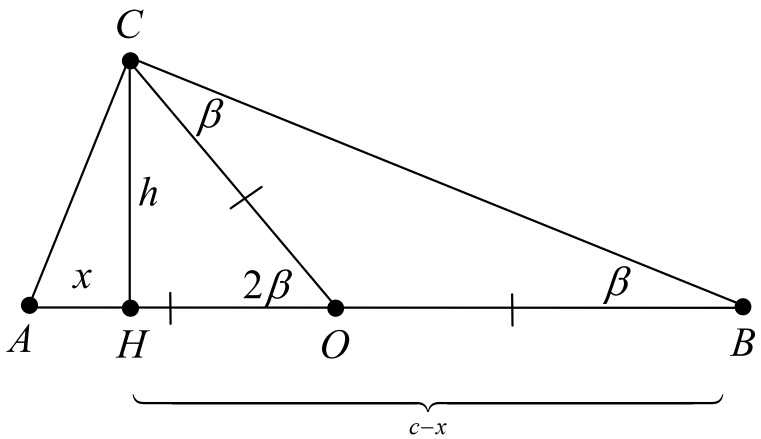


Рис. 11: до задачі 3

1. Оскільки H – основа висоти (опущеної на гіпотенузу), то AH і HB – проекції катетів AC і BC (відповідно) на гіпотенузу.

Нехай далі $AH = x$, тоді (згідно введених позначень) $HB = c - x$. Оскільки в прямокутному трикутнику добуток проекцій катетів на гіпотенузу дорівнює квадрату висоти, опущеної з вершини прямого кута, то

$$x(c - x) = h^2. \tag{9.3.1}$$

З іншого боку (за умовою), має місце рівність

$$c^2 = 8h^2. \tag{9.3.2}$$

Тому, з урахуванням (9.3.1) та (9.3.2), маємо рівняння

$$c^2 = 8x(c - x) \Leftrightarrow 8x^2 - 8cx + c^2 = 0. \tag{9.3.3}$$

Розв'яжемо це рівняння:
$D = (-8c)^2 - 4 \cdot 8 \cdot c^2 = 64c^2 - 32c^2 = 32c^2 > 0$, звідки $\sqrt{D} = 4c\sqrt{2}$;
$x_1 = \frac{8c-4c\sqrt{2}}{16} = \frac{2c-c\sqrt{2}}{4} > 0$, $x_2 = \frac{2c+c\sqrt{2}}{4} > 0$. Очевидно, що $x_1 < x_2$.

2. Заради визначеності будемо вважати, що $AC \leqslant BC$. Тоді за властивістю похилих та їх проекцій має місце нерівність $AH \leqslant HB$. Звідки $AH = x_1 = \dfrac{2c - c\sqrt{2}}{4}$, а $HB = c - x_1 = c - \dfrac{2c - c\sqrt{2}}{4} = \dfrac{2c + c\sqrt{2}}{4} = x_2$.

3. За припущенням, та згідно введених позначень, O – середина гіпотенузи AB. Тому $AO = OB = \frac{c}{2}$. Крім того, оскільки $HB \geqslant AH$, то $HO = HB - OB = \dfrac{2c + c\sqrt{2}}{4} - \dfrac{c}{2} = \dfrac{c\sqrt{2}}{4}$.

4. Розглянемо $\triangle\, CHO$. В ньому: $\angle CHO = 90^0$, бо CH – висота;

$CH = h = \dfrac{c}{2\sqrt{2}} = \dfrac{c\sqrt{2}}{4}$ – як наслідок з (9.3.2);

$HO = \dfrac{c\sqrt{2}}{4}$ – за встановленим у пункті **3.**

Таким чином, прямокутний $\triangle\, CHO$ є рівнобедреним. І тому $\angle HOC = 45^0$.

5. За властивістю прямокутного трикутника $CO = AO = OB = \frac{c}{2}$. Звідки трикутник COB є рівнобедреним з основою CB. І тому за властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника має місце рівність $\angle OCB = \angle OBC = \beta$. Але ж тоді за властивістю зовнішнього кута трикутника COB виконується рівність $\angle HOC = 2\beta$.

А з того що $\angle HOC = 45^0$, маємо $\beta = 22,5^0 = \angle B$. Звідки за властивістю гострих кутів прямокутного трикутника ABC виконується рівність $\angle A = 90^0 - \angle B = 90^0 - 22,5^0 = 67,5^0$.

II спосіб

1. За умовою $c^2 = 8h^2$, звідки $c = 2\sqrt{2}h$, $\frac{c}{2} = h\sqrt{2}$.

2. За властивістю прямокутного трик-ка $CO = AO = OB = \frac{c}{2} = h\sqrt{2}$.

3. В прямокутному $\triangle\, CHO$: $CH = h$, $CO = h\sqrt{2}$. Тому за визначенням синуса гострого кута прямокутного трикутника має місце рівність $\sin\angle HOC = \frac{CH}{CO} = h : h\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Звідки $\angle HOC = 45^0$.

4. $\triangle\, COB$ є рівнобедреним з основою CB. І тому має місце рівність $\angle OCB = \angle OBC = \beta$. Але ж тоді за властивістю зовнішнього кута трикутника COB виконується рівність $\angle HOC = 2\beta$.

А з того що $\angle HOC = 45^0$, маємо $\beta = 22,5^0 = \angle B$. Звідки $\angle A = 90^0 - \angle B = 90^0 - 22,5^0 = 67,5^0$.

Відповідь: $22,5^0;\ 67,5^0$.

III спосіб

1. Нехай D – точка, що є симетричною до точки C відносно прямої AB. Тоді (за визначенням): $CD \perp AB$ та $HD = CH$.

2. «За двома катетами» $\triangle\ AHC = \triangle\ AHD$, $\triangle\ BHC = \triangle\ BHD$. Звідки $AC = AD$, $BC = BD$. Тоді $\triangle\ ACB = \triangle\ ADB$ за трьома сторонами. І тому $\angle ACB = \angle ADB = 90^0$ – як відповідні кути рівних трикутників.

3. Нехай O – середина AB. Тоді (за властивістю прямокутного трикутника) з $\triangle\ ACB$ маємо $OA = OB = OC$, а з $\triangle\ ADB$ – $OA = OB = OD$. І тому точка O є центром кола, описаного навколо чотирикутник $ACBD$.

4. Розглянемо $\triangle\ COD$. В ньому: $CD = 2h$ (за побудовою), $CO = OD = \frac{c}{2}$. Звідки $OC^2 + OD^2 = \frac{c^2}{2}$. За умовою $c^2 = 8h^2$. Тому $OC^2 + OD^2 = 4h^2$. З іншого боку $CD^2 = (2h)^2 = 4h^2 = OC^2 + OD^2$.

І тому за оберненою теоремою Піфагора $\triangle\ COD$ є прямокутним з прямим кутом вершині O. Тобто $\angle COD = 90^0$.

5. Оскільки $\triangle\ COD$ є рівнобедреним, то $\angle COH = 45^0$. Але ж тоді (за властивістю вписаних та центральних кутів кола) $\angle CBA = \frac{\angle COA}{2} = 22,5^0$. Звідки $\angle CAB = 67,5^0$.

А чи знали Ви?

Добре відомо, що якщо через H позначити основу висоти, проведеної до гіпотенузи AB, то для прямокутного трикутника справджуються рівності: 1^0 $AH \cdot HB = CH^2$ $(*)$; 2^0 $AC^2 = AH \cdot AB$ ($BC^2 = BH \cdot AB$) $(**)$. Та чи знали Ви, що **обернені твердження не є істинними**? Тобто, якщо H – основа висоти, проведеної до сторони AB, та справджується рівність $(*)$ (або ж одна з рівностей $(**)$), то $\triangle\ ABC$ необов'язково прямокутний!

?! Наведіть відповідні приклади таких трикутників.

Задача 4.

З'ясуємо питання щодо значень параметра a, при яких рівняння

$$\left(x^2 + (2a-1)x - 2a\right)\left(x^2 + (1-a)x - a\right) = 0 \qquad (9.4.1)$$

має три різні корені.

1. Не важко перевірити, що:
$x^2+(2a-1)x-2a=(x+2a)(x-1)\,;\quad x^2+(1-a)x-a=(x-a)(x+1)\,.$

Тому рівняння (9.4.1) можна подати у вигляді рівносильного рівняння

$$(x+2a)(x-1)(x-a)(x+1)=0. \tag{9.4.2}$$

Звідки $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=-2a$ та $x_4=a$ – дійсні корені рівняння (9.4.2), а тому й рівняння (9.4.1).

2. Оскільки $x_1\neq x_2$, то рівняння (9.4.1) має **три різні** корені лише в одному з наступних випадків:

$$1)\begin{cases}x_3=x_4\\x_3\neq x_1\\x_3\neq x_2,\end{cases}\quad 2)\begin{cases}x_3\neq x_4\\x_3=x_1\\x_4\neq x_2,\end{cases}\quad 3)\begin{cases}x_3\neq x_4\\x_3=x_2\\x_4\neq x_1,\end{cases}\quad 4)\begin{cases}x_3\neq x_4\\x_4=x_1\\x_3\neq x_2,\end{cases}\quad 5)\begin{cases}x_3\neq x_4\\x_4=x_2\\x_3\neq x_1.\end{cases}$$

Розглянемо окремо кожен із зазначених випадків.

2.1. $$\begin{cases}x_3=x_4\\x_3\neq x_1\\x_3\neq x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a=a\\-2a\neq -1\\a\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\0\neq -1\\0\neq 1\end{cases}\Rightarrow a=0\,.$$

2.2. $$\begin{cases}x_3\neq x_4\\x_3=x_1\\x_4\neq x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a\neq a\\-2a=-1\\a\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\neq 0\\a=\frac12\\\frac12\neq 1\end{cases}\Rightarrow a=\frac12\,.$$

2.3. $$\begin{cases}x_3\neq x_4\\x_3=x_2\\x_4\neq x_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a\neq a\\-2a=1\\a\neq -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\neq 0\\a=-\frac12\\-\frac12\neq 1\end{cases}\Rightarrow a=-\frac12\,.$$

2.4. $$\begin{cases}x_3\neq x_4\\x_4=x_1\\x_3\neq x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a\neq a\\a=1\\-2a\neq -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\neq 0\\a=1\\-2\neq 1\end{cases}\Rightarrow a=1\,.$$

2.5. $$\begin{cases}x_3\neq x_4\\x_4=x_2\\x_3\neq x_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a\neq a\\a=-1\\-2a\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\neq 0\\a=-1\\2\neq 1\end{cases}\Rightarrow a=-1\,.$$

Таким чином, дане рівняння має точно три різних корені лише при $a\in\{-1;-\frac12;0;\frac12,1\}$.

Відповідь: $0;\pm\dfrac12;\pm1\,.$

Задача 5.

Теорема 1. На площині дано шість точок загального положення (жодні три з них не належать одній прямій). Кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього кольору. Тоді знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають один колір.

Дивись розв'язання задачі 5 для 8 класу.

Доповнення до задачі 5.

Теорема 2. На площині дано шість точок A, B, C, D, E, F загального положення. Кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього кольору. Тоді існують принаймні два трикутники, сторони кожного з яких розфарбовано в один колір (можливо різний для кожного з трикутників).

Доведення.

Частина 1. За теоремою 1 при будь-якому способі розфарбування завжди існує трикутник (позначимо його як ABC), сторони якого розфарбовано в один колір. Також без втрати загальності можна вважати, що сторони трикутника ABC розфарбовано у синій колір. Тоді:

— якщо сторони трикутника DEF пофарбовано в один колір, то в доведенні твердження немає потреби;

— якщо ж сторони трикутника DEF пофарбовано в різні кольори, то *можливими є лише дві ситуації*:

1) або цей трикутник має 2 сині сторони та 1 червону,

2) або ж 2 червоні та 1 синю.

Без втрати загальності (бо за допомогою перепозначення цього завжди можна досягти) можна вважати, що:

в першій ситуації саме сторона FD є червоною, а

в другій ситуації – що FD є синьою.

Тоді, в першій ситуації можливими є два випадки:

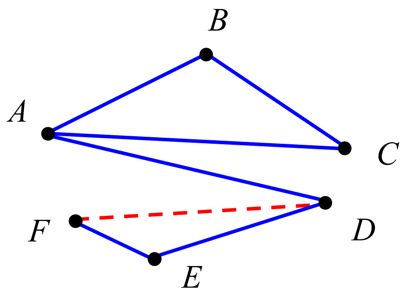
випадок 1.1. відрізок AD синій – рис. 12 a);

випадок 1.2. відрізок AD червоний – рис. 12 b).

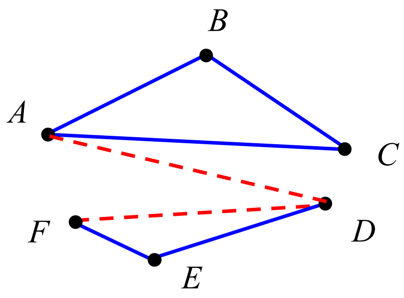
В другій ситуації також два випадки:

випадок 2.1. відрізок AD синій – рис. 12 c);

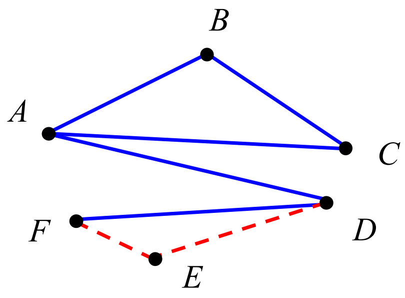
випадок 2.2. відрізок AD червоний – рис. 12 d).



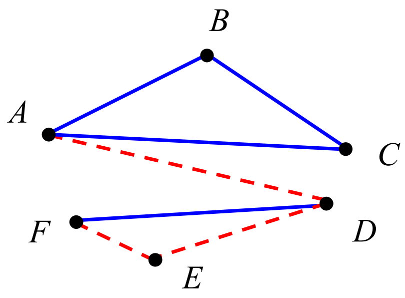
$a)$ ілюстративний *приклад* до **випадку 1.1.**



$b)$ ілюстративний *приклад* до **випадку 1.2.**



$c)$ ілюстративний *приклад* до **випадку 2.1.**



$d)$ ілюстративний *приклад* до **випадку 2.2.**

Рис. 12: до доведення Теореми 2

Частина 2. Подальші міркування проведемо методом від супротивного, припустивши що другого трикутника (крім ABC) зі сторонами одного кольору бути не може (не існує). З урахуванням зазначеного припущення розглянемо окремо кожен з випадків 1.1., 1.2., 2.1. та 2.2.

Випадок 1.1. CD повинен бути червоним, CF – синім, AF – червоним. Але ж тоді: якщо BF – червоний, то BDF – новий червоний трикутник; якщо ж BF – синій, то BDF – новий синій трикутник.

Випадок 1.2. AF повинен бути синім, FC – червоним, CD – синім, BF і BD – червоними. Але ж тоді BDF – новий червоний трикутник.

Випадок 2.1. AF повинен бути червоним, AE – синім, CD – червоним, CE – синім. Але ж тоді ACE – новий синій трикутник.

Випадок 2.2. AE повинен бути синім, BE – червоним, BF і BD – синіми. Але ж тоді BFD – новий синій трикутник.

Таким чином, в кожному з чотирьох можливих випадках одержали суперечність із припущенням. І тому наше припущення про неможливість другого трикутника зі сторонами одного кольору є хибним.

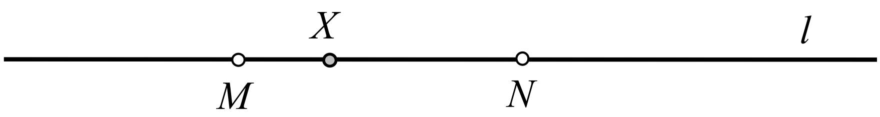
З останнього й випливає істинність (справедливість) теореми 2.

10 клас

Задача 1.

Дану задачу розв'яжемо окремо для кожного із 4-х суттєво різних випадків взаємного розташування двох (різних) точок та прямої на площині.

1 випадок: $M, N \in l$.



Для будь-якої точки X відрізка MN за аксіомою вимірювання відрізків справджується рівність $XM + XN = MN$.

Для будь-якої точки $Y \in l$, яка не належить відрізку MN (за аксіомою розташування трьох точок на прямій), виконується лише одна з умов:

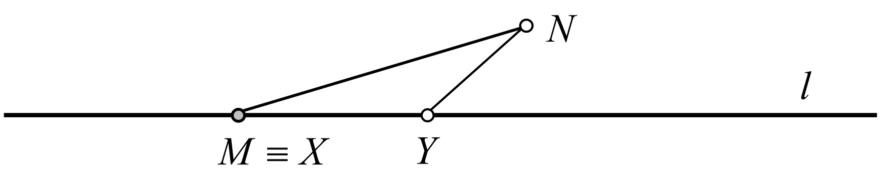
($\star$) або точка M лежить між точками Y і N,

($\star\star$) або ж точка N лежить між точками M і Y.

В першому випадку (за аксіомою вимірювання відрізків) справджується нерівність $YM + YN = YM + MN > MN$ (1*), а в другому випадку – нерівність $YM + YN = YN + MN > MN$ (2*).

Таким чином, коли $M, N \in l$, то шуканою точкою буде будь-яка точка X відрізка MN.

2 випадок: *тільки одна з точок M або N належить прямій l.*



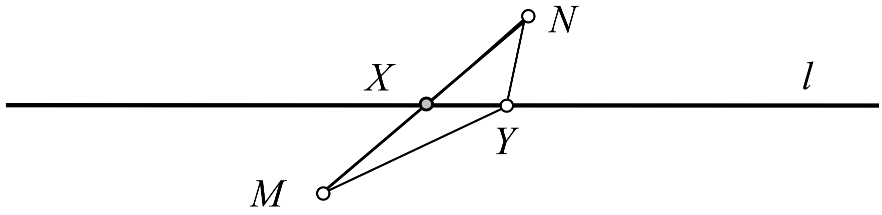
Заради визначеності будемо вважати, що саме точка $M \in l$, а $N \notin l$.

Якщо $X \equiv M \in l$, то очевидно, що $XM = 0$ і тому справджується рівність $XM + XN = MN$.

Якщо $Y \in l$ та не співпадає із точкою M, то фігура MYN є трикутником і тому за «нерівністю трикутника» справджується нерівність $YM + YN > MN$.

Таким чином, коли $M \in l$, а $N \notin l$, то шуканою точкою буде точка $X \equiv M$; якщо ж $N \in l$, а $M \notin l$, то шуканою точкою буде точка $X \equiv N$.

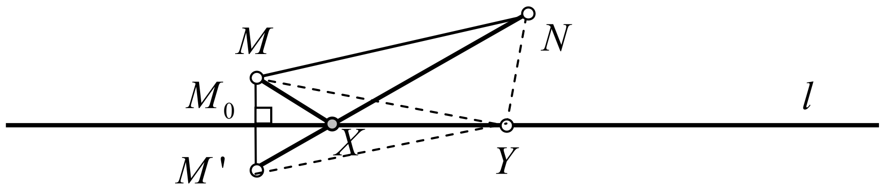
3 випадок: *M і N належать різним півплощинам відносно l.*



Оскільки точки M і N належить різним півплощинам відносно прямої l, то l перетинає відрізок MN у певній точці X. Очевидно, що $XM + XN = MN$. Якщо $Y \in l$ та не співпадає із точкою X, то фігура MYN є трикутником, і тому за «нерівністю трикутника» справджується нерівність $YM + YN > MN$.

Таким чином, коли перетин прямої l та відрізка MN не є $\varnothing$, то шуканою точкою буде точка їх перетину.

4 випадок: *M і N належать одній півплощині відносно l.*



Нехай M' – точка, що є симетричною до точки M відносно прямої l. Тоді точки M' і N належить різним півплощинам відносно прямої l, і тому l перетинає відрізок $M'N$ у певній точці X. Не важко показати, що $XM + XN = XM' + XN = M'N$. Якщо $Y \in l$ та не співпадає із точкою X, то за «нерівністю трикутника» справджується нерівність $YM + YN = YM' + YN > M'N$.

Таким чином, коли l не перетинає відрізок MN, то шуканою точкою буде точка перетину прямої l з відрізком $M'N$.

Відповідь: якщо перетин прямої l та відрізка MN не є $\varnothing$, то шукана точка належить їх перетину; якщо пряма l не має спільних точок з відрізком MN, то шуканою точкою буде точка перетину прямої l з відрізком $M'N$, де M' – точка, що є симетричною точці M відносно l.

Задача 2.

I спосіб

1) Оскільки a і b – додатні числа, то a^2 і b також додатні числа і тому за нерівністю Коші

$$a^2 + b \geqslant 2\sqrt{a^2 \cdot b}. \tag{10.2.1}$$

2) Оскільки a і b – додатні числа, то $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b^2}$ також додатні числа і тому за нерівністю Коші

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b^2}}. \tag{10.2.2}$$

Таким чином, з урахуванням нерівностей (10.2.1) і (10.2.2), має місце нерівність

$$\left(a^2 + b\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b^2}\right) \geqslant 2\sqrt{a^2 \cdot b} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b^2}} = 4\sqrt{\frac{a^2 b}{ab^2}} = 4\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

II спосіб

$$\left(a^2 + b\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b^2}\right) = a + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a} + \frac{1}{b} = \left(a + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{b}} + 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b}{a}} = 4\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

III спосіб

$$\left(a^2 + b\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b^2}\right) \geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow \left(a^2 + b\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b^2}\right) - 4\sqrt{\frac{a}{b}} \geqslant 0.$$

$$\left(a^2 + b\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b^2}\right) - 4\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(a + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a}\right) - 4\sqrt{\frac{a}{b}} =$$

$$= \left(a - 2\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} - 2\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{b}{a}\right) =$$

$$= \left(\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{b}} + \left(\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right) =$$

$$= \left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2 + \left(\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \geqslant 0.$$

Задача 3.

1) Очевидно, що

$$x^2 - y^2 = 2015 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 2015. \qquad (10.3.1)$$

2) Розкладемо число 2015 на прості множники. Не важко перевірити, що $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Тому рівняння (10.3.1) можна подати у вигляді

$$(x-y)(x+y) = 1 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31. \qquad (10.3.2)$$

3) За умовою x, y – натуральні числа. І тому $(x-y)$ та $(x+y)$ також є натуральними числами. А з урахуванням рівності (10.3.2) $x > y$.

4) Очевидно, що для натуральних $x > y$ виконується нерівність

$$(x-y) < (x+y). \qquad (10.3.3)$$

І тому добуток двох натуральних множників $(x-y)$ та $(x+y)$ дорівнює добутку чотирьох не складених чисел $1{\cdot}5{\cdot}13{\cdot}31$ лише в одному з 4 можливих випадках

$$\left[\begin{array}{ll} (1) & \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=2015 \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} x-y=5 \\ x+y=403 \end{cases} \\ (3) & \begin{cases} x-y=13 \\ x+y=155 \end{cases} \\ (4) & \begin{cases} x-y=31 \\ x+y=65 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=1 \\ 2x=2016 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=5 \\ 2x=408 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=13 \\ 2x=168 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=31 \\ 2x=96 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1007 \\ x=1008 \end{cases} \\ \begin{cases} y=199 \\ x=204 \end{cases} \\ \begin{cases} y=71 \\ x=84 \end{cases} \\ \begin{cases} y=17 \\ x=48 \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $(1008; 1007)$, $(204; 199)$, $(84; 71)$, $(48; 17)$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! «2015»[4] Для кожного натурального числа n знайдіть усі такі пари натуральних чисел x і y, що $x^n - y^n = 2015$.

[4] задачу запозичено із «Завдань для відбіркових етапів» XVIII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка

Задача 4.

I. Аналіз (та ідея відновлення).

1.1. Нехай ω – коло, описане навколо $\triangle\ ABC$; α, β, γ – (градусні) міри кутів A, B, C, а AA', BB', CC' – бісектриси (відрізки бісектрис) кутів A, B, C відповідно, причому $A', B', C' \in \omega$. Тоді:

1.1.1) $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ (як сума кутів довільного трикутника);

1.1.2) (за визначенням бісектриси кута) мають місце рівності

$$\angle BAA' = \angle A'AC = \frac{\alpha}{2}, \angle CBB' = \angle B'BA = \frac{\beta}{2}, \angle ACC' = \angle C'CB = \frac{\gamma}{2}.$$

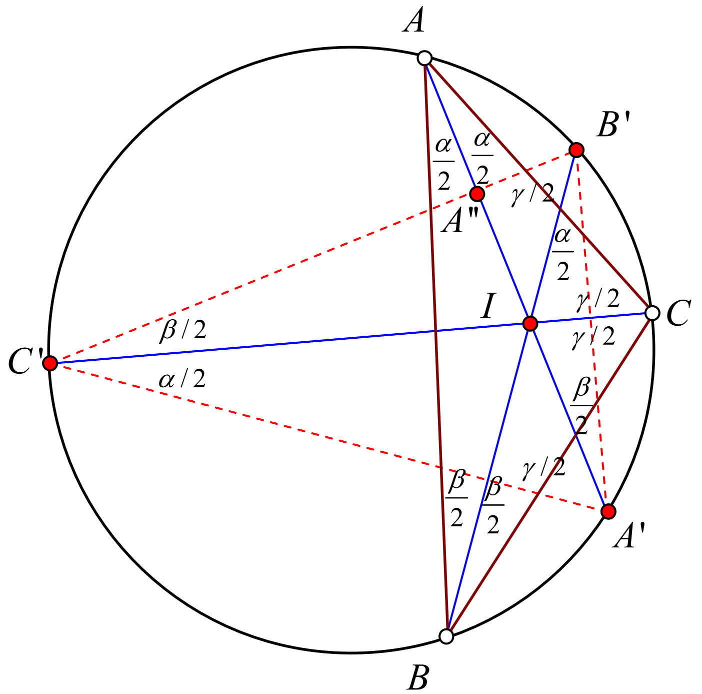


Рис. 13:

1.2. Нехай далі I – точка перетину хорд AA', BB', CC'. *Покажемо, що I є точкою перетину висот $\triangle\ A'B'C'$.*

1.2.1) Позначимо через A'' точку перетину AA' з $B'C'$, через $B'' = BB' \bigcap A'C'$, а через $C'' = CC' \bigcap A'B'$.

1.2.2) Доведемо, що $A'A''$ висота $\triangle\ A'B'C'$.

1.2.2.1) За властивістю кутів, вписаних у коло (що спираються на одну дугу), мають місце рівності:

$$\angle C'A'A = \angle C'CA = \frac{\gamma}{2}, \angle B'C'C = \angle B'BC = \frac{\beta}{2}, \angle A'C'C = \angle A'AC = \frac{\alpha}{2}.$$

1.2.2.2) Розглянемо $\triangle\ C'A'A''$. В ньому (за доведеним вище):

$\angle C'A'A'' = \angle C'A'A = \dfrac{\gamma}{2}$; $\angle A'C'A'' = \angle A'C'C + \angle B'C'C = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2}$. Звідки

$\angle A'A''C' = 180^0 - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 90^0$. І тому $A'A''$ висота $\triangle A'B'C'$.

1.2.2) Повторюючи аналогічні міркування, не важко показати, що $B'B''$ та $C'C''$ також висоти $\triangle A'B'C'$.

Висновок: таким чином, точка перетину бісектрис $\triangle ABC$ співпадає із точкою перетину висот $\triangle A'B'C'$; з іншого боку – шукані вершини (вихідного) трикутника належать колу ω. І тому є точками перетину ω з променями, що містять висоти $\triangle A'B'C'$.

II. Побудова (відновлення $\triangle ABC$ за точками A', B', C').

2.1. Сполучимо точки A', B', C' відрізками.

2.2. Побудуємо висоти $\triangle A'B'C'$ та позначимо через I точку їх перетину.

2.3. Проведемо прямі $A'I, B'I, C'I$ та позначимо другі точки їх перетину з колом ω як A_0, B_0, C_0 (відповідно).

2.4. Сполучимо точки A_0, B_0, C_0 відрізками. Тоді $\triangle A_0B_0C_0$ – шуканий трикутник.

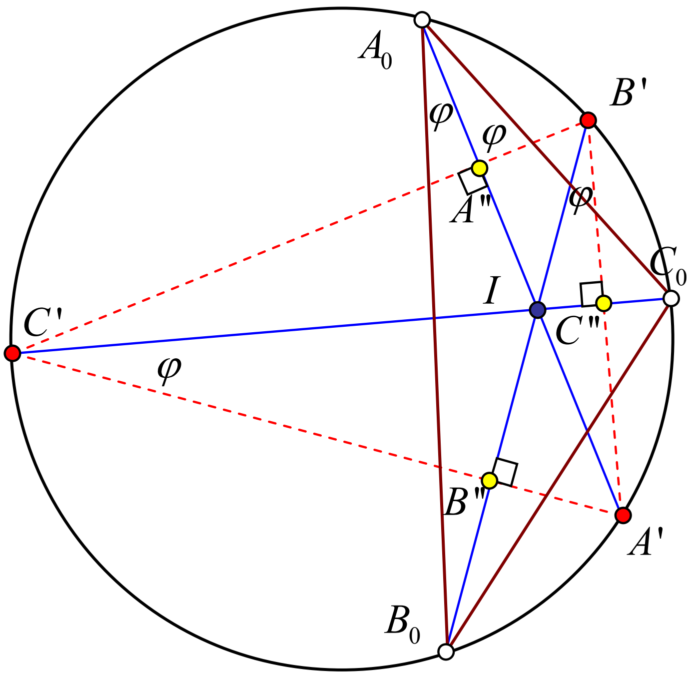


Рис. 14:

III. Доведення.

На цьому етапі необхідно показати, що $\triangle A_0B_0C_0$, одержаний в результаті виконання побудов **2.1. – 2.4.**, співпадає із початковим $\triangle ABC$. Очевидно, що для цього **достатньо** показати співпадіння їх вершин.

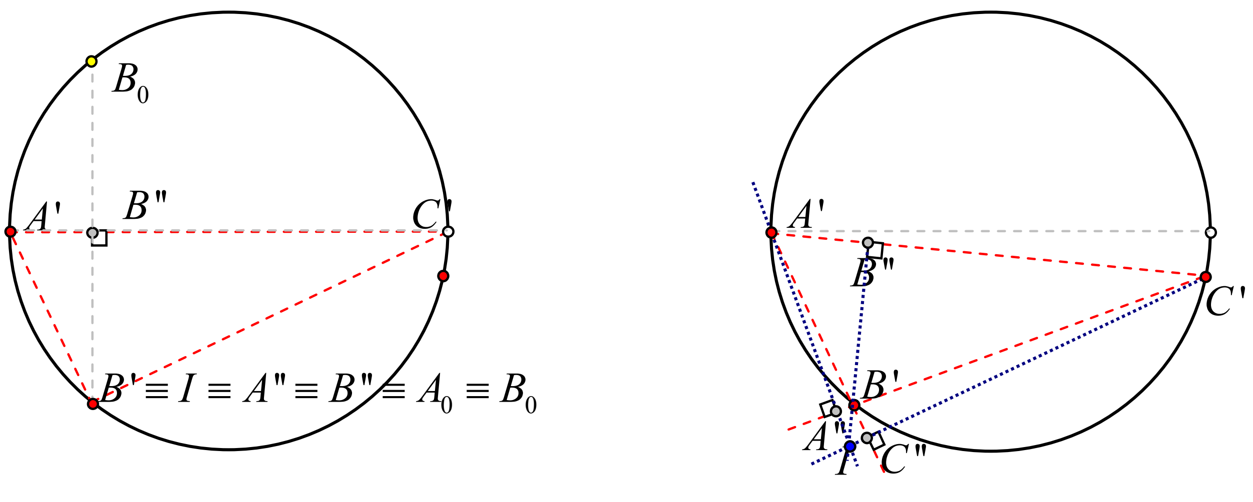
3.1. Спочатку доведемо, що A_0A', B_0B', C_0C' – бісектриси (відрізки бісектрис) кутів A_0, B_0, C_0 (відповідно) $\triangle\ A_0B_0C_0$.

Нехай $\angle B_0A_0A' = \varphi$, тоді $\angle B_0B'A' = \angle B_0A_0A' = \varphi$ (як кути, що спираються на одну дугу); з іншого боку $\angle B'IC'' = \angle C'IB'' = 90^0 - \varphi$ а тому $\angle A'C'C_0 = \varphi$, звідки й $\angle A'A_0C_0 = \varphi$. Тому A_0A' – бісектриса $\angle B_0A_0C_0$. Повторюючи міркування не важко показати, що B_0B', C_0C' – бісектриси кутів B_0, C_0. Тобто встановлено, що ортоцентр $\triangle\ A'B'C'$ співпадає із точкою перетину бісектрис $\triangle\ A_0B_0C_0$.

3.2. Тепер покажемо, що вершини $\triangle\ A_0B_0C_0$ співпадають з вершинами вихідного $\triangle\ ABC$. Як випливає з етапу «**Аналіз**», точка перетину бісектрис $\triangle\ ABC$ також співпадає з ортоцентром I $\triangle\ A'B'C'$. І тому, наприклад точки A', I, A_0, A належать одній прямій $(A'I)$. З іншого боку, точки A_0, A – другі точки перетину прямої $A'I$ з колом ω (причому $A' \in \omega$), тобто, визначаються однозначно і тому співпадають.

Так само співпадають вершини B і B_0 та C і C_0.

IV. Дослідження.



a) *b)*

Рис. 15:

4.1. Якщо точка I перетину висот $\triangle\ A'B'C'$

4.1.1) належить колу ω (тоді і лише тоді, коли $\triangle\ A'B'C'$ є прямокутним – **Твердження 4.1**), або ж

4.1.2) розташована поза колом ω (тоді і лише тоді, коли $\triangle\ A'B'C'$ є тупокутним – **Твердження 4.2**), то задача про побудову вписаного у коло ω трикутника ABC, бісектрисами кутів якого були би хорди AA', BB', CC', не має розв'язків, бо точка I перетину бісектрис шуканого $\triangle\, ABC$ (вписаного в коло ω за умовою) повинна бути внутрішньою його точкою, а тому належати внутрішній частині круга (обмеженого колом ω).

4.2. З урахуванням пункту **4.1. задача про відновлення (шуканого) трикутника за точками $A', B', C' \in \omega$ унеможливлює випадки** 4.1.1) та 4.1.2) (бо за умовою задачі точки A', B', C' першочергово визначалися вершинами («вихідного-шуканого») $\triangle\, ABC$, що, в свою чергу, відразу накладає додаткову вимогу на гострокутність $\triangle\, A'B'C'$.

4.2.1) **«Існування»** шуканої фігури (відновлення вихідного трикутника) гарантується можливістю виконання кожної з побудов **2.1. – 2.4.**

4.2.2) **«Єдиність»** шуканого розв'язку (відновлення вихідного трикутника) даної позиційної задачі на побудову випливає з етапу «**Доведення**».

Справедливість Твердження 4.1 *та* Твердження 4.2 *пропонуємо довести самостійно.*

Таким чином, дана задача завжди має **єдиний розв'язок!**

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! *«Відновлюємо прямокутний трикутник»*[5]

Нехай CH – висота зображеного на дошці трикутника ABC, в якому $\angle C = 90^0$, $CA \neq CB$. Учитель математики провів серединні перпендикуляри до катетів CA і CB, які перетнули пряму CH у точках K і M відповідно, а потім витер рисунок, залишивши на дошці тільки точки C, K і M. Відновіть трикутник ABC, використовуючи лише циркуль та лінійку.

Вказівка: зверніть увагу на той факт, що пряма CO (O – середина гіпотенузи AB) дотикається кола ω, побудованого на відрізку KM як на діаметрі, саме в точці O.

[5] задачу запозичено із «Завдань для відбіркових етапів» XVIII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка

Задача 5.

Позначимо дані нерівності відповідно як

$$0 < x < 1 \qquad \text{та} \tag{10.5.1}$$

$$ax^2 - x + 1 - a < 0. \tag{10.5.2}$$

Очевидно, що розв'язками нерівності (10.5.1) є проміжок $(0;1)$. Знайдемо всі ті значення параметра a, при яких розв'язки нерівності (10.5.2) є підмножиною проміжку $(0;1)$.

I спосіб

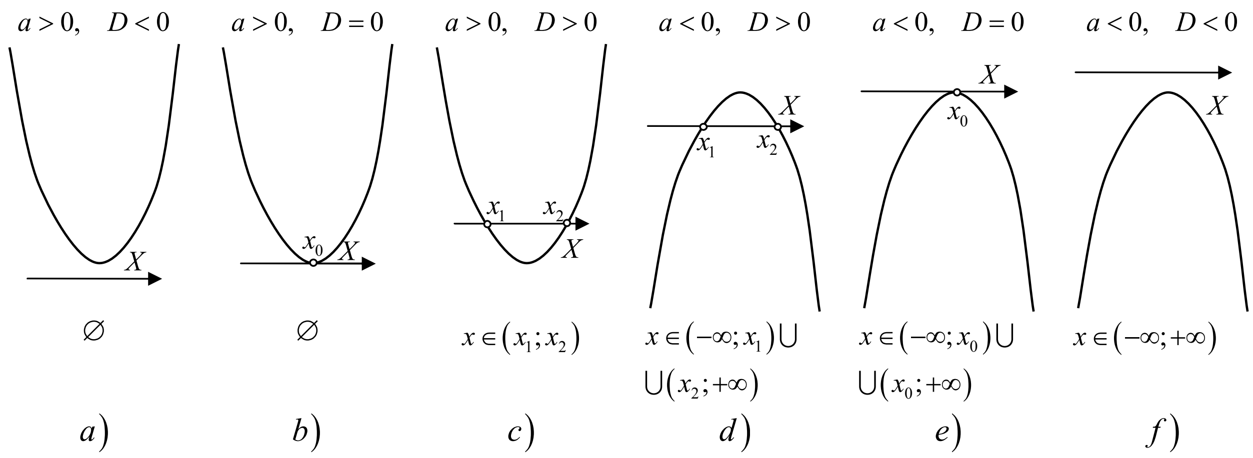


Рис. 16:

1. Нехай $a = 0$. Тоді нерівність (10.5.2) набуває вид $-x + 1 < 0$, звідки $x > 1$, $x \in (1; +\infty)$. Очевидно, що $(1; +\infty)$ не є підмножиною $(0;1)$.

2. Нехай тепер $a \neq 0$. Тоді розв'язки нерівності (10.5.2), в залежності від значень параметра a, можна (інтерпретувати) унаочнити за допомогою ескізів 6-ти суттєво різних графіків квадратичної функції $y = ax^2 - x + 1 - a$, зображених на рис. 16 $a) - f)$.

2.1. З урахуванням ілюстрацій, зображених на рис. 16 $d), e), f)$, слід констатувати, що у відповідних випадках $(a < 0; D > 0, D = 0, D < 0)$ розв'язки нерівності (10.5.2) не можуть бути підмножиною проміжку $(0;1)$.

2.2. Оскільки (порожня множина) $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини, то, з урахуванням ілюстрацій, зображених на рис. 16 $a), b)$, значення параметра a, при яких $\begin{cases} a > 0 \\ D \leqslant 0, \end{cases}$ задовольняють вимоги умови задачі.

Розв'яжемо останню систему.
$\begin{cases} a > 0 \\ D \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (2a-1)^2 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (2a-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

2.3. Тепер розглянемо випадок, наочно проілюстрований на рис. 16 c). Очевидно, що в цьому випадку розв'язки нерівності (10.5.2) належать проміжку $(0;1)$ тоді і лише тоді, коли нулі квадратичної функції $f(x) = ax^2 - x + 1 - a$ належать відрізку $[0;1]$. Останнє відбувається при тих і лише тих (в нашому випадку додатних) значеннях параметра a, при яких справджується наступна система умов

$$\boxed{\begin{cases} f(0) \geqslant 0 \\ f(1) \geqslant 0 \\ 0 < \frac{1}{2a} < 1 \\ D > 0 \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a \geqslant 0 \\ 0 \geqslant 0 \\ a > \frac{1}{2} \\ (2a-1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - a \geqslant 0 \\ a > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{10.5.3}$$

звідки $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$. Таким чином, розв'язки нерівності (10.5.2) є підмножиною розв'язків нерівності (10.5.1) при $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$.

II спосіб

1. Не важко переконатися, що нерівність (10.5.2) є рівносильною сукупності двох систем, а саме
$ax^2 - x + 1 - a < 0 \Leftrightarrow (x-1)(ax + a - 1) < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 < 0 \\ ax + a - 1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 > 0 \\ ax + a - 1 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1 \\ ax > 1 - a \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ ax < 1 - a. \end{cases} \end{array}\right. \tag{10.5.4}$$

Знайдемо всі ті значення параметра a, при яких розв'язки сукупності (10.5.4) є підмножиною проміжку $(0;1)$.

2. Нехай $a = 0$, тоді сукупність (10.5.4) набуває вид

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1 \\ 0 \cdot x > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ 0 \cdot x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \text{ звідки } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1 \\ \varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x \in R \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x > 1 \end{array}\right. \Rightarrow x \in (1; +\infty) \not\subset (0;1).$$

3. Нехай $a > 0$, тоді сукупність (10.5.4) набуває вид

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{1}{a} - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1}{a} - 1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (10.5.5)$$

Для розв'язання сукупності (10.5.5) необхідно порівняти величини 1 і $\left(\frac{1}{a} - 1\right)$. Для цього розглянемо 3 можливі випадки:

3.1) Якщо $\boxed{\frac{1}{a} - 1 > 1}$, то $a < \frac{1}{2}$, а розв'язками сукупності (10.5.5) будуть $x \in \left(1; \frac{1}{a} - 1\right) \not\subseteq (0;1)$.

3.2) Якщо $\boxed{\frac{1}{a} - 1 < 1}$, то $a > \frac{1}{2}$, а розв'язками сукупності (10.5.5) будуть $x \in \left(\frac{1}{a} - 1; 1\right)$. Цей проміжок є підмножиною множини $(0;1)$ тоді і лише тоді, коли $0 \leqslant \frac{1}{a} - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{a} < 2 \Leftrightarrow 1 \geqslant a > \frac{1}{2}$.

3.3) Якщо $\boxed{\frac{1}{a} - 1 = 1}$, то $a = \frac{1}{2}$, а сукупність (10.5.5) не має розв'язків. Проте, оскільки $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини, то при $a = \frac{1}{2}$ «розв'язки» сукупності (10.5.5) є підмножиною проміжку $(0;1)$.

4. Нехай $a < 0$, тоді сукупність (10.5.4) набуває вид

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1 \\ x < \frac{1}{a} - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x > \frac{1}{a} - 1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{або ж} \quad \left[\begin{array}{l} x < \frac{1}{a} - 1 \\ x > 1. \end{array}\right.$$

Звідки $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a} - 1\right) \bigcup (1; +\infty) \not\subset (0;1)$.

Таким чином, якщо $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$, то розв'язки сукупності (10.5.4) є підмножиною проміжку $(0;1)$.

III спосіб

Спочатку розв'яжемо нерівність (10.5.2) як нерівність «не вище другого степеня» з параметром a. Одним з критичних значень параметра a для нерівності (10.5.2) є значення $a = 0$.

1. Нехай $a = 0$. Тоді нерівність (10.5.2) набуває вид $-x + 1 < 0$, звідки $x > 1$, $x \in (1; +\infty)$. Очевидно, що $(1; +\infty)$ не є підмножиною $(0;1)$.

2. Нехай $a \neq 0$, тоді нерівність (10.5.2) є квадратною нерівністю з параметром a.

Розглянемо відповідне квадратне рівняння

$$ax^2 - x + 1 - a = 0. \qquad (10.5.6)$$

Не важко перевірити, що дискримінант $D = (2a-1)^2 \geqslant 0$, причому $D = 0 \Leftrightarrow a = 1/2$.

2.1) Нехай $a < 0$, тоді гілки параболи $y = ax^2 - x + 1 - a$ направлено донизу. А оскільки при $a < 0$ $D > 0$, то парабола перетинає вісь абсцис у двох різних точках $M(x_1; 0)$ і $N(x_2; 0)$. Без втрати загальності можна вважати, що $x_1 < x_2$. Тоді при $a < 0$ розв'язками нерівності (10.5.2) будуть $x \in (-\infty; x_1) \bigcup (x_2; +\infty)$. Зрозуміло, що ця множина не може бути підмножиною $(0; 1)$.

2.2) Нехай тепер $a > 0$, тоді гілки параболи $y = ax^2 - x + 1 - a$ направлено догори. Розглянемо 3 можливі під випадки:

2.2.1) якщо $\boxed{a = 1/2}$, то $D = 0$, а парабола дотикається осі абсцис у точці $Q(1; 0)$. І тому при $a = 1/2$ нерівність (10.5.2) не має розв'язків. Проте, оскільки $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини, то при $a = 1/2$ «розв'язки» нерівності (10.5.2) є підмножиною проміжку $(0; 1)$.

2.2.2) якщо $0 < a < 1/2$, то $\sqrt{D} = |2a - 1| = -(2a - 1) > 0$, а розв'язками рівняння (10.5.6) будуть $x_1 = \frac{1+(2a-1)}{2a} = 1$, $x_2 = \frac{1-(2a-1)}{2a} = \frac{1}{a} - 1$, причому $x_1 < x_2$. І тому при $0 < a < 1/2$ розв'язками нерівності (10.5.2) будуть $x \in \left(1; \frac{1}{a} - 1\right)$. Очевидно також, що при $a \in (0; 1/2)$ розв'язки нерівності (10.5.2) не є підмножиною проміжку $(0; 1)$.

2.2.3) якщо $a > 1/2$, то $\sqrt{D} = |2a - 1| = (2a - 1) > 0$, а розв'язками рівняння (10.5.6) будуть $x_1 = \frac{1-(2a-1)}{2a} = \frac{1}{a} - 1$, $x_2 = \frac{1+(2a-1)}{2a} = 1$, причому $x_1 < x_2$. І тому при $a > 1/2$ розв'язками нерівності (10.5.2) будуть $x \in \left(\frac{1}{a} - 1; 1\right)$. Останній проміжок є підмножиною множини $(0; 1)$ тоді і лише тоді, коли $0 \leqslant \frac{1}{a} - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{a} < 2 \Leftrightarrow 1 \geqslant a > \frac{1}{2}$. Отже в розглянутому підвипадку лише при $\boxed{a \in (1/2; 1]}$ розв'язки нерівності (10.5.2) є підмножиною проміжку $(0; 1)$.

Відповідь: нерівність (10.5.1) є наслідком нерівності (10.5.2) **тоді і лише тоді**, коли $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Доповнення до задачі 5.

Нехай дано квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in R, \quad a \neq 0 \tag{10.5.7}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{10.5.8}$$

$$D = b^2 - 4ac \tag{10.5.9}$$

Теорема 1. Обидва корені квадратного рівняння (10.5.7) більші за число λ тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$\begin{cases} a \cdot f(\lambda) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > \lambda \\ D \geqslant 0 \end{cases}$$

Теорема 2. Обидва корені квадратного рівняння (10.5.7) менші за число λ тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$\begin{cases} a \cdot f(\lambda) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < \lambda \\ D \geqslant 0 \end{cases}$$

Наслідок 1. Корені квадратного рівняння (10.5.7) мають однакові знаки тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$\begin{cases} a \cdot f(0) = a \cdot c > 0 \\ D \geqslant 0 \end{cases}$$

Теорема 3. Корені квадратного рівняння (10.5.7) належать проміжку $(\lambda_1; \lambda_2)$ тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$\begin{cases} a \cdot f(\lambda_1) > 0 \\ a \cdot f(\lambda_2) > 0 \\ \lambda_1 < -\frac{b}{2a} < \lambda_2 \\ D \geqslant 0 \end{cases}$$

Теорема 4. Число λ знаходиться між коренями квадратного рівняння (10.5.7) тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$a \cdot f(\lambda) < 0.$$

Наслідок 2. Корені квадратного рівняння (10.5.7) мають різні знаки тоді і лише тоді, коли

$$a \cdot c < 0.$$

Теорема 5. Тільки більший корінь квадратного рівняння (10.5.7) належить проміжку $(\lambda_1; \lambda_2)$ тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$\begin{cases} a \cdot f(\lambda_1) < 0 \\ a \cdot f(\lambda_2) > 0 \end{cases}$$

Теорема 6. Тільки менший корінь квадратного рівняння (10.5.7) належить проміжку $(\lambda_1; \lambda_2)$ тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$\begin{cases} a \cdot f(\lambda_1) > 0 \\ a \cdot f(\lambda_2) < 0 \end{cases}$$

Теорема 7. Відрізок $[\lambda_1; \lambda_2]$ знаходиться всередині проміжку між коренями квадратного рівняння (10.5.7) тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$\begin{cases} a \cdot f(\lambda_1) < 0 \\ a \cdot f(\lambda_2) < 0 \end{cases}$$

11 клас

Задача 1.

Площі кругів, побудованих на сторонах трикутника, відносяться як $25 : 144 : 169$. Знайдемо відношення радіусів описаного та вписаного кіл такого трикутника.

Розв'язання.

Нехай a, b і c – довжини сторін BC, AC і AB трикутника ABC. Очевидно, що $R_1 = \dfrac{a}{2}$, $R_2 = \dfrac{b}{2}$ і $R_3 = \dfrac{c}{2}$ – радіуси кругів ω_1, ω_2 і ω_3, побудованих на сторонах BC, AC і AB (відповідно), як на діаметрах.

I спосіб

1. Згідно введених позначень, площі кругів ω_1, ω_2 і ω_3 становлять:

$$S_1 = \pi \cdot R_1^2 = \frac{\pi}{4} \cdot a^2, \quad S_2 = \pi \cdot R_2^2 = \frac{\pi}{4} \cdot b^2, \quad S_3 = \pi \cdot R_3^2 = \frac{\pi}{4} \cdot c^2.$$

За умовою задачі, площі кругів, побудованих на сторонах трикутника, відносяться як $25 : 144 : 169$. Тому, без втрати загальності, можна вважати, що саме $S_1 : S_2 : S_3 = 25 : 144 : 169$. Звідки

$$\frac{\pi}{4} \cdot a^2 : \frac{\pi}{4} \cdot b^2 : \frac{\pi}{4} \cdot c^2 = 25 : 144 : 169,$$

або ж $a^2 : b^2 : c^2 = 25 : 144 : 169.$ І тому

$$a : b : c = \sqrt{25} : \sqrt{144} : \sqrt{169} = 5 : 12 : 13. \tag{11.1.1}$$

Нехай k – коефіцієнт пропорційності ($k > 0$). Тоді, з урахуванням (11.1.1), довжини сторін трикутника ABC становлять

$$a = 5k, \quad b = 12k, \quad c = 13k.$$

2. Не важко бачити, що для сторін трикутника виконується рівність

$$a^2 + b^2 = 25k^2 + 144k^2 = 169k^2 = c^2,$$

тобто, виконано умови *оберненої теореми Піфагора*, і тому трикутник ABC є прямокутним з прямим кутом саме при вершині C.

3. Оскільки $\triangle\ ABC$ є прямокутним з гіпотенузою $AB = c$ і катетами a, b, то за властивостями прямокутного трикутника для радіуса R описаного кола та радіуса r вписаного кола мають місце відповідні рівності

$$R = \frac{c}{2} = \frac{13k}{2}; \tag{11.1.2}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{5k+12k-13k}{2} = \frac{4k}{2}. \tag{11.1.3}$$

Таким чином, має місце відношення

$$R : r = \frac{13k}{2} : \frac{4k}{2} = \frac{13k}{2} \cdot \frac{2}{4k} = \frac{13}{4} = 13 : 4. \tag{11.1.4}$$

II спосіб

1. Аналогічно до **1-го** етапу **I способу** розв'язання знаходимо $a = 5k,\ b = 12k,\ c = 13k\ (\,k > 0\,)$.

2. Добре відомо, що радіус R описаного навколо трикутника кола можна обчислити (за його сторонами) за формулами

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{4abc}{\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}}, \tag{11.1.5}$$

звідки $\quad R = \dfrac{4 \cdot 5k \cdot 12k \cdot 13k}{k^2\sqrt{[17^2-13^2][13^2-7^2]}} = \dfrac{13k}{2}\,.$

3. Також відомо, що радіус r вписаного у трикутник кола можна обчислити (за його сторонами) за формулами

$$r = \frac{S}{p} = \frac{2\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}}{a+b+c}, \tag{11.1.6}$$

звідки $\quad r = \dfrac{2k^2\sqrt{[17^2-13^2][13^2-7^2]}}{30k} = \dfrac{4k}{2}\,.$

Таким чином, має місце відношення

$$R : r = \frac{13k}{2} : \frac{4k}{2} = \frac{13k}{2} \cdot \frac{2}{4k} = \frac{13}{4} = 13 : 4.$$

Відповідь: $\quad 13 : 4\,.$

Доповнення до задачі 1.

?! Площі квадратів, побудованих на сторонах даного трикутника, відносяться як $9 : 16 : 25$. Знайти відношення радіусів описаного та вписаного кіл такого трикутника.

?! Площі правильних трикутників, побудованих на сторонах даного трикутника, відносяться як $64 : 225 : 289$. Знайти відношення радіусів описаного та вписаного кіл такого трикутника.

?! Площі кругів, побудованих на сторонах даного трикутника, як на діаметрах, відносяться як $m^2 : n^2 : p^2$. Доведіть, що відношення радіусів описаного та вписаного кіл такого трикутника становить

$$R : r = \frac{2mnp(m+n+p)}{[(m+n)^2 - p^2] \cdot [p^2 - (m-n)^2]}.$$

Задача 2.

Розв'яжемо у натуральних числах рівняння $x^3 - y^3 = 2015$.

1. Очевидно, що

$$x^3 - y^3 = 2015 \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right) = 2015. \qquad (11.2.1)$$

2. Розкладемо число 2015 на прості множники. Не важко перевірити, що $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Тому рівняння (11.2.1) можна подати у вигляді

$$(x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right) = 1 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31. \qquad (11.2.2)$$

3. За умовою x, y – натуральні числа. І тому $(x-y)$ та $\left(x^2+xy+y^2\right)$ також є натуральними числами. А з урахуванням рівності (11.2.2) $x > y$.

4. Оскільки $x^2 + xy + y^2 = (x-y)(x+2y) + 3y^2$, то очевидно, що для натуральних $x > y$ виконується нерівність

$$(x-y)(1-x-2y) < 3y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y) < \left(x^2 + xy + y^2\right). \qquad (11.2.3)$$

І тому добуток двох натуральних множників

$$(x-y) \quad \text{та} \quad \left(x^2+xy+y^2\right) = 3y^2 + 3(x-y)y + (x-y)^2$$

дорівнює добутку чотирьох не складених чисел $1 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$ лише в одному з 4 можливих випадках:

$$\left[\begin{array}{ll} (1) & \begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy+y^2=2015 \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} x-y=5 \\ x^2+xy+y^2=403 \end{cases} \\ (3) & \begin{cases} x-y=13 \\ x^2+xy+y^2=155 \end{cases} \\ (4) & \begin{cases} x-y=31 \\ x^2+xy+y^2=65 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=1 \\ 3y^2+3y+1=2015 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=5 \\ 3y^2+15y+25=403 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=13 \\ 3y^2+39y+169=155 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=31 \\ 3y^2+93y+961=65 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=1 \\ 3y^2+3y-2014=0, \quad D_1=3^2-4\cdot3\cdot(-2014)=24177, \quad \sqrt{D_1}\notin N \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=5 \\ 3y^2+15y-378=0, \quad D_2=15^2-4\cdot3\cdot(-378)=4761, \quad \sqrt{D_2}=69 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=13 \\ 3y^2+39y+14=0, \quad D_3=39^2-4\cdot3\cdot14=1353, \quad \sqrt{D_3}\notin N \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=31 \\ 3y^2+93y+896=0, \quad D_4=93^2-4\cdot3\cdot896=-2103, \quad D_4<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким чином, розв'язками (останньої) сукупності в натуральних числах можуть бути лише розв'язки системи

$$\begin{cases} x-y=5 \\ 3y^2+15y-378=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=5 \\ y=\dfrac{-15\mp69}{6}=\dfrac{-5\mp23}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=5 \\ \left[\begin{array}{l} y=-14 \\ y=9 \end{array}\right. \end{cases}$$

Звідки $x=14$, $y=9$ – єдиний розв'язок останньої системи в натуральних числах. І тому $(14;9)$ – єдиний розв'язок даного рівняння в натуральних числах.

Відповідь: $(14;9)$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! «2015»[6] Для кожного натурального числа n знайдіть усі такі пари натуральних чисел x і y, що $x^n-y^n=2015$.

[6]задачу запозичено із «Завдань для відбіркових етапів» XVIII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка

Задача 3.

Знайдемо всі числа x, які належать відрізку $[0;1]$, і задовольняють рівнянню

$$\sin^4\big(\cos^3(3x)\big)+\cos^4\big(\cos^3(3x)\big)=1. \qquad (11.3.1)$$

1. Введемо заміну $\cos^3(3x)=t$, $|t|\leqslant 1 \quad (\star)$.
Тоді рівняння (11.3.1) можна подати у вигляді $\sin^4 t+\cos^4 t=1$, або ж

$$\big(\sin^2 t+\cos^2 t\big)^2-2\sin^2 t\cos^2 t=1, \qquad (11.3.2)$$

звідки

$$\sin^2 t\cdot\cos^2 t=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \cos t=0.\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad t=\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in Z. \qquad (11.3.3)$$

Оскільки $|t|\leqslant 1$, то $-1\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot n\leqslant 1$. Звідки $-\frac{2}{\pi}\leqslant n\leqslant\frac{2}{\pi}$. А з того що $n\in Z$, маємо $n=0$. І тому $t=0$.

2. Знайдемо корені рівняння $\cos^3(3x)=0$, які належать відрізку $[0;1]$.

2.1. $\cos^3(3x)=0\Rightarrow\cos(3x)=0\Rightarrow 3x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k, k\in Z$, звідки

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\cdot k,\quad k\in Z. \qquad (11.3.4)$$

2.2. Знайдемо цілі k, при яких виконується подвійна нерівність

$$0\leqslant\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\cdot k\leqslant 1. \qquad (11.3.5)$$

$$0\leqslant\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\cdot k\leqslant 1\Rightarrow-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{3}\cdot k\leqslant 1-\frac{\pi}{6}\Rightarrow-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{3}{\pi}-\frac{1}{2}.$$

Останню нерівність задовольняє єдине ціле $k=0$. І тому серед розв'язків (11.3.4) даного рівняння є лише один корінь $x=\frac{\pi}{6}$, який належить відрізку $[0;1]$.

Відповідь: $x=\frac{\pi}{6}$.

Задача 4.

Нехай ABC – даний гострокутний трикутник, в якому AA', BB' і CC' – висоти, α, β, γ – міри кутів BAC, ABC і ACB відповідно. Тоді, як відомо, точка H перетину висот є внутрішньою точкою $\triangle\ ABC$.

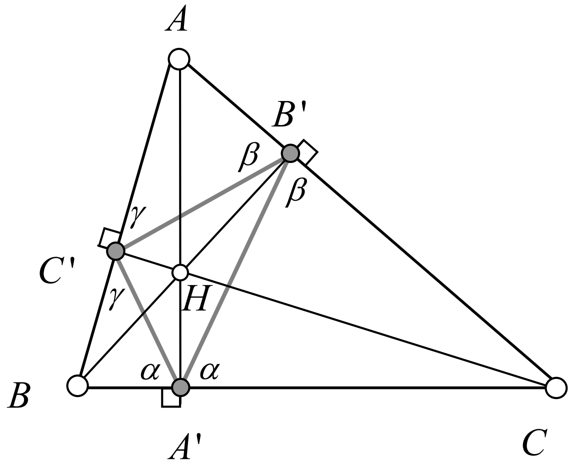


Рис. 17:

I. Аналіз (та ідея відновлення).

Покажемо, що промені $A'A$, $B'B$ і $C'C$ є бісектрисами кутів $B'A'C'$, $A'B'C'$ і $A'C'B'$ відповідно.

1.1. Розглянемо прямокутні трикутники $AB'B$ та $AC'C$. Вони є подібними за спільним гострим кутом α. І тому має місце рівність

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}. \tag{11.4.1}$$

1.2. Розглянемо трикутники $AB'C'$ та ABC. В них:
$\angle B'AC' = \angle BAC$ (як спільний кут), а прилеглі сторони, з урахуванням рівності (11.4.1), є пропорційними. І тому за відповідною ознакою подібності трикутників $\triangle\ AB'C' \backsim \triangle\ ABC$. Тоді, відповідно до введених позначень, мають місце рівності: $\angle AC'B' = \angle ACB = \gamma$, $\angle AB'C' = \angle ABC = \beta$.

1.3. В аналогічний спосіб можна встановити, що:
$\triangle\ C'BA' \backsim \triangle\ CBA$, звідки $\angle BC'A' = \angle BCA = \gamma$, $\angle BA'C' = \angle BAC = \alpha$;
$\triangle\ A'CB' \backsim \triangle\ ACB$, звідки $\angle CA'B' = \angle CAB = \alpha$, $\angle CB'A' = \angle CBA = \beta$.

1.4. Оскільки AA' – висота, то $\angle C'A'A = 90^0 - \alpha = \angle AA'B'$. Звідки промінь $A'A$ – бісектриса кута $B'A'C'$. Аналогічно $B'B$ і $C'C$ – бісектриси кутів $A'B'C'$ і $A'C'B'$ відповідно.

Висновок: вершини A, B і C вихідного (шуканого) трикутника належать, променям, що містять відповідні бісектриси кутів $\triangle\ A'B'C'$;

з іншого боку, сторони BC, AC і AB належать прямим, які:

1) проходять через точки A', B' і C' відповідно, та
2) є перпендикулярними до зазначених променів.

Крім того, якщо $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$, $\angle CAB = \alpha$, то: $\angle A'B'C' = 180^0 - 2\beta$, $\angle B'C'A' = 180^0 - 2\gamma$, $\angle C'A'B' = 180^0 - 2\alpha$.

II. Побудова[7] (відновлення $\triangle\ ABC$ за точками A', B', C').

2.1. Побудуємо бісектрису $A'A''$ кута $C'A'B'$ (дивись «**Базову задачу №1**» в додатку до задачі 4).

2.2. В аналогічний спосіб побудуємо бісектрису $B'B''$ кута $A'B'C'$.

2.3. Позначимо через H точку перетину $A'A''$ і $B'B''$ та проведемо промінь $C'H$. Тоді, як добре відомо, $C'H$ – бісектриса кута $B'C'A'$.

2.4. Побудуємо пряму l, яка проходить через точку A' та є перпендикулярною до прямої $A'H$ (дивись «**Базову задачу №2**» в додатку до задачі 4).

2.5. В аналогічний спосіб побудуємо пряму m, яка проходить через точку B' і є перпендикулярною до прямої $B'H$.

2.6. Так само побудуємо пряму n, яка проходить через точку C' і є перпендикулярною до прямої $C'H$.

2.7. Позначимо через A_0 точку перетину прямих m і n, через B_0 – точку перетину прямих l і n, а через C_0 – точку перетину прямих l і m.

Тоді $A_0B_0C_0$ – **шуканий** (вихідний) **трикутник** – рис. 18.

Зауважимо, що кроки **2.5. – 2.7.** можна було би замінити наступними:

2.5) Побудуємо точку B_0, як точку перетину прямих l і $B'H$.
2.6) Побудуємо точку C_0, як точку перетину прямих l і $C'H$.
2.7) Побудуємо точку A_0, як точку перетину прямих B_0C' та C_0B'.

Тоді $A_0B_0C_0$ – **шуканий** (вихідний) **трикутник**.

Проте слід пам'ятати, що *доведення повинно спиратися на відповідний спосіб побудови.*

[7]за допомогою виключно циркуля та односторонньої лінійки без поділок (без «еталонної одиниці» виміру довжини)

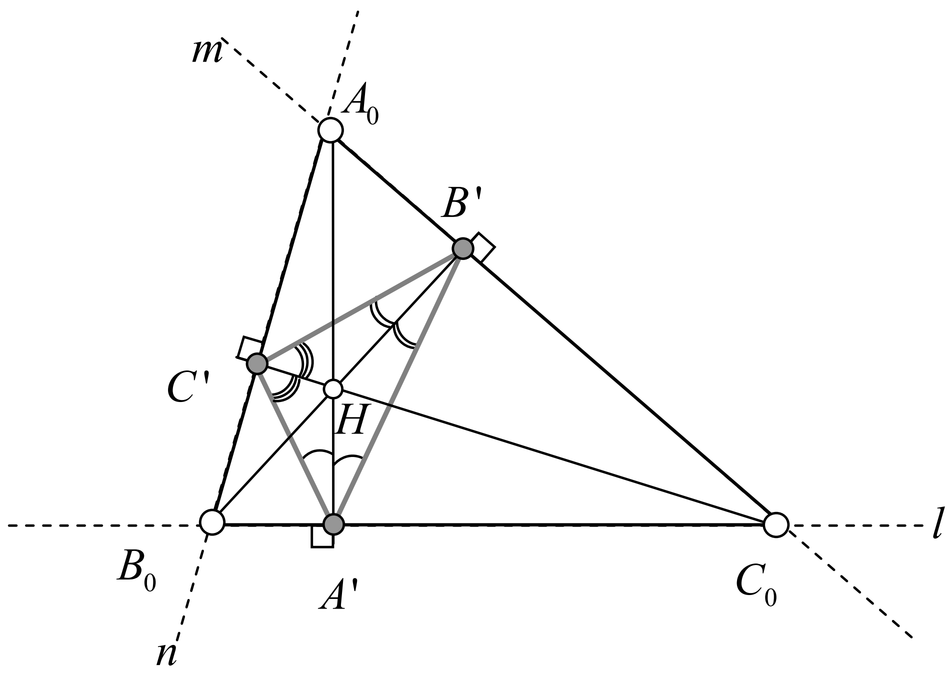


Рис. 18:

III. Доведення.

На цьому етапі необхідно показати, що $\triangle\ A_0B_0C_0$, одержаний в результаті виконання побудов **2.1. – 2.7.**, співпадає із початковим $\triangle\ ABC$. Очевидно, що для цього **достатньо** показати співпадіння їх вершин.

3.1. Спочатку доведемо, що A_0A', B_0B', C_0C' – висоти $\triangle\ A_0B_0C_0$. Для цього необхідно показати, що $H \in A_0A'$, $H \in B_0B'$, $H \in C_0C'$.

3.1.1) Покажемо, що $\angle A_0HA' = 180^0$. За побудовою $\angle C'A'H = \angle HA'B'$, $\angle A'B'H = \angle HB'C'$, $\angle B'C'H = \angle HC'A'$. Позначимо зазначені кути відповідно як α', β' і γ'. Тоді $2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' = 180^0$, звідки $\alpha' + \beta' + \gamma' = 90^0$. Крім того, $\angle A_0B'C' = 90^0 - \beta'$.

3.1.1.1) З $\triangle\ C'HA'$ маємо, що $\angle C'HA' = 180^0 - \alpha' - \gamma'$.

3.1.1.2) Як випливає з побудов $\angle A_0C'H = \angle A_0B'H = 90^0$. І тому навколо чотирикутника $A_0B'HC'$ можна описати коло. Але ж тоді $\angle A_0HC' = \angle A_0B'C' = 90^0 - \beta'$ – як кути, що спираються на спільну дугу кола. Таким чином (за аксіомою вимірювання кутів) $\angle A_0HA' = \angle A_0HC' + \angle C'HA' = 180^0 - \alpha' - \gamma' + 90^0 - \beta' = 180^0$.

3.1.2) Повторюючи міркування не важко показати, що B_0B', C_0C' – висоти $\triangle\ A_0B_0C_0$.

Таким чином, точки A', B', C' дійсно є основами висот $\triangle\ A_0B_0C_0$.

3.2. Тепер покажемо, що вершини $\triangle\ A_0B_0C_0$ співпадають з вершинами вихідного $\triangle\ ABC$.

3.2.1) Доведемо, що точки A і A_0 співпадають.

Як випливає з етапу «**Аналіз**», точка H перетину висот $\triangle\ ABC$ співпадає з точкою перетину бісектрис $\triangle\ A'B'C'$. І тому точки A і A_0 належать одній прямій $A'H$.

Якщо припустити, що точки A і A_0 не співпадають, то, наприклад, через точку C' буде проходити дві різні прямі $C'A$ і $C'A_0$, кожна з яких є перпендикулярною до прямої $C'H$, чого не може бути (бо через фіксовану точку можна провести єдину пряму перпендикулярно до даної прямої). І тому точки A і A_0 дійсно співпадають.

3.2.2) Доведення співпадіння вершин B і B_0 та C і C_0 доводиться аналогічно до пункту 3.2.1).

IV. Дослідження.

На цьому етапі ми повинні дослідити питання щодо існування та кількості розв'язків (*даної позиційної задачі на побудову*) в залежності від взаємного розташування точок A', B' і C'.

4.1. Дослідимо випадок, коли точки A', B', C' належать одній прямій q. Тоді можливими є три випадки.

4.1.1) Якщо припустити, що всі три точки A', B', C' співпадають, то (з огляду на те, що вони є основами висот вихідного трикутника) ми прийдемо до висновку про те, що сторони вихідного $\triangle\ ABC$ є попарно перпендикулярними. Звісно, що *такого трикутника не існує*.

4.1.2) Якщо припустити, що тільки дві з точок A', B', C' співпадають (наприклад, A' і B'), то прийдемо до висновку про те, що сторони AC і BC вихідного $\triangle\ ABC$ є перпендикулярними. Звідки вихідний $\triangle\ ABC$ – *прямокутний*, що суперечить умову задачі.

4.1.3) Припустимо тепер, що точки A', B', C' є попарно різними, і, наприклад, саме точка A' лежить (на прямій q) між точками C' і B'. Тоді, як випливає з етапу «Аналіз», для гострокутного $\triangle\ ABC$ кут $C'A'B' = 180^0 - 2\alpha$. З іншого боку $\angle C'A'B' = 180^0$. Звідки $\alpha = 0^0$. А такого трикутника не існує.

4.2. З урахуванням пункту **4.1. задача про** **<u>відновлення</u>** **(шуканого) трикутника за точками** A', B', C' **унеможливлює випадки** 4.1.1), 4.1.2) та 4.1.3) (бо за умовою задачі точки A', B', C' першочергово визначалися вершинами гострокутного $\triangle\ ABC$, що, в свою чергу, відразу накладає додаткову вимогу на «неприналежність» точок A', B', C' одній прямій.

4.4.1) **існування** шуканої фігури (відновлення вихідного трикутника) гарантується можливістю виконання кожної з побудов **2.1. – 2.7.**

Зауважимо, що прямі l, m і n попарно перетинаються, утворюючи саме $\triangle\ A_0B_0C_0$. Останнє не важко показати методом від супротивного.

4.4.2) **єдиність** шуканого розв'язку (відновлення вихідного трикутника) даної позиційної задачі на побудову випливає з етапу «**Доведення**».

Таким чином, дана задача **<u>завжди</u>** має **<u>єдиний</u>** **розв'язок!**

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

«**Базова задача №1**»: побудувати бісектрису даного кута MNP.

Для розв'язання задачі можна виконати наступні елементарні побудови:

2.1.1) Побудуємо коло $\omega_1 = \omega\,(N; r)$ з центром в точці N довільного радіусу $r > 0$. Точки перетину ω_1 з променями $[NM)$ і $[NP)$ позначимо як M' і N' відповідно.

2.1.2) Побудуємо коло $\omega_2 = \omega\,(M'; r)$ з центром в точці M' радіусу r.

2.1.3) Побудуємо коло $\omega_3 = \omega\,(P'; r)$ з центром в точці P' радіусу r. Тоді ω_2 і ω_3 завжди перетинаються у двох різних точках – N і N'.

Промінь NN' – *шукана бісектриса* даного $\angle MNP$.

«**Базова задача №2**»: через дану точку P на даній прямій (MN) провести пряму l, яка перпендикулярна до прямої MN.

Для розв'язання задачі можна виконати наступні елементарні побудови:

2.4.1) Побудуємо коло $\omega_1 = \omega\,(P; r)$ з центром в точці P і довільного радіусу $r > 0$. Точки перетину ω_1 з прямою MN позначимо як M', N'.

2.4.2) Побудуємо коло ω_2 з центром в точці M' радіусу $R > r$.

2.4.3) Побудуємо коло $\omega_3 = \omega\,(P'; R)$ з центром в точці P' радіусу R. Тоді ω_2 і ω_3 завжди перетинаються у двох різних точках – P_1 і P_2.

Пряма PP_1 – *шукана пряма* (яка співпадає з прямою PP_2).

Задача 5.

Розв'яжемо рівняння

$$x+\sqrt{a+\sqrt{x}}=a. \qquad (11.5.1)$$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \sqrt{x} \geqslant -a. \end{cases}$

Оскільки на всій ОДЗ $x+\sqrt{\sqrt{x}+a} \geqslant 0$, то при $a<0$ рівняння (11.5.1) не має (дійсних) розв'язків.

1. Нехай $a=0$, тоді (11.5.1) набуває вид

$$x+\sqrt{\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{\sqrt{x}}=0 \end{cases} \Rightarrow x=0.$$

Таким чином, при $a=0$ коренем рівняння (11.5.1) є $x=0$.

2. Нехай $a>0$. Подамо (11.5.1) у наступному вигляді

$$\sqrt{\sqrt{x}+a}=a-x, \qquad (11.5.2)$$

яке є рівносильним системі

$$\begin{cases} \sqrt{x}+a=a^2-2ax+x^2 \\ a-x \geqslant 0 \end{cases} \qquad (11.5.3)$$

Розглянемо 1-ше рівняння системи (11.5.3) як квадратне рівняння відносно параметра a

$$a^2-a\,(2x+1)+x^2-\sqrt{x}=0. \qquad (11.5.4)$$

$$D=(2x+1)^2-4\left(x^2-\sqrt{x}\right)=4x^2+4x+1-4x^2+4\sqrt{x}=$$
$$=4x+4\sqrt{x}+1=(2\sqrt{x}+1)^2.$$

Тоді $a=\dfrac{2x+1\mp(2\sqrt{x}+1)}{2}$. Звідки

$a=\dfrac{2x+1-(2\sqrt{x}+1)}{2}=x-\sqrt{x}$ або $a=\dfrac{2x+1+(2\sqrt{x}+1)}{2}=x+\sqrt{x}+1$.

Розглянемо окремо кожен з випадків:

2.1. Нехай
$$a = x - \sqrt{x}. \tag{11.5.5}$$
Введемо заміну $\sqrt{x} = t\,,\ t \geqslant 0\ \ (\star)$. Тоді рівняння (11.5.5) набуває вид
$$t^2 - t - a = 0. \tag{11.5.6}$$
$D_1 = 1 + 4a > 0$. Звідки $t = \dfrac{1 \mp \sqrt{1+4a}}{2}$. А з урахуванням умови $(\star)$ $t = \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$. Звідки $\sqrt{x} = \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$, а
$x = \left(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(2 + 4a + 2\sqrt{1+4a}\right) = a + \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4a}\right) > a$, що суперечить 2-ій нерівності системи (11.5.3).

2.2. Нехай тепер
$$a = x + \sqrt{x} + 1. \tag{11.5.7}$$
Введемо заміну $\sqrt{x} = t\,,\ t \geqslant 0\ \ (\star)$. Тоді рівняння (11.5.7) набуває вид
$$t^2 + t + 1 - a = 0, \tag{11.5.8}$$
дискримінант якого $D_2 = 4a - 3$:

2.2.1) якщо $0 < a < \frac{3}{4}$, то рівняння (11.5.8), а разом із ним рівняння (11.5.7) та дане рівняння (11.5.1) не мають розв'язків;

2.2.2) якщо $a = \frac{3}{4}$, то $t = -\frac{1}{2}$, яке не задовольняє умову $(\star)$;

2.2.3) якщо $a > \frac{3}{4}$, то $t = \dfrac{-1 \mp \sqrt{4a-3}}{2}$, а з урахуванням умови $(\star)$ $t = \dfrac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$, причому тільки для $a \geqslant 1$. Звідки при $a \geqslant 1$
$\sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{4a-3} - 1}{2}$, $x = \dfrac{1}{4}\left(4a - 2 - 2\sqrt{4a-3}\right) = a - \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4a-3}\right)$.

Очевидно, що $x = a - \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4a-3}\right) < a$ і тому 2 нерівність системи (11.5.3) виконується. Таким чином, при $a \geqslant 1$ розв'язком даного рівняння (11.5.1) є $x = a - \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4a-3}\right)$.

Відповідь: якщо $a = 0$, то $x = 0$;
якщо $a < 0$ або $0 < a < 1$, то рівняння не має розв'язків;
якщо $a \geqslant 1$, то $x = a - \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4a-3}\right)$.

ЧАСТИНА IV.
Умови завдань III етапів (обласних) Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики 2011-2015 рр.

2011 рік

7 клас

1. Ціна автомобіля спочатку зросла на 7%, а потім знизилася на 15 %. На скільки відсотків змінилася ціна автомобіля після двох переоцінок?.

2. Із дошки 8×8 по клітинках вирізали 12 прямокутників 1×2. Чи обов'язково із частини, яка залишилася, можна «по клітинках» вирізати прямокутник 1×3? Відповідь обґрунтуйте.

3. Антон і Рома написали на 1000 картках усі цілі числа від 0 до 999. Після цього розділили усі картки між собою. Кожний із них виклав усі свої картки в ряд і одержав багатоцифрове число. Чи можуть багатоцифрові числа Антона і Роми співпасти? Відповідь обґрунтуйте.

4. Яку найбільшу кількість різних натуральних чисел можна вибрати так, щоб сума будь-яких трьох із них була простим числом? Відповідь обґрунтуйте.

5. На математичну олімпіаду прийшли 125 семикласників, причому кожний був знайомий рівно з 10 семикласниками. Оскільки задачі виявилися складними, то через деякий час олімпіаду покинула деяка кількість семикласників. З'ясувалося, що кожний семикласник, який залишився на олімпіаді, знову мав однакову кількість знайомих серед тих семикласників, що залишилися розв'язувати задачі. Чи були знайомі серед тих семикласників, що пішли з олімпіади? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. При яких натуральних n серед чисел $n, n+1, n+2, ..., n^2$ можна вибрати 4 попарно різних числа a, b, c, d, для яких виконується рівність $ab = cd$. Відповідь обґрунтуйте.

2. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC вибрані точки X, Y і Z так, що $AX = BY$, $XZ||BC$ і при цьому $\angle XYB = \angle BAC$. Доведіть, що BZ – бісектриса кута ABC.

3. Знайти усі пари (x, y) натуральних чисел, які задовольняють рівнянню:

$$9x^2 + 3y = y^2 + 8.$$

4. Двоє гравців по черзі ставлять королів на шахову дошку: перший гравець – білих королів, другий – чорних. Не дозволяється ставити свого короля під бій короля супротивника. Програє той, хто на зможе зробити хід. Хто виграє при правильній грі?

5. У Андрійка є 2010 монет, серед яких щонайменше 1006 монет справжні. Відомо, що всі справжні монети важать однаково, а вага будь-якої фальшивої монети відрізняється від ваги справжньої. При цьому різні фальшиві монети можуть мати різну вагу. Чи зможе Андрійко, за не більше ніж 2007 зважувань, на терезах без гир, знайти хоча б одну справжню монету?

9 клас

1. Доведіть, що якщо для додатних чисел a, b і c справджується рівність

$$x\left(a^2 + ab + b^2\right) + y\left(b^2 + bc + c^2\right) = (x + y)\left(c^2 + ca + a^2\right),$$

то

$$x(b - c) = y(a - b).$$

2. Буратіно на полі чудес посадив дерево, на якому виросло 185 однакових за зовнішнім видом монет. Від мудрої Старої Черепахи Тортіли він дізнався, що серед цих монет рівно 7 є фальшивими, причому всі фальшиві монети важать однаково, усі справжні монети також важать однаково, але фальшива монета легша за справжню. Чи зможе Буратіно за три зважування на шалькових терезах без гір вибрати для Папи Карла 23 справжні монети?

3. У трапеції $ABCD$ точки P і Q є серединами основ AD і BC відповідно ($BC < AD$). Відомо, що $AB = BC$, а точка P лежить на бісектрисі кута ABC. Знайдіть відношення довжин відрізків BD і PQ.

4. Учасник обласної олімпіади юних математиків у своїй роботі стверджує, що він знайшов такі цілі числа m і n, що дріб $\dfrac{7m+4}{5m+1}$ скоротився на натуральне число $p > 1$, а дріб $\dfrac{7n+4}{5n+1}$ – на натуральне число $q > p$. Чи правий він?

5. Гриць та Олег по черзі (першим робить свій хід Гриць) зафарбовують клітинки таблиці розміром 2011×2011 (розділеної на 2011^2 клітинок розміром 1×1). За один хід гравець може зафарбувати таку ще не зафарбовану клітинку, що в одному рядку з нею не більше одної зафарбованої клітинки. Переможеним вважається той гравець, хто не може зробити свій черговий хід. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу?

10 клас

1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^5 - 10y^3 + 9z = 0, \\ y^5 - 10z^3 + 9x = 0, \\ z^5 - 10x^3 + 9y = 0. \end{cases}$

2. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точки E і F обрано на сторонах BC і AB відповідно. Нехай O – точка перетину відрізків AE і CF. Відомо, що в чотирикутники $OFBE$ та $OADC$ можна вписати кола. Доведіть, що

$a)$ в чотирикутник $ABCD$ також можна вписати коло;

$b)$ кола, вписані в трикутники ACD і ABC, дотикаються одне до одного.

3. Знайти всі такі пари додатних раціональних чисел (x, y), що числа $\{x\}+\left\{\frac{1}{y}\right\}$ та $\{y\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}$ будуть цілими. Тут $\{x\} = x-[x]$, а $[x]$ – найбільше ціле число, яке не перевищує x.

4. Нехай x та y – будь-які дійсні числа. Доведіть, що

$$\left(x^2 - x + 1\right)\left(y^2 - y + 1\right) \geqslant 2\,(x+y)\,(x-1)\,(y-1)\,.$$

При яких значеннях x та y досягається знак рівності?

5. Шаховий король обійшов шахову дошку, побувавши на кожному полі по одному разу і повернувся останнім ходом на початкове поле. Доведіть, що при цьому король зробив парну кількість діагональних ходів.

11 клас

1. Розв'язати рівняння $1 + 3\sqrt{3} \cdot 12^x = 3\sqrt{3} \cdot 27^x - 64^x$.

2. Для довільних дійсних чисел x, y, z, що належать числовому проміжку $[0,\ 1]$, доведіть нерівність

$$\left(x^4 + y^4 + z^4\right) + \left(x^5 + y^5 + z^5\right) + (x - y)^6 + (y - z)^6 + (z - x)^6 \leqslant 6.$$

3. Дано рівнобедрений трикутник ABC $(AC = BC)$, BM – його медіана. На цій медіані відмітили точку N так, що $\angle BAN = \angle CBM$. Доведіть, що бісектриса кута CNM перпендикулярна прямій AN.

4. Чи існує опуклий многогранник, у якого:

$a)$ немає трьох граней з однаковою кількістю ребер;

$b)$ всі грані мають різну кількість ребер?

5. Знайти дроби $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}$ і $\dfrac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\left(\alpha + \beta + \gamma\right)}$, якщо числа α, β і γ вибрані так, що обидва дроби додатні і один з них втричі більший за другого.

2012 рік

7 клас

1. Обчисліть без калькулятора:

$$\frac{2012}{2012201220122012^2 - 2012201220122011 \cdot 2012201220122013}.$$

2. Доведіть, що
$(a+b)^2 - (c+d)^2 + (a+c)^2 - (b+d)^2 = 2\,(a-b)\,(a+b+c+d)\,.$

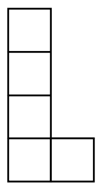
3. На сторонах шестикутника записаного по одному числу, а у кожній його вершині – число, яке дорівнює сумі двох чисел на сторонах, що виходять з вершини. Після цього всі числа на сторонах і в одній з вершин стерли. Чи можна відновити стерте число у вершині? Відповідь обґрунтуйте.

4. Знайдіть найменше натуральне число, більше від одиниці, яке ділиться на 2. 3, 5, 7 та при ділені на 11 дає в залишку 1.

5. В клітинках 4×4 розставлені числа, як показано на рис. 19 a). На кожному кроці дозволяється взяти п'ять клітинок, що утворюють фігурку, зображену на рис. 19 b), і додати до чисел, які стоять у цих клітинках по одиниці (фігурку можна повертати і перевертати). Чи можна, виконавши деяку кількість таких кроків, зробити всі числа в таблиці рівними?

2	0	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	2

a)



b)

Рис. 19: до задачі 5

8 клас

1. Знайдіть всі цілі числа p, для яких рівняння $x^2 + px + 2011 = 0$ має цілий корінь.

2. Гриб вважаємо поганим, якщо у ньому більше, ніж 6 хробаків. Хробака назвемо голодним, якщо він з'їв не більше $1/7$ гриба. П'ята частина всіх грибів у лісі погана. Доведіть, що голодних хробаків не менше, ніж $1/30$ від всіх хробаків.

3. Чи можна не більше, ніж за 99 зважувань на терезах без гірок знайти найлегшу і найважчу монети серед 67 монет, будь-які дві з яких мають різну вагу? Відповідь обґрунтуйте.

4. Доведіть, що пряма, яка проходить через середину сторони трикутника і є паралельною до бісектриси протилежного кута, розбиває цей трикутник на два многокутники однакового периметра.

5. У клітинках розміром 8×8 записані попарно різні натуральні числа, кожне з яких є простим або добутком двох простих чисел. Відомо, що для будь-якого числа a з таблиці в тому самому рядку або в тому самому стовпчику існує число, яке не є взаємно простим з a. Знайдіть найбільшу можливу кількість простих чисел в таблиці.

9 клас

1. Цілі числа a, b, c задовольняють умову $ab+bc=1$. Доведіть, що число $A=\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)$ є повним квадратом натурального числа.

2. Петро і Дмитро виїхали опівдні з міста A до міста B на велосипедах. Одночасно з B до A на велосипеді виїхав Юрко. Усі вони їдуть зі сталими, але різними швидкостями. О другій годині дня Дмитро був рівно посередині між Петром і Дмитром. О котрій годині Петро був рівно посередині між Дмитром і Юрком, якщо відомо, що цей момент усі троє були ще у дорозі? Відповідь обґрунтуйте. (У цій задачі мається на увазі, що хлопчики, доїхавши до пунктів A і B відповідно, не припиняють рухатись та їдуть далі).

3. Дано вписаний чотирикутник $ABCD$. Нехай P – середина дуги AD кола, описаного навколо цього чотирикутника, яка не містить точок B і C, M – точка перетину відрізка AC і BP, а N – точка перетину відрізка BD і CP. Відомо, що $MP=NP$. Доведіть, що прямі BC та AD паралельні.

4. Чи існує опуклий 2012-кутник, в якого всі кути дорівнюють цілому числу градусів? Відповідь обґрунтуйте.

5. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел x, y і z має місце нерівність $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y} \geqslant \dfrac{x+y+z}{2}$.

10 клас

1. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$

2. a, b, c – сторони трикутника. x і y – додатні числа, такі, що $(x-1)(y-1)\geqslant 1$. Доведіть, що $a^2x+b^2y\geqslant c^2$.

3. Знайти всі пари натуральних чисел (m, n), такі, що

$$n^m\cdot m!=m^n\cdot n!$$

і довести, що інших не існує.

4. Навколо гострокутного трикутника ABC описано коло. Висоти трикутника з вершин A і C перетинають коло в точках E та F відповідно. D – довільна точка на (меншій) дузі AC, K – точка перетину AB і DF, L – точка перетину BC і DE. Довести, що прямі KL, AE і CF перетинаються в одній точці.

5. n – ціле число. $m=n^2+2011$ – 45-цифрове число, в запису якого немає нулів. Довести, що в числі m можна закреслити декілька цифр (але не всі), так що отримане в результаті число буде ділитися на 273.

11 клас

1. *Задача №1 для 10 класу.*

2. Чи існує опуклий 13-кутник, який можна розрізати на квадрати та рівносторонні трикутники?

3. *Задача №4 для 10 класу.*

4. Які значення може приймати x, y, z такі, що $x+y+z=3$ і $x^2+y^2+z^2=7$.

5. Додатні числа x, y, z такі, що: $x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=10$, $\dfrac{y^2}{3}+z^2=5$, $z^2+zx+x^2=13$. Які значення може набувати вираз $xy+2yz+3zx$?

2013 рік

Рівень «А»

7 клас

1. Знайдіть усі такі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, для яких виконується рівність $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+\overline{a}=2013$.

2. Серед 25 монет є рівно 2 фальшиві. Є чарівна скринька, в яку можна покласти 2 монети, і вона покаже кількість фальшивих монет у цій парі. Покажіть, як можна визначити обидві фальшиві монети не більше, ніж за 13 таких операцій.

3. Петрик послідовно виписує в рядок на дошці остачі від ділення деякого натурального числа n на $10, 11, 12, \ldots, 20$. Виявилося, що кожне наступне записане число більше за попереднє. Доведіть, що в рядку записано 11 послідовних цілих чисел (тобто кожне наступне число більше за попереднє на 1).

4. Прямокутне приміщення розділене на 16 прямокутних кімнат. Комендант виміряв периметри восьми кімнат. Сім з восьми результатів його вимірювань схематично (тобто без урахування справжніх розмірів кімнат) показано на малюнку нижче, а результат восьмого позначено через x. Знайдіть значення x.

7		13	
		10	7
10	11		
	5		*x*

Рис. 20: до задачі 4

5. З картону вирізано декілька прямокутників. На площині намальовано квадрат, сторона якого не менша за будь-яку сторону кожного з прямокутників, а периметр не менший за суму периметрів прямокутників. Доведіть, що всі вирізані прямокутники можна без перекриттів розмістити в намальованому квадраті (тобто будь-які два прямокутники можуть мати тільки такі спільні точки, які лежать на їхніх сторонах, і точки жодного з прямокутників не можуть вийти за межі квадрата).

8 клас

1. Чебурашка та Крокодил Гена з'їли торт. Чебурашка їв удвічі повільніше за Крокодила Гену, але почав їсти на хвилину раніше. З'ясувалося, що вони з'їли порівну. За який час Чебурашка сам з'їв би цей торт?

2. Відомо, що трицифрове число $\overline{mnk}$ на 1 більше за трицифрове число $\overline{abc}$. Доведіть, що число $\overline{abcmnk}$ не може ділитися без остачі на 13.

3. На дошці написані числа 1, 2, 3, ..., 4027, 4028. Миколка та Андрійко по черзі закреслюють числа, причому Миколка ходить першим. За один хід можна закреслити тільки одне з раніше незакреслених чисел. Андрійко хоче, щоб після його 2013-го ходу на дошці залишилися два послідовні числа (різниця яких дорівнює 1). Чи завжди він зможе цього досягти?

4. Знайдіть усі пари простих чисел p і q, для яких число p^3+q^2 є кубом деякого натурального числа.

5. У гострокутному трикутнику ABC проведено бісектриси AA_1 і BB_1. Відомо, що на відрізку CB_1 існує така точка M, що $CM = CA_1$. Через точку M проведено пряму, паралельну BB_1, яка перетинає пряму AB в точці N. Доведіть, що $A_1N = A_1M$.

9 клас

1. Відомо, що $a \neq b$ та рівняння $ax^{2013}+x^{2012}+b=0$ і $bx^{2013}+x^{2012}+a=0$ мають спільний дійсний корінь. Знайдіть $a+b$.

2. Знайдіть усі такі пари простих чисел p і q, для яких має місце рівність $p^5-(4p-q)^2=2q^2$.

3. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел a, b і c виконується нерівність $3a^2+b^2+c^2+bc \geqslant 3a(b+c)$.

4. Нехай H – точка перетину висот AQ, BL і CP гострокутного трикутника ABC, K – спільна точка відрізків PQ і BH, M – середина сторони AC, N – середина відрізка BH. Промінь BL перетинає описане коло трикутника ABC в точці D, відмінній від B. Відомо, що $KQ = HQ$. Доведіть, що прямі MN і AD перпендикулярні.

5. Керівник математичного гуртка намалював на дошці таблицю розміру 30×30 і запропонував учням заповнити її числами $1, 2, ..., 900$, записуючи щосекунди в якусь порожню клітинку на свій розсуд одне з тих чисел, що не використовувалось раніше. Чи зможуть учні виконати завдання так, щоб у будь-який момент ані в жодному рядку, ані в жодному стовпці сума всіх записаних чисел не давала остачу 1 від ділення на 3?

10 клас

1. Розв'яжіть рівняння $x^{2013} - x^{2014} = \left\{ \dfrac{2015 + x}{1 + [x]} \right\}$ (тут $[a]$ – ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a; $\{a\} = a - [a]$ – дробова частина числа a).

2. Натуральне число a має рівно 6 різних натуральних дільників (включаючи 1 і саме число a). Аналогічно, натуральне число b має рівно 9 різних натуральних дільників, а натуральне число c має рівно 14 різних натуральних дільників. Відомо, що $\text{НСД}(a, b, c) = 10$. Знайдіть усі можливі значення добутку $\text{НСД}(a, b) \cdot \text{НСД}(b, c) \cdot \text{НСД}(c, a)$. (Тут $\text{НСД}(x, y)$ – найбільший спільний дільник натуральних чисел x і y, $\text{НСД}(a, b, c)$ – найбільший спільний дільник натуральних чисел a, b і c)

3. Відомо, що додатні дійсні числа x, y і z задовольняють нерівність $3x + 4y + 6z \leqslant 12$. Доведіть, що $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant 3$.

4. Нехай AK, BL і CM – висоти гострокутного трикутника ABC. Відомо, що $LM = 5$ см, $MK = 12$ см, $KL = 13$ см. Обчисліть площу трикутника ABC.

5. По колу записали 672 натуральних числа $a_1, a_2, \ldots, a_{672}$, серед яких немає жодних двох рівних, причому відомо, що $a_1 + a_2 + \ldots + a_{672} = 2013$, і $a_k \neq 1342$ для всіх k, $1 \leqslant k \leqslant 672$. Доведіть, що завжди можна вибрати декілька записаних поспіль чисел, сума яких дорівнює 1342.

11 клас

1. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок, координати яких задовольняють рівність $\sin x + \cos y = \sin y + \cos x$.

2. Для $x \in (0; 1)$ та $y \in (0; 1)$ знайдіть найбільше можливе значення виразу

$$\frac{xy(1 - x - y)}{(x + y)(1 - x)(1 - y)}.$$

3. Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, AC і BC в точках D, E і F відповідно. Пряма, яка проходить через точку F і центр цього кола, перетинає відрізок DE в точці L. Доведіть, що пряма AL проходить через середину сторони BC.

4. Знайдіть усі такі визначені на множині всіх дійсних чисел числові функції f, що для будь-яких $x \in \mathbf{R}$ і $y \in \mathbf{R}$ має місце рівність

$$f\left(xf(y)\right) + f\left(y + f(x)\right) - f\left(x + yf(x)\right) = x.$$

5. *Задача №5 рівня «А» для 10 класу.*

Рівень «Б»

7 клас

1. *Задача №1 рівня «А» для 7 класу.*

2. Серед 25 монет є рівно 2 фальшиві. Є чарівна скринька, в яку можна покласти 2 монети, і вона покаже кількість фальшивих монет у цій парі. Покажіть, як можна визначити обидві фальшиві монети не більше, ніж за 14 таких операцій.

3. Андрій, Микола, Олена, Сергій і Дарина посіли п'ять перших місць на математичній олімпіаді (жодне з місць не було розділено між декількома учасниками). Кожен з них знає, яке місце він зайняв. Олена знає, що різниця місць Сергія й Андрія (у вказаному порядку) дорівнює двом. Також вона знає, що Дарина зайняла не перше місце, і тому Олена може відновити розподіл місць між цією п'ятіркою учасників олімпіади. Яке місце зайняла Дарина?

4. *Задача №3 рівня «А» для 7 класу.*

5. *Задача №4 рівня «А» для 7 класу.*

8 клас

1. *Задача №1 рівня «А» для 8 класу.*

2. Керівник математичного гуртка дав учням завдання виписати в порядку зростання всі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, в яких $1 \leqslant a < b < c < d \leqslant 9$. Яке число буде записаним на 53-му місці?

3. *Задача №3 рівня «А» для 8 класу.*

4. Дано гострокутний трикутник ABC. Кола k_1 і k_2 проходять через вершину A і дотикаються до прямої BC в точках B і C відповідно. Висота BK трикутника ABC перетинає коло k_1 у точці P, відмінній від B, а висота CL перетинає коло k_2 в точці Q, відмінній від C. Доведіть, що точки A, P і Q лежать на одній прямій.

5. *Задача №4 рівня «А» для 8 класу.*

9 клас

1. Сума двох натуральних чисел дорівнює 20132013, і якщо в одному з них закреслити останню цифру, то отримаємо друге число. Знайдіть усі такі пари чисел.

2. *Задача №1 рівня «А» для 9 класу.*

3. У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC, $AD > BC$, діагоналі AC і BD перетинаються в точці E. Дотична до описаного кола трикутника BCE, проведена в точці E, перетинає пряму AD в точці F так, що точка D лежить між точками A і F. Відомо, що $AF = a$, $AD = b$. Знайдіть довжину відрізка EF.

4. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел x, y і z має місце нерівність

$$\frac{x(y-x)}{x+y} + \frac{y(z-y)}{y+z} \leqslant \frac{z-x}{2}.$$

5. *Задача №5 рівня «А» для 9 класу.*

10 клас

1. Чи можна зобразити на прямій шість відрізків так, щоб серед будь-яких трьох зображених відрізків знайшлися принаймні два, які мають хоча б одну спільну точку, і кожна точка прямої належала щонайбільше трьом зображеним відрізкам? (Вважається, що кінці відрізків належать самим відрізкам.)

2. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел m і n, для яких виконується рівність $mn - \sqrt{m^2 + n^2} = 7$.

3. Відомо, що додатні дійсні числа x і y задовольняють нерівність $2x + 7y \leqslant 14$. Доведіть, що $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant 3$.

4. *Задача №4 рівня «А» для 9 класу.*

5. *Задача №5 рівня «А» для 10 класу.*

11 клас

1. *Задача №1 рівня «А» для 11 класу.*

2. *Задача №1 рівня «А» для 10 класу.*

3. У трикутнику ABC $AB = 16$ см, $BC = 25$ см, $AC = 39$ см. Пряма, яка проходить через центр вписаного кола трикутника ABC і середину M сторони BC, перетинає висоту AD цього трикутника в точці P. Знайдіть довжину відрізка AP.

4. *Задача №4 рівня «А» для 11 класу.*

5. Нехай x_1 – довільне дійсне число, і для всіх натуральних n виконується рівність

$$x_{n+1} = \sqrt{7} \cdot x_n + 2\sqrt{x_n^2 + 4}.$$

Доведіть, що серед чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ принаймні 1005 чисел є ірраціональними.

2014 рік

Завдання достатнього рівня

відбіркового туру III етапу (26 січня 2014р.)

7 клас

1. Відомо, що в понеділок Настя добиралася на автомобілі на роботу більше однієї години. Також відомо, що протягом будь-якої години руху середня швидкість її автомобіля дорівнювала 80 км/год. Чи могла його середня швидкість протягом усього шляху дорівнювати 100 км/год? Відповідь обґрунтуйте.

2. У Олесі є необмежена кількість цифр 3 та рівно одна цифра 4. Вона хоче утворити число, яке б ділилося на найбільшу можливу кількість чисел з множини $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Яке найменше число може утворити Олеся? Відповідь обґрунтуйте.

3. У клітини дошки 6×6 можна ставити зірочки (не більше 1 зірочки у клітину) таким чином, щоб у кожному рядку, кожному стовпчику та кожній з двох великих діагоналей було не більше ніж 3 зірочки. Яку максимальну кількість зірочок можна поставити на дошку за таких умов? Відповідь обґрунтуйте.

4. Сторони трикутників ABC та ACD задовольняють такі умови: $AB = AD = 3\,\text{см}$, $BC = 7\,\text{см}$, $DC = 11\,\text{см}$. Які значення може приймати довжина сторони AC, якщо вона дорівнює цілій кількості сантиметрів, є середньою у ΔACD та найбільшою у ΔABC? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. Відомо, що в понеділок Настя добиралася на автомобілі на роботу більше однієї години. Також відомо, що протягом будь-якої години руху середня швидкість її автомобіля дорівнювала 80 км/год. Чи могла його середня швидкість протягом усього шляху дорівнювати 100 км/год?

2. Відомо, що M та N два послідовних чотирицифрових числа. Яке найбільше значення може приймати різниця між сумами цифр чисел M та N?

3. Чи можна розставити у комірках таблиці 3×5 числа 1, 2, ..., 15 таким чином, щоб:

$a)$ суми чисел в усіх рядках були однакові, а також, щоб суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках;

$b)$ суми чисел в усіх трьох рядках та усіх п'яти стовпчиках були однакові?

4. Прості числа p, q та натуральні x, y задовольняють умови: $x < p$, $y < q$ та $\frac{p}{x} + \frac{q}{y}$ – ціле число. Доведіть, що $x = y$.

5. На стороні AB трикутника ABC відмітили точку K. Відрізок CK перетинає медіану AM у точці F. Відомо, що $AK = AF$. Знайдіть відношення $MF : BK$.

9 клас

1. Знайдіть натуральне число n, для якого існує найбільша кількість пар ненульових цифр a, b, що задовольняють умову: $\overline{ab} - \overline{ba} = n$.

2. Два кола c_1, c_2 проходять через центр O кола c та дотикаються до нього внутрішнім чином у точках A та B відповідно. Доведіть, що на прямій AB лежить спільна точка кіл c_1, c_2.

3. $a)$ Чи можна розставити у комірках таблиці 3×5 числа 1, 2, ..., 15 таким чином, щоб суми чисел в усіх рядках були однакові, а також, щоб суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках?

b) Чи можна розставити у комірках таблиці 4×5 числа 1, 2, ..., 20 таким чином, щоб суми чисел в усіх рядках були однакові, а також, щоб суми чисел в усіх стовпчиках були однакові, але, можливо, відмінні від сум чисел у рядках?

4. Знайдіть усі такі натуральні n, для яких числа $12n - 119$ та $75n - 539$ є точними квадратами натуральних чисел.

5. Дійсні числа a, b задовольняють умову: $a^{2014} + b^{2014} = a^{2016} + b^{2016}$. Доведіть, що справджується нерівність: $a^2 + b^2 \leqslant 2$.

10 клас

1. Розв'яжіть нерівність: $\dfrac{(x+1)^4}{(x-1)^3} + \dfrac{x-1}{16} \geqslant \dfrac{(x+1)^2}{2(x-1)}$.

2. Чи існують четвірки дійсних чисел a, b, c, d, що задовольняють умови: $a + b + c = d$ та $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{ad} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{cd}$.

3. Розв'яжіть у натуральних числах x, y, z систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2 = 4y^2 + 3z^2 + 2, \\ 13x = 4y + 3z + 29. \end{cases}$$

4. У трикутнику ABC сторона $AC = \frac{1}{2}(AB + BC)$, BL – бісектриса $\angle ABC$, K, M – середини сторін AB і BC відповідно. Знайдіть величину $\angle KLM$, якщо $\angle ABC = \beta$.

5. На дошці записаний вираз $** ... *$, що складається з непарної кількості зірочок. Андрій та Олеся грають у таку гру: вони по черзі (Андрій перший) замінюють будь-яку ще не замінену зірочку будь-якою цифрою (на 1 місце не можна ставити цифру 0). Якщо в решті вийде число, що кратне 11, то перемагає Андрій, якщо ні, то – Олеся. Хто переможе при правильній грі?

11 клас

1. Знайдіть усі розв'язки рівняння $2^{\sin x} = \sin 2^x$ на проміжку $[0; \pi)$.

2. *a*) Відомо, що у нескінченній арифметичній прогресії натуральних чисел є деякий член, який є k–м степенем натурального числа, більшого від 1. Доведіть, що серед членів прогресії є нескінченна кількість таких, що також є k–ми степенями натуральних чисел.

b) Чи існує нескінченна зростаюча арифметична прогресія натуральних чисел жоден член якої не є степенем натурального числа більше першої?

3. Нехай a, b, c – сторони гострокутного трикутника. Доведіть, що

$$\sqrt{a^2+b^2-c^2}+\sqrt{b^2+c^2-a^2}+\sqrt{c^2+a^2-b^2} \leqslant \sqrt{3\,(ab+bc+ca)}.$$

4. Побудуємо для трикутника ABC коло S, що проходить через точку B і дотикається до прямої CA у точці A, коло T, що проходить через точку C і дотикається до прямої BA у точці A. Другу точку перетину кіл S та T позначимо через D. Точку перетину прямої AD та описаного кола ΔABC позначимо через E. Доведіть, що D – середина відрізку AE.

5. *Задача №5 для 10 класу.*

2014 рік
Завдання I туру III етапу
(07 лютого 2014р.)

7 клас

1. Яке з чисел більше:
$a=\dfrac{1}{1007}+\dfrac{1}{1008}+\cdots+\dfrac{1}{2011}+\dfrac{1}{2012}$ чи $b=\dfrac{1}{1008}+\dfrac{1}{1009}+\cdots+\dfrac{1}{2013}+\dfrac{1}{2014}$?

Відповідь обґрунтуйте.

2. Нехай $x^2+y^2=1$. Доведіть, що

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(1-ax-by)^2+(ay-bx)^2.$$

3. Настя та Альоша задумали по натуральному числу: Настя — однозначне, а Альоша — двозначне. Виявилось, що їх сума — двозначне число, записане однаковими цифрами, а добуток — тризначне число, записане однаковими цифрами. Які числа були задумані?

4. У країні Лапландії 12% мешканців не мають роботи. У столиці країни ситуація краще: тільки 4% мешканців не мають роботи. Але у провінції аж 14% мешканців є безробітними. Який відсоток мешканців країни Лапландії живе у столиці?

8 клас

1. Якою цифрою закінчується число $2013^{2014}+2014^{2013}$?

2. Позначимо дві які-небудь цифри буквами A та X. Доведіть, що шестицифрове число $XAXAXA$ ділиться на 7 без залишку.

3. На стороні BC квадрата $ABCD$ взято точку K так, що $\angle KAD = 60^0$. Відрізок KA перетинає діагональ BD в точці P, а бісектриса кута CKA перетинає сторону CD в точці N. Доведіть, що трикутник CPN – рівносторонній.

4. В першій клітинці таблиці 1×2013 написане число 1, а в останній – число 2. Петро та Василь по черзі записують числа у вільні клітинки таблиці. Петро ходить першим і пише тільки одиниці, а Василь – тільки двійки. Коли вільних клітинок немає, Петро підраховує кількість пар сусідніх клітинок з однаковими числами в них, а Василь – з різними.
Якщо число Петра більше, то виграє Петро, в іншому випадку виграє Василь, Хто переможе при правильній грі? Висновок поясніть.

5. Знайдіть всі пари простих чисел p та q, для яких число p^3+q^2 є кубом деякого натурального числа.

9 клас

1. Знайдіть всі дійсні числа x, y такі, що $\dfrac{x+6}{y}+\dfrac{13}{xy}=\dfrac{4-y}{x}$.

2. Відомо, що серед деяких n цілих чисел сума кожних m чисел є непарною $(m<n)$. Чи може число m бути парним? Відповідь обгрунтуйте.

3. На катеті AB прямокутного трикутника ABE як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає гіпотенузу AE у точці C. З точки C проведено дотичну до кола, яка перетинає катет BE у точці D. Знайдіть відношення $BD : BE$.

4. Доведіть, що число $11^{101}+11^{102}+\cdots+11^{2014}$ ділиться на 133.

5. У будь-яких двох незнайомих людей у компанії є рівно двоє спільних знайомих. Даша та Тимур знайомі між собою, але не мають спільних знайомих. Доведіть, що Даша та Тимур мають однакову кількість знайомих в цій компанії.

10 клас

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + z = x + y \\ zx + y = z + x \\ yz + x = y + z. \end{cases}$$

2. Розв'язати в натуральних числах рівняння $3^x + 3^y = 6^z$.

3. В коло радіуса R вписано правильний десятикутник $A_1A_2 \ldots A_{10}$. Що більше: A_1A_4 чи $A_1A_2 + R$?

4. Знайти всі функції f, що визначені на всій множині дійних чисел, такі, що при довільних x, y та z виконується рівність:

$$f(x)f(y)f(z) - f(xyz) = x + y + z + xy + yz + zx.$$

5. В клітинках дошки 6×6 написано цілі числа. За один крок дозволяється обрати довільний квадрат (розміром більший ніж 1×1), сторони якого йдуть по сторонах клітинок дошки, і збільшити всі числа, що знаходяться в цьому квадраті, на 1. Чи завжди за кілька таких кроків можна досягти того, щоб всі числа на дошці стали парними?

11 клас

1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy + z = 6 \\ zx + y = 6 \\ yz + x = 6. \end{cases}$

2. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$.

3. *Задача №3 для 10 класу.*

4. Знайти всі функції f, що визначені на всій множині дійних чисел, такі, що при довільних x, y та z виконується нерівність:

$$f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) \leqslant 3f(x + 2y + 3z).$$

5. *Задача №5 для 10 класу.*

2015 рік[8]

8 клас

1. Петрик виписав усі послідовні натуральні числа від 2015 до 3000 та зміг вибрати 10 з них таких, що їх сума просте число. Чи могла і суми тих чисел, що залишилися не вибраними, також у сумі давати просте число?

2. Петрик написав деяке натуральне число n. Після цього він переставив у цьому числі цифри і вийшло число m, яке виявилось у 3 рази менше n.

a) Чи обов'язково число n ділиться націло на 9?

b) Чи обов'язково число n ділиться націло на 27?

3. Для яких натуральних n квадрат $n \times n$ можна покрити прямокутниками 1×4 можливо в декілька шарів? Покрити у декілька шарів у даному випадку означає, що кожна комірка 1×1 покрита однаковою кількістю прямокутників.

4. По круглому треку їздять в одному напрямі з постійними але попарно різними швидкостями $n \geqslant 3$ велосипедистів. У одного з них є фляга з водою. У момент, коли відбувається зустріч двох велосипедистів, у одного з яких фляга, відбувається миттєва передача цієї фляги другому велосипедисту. Відомо, що зустріч трьох велосипедистів в одній точці неможлива.

a) Чи може так трапитись, що існують два велосипедисти, до яких фляга жодного разу не потрапить, як довго б не їздили велосипедисти?

b) Чи може так трапитись, що існує один велосипедист, до якого фляга жодного разу не потрапить, як довго б не їздили велосипедисти?

5. Точка P лежить всередині трикутника ABC і задовольняє умови $\angle ABP = \angle PCA$, точка Q така, що $PBQC$ – паралелограм. Доведіть, що $\angle QAB = \angle CAP$.

9 клас

1. В турнірі брали участь 78 тенісистів, усі різного віку. Усього було зіграно 310 матчів, причому ніякі двоє не грали між собою більше одного разу.

[8]Завдання розроблені кафедрою обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Доведіть, що можна вибрати 4-х тенісистів так, щоб або наймолодший у цій четвірці обіграв інших трьох, або найстарший у цій четвірці обіграв інших трьох.

2. З цифр 0, 1, 2, ..., 9, використавши кожну рівно один раз, утворили 5 двоцифрових чисел. Якщо найменше з них позначити через n, то інші дорівнюють відповідно $2n$, $3n$, $4n$, $5n$. Яке значення може приймати n?

3. Для яких непарних натуральних n квадрат $n \times n$ можна покрити Z-тетраміно (рис. 21) можливо в декілька шарів? Покрити у декілька шарів у даному випадку означає, що кожна комірка 1×1 покрита однаковою кількістю тетраміно, які можна повертати та перегортати у будь-якому напрямі.

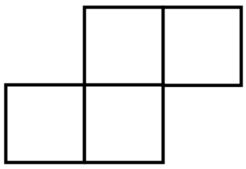


Рис. 21: Z-тетраміно

4. *Задача №4 для 8 класу.*

5. Вписаний у коло чотирикутник $ABCD$ задовольняє умови $AD = BD$, M — точка перетину діагоналей, I — центр кола вписаного у ΔBCM, N — друга точка перетину прямої AC та описаного кола ΔBMI. Доведіть, що $AN \cdot NC = CD \cdot BN$.

10 клас

1. Петрик на кожній перерві з'їдав цукерок більше ніж на попередній. Скільки він міг з'їсти цукерок на 4-й перерві, якщо усього за 5 перерв він з'їв 31 цукерку, при цьому на першій перерві він з'їв у 3 рази менше ніж на останній?

2. *Задача №2 для 9 класу.*

3. Для яких парних натуральних n квадрат $n \times n$ можна покрити Z-тетраміно (рис. 1) можливо в декілька шарів? Покрити у декілька шарів у даному випадку означає, що кожна комірка 1×1 покрита однаковою кількістю тетраміно, які можна повертати та перегортати у будь-якому напрямі.

4. Дійсні числа x, y, z такі, що $x < y < z < 6$. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y-x} + \dfrac{1}{z-y} \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{6-z} + 2 \leqslant x. \end{cases}$$

5. *Задача №5 для 9 класу.*

11 клас

1. Знайдіть найменше натуральне число, яке закінчується на 16, має суму цифр 16 та ділиться на 16.

2. Дійсні числа x, y, z задовольняють умову: $\dfrac{x+y}{z} = \dfrac{y+z}{x} = \dfrac{z+x}{y}$. Які значення може приймати вираз $\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$?

3. *Задача №3 для 10 класу.*

4. *Задача №4 для 10 класу.*

5. На площині дано два кола ω_1 та ω_2 з центрами O_1 та O_2 відповідно, які дотикаються зовнішнім чином у точці M, при цьому радіус кола ω_2 більший за радіус кола ω_1. Розглянемо точку $A \in \omega_2$ таку, що точки O_1, O_2 та A не колінеарні. AB та AC — дотичні до кола ω_1 (B та C є точками дотику). Лінії MB і MC перетинають вдруге коло ω_2 у точках E і F відповідно. Точка перетину EF і дотичної в точці A до кола ω_2 позначимо через D. Доведіть, що точка D лежить на фіксованій лінії, коли точка A рухається по колу ω_2 таким чином, що точки O_1, O_2 та A не колінеарні.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Апостолова Г. В. Перші зустрічі з параметрами / Г. В. Апостолова. – К. : Факт, 2004. – 328 с.
2. Апостолова Г. В. Хитромудрий модуль / Г. В. Апостолова. – К. : Факт, 2006. – 256 с.
3. Апостолова Г. В. Антьє і мантиса числа / Г.В. Апостолова, В.В. Ясінський. – К. : Факт, 2006. – 128 с.
4. Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах. Факультативный курс /[В. В. Бардушкин, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев, Т. П. Фадеичева.] – Москва : МГИЭТ (ТУ), 2003. – 224 с.
5. Березина Л. Ю. Графы и их применение : [пособие для учителей] / Л. Ю. Березина. – М. : Просвещение, 1979. – 143 с.
6. Бродский Я. С. Функциональные уравнения / Я. С. Бродский, А. К. Слипенко. – К. : Вища школа. Головное изд-во, 1983. – 96 с.
7. Виленкин Н. Я. Индукция. Комбинаторика : [пособие для учителей] / Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1976. – 48 с.
8. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами : [учебное пособие для учащихся 7-11 кл.] / Е. В. Галкин. – Челябинск : Взгляд, 2005. – 271 с.
9. Германович П. Ю. Сборник задач по математике на сообразительность : [пособие для учителей] / П. Ю. Германович. – М. : Учпедгиз, 1960. – 224 с.
10. Голубев В. И. Решение сложных и нестандартных задач по математике / В. И. Голубев. – М : ИЛЕКСА, 2007. – 252 с.
11. Головина Л. И. Индукция в геометрии / Л. И. Головина, И. М. Яглом. – М. : Физматгиз, 1961. – 101 с.
12. Гончарова І. В. Евристики в геометрії [факультативний курс: книга для вчителя] / І. В. Гончарова, О.І. Скафа. – Х. : Основа, 2004. – 112 с.
13. Горнштейн П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – К. : Текст; ОКО, 1992. – 290 с.
14. Дзигіна Л. Б. Програма підготовки учнів до участі в математичних олімпіадах / Л. Б. Дзигіна. // Математика в школах України: Науково-методичний журнал, – Харків : Основа, 2009. – № 16/18. – 89 с.
15. Екимова М. А. Задачи на разрезание / М. А. Екимова, Г. П. Кукин. – М. : МЦНМО, 2002. – 122 с.

16. Канель-Белов А. Я. Как решают нестандартные задачи / А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. ; под ред. В. О. Бугаенко. – [4-е изд.] – испр. М. : МЦНМО, 2008. – 96 с.
17. Козко А. И. Задачи с параметром и другие сложные задачи / А. И. Козко, В. Г. Чирский. – М. : МЦНМО, 2007. – 296с.
18. Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание : пер. с англ. / Ю. Н. Сударева. под ред. и с послесл. И. М. Яглома. – М. : Мир, 1977. – 256 с.
19. Летчиков А. В. Принцип Дирихле. Задачи с указаниями и решениями / А. В. Летчиков. – Ижевск : Удмуртский университет, 1992. – 108 с.
20. Ліпчевський Л. В. Розв'язування нерівностей. Нестандартні способи доведення нерівностей [навчально-методичний посібник] / Л. В. Ліпчевський, У. В. Остапчук. – Біла Церква : КОІПОПК, 2004. – 76 с.
21. Мельников О. И. Занимательные задачи по теории графов / О. И. Мельников. – Минск: ТетраСистемс, 2001. – 144 с.
22. Алгебра : [підручник для 8-х класів з поглибленим вивченням математики] / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2008. – 368 с.
23. Мерзляк А. Г. Геометрія : [підручник для 8-х класів з поглибленим вивченням математики] / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2008. – 240 с.
24. Петраков И. С. Математические олимпиады школьников : [пособие для учителей] / И.С. Петраков – М. : Просвещение, 1982. – 96 с.
25. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: в 2 ч. / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1991.
26. Задачі з параметрами / В. К. Репета, Н. О. Клешня, М. В. Коробова, Л. А. Репета. – К. : Вища школа, 2006. – 302 с.
27. Седракян Н. М. Неравенства. Методы доказательства / Н. М. Седракян, А. М. Авоян; [пер. с арм. Г. В. Григоряна] – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.
28. Шаповалов А. В. Принцип узких мест / А. В. Шаповалов. – М. : МЦНМО, 2006. – 24 с.
29. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики / А. Шень. – М. : МЦНМО, 2007. – 40 с.
30. Шень А. Математическая индукция / А. Шень. – 3-е изд., дополн. – М. : МЦНМО, 2007. – 32 с.
31. Ясінський В. Теорія лишків та її застосування до розв'язування олімпіадних задач / В. Ясінський. – Математика в школі: Науково-методичний журнал. – 2009. – № 1/2. – 40, [35] с.
32. Ясінський В. Принцип Штурма та його використання під час розв'язування олімпіадних екстремальних задач / В. Ясінський, Л. Наконечна. – Математика в школі: Науково-методичний журнал. – 2009. – № 9. – 40, [33] с.
33. Ясінський В. А. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції / В. А. Ясінський. – Х. : Основа, 2005. – 69 с.

Математичні олімпіади і турніри в Україні

34. Вышенский В. А. Сборник задач киевских математических олимпиад / В. А. Вышенский, Н. В. Карташев, В. И. Михайловский, М. И. Ядренко. – К. : Вища школа, 1984. – 240 с.
35. Вишенський В. А. Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. : [збірник задач] / В. А. Вишенський, М. В. Карташов. – К. : Либідь, 1993. – 144 с.
36. Вишенський В. А. Українські математичні олімпіади : [довідник] / В. А. Вишенський, О. Г. Ганюшкін. – К. : Вища школа, 1993. – 415 с.
37. Лейфура В. М. Математичні олімпіади школярів України. 1991-2000 / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман. – К. : Техніка, 2003. – 541 с.
38. Федак І. В. Готуємося до олімпіади з математики : [посібник для ЗНЗ] / І. В. Федак. – Чернівці, 2003.
39. Басанько А. М. За лаштунками підручника з математики : [збірник розвиваючих задач для учнів 5 – 7 класів] / А. М. Басанько, А. О. Романенко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004.
40. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад. 8-11 класи / Т. В. Коваль. – Тернопіль : Мандрівець, 2004. – 80 с.
41. Лейфура В. М. Змагання юних математиків України. 2003 рік / В. М. Лейфура. – Х. : Основа, 2004. – 80 с.
42. Ясінський В. А. Олімпіадні задачі [випуск 1: навчальний посібник] / В. А. Ясінський. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 40 с.
43. Лось В. М. Математика: навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач : [навч. посібник] / В. М. Лось, В. П. Тихієнко. – К. : Кондор, 2005 – 312 с.
44. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч : [навчальний посібник] / О. А. Сарана – К. : А.С.К., 2005. – 344 с.
45. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язання / В. А. Ясінський. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.
46. Ясінський В. А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад : [методический материал] / В. А. Ясінський. // Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2006. – 128 с.
47. Готуємось до олімпіади з математики / упорядн. А. Б. Веліховська, О. В. Гримайло. // Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2007. – Вип. 2 (50) – 160 с.
48. Вороний О. М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 1] / О. М. Вороний. – Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 5 (65). – 128 с.
49. Вороний О. М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 2] / О. М. Вороний. – Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 6 (66). – 141, [3] с.

50. Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2006-2007 / А. В. Анікушин, А. Р. Арман. – К. : Літера, 2008. – 135 с.
51. Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів. 2006-2007 / А. В. Анікушин, А. Р. Арман. – К. : Літера, 2008. – 224 с.
52. Анікушин А. В. Всеукраїнські математичні бої – 2009 / А. В. Анікушин, А. Р. Арман; за ред. Б. В. Рубльова. – Дніпропетровськ: Інновація, 2010. – 96 с.
53. Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2007-2008 та 2008 – 2009 / А. В. Анікушин, А. Р. Арман; за ред. Б. В. Рубльова. – Львів: Каменяр, 2010. – 552 с.

Математичні олімпіади і турніри в Росії

54. Агаханов Н. Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов. – М. : МЦНМО, 2007. – 468 с.
55. Агаханов Н. Х. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1 / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.; под общ. ред. С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. – М. : Просвещение, 2008. – 192 с.
56. Математика. Областные олимпиады. 8-11 классы / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.]. – М. : Просвещение, 2010. – 239с.
57. Агаханов Н. Х. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2 / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский; [под общ. ред. С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. – М. : Просвещение, 2009. – 159 с.
58. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6-11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. – М. : Просвещение, 2010. – 192 с.
59. Агаханов Н. Х. Математика. Международные олимпиады / Н.Х. Агаханов, П. А. Кожевников, Д. А. Терешин. – М. : Просвещение, 2010. – 127 с.
60. Балаян Э. Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Э. Н. Балаян. – 3-е изд. – Ростов н/Д: Феникс, 2008. – 364 с.
61. Весенний Турнир Архимеда. Олимпиада для 5-6 классов. Задания с решениями, технология проведения / [Баранова Т. А., Блинков А. Д., Кочетков К. П. и др.]. – М. : МЦНМО, 2003. – 128 с.
62. Болтянский В. Г. Сборник задач московских математических олимпиад / В. Г. Болтянский, А. А. Леман. – М. : Просвещение, 1965. – 384 с.
63. Бончковский Р. Н. Московские математические олимпиады 1935 и 1936 годов / Р. Н. Бончковский. – ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 82 с.
64. Вавилов В. В. Задачи отборочных математических олимпиад / В. В. Вавилов. – М. : МГУ, 1992. – 61 с.
65. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра: [учебное пособие для учащихся 7-11 кл] / Е. В. Галкин. – Челябинск: Взгляд, 2004. – 448 с.
66. Гальперин Г. А. Московские математические олимпиады / Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго. – М. : Просвещение, 1986. – 303с.

67. Генкин С. А. Ленинградские математические кружки / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. – Киров: Аса, 1994. – 272 с.
68. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике / Н. В. Горбачев. – М. : МЦНМО, 2005. – 560 с.
69. Егоров А. А. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика / А. А. Егоров, Ж. М. Раббот. – М. : Бюро Квантум, 2006. – (Библиотечка «Квант»)
70. Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями): [Пособие для учителей 5-8 классов.] // под редакцией К. П. Сикорского, изд. 2-е, переработ. / Г. И. Зубелевич. – М. : Просвещение, 1971. – 304 с.
71. Математика в задачах: Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / [под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова]. – М. : МЦНМО, 2009. – 488 с.
72. Московские математические регаты / [сост. А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц]. – М. : МЦНМО, 2007. – 360 с.
73. Олимпиада «Ломоносов» по математике (2005-2008). – М. : Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008. – 48 с.
74. Московские математические олимпиады 1993-2005 г. / [Федоров Р. М., Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., Ященко И. В.] / [под ред. В. М. Тихомирова]. – М. : МЦНМО, 2006. – 456 с.
75. Севрюков П. Ф. Подготовка к решению олимпиадных задач по математике / П. Ф. Севрюков. – Изд. 2-е. – М. : Илекса; Народное образование; Ставрополь : Сервисшкола, 2009. – 112 с.
76. Спивак А. В. Тысяча и одна задача по математике / А. В. Спивак. – М. : Просвещение, 2002. – 208 с.
77. Фомин А. А. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады / А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. – М. : Дрофа, 2006. – 159 с.
78. Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады / Д. В. Фомин. – СПб. : Политехника, 1994. – 309 с.
79. Ященко И. В. Приглашение на математический праздник / И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2005. – 104 с.
80. Олимпиадные задания по математике. 9-11 классы: решение олимпиадных задач повышенной сложности / [сост. В. А. Шеховцов]. – Волгоград: Учитель, 2009. – 99 с.

Математичні олімпіади за часів СРСР

81. Агаханов Н. Х. Математические олимпиады школьников / Н. Х. Агаханов, Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренок. – М. : Просвещение: Учеб. лит., 1997. – 208 с.
82. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад / И. Л. Бабинская. – М. : Наука, 1975. – 112 с.
83. Бугулов Е. А. Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам / Е. А. Бугулов, Б. А. Толасов. – Орджоникидзе, 1962. – 226 с.

84. Васильев Н. Б. Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков / Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. – М. : Учпедгиз, 1963. – 53 с.
85. Васильев Н. Б. Заочные математические олимпиады / Н. Б. Васильев, В. Л. Гуттенмахер, Ж. М. Раббот, А. Л. Тоом. – [2-е изд.]. – М. : Наука, 1987. – 176 с.
86. Васильев Н. Б. Задачи всесоюзных математических олимпиад / Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. – М. : Наука, 1988. – 288 с.
87. Петраков И. С. Математические олимпиады школьников: [пособие для учителей] / И. С. Петраков. – М. : Просвещение, 1982. – 96 с.
88. Рябухин Ю. М. Кишиневские математические олимпиады / Ю. М. Рябухин, В. П. Солтан, Б. И. Чиник. – Кишинев: Штиинца, 1983. – 76 с.
89. Савин А. П. Физико-математические олимпиады: [сборник] / А. П. Савин. – М. : Знание, 1977. – 160 с.
90. Шустеф Ф. М. Сборник олимпиадных задач по математике / [под ред. Ф. М. Шустеф] / Ф. М. Шустеф, А. М. Фельдман, В. Ю. Гуревич. – Минск: Государственное уч.-пед. издательство Министерства просвещения БССР, 1962. – 84 с.

Міжнародні та закордонні математичні олімпіади

91. Берник В. И. Сборник олимпиадных задач по математике / В. И. Берник, И. К. Жук, О. В. Мельников. – М. : Нар. асвета, 1980. – 144 с.
92. Васильев Н. Б. Задачи Всесоюзных математических олимпиад / Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. – М. : Наука, 1988. – 288 с.
93. Конягин С. В. Зарубежные математические олимпиады / [под ред. И. Н. Сергеева] / С. В. Конягин, Г. А. Тоноян, И. Ф. Шарыгин. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – (Б-ка мат. кружка). – 416 с.
94. Венгерские математические олимпиады. [пер. с венг. Ю. А. Данилова. под ред. и с предисл. В. М. Алексеева] / Й. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани. – М. : Мир, 1976. – 543 с.
95. Лейфура В. М. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв’язування / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман. – Львів: Євро світ, 1999. – 128 с.
96. Морозова Е. А. Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги : пособие для учащихся / Е. А. Морозова, И. С. Петраков, В. А. Скворцов. – [4-е изд., испр. и доп]. – М. : Просвещение, 1976. – 288 с.
97. Страшевич С. Польские математические олимпиады / С. Страшевич, Е. Бровкин; предисл, А. Пелчинского и А. Шинцеля; пер. с польск. Ю. А. Данилова; под ред. В.М. Алексеева. – М. : Мир, 1978. – 338 с.
98. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады / [сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова]. – М. : Дрофа, 1998. – 160 с.

II і III тури Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики в Донецькій області

99. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / [Р. И. Довбыш, Л. Л. Потемкина, Н. Л. Трегуб и др.] – Донецк: ООО ПКФ «БАО», **2005**. – 336 с.

100. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2007** / Б.Б. Беседін, Г.М. Бірюкова, Г.О. Ганзера, В.М. Кадубовська, О.А. Кадубовський, Л.Г. Плесканьова, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Навчальний посібник. — Слов'янськ, 2008. — 40 с.

101. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2008** / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, Л.Г. Плесканьова, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 2, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ — учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. — Слов'янськ, 2009. — 44 с.

102. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2009** / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, Г.О. Ганзера, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 5, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ — учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. — Слов'янськ, 2010. — 44 с.

103. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2010** / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 8, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ — учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. — Слов'янськ, 2011. — 80 с.

104. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2011** / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко, М.М. Рубан // Випуск 10, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, 2012. – 84 с.

105. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2012** / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, М.М. Рубан, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 11, СЕРІЯ: Викладачі ДДП — учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. — Слов'янськ, 2013. — 64 с.

106. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2013** / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. — Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», 2014. — 60 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 12).

107. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2014** / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. — Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», 2015. — 64 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 13).

Internet ресурси

1. Київські олімпіади з математики (сайт київських та всеукраїнських олімпіад та турнірів з математики, де можна знайти тексти завдань, результати та умови проведення математичних змагань, що проходили в Україні протягом останніх років) [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://matholymp.org.ua/

2. Фізико-математичний журнал «Квант» (завдання різних математичних олімпіад за 1971-2002рр) [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://kvant.mirror1.mccme.ru/

3. Сайт міжнародних олімпіад з математики [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.imo-official.org/

4. Олимпиады для школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://olimpiada.ru/

5. Всероссийская олимпиада по математике [Електронний ресурс]. – Режим доступа: math.rusolymp.ru/

6. Российская страница международного математического конкурса «Кенгуру» [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://mathkang.ru/

7. Українська сторінка міжнародного конкурсу «Кенгуру» [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.kangaroo.com.ua/index.php

8. Московская математическая олимпиада школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://olympiads.mccme.ru/mmo/

9. Санкт-Петербургские математические олимпиады [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.pdmi.ras.ru/ olymp/

10. Турнир городов Международная математическая олимпиада для школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.turgor.ru/

11. Сайт Московского Центра Непрерывного Математического Образования [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.mccme.ru/

12. Задачная база олимпиадных задач (декілька тисяч олімпіадних задач російських і міжнародних математичних змагань). [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://zaba.ru/, http://problems.ru/