МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ — 2016

6 – 11 класи

Рекомендовано вченою радою
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»
як навчальний посібник
для факультативних занять з математики

Слов'янськ — 2017

УДК 51 (075.3)

ББК 22.1 я 721

О-543

Олімпіадні задачі: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики — 2016 : навчальний посібник / О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін, О. В. Чуйко. — Слов'янськ : вид. центр «Маторін», 2017. — 100 с. — (Викладачі ДДПУ — учням, студентам, вчителям, вип. 15).

Адресовано вчителям та викладачам математики, як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням ЗОШ та студентам математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ.

РЕКОМЕНДОВАНО
вченою радою Державного вищого навчального закладу
«Донбаський державний педагогічний університет»,
Протокол №7 від 23.02.2017 р.

Рецензенти:

кандидат фізико-математичних наук **О.О. НОВІКОВ**,
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»,
декан фізико-математичного факультету,
доцент кафедри математики

вчитель математики вищої категорії **І.Г. ВОЛОШИНА**,
Донецький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти, методист відділу математики.

Відповідальний за випуск:

кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри геометрії та методики викладання математики О.А. Кадубовський

Зміст

ВІД АВТОРІВ

> «Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!.»
>
> Д. Пойа[1]

Даний посібник є чотирнадцятим випуском серії «Викладачі ДДПУ — учням, студентам, вчителям» заснованої у 2008 році. Посібник містить розв'язання задач II етапу (районного, міського) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, який проводився 19 листопада 2016 року відповідно до наказу МОН України від 19.08.2016 за №1006 «Про проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів у 2016/2017 навчальному році» та наказу Департаменту освіти і науки Донецької облдержадміністрації за №416 від 24.10.2016 «Про проведення II етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад у 2016-2017 навчальному році».

Як і в попередніх випусках для більшості задач олімпіади пропонується кілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого із запропонованих методів. Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в певному розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головна мета авторів посібника — «донести» до вчителів і учнів якомога більше корисних математичних ідей і принципів та показати їх застосування.

[1]Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 452 с.

Нагадаємо, що принципами в математиці називають деякі прості, майже очевидні, твердження, аксіоми або методи, які використовуються в доведеннях математичних теорем. Дуже часто учні зустрічаються з ними при розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Перш за все учні, які беруть участь в олімпіадах, повинні володіти значною кількістю принципів. Нажаль шкільна програма не передбачає знайомства з більшістю із них. З основними математичними принципами можна ознайомитись у наведеній літературі, зокрема в [13][2].

У посібнику до окремих задач наводяться «доповнення», сенс яких полягає:

— у формулюванні двоїстої або схожої задачі,

— або ж в узагальненні запропонованої задачі.

На думку авторів такі доповнення повинні активізувати і зацікавити учнів при підготовці до майбутніх олімпіад.

Колектив авторів посібника та керівництво фізико-математичного факультету державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет» висловлює щиру подяку всім вчителям міста Слов'янськ, які беруть участь в організації та проведенні як учнівських олімпіад з математики, так і семінарів, присвячених аналізу їх результатів.

Маємо надію, що представлений посібник буде корисним керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням, стане для багатьох з них поштовхом до більш змістовних міркувань і буде спонукати до систематичного ознайомлення з тим чи іншим розділом математики.

Вчіться творчому пошуку в процесі розв'язування задач!

Із найщирішими побажаннями, викладачі кафедри геометрії та методики викладання математики фізико-математичного факультету Державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет».

31.12.2016

[2]Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2005. – 344с.

ЧАСТИНА I. УМОВИ ЗАДАЧ

![3]

6 клас

1. У кімнаті, що має прямокутну форму, розставити 10 стільців так, щоб вздовж кожної стінки стояла однакова кількість стільців.
2. При додаванні двох чисел цифри замінили літерами (однакові цифри — однаковими літерами) та одержали результат

$$\begin{array}{rcccccc} & & с & о & р & о & к \\ + & & & о & д & и & н \\ \hline & т & р & и & с & т & а \end{array}$$

   Відновити цифри, які замінено літерами.
3. У мішку знаходяться кульки двох кольорів — чорного і білого. Яку найменшу кількість кульок треба витягнути з мішка, щоб серед них гарантовано було 3 кульки одного кольору?
4. Знайти найменше натуральне число, яке при діленні на 2, 3, 5, 7 і 11 дає в остачі 1.
5. За круглим столом сидять 2016 чоловіків, деякі з яких завжди говорять тільки правду, а решта завжди говорять неправду (назвемо їх «базікалами»). Кожен з тих, хто сидить за столом, проголосив: «Напроти мене сидить базікало». Скільки всього базікал сидить за столом?

[3] Кожна задача оцінюється за «7-бальною» шкалою балом від 0 до 7

7 клас

1. Дано відрізки довжиною 1, 2, 3 і 4 см. Скільки різних рівнобедрених трикутників можна скласти з них?
2. При множенні двох чисел деякі цифри замінили $*$ («зірочками») та одержали результат

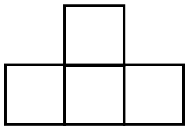
$$\begin{array}{rcccccc}
\times & & & & * & 1 & * \\
 & & & & 3 & * & 2 \\
\hline
+ & & & & * & 3 & * \\
+ & & 3 & * & 2 & * & \\
 & * & 2 & * & 5 & & \\
\hline
 & 1 & * & 8 & * & 3 & *
\end{array}$$

   Відновити цифри, які замінено «зірочками».
3. При якому значенні параметра a рівняння $ax-2a=2x-4$ має безліч розв'язків?
4. Число a на 25% більше ніж число b. На скільки відсотків число b менше ніж число a?
5. Кожна точка прямої пофарбована синім або червоним кольором. Доведіть, що на такій прямій знайдуться три різні точки A, B, C, які пофарбовано в один колір та такі, що точка B середина відрізка AC.

8 клас

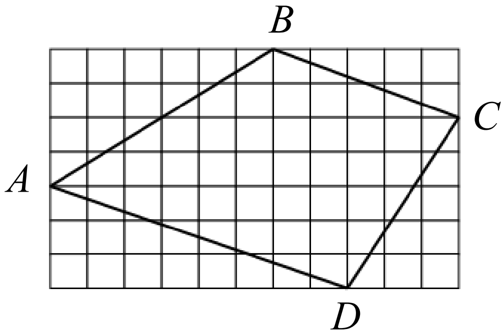
1. Доведіть, що якщо $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, то $a=b=c$.
2. Діти зібрали 100 кг грибів вологістю 99% і підсушили їх до вологості 98%. Яка маса підсушених грибів?
3. При якому значенні параметра a рівняння $a^2x-2a=4x-4$ не має розв'язків?
4. На стороні AB трикутника ABC відмічено точку K. Відрізок CK перетинає медіану AM трикутника в точці P, причому $AK=AP$. Знайти відношення $BK:PM$.

5. Чи можна розрізати квадрат 10×10 на 25 фігур виду



9 клас

1. Чому дорівнює площа зображеного (на рисунку нижче) чотирикутника $ABCD$, якщо сторона малого квадратика становить 1 см? Відповідь обґрунтуйте.



2. Спростити вираз

$$a^3 + b^3 + 3\left(a^3b + ab^3\right) + 6\left(a^3b^2 + a^2b^3\right),$$

де a і b — корені рівняння $x^2 - x + q = 0$.

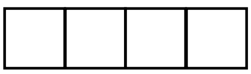
3. При якому значенні параметра a рівняння

$$\left(a^2 - 4\right)x^2 + (6 - 3a)x + 2a - 4 = 0$$

має три корені?

4. У чотирикутнику $ABCD$ суми протилежних кутів становлять 180^0, а точка перетину діагоналей ділить діагональ AC навпіл. Довести, що має місце рівність $AB : BC = CD : DA$.

5. Чи можна розрізати квадрат 10×10 на 25 фігур виду

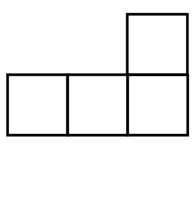


10 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{8x-16-x^2}+\sqrt[3]{x-3}=1$.
2. Дано арифметичну прогресію $a_1, a_2, ..., a_n$ з різницею d. Доведіть, що має місце рівність
$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}.$$
3. Дано трикутники ABC і $A'B'C'$. Відомо, що $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle C=\angle C'=120^0$. Доведіть рівність трикутників ABC і $A'B'C'$.
4. Через довільну але фіксовану точку Q на стороні BC нерівнобедреного трикутника ABC провести пряму QD, яка ділить трикутник на дві фігури рівних площ.
5. У нескінченному місті усі квартали — квадрати одного розміру. Велосипедист стартував з перехрестя вулиць. Через півхвилини за ним поїхав інший велосипедист. Кожен їде зі сталою швидкістю 1 квартал у хвилину і на кожному перехресті вулиць повертає направо або наліво. Чи можуть вони зустрітися?

11 клас

1. Чи можна куб перетнути площиною так, щоб в перерізі утворився правильний трикутник (шестикутник)? Відповідь обґрунтуйте для кожного з питань!
2. Доведіть, що число $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}$ є цілим.
3. φ – гострий кут паралелограма з діагоналями d_1 і d_2. Знайти площу такого паралелограма.
4. Розв'яжіть рівняння $\cos\left(\pi\left(\cos^2 2x-6\cos^2 x+1\right)\right)=1$.
5. Чи можна розрізати квадрат 10×10 на 25 фігур виду



ЧАСТИНА II. ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

6 клас

1. Відповідь:

```
* * *
*
*            *
             *
         * * *
```

2. Відповідь:

$$\begin{array}{rcccccc} & & 9 & 7 & 0 & 7 & 3 \\ + & & & 7 & 8 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 9 & 1 & 5 \end{array} \quad \text{або} \quad \begin{array}{rcccccc} & & 9 & 7 & 0 & 7 & 2 \\ + & & & 7 & 8 & 4 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 9 & 1 & 5 \end{array}.$$

3. Відповідь: 5.

4. Відповідь: 2 311.

5. Відповідь: 1 008.

7 клас

1. Відповідь: 12.

2. Відповідь:

$$\begin{array}{rcccccc} \times & & & & 4 & 1 & 5 \\ & & & & 3 & 8 & 2 \\ \hline + & & & & 8 & 3 & 0 \\ + & & 3 & 3 & 2 & 0 & \\ & 1 & 2 & 4 & 5 & & \\ \hline & 1 & 5 & 8 & 5 & 3 & 0 \end{array}.$$

3. Відповідь: $a = 2$.

4. Відповідь: 20%.

5. – задача на доведення.

8 клас

1. – задача на доведення.

2. Відповідь: 50 кілограмів.

3. Відповідь: $a = -2$.

4. Відповідь: $BK : PM = 2 : 1$.

5. Відповідь: НІ, не можна.

9 клас

1. Відповідь: $40,5$ см.кв.

2. Відповідь: 1.

3. Відповідь: $a = 2$.

4. – задача на доведення.

5. Відповідь: НІ, не можна.

10 клас

1. Відповідь: $x = 4$.

2. – задача на доведення.

3. – задача на доведення.

4. – задача на побудову; нехай A_0 – середина BC, $A_0D||QA$, тоді QD – шукана.

5. Відповідь: НІ, не можуть зустрітися.

11 клас

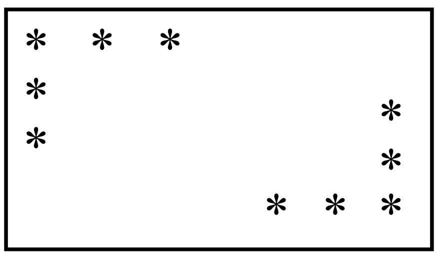
1. Відповідь: ТАК, ТАК.
2. Відповідь: $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}} = 2 \in N \subset Z$.
3. Відповідь: $S = \frac{1}{4}\left|d_1^2 - d_2^2\right| \cdot \operatorname{tg}\varphi$.
4. Відповідь: $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{3-\sqrt{17+8k}}{2}\right)+m\pi$, $m \in Z$, $k \in \{-2; -1; 0; 1\}$.
5. Відповідь: НІ, не можна.

ЧАСТИНА III.
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

6 клас

Задача 1.

Відповідь: у кімнаті, що має прямокутну форму, можна розставити 10 стільців так, щоб вздовж кожної стінки стояла однакова кількість стільців у спосіб, зображений на рисунку нижче



ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

?! Чи можна у кімнаті, що має прямокутну форму, розставити 6 стільців так, щоб вздовж кожної стінки стояла однакова кількість стільців?

?! Чи можна у кімнаті, що має прямокутну форму, розставити 12 стільців так, щоб вздовж кожної стінки стояла однакова кількість стільців?

Задача 2.

Розв'язання

Нагадаємо, що:

при додавання відповідних одиниць певного розряду двох чисел (одиниць, десятків, сотень; одиниць тисяч, десятків тисяч, сотень тисяч і т.д.) «за правилом переходу через розряд у десятковій системі числення» до наступного розряду може перейти ***щонайбільше*** *1 розрядна одиниця.*

1) Співставляючи «десятки тисяч» та «сотні тисяч» (запропонованих доданків) не важко бачити, що має місце рівність $\text{с} + 0 = 10 \cdot \text{т} + \text{р}$, звідки можна зробити висновок про те, що « т = 1 ». І тому результат додавання набуває вид

$$\begin{array}{rcccccc} & & \textbf{с} & \textbf{о} & \textbf{р} & \textbf{о} & \textbf{к} \\ + & & & \textbf{о} & \textbf{д} & \textbf{и} & \textbf{н} \\ \hline & 1 & \textbf{р} & \textbf{и} & \textbf{с} & 1 & \textbf{а} \end{array} \tag{6.2.1}$$

2) Співставляючи «одиниці тисяч» та «десятки тисяч» (доданків з (6.2.1)) методом від супротивного можна зробити висновок, що « с = 9 », звідки

2.1) « р » може бути тільки нулем, і тому результат додавання набуває вид

$$\begin{array}{rcccccc} & & 9 & \textbf{о} & 0 & \textbf{о} & \textbf{к} \\ + & & & \textbf{о} & \textbf{д} & \textbf{и} & \textbf{н} \\ \hline & 1 & 0 & \textbf{и} & 9 & 1 & \textbf{а} \end{array} \tag{6.2.2}$$

2.2) крім того, « о » повинна бути або 5-ою (п'ятіркою), або 6-ою (шісткою), або 7-ою (сімкою), або 8-ою (вісімкою), або ж 9-ою (дев'яткою).

Проте (за умовою) різні літери повинні відповідати різним цифрам.

2.2.1) І тому « о » не може дорівнювати 9;

2.2.2) якщо припустити, що « о = 5 », то « и = 0 » або ж « и = 1 », чого бути не може, бо цифри **0** і **1** вже відповідають іншим літерам;

2.2.3) якщо припустити, що « о = 6 », то « и = 2 » або ж « и = 3 », чого бути не може, бо:

у випадку коли « и = 2 » — «о+и=8» а тому сума десятків (при будь-яких цифрах в розряді одиниць) не може закінчуватися 1-цею;

у випадку коли « и = 3 » — «о+и=9» а тому сума десятків (при будь-яких цифрах в розряді одиниць) не може закінчуватися 1-цею;
2.2.4) якщо припустити, що « о = 8 », то « и = 6 » або ж « и = 7 », чого бути не може, бо:
у випадку коли « и = 6 » — «о+и=14» а тому сума десятків (при будь-яких цифрах в розряді одиниць) не може закінчуватися 1-цею;
у випадку коли « и = 7 » — «о+и=16» а тому сума десятків (при будь-яких цифрах в розряді одиниць) не може закінчуватися 1-цею;

Таким чином, « о » може бути лише цифрою **7**. І тому результат додавання набуває вид

$$\begin{array}{rccccc} & 9 & 7 & 0 & 7 & \mathbf{к} \\ + & & & 7 & \mathbf{д} & \mathbf{и} & \mathbf{н} \\ \hline 1 & 0 & \mathbf{и} & 9 & 1 & \mathbf{а} \end{array} \tag{6.2.3}$$

3) Співставляючи «сотні» (доданків з (6.2.3)) не важко переконатися, що « д » може бути лише цифрою **8**. Але ж тоді « и » може бути лише цифрою **4**. Тому результат додавання набуває вид

$$\begin{array}{rcccccc} & & 9 & 7 & 0 & 7 & \mathbf{к} \\ + & & & & 7 & 8 & 4 & \mathbf{н} \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 9 & 1 & \mathbf{а} \end{array} \tag{6.2.4}$$

4) Очевидно, що незадіяними залишилися лише цифри 2, 3, 5 та 6. Співставляючи «розряд одиниць» доданків з (6.2.4), не важко переконатися, що може бути лише два випадки:

або « к = 2 », « н = 3 », « а = 5 »;

або ж « к = 3 », « н = 2 », « а = 5 ».

Таким чином, шуканими доданками (з відновленою однаковою сумою **104 915**) є числа **97 073 і 7 842** *або ж* **97 072 і 7 843**.

Відповідь:

$$\begin{array}{r} 97073 \\ +\quad 7842 \\ \hline 104915 \end{array} \quad \text{або} \quad \begin{array}{r} 97072 \\ +\quad 7843 \\ \hline 104915 \end{array}.$$

Задача 3.

У мішку знаходяться кульки двох кольорів — чорного і білого. З'ясуємо, яку найменшу кількість кульок треба витягнути з мішка, щоб серед них **гарантовано** було 3 кульки одного кольору?

I спосіб

1) Очевидно, що необхідно витягнути щонайменше три кульки.

2) Якщо витягнути **три** кульки, то можливими є наступні варіанти:

2.1) усі 3 кульки чорного кольору;

2.2) усі 3 кульки білого кольору;

2.3) 2 кульки чорного кольору і 1 кулька білого кольору;

2.4) 2 кульки білого кольору і 1 кулька чорного кольору.

Оскільки при вийманні трьох кульок з мішка може відбутися кожен із зазначених випадків, то **гарантувати**, що серед трьох витягнутих кульок обов'язково буде три кульки одного кольору не можна.

3) Якщо витягнути **чотири** кульки, то можливими є варіанти:

3.1) усі 4 кульки чорного кольору;

3.2) усі 4 кульки білого кольору;

3.3) 3 кульки чорного та 1 білого кольору;

3.4) 3 кульки білого та 1 чорного кольору;

3.5) 2 кульки чорного та 2 білого кольору;

3.6) 2 кульки білого та 2 чорного кольору.

Оскільки при вийманні чотирьох кульок з мішка може відбутися кожен із зазначених випадків, то **гарантувати**, що серед чотирьох витягнутих кульок обов'язково буде три кульки одного кольору не можна.

4) Якщо витягнути **п'ять** кульок, то можливими є варіанти:

4.1) усі 5 кульок чорного кольору;

4.2) усі 5 кульок білого кольору;

4.3) 4 кульки чорного та 1 білого кольору;

4.4) 4 кульки білого та 1 чорного кольору;

4.5) 3 кульки чорного та 2 білого кольору;

4.6) 3 кульки білого та 2 чорного кольору.

Інших випадків бути не може. Більше того, в кожному з цих випадків є три кульки одного кольору. Отже, 5 — це найменша кількість кульок, які треба витягнути з мішка, щоб серед них **гарантовано** було 3 кульки одного кольору!

II спосіб *– шляхом формулювання* ***двоїстої*** *задачі та застосування принципу Діріхле*

Двоїста задача. З'ясуємо, яку найбільшу можливу кількість кульок можна витягнути з мішка, щоб серед них не було 3-ох кульок одного кольору.

1) За принципом Діріхле[4] серед 5 кульок (2-ох можливих кольорів) обов'язково знайдеться три кульки одного кольору. Тому для сформульованої двоїстої задачі число 5 не може бути розв'язком.

2) Очевидно, що можливим є випадок, коли серед 4 вийнятих з мішка кульок (2-ох можливих кольорів) точно дві кульки одного кольору і точно 2 кульки іншого кольору. А тому найбільша можлива кількість кульок, які можна витягнути з мішка, щоб серед них не було 3-ох кульок одного кольору, становить 4.

Таким чином, з урахуванням пунктів 1) і 2), **5** — це найменша кількість кульок, які треба витягнути з мішка, щоб серед них **гарантовано** було 3 кульки одного кольору!

III спосіб *– шляхом узагальнення*

Узагальнення задачі 3. У мішку знаходяться кульки двох кольорів — чорного і білого. З'ясуємо, яку найменшу кількість кульок треба витягнути з мішка, щоб серед них гарантовано було n кульок одного кольору?

1) За принципом Діріхле серед $2n-1$ кульок (2-ох можливих кольорів) обов'язково знайдеться n кульок одного кольору.

[4] **Принцип Діріхле** є однією з форм «методу від супротивного». Принцип названо на честь німецького математика Йогана Петера Густава Лежен-Діріхле (1805-1859), який досить успішно застосовував його при доведенні арифметичних тверджень.

Цей принцип стверджує, що:
«якщо множину з N елементів розбито на n частин, які не мають спільних елементів, причому $N > n$, то принаймні в одній з n частин буде більше одного елемента».

Найчастіше принцип Діріхле формулюють наступним чином:
«якщо в n клітках сидить $n+1$ або більше зайців, то знайдеться клітка, в якій сидять щонайменше два зайці».

2) Очевидно, що можливим є випадок, коли серед $2n-2$ вийнятих з мішка кульок (2-ох можливих кольорів) точно $(n-1)$ кульки одного кольору і точно $(n-1)$ кульки іншого кольору. А тому найбільша можлива кількість кульок, які можна витягнути з мішка, щоб серед них не було n кульок одного кольору, становить $2 \cdot (n-1) = 2n-2$.

Таким чином, з урахуванням пунктів 1) і 2), $2 \cdot (n-1) + 1 = 2n-1$ — це найменша кількість кульок, які треба витягнути з мішка, щоб серед них **гарантовано** було n кульок одного кольору!

В нашому випадку $n = 3$. S тому шуканим числом є число $2 \cdot 3 - 1 = 5$.

Відповідь: 5.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

?! У мішку знаходяться кульки **трьох** кольорів. Яку найменшу кількість кульок треба витягнути з мішка, щоб серед них гарантовано було 4 кульки одного кольору?

Відповідь: 10.

?! У мішку знаходяться кульки **трьох** кольорів. Яку найменшу кількість кульок треба витягнути з мішка, щоб серед них гарантовано було n кульок одного кольору?

Відповідь: $3 \cdot (n-1) + 1 = 3n-2$.

?! У мішку знаходяться кульки m різних кольорів. Яку найменшу кількість кульок треба витягнути з мішка, щоб серед них гарантовано було n кульок одного кольору?

Відповідь: $m \cdot (n-1) + 1$.

?! Добре відомо, що в грі «**Що? Де? Коли?**» рахунок ведеться до 6 очок. Причому в кожному раунді 1 очко присуджується «команді знавців» або ж «команді телеглядачів» в залежності від правильності оголошеної знавцями відповіді. Увага питання:

Яке найменше число раундів у цій грі?

Яке найбільше число раундів у цій грі?

Відповідь обґрунтуйте!

Задача 4.

Знайдемо найменше натуральне число x, яке при діленні на 2, 3, 5, 7 і 11 дає в остачі 1.

1) Оскільки шукане число x при діленні на 2, 3, 5, 7 і 11 дає в остачі 1, то його можна подати у вигляді

$$x = n + 1, \tag{6.4.1}$$

де n – **найменше** натуральне число, яке ділиться на 2, 3, 5, 7 і 11 без остачі.

2) Не важко перевірити, що числа 2, 3, 5, 7 і 11 є попарно взаємно простими. Тому найменше натуральне число, яке ділиться на кожне з цих чисел (без остачі), дорівнює $\text{НСК}(2; 3; 5; 7; 11) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 3850$.

Таким чином, шукане число дорівнює $3850 + 1 = 3851$.

Відповідь: 3 851.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! Знайти найменше натуральне число, яке при діленні на 2, 3, 4, 5 і 6 дає в остачі 1.

?! Знайти найменше натуральне число, яке при діленні на 3, 4, 5 і 6 дає в остачі 1 (дає в остачі 2).

?! Знайти найменше натуральне число, яке при діленні на натуральні a, b, c і d $(a < b < c < d)$ дає в остачі $0 < p < a$.

А чи знали Ви?

Нехай a і b – довільні натуральні числа, $\text{НСК}(a; b)$ – найменше спільне кратне чисел a і b, а $\text{НСД}(a; b)$ – їх найбільший спільний дільник. Тоді має місце рівність

$$a \cdot b = \text{НСК}(a; b) \cdot \text{НСД}(a; b). \tag{6.4.2}$$

! Доведіть це твердження спираючись на визначення НСК і НСД двох чисел та використовуючи розклад натурального числа у вигляді добутку степенів з простими основами.

Задача 5.

I спосіб

1) За умовою за столом сидить 2016 чоловіків. Оскільки стіл круглий, кількість чоловіків парна, та кожен з них однозначно вигукнув «Напроти мене сидить ...», то розсадку чоловіків за столом слід розуміти такою, що напроти кожного з них сидить точно один з решти чоловіків. Тобто всіх чоловіків за столом можна розділити на 1008 пар опонентів-обвинувачів (в кожній такій парі перший обвинувачує другого і навпаки).

2) В жодній з таких пар не може бути двох базікал, бо інакше кожному з них треба було би збрехати й проголосити «Напроти мене сидить правдивець».

3) Так само, в жодній з таких пар не може бути двох чесних чоловіків, бо тоді кожному з них треба було би сказати правду й проголосити «Напроти мене сидить правдивець».

Таким чином, в кожній із зазначених 1008 пар один – чесний, а інший – базікало. Звідки й випливає, що за столом сидить точно 1008 базікал.

II спосіб

Нехай за столом сидить x базікал. Тоді тих, хто говорить тільки правду – $(2016 - x)$ осіб.

За умовою задачі, кожен з тих, хто сидить за круглим столом, проголосив: «Напроти мене сидить базікало». Це означає, що $(2016 - x)$ осіб сказали правду про того, хто сидить напроти нього. Звідки випливає, що за столом сидить точно $(2016 - x)$ базікал.

З іншого боку, згідно введених позначень, за столом сидить x базікал. І тому має місце рівність

$$2016 - x = x, \tag{6.5.1}$$

звідки випливає, що

$$2016 = 2x, \quad 2 \cdot x = 2016, \quad x = 2016 : 2, \quad x = 1008.$$

Таким чином, за столом сидить точно 1008 базікал.

Відповідь: 1008.

7 клас

Задача 1.

Зауваження 1. За визначенням, *трикутник* — це (геометрична) фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, та **трьох відрізків**, які (попарно) сполучають ці точки. Тому умовою задачі **не передбачається** утворення відрізків іншої (нової) довжини за допомогою відрізків сталої довжини 1, 2, 3 та 4 см. Тобто, шукані рівнобедрені трикутники складаються виключно з відрізків заданих довжин.

Зауваження 2. Оскільки правильні (рівносторонні) трикутники є частинним випадком рівнобедрених трикутників, то серед шуканих рівнобедрених трикутників (звісно ж) можуть бути й правильні.

Зауваження 3. Фраза «Дано відрізки довжиною 1, 2, 3 і 4 см.» не означає що дано точно 4 відрізки зазначеної довжини (і тому цю фразу слід трактувати, що дано відрізки 4 «видів»); обмеження на кількість таких відрізків відсутнє; а питання щодо різних рівнобедрених трикутників означає (додатково наштовхує на те), що певний з відрізків заданої довжини може використовуватися декілька разів.

Розв'язання

1) За «нерівністю трикутника» в довільному трикутнику, сума довжин двох будь-яких сторін більша за довжину третьої сторони. Тому в рівнобедреному трикутнику основа повинна бути більшою за довжину подвоєної бічної сторони.

2) Заради зручності та зменшення викладок при подальших поясненнях рівнобедрений трикутник з основою a см та бічною стороною b см умовно будемо позначати як $(a;b;b)$. Тоді: з основою $a=1$ можна скласти лише рівнобедрені трикутники (1;1;1), (1;2;2), (1;3;3), (1;4;4);
з основою $a=2$ — лише рівнобедрені трикутники (2;2;2), (2;3;3), (2;4;4);
з основою $a=3$ — лише рівнобедрені трикутники (3;2;2), (3;3;3), (3;4;4);
з основою $a=4$ — лише рівнобедрені трикутники (4;3;3), (4;4;4).

І тому за допомогою відрізків 1, 2, 3 і 4 см можна скласти лише **12** рівнобедрених трикутників.

Задача 2.

Розв'язання

Заради зручності та спрощення подальших пояснень замінимо зірочки в умові даного числового ребусу літерами (латинського абетки), причому різним літерам можуть відповідати однакові цифри

$$
\begin{array}{ccccccc}
\times & & & & a & 1 & b \\
 & & & & 3 & c & 2 \\
\hline
+ & & & & d & 3 & e \\
+ & & 3 & f & 2 & g & \\
 & h & 2 & k & 5 & & \\
\hline
 & 1 & l & 8 & m & 3 & n
\end{array}
\tag{7.2.1}
$$

1) Оскільки $3+2=5$, то $l=5$ або $l=6$. Тому h може бути лише 1, тобто

$$
\begin{array}{ccccccc}
\times & & & & a & 1 & b \\
 & & & & 3 & c & 2 \\
\hline
+ & & & & d & 3 & e \\
+ & & 3 & f & 2 & g & \\
 & \boxed{1} & 2 & k & 5 & & \\
\hline
 & 1 & l & 8 & m & 3 & n
\end{array}
$$

2) Оскільки число $\overline{h2k5}$ є результатом множення числа $\overline{a1b}$ на цифру 3, то b може бути лише 5, тобто

$$
\begin{array}{ccccccc}
\times & & & & a & 1 & \boxed{5} \\
 & & & & 3 & c & 2 \\
\hline
+ & & & & d & 3 & e \\
+ & & 3 & f & 2 & g & \\
 & 1 & 2 & k & 5 & & \\
\hline
 & 1 & l & 8 & m & 3 & n
\end{array}
$$

3) Оскільки число $\overline{d3e}$ є результатом множення числа $\overline{a15}$ на цифру 2, то e може бути лише 0, звідки $n=0$; оскільки число $\overline{12k5}$ є результатом множення числа $\overline{a15}$ на цифру 3, то k може бути лише 4, тобто

$$
\begin{array}{ccccccc}
\times & & & & a & 1 & 5 \\
 & & & & 3 & c & 2 \\
\hline
+ & & & & d & 3 & \boxed{0} \\
+ & & 3 & f & 2 & g & \\
 & 1 & 2 & \boxed{4} & 5 & & \\
\hline
 & 1 & l & 8 & m & 3 & \boxed{0}
\end{array}
$$

4) Оскільки число $\overline{1245} = 1245$ є результатом множення числа $\overline{a15}$ на цифру 3, то a може бути лише 4, тобто

$$\begin{array}{ccccccc}
\times & & & & \boxed{4} & 1 & 5 \\
 & & & & 3 & c & 2 \\
\hline
+ & & & & d & 3 & 0 \\
+ & & 3 & f & 2 & g & \\
 & 1 & 2 & 4 & 5 & & \\
\hline
 & 1 & l & 8 & m & 3 & 0
\end{array}$$

5) Оскільки число $\overline{d30}$ є результатом множення числа $\overline{415}$ на цифру 2, то d може бути лише 8, тобто

$$\begin{array}{ccccccc}
\times & & & & 4 & 1 & 5 \\
 & & & & 3 & c & 2 \\
\hline
+ & & & & \boxed{8} & 3 & 0 \\
+ & & 3 & f & 2 & g & \\
 & 1 & 2 & 4 & 5 & & \\
\hline
 & 1 & l & 8 & m & 3 & 0
\end{array}$$

6) Оскільки $8+2+5=15$, то m може бути лише 5, тобто

$$\begin{array}{ccccccc}
\times & & & & 4 & 1 & 5 \\
 & & & & 3 & c & 2 \\
\hline
+ & & & & 8 & 3 & 0 \\
+ & & 3 & f & 2 & g & \\
 & 1 & 2 & 4 & 5 & & \\
\hline
 & 1 & 5 & 8 & \boxed{5} & 3 & 0
\end{array}$$

7) Оскільки f – цифра, то сума $f+4+1 \neq 18$, а тому $f+4+1=8$, звідки $f=3$, тобто

$$\begin{array}{ccccccc}
\times & & & & 4 & 1 & 5 \\
 & & & & 3 & c & 2 \\
\hline
+ & & & & 8 & 3 & 0 \\
+ & & 3 & \boxed{3} & 2 & g & \\
 & 1 & 2 & 4 & 5 & & \\
\hline
 & 1 & 5 & 8 & 5 & 3 & 0
\end{array}$$

8) Оскільки g – цифра, то сума $3+g \neq 13$, а тому $3+g=3$, звідки $g=0$, тобто

$$\begin{array}{ccccccc}
\times & & & & 4 & 1 & 5 \\
 & & & & 3 & c & 2 \\
\hline
+ & & & & 8 & 3 & 0 \\
+ & & 3 & 3 & 2 & \boxed{0} & \\
 & 1 & 2 & 4 & 5 & & \\
\hline
 & 1 & 5 & 8 & 5 & 3 & 0
\end{array}$$

9) Оскільки число $\overline{3320} = 3320$ є результатом множення числа $\overline{415} = 415$ на цифру c, то c може бути лише $\boxed{8}$. Тим самим відновлено останню невідому цифру.

Відповідь:

$$\begin{array}{cccccccc}
\times & & & & 4 & 1 & 5 \\
 & & & & 3 & 8 & 2 \\
\hline
+ & & & & 8 & 3 & 0 \\
+ & & & 3 & 3 & 2 & 0 & \\
 & & 1 & 2 & 4 & 5 & & \\
\hline
 & & 1 & 5 & 8 & 5 & 3 & 0
\end{array}$$

Задача 3.

З'ясуємо, при якому значенні параметра a рівняння $ax-2a=2x-4$ має безліч розв'язків.

$$ax-2a=2x-4;$$

$$ax-2x=2a-4;$$

$$x(a-2)=2(a-2) \tag{7.3.1}$$

1) При $a=2$ останнє рівняння набуває вид $x\cdot 0=2\cdot 0$ або ж

$$0\cdot x=0. \tag{7.3.2}$$

Не важко переконатися у тому, що при підстановці будь-якого числа (замість x) у рівняння (7.3.2), воно (рівняння) перетворюється на правильну числову рівність виду $0=0$. І тому, за визначенням, (у випадку $a=2$ будь-яке число) є коренем рівняння (7.3.2).

Отже, при $a=2$ дане рівняння має безліч розв'язків.

2) При $a\neq 2$ вираз $(a-2)\neq 0$. І тому при $a\neq 2$ єдиним розв'язком рівняння (7.3.1) є корінь

$$x=\frac{2(a-2)}{a-2}=2.$$

Таким чином, дане рівняння (7.3.1) має безліч розв'язків лише при $a=2$.

Відповідь: $a=2$.

Задача 4.

I спосіб

1) Оскільки число a на 25% більше ніж число b, то має місце рівність

$$a = b + \frac{b}{100} \cdot 25 = b + \frac{b}{4} = \frac{5}{4}\, b.$$

Звідки $b = \frac{4}{5}a$, або ж $\frac{b}{a} = \frac{4}{5}$.

2) Таким чином, число b від числа a складає $\frac{4}{5}$, або, що теж саме, число b від числа a складає $\frac{4}{5} \cdot 100 = 80\%$. І тому число b на 20% менше від числа a.

II спосіб – *шляхом узагальнення*

Нехай число a на $p\%$ більше ніж число b. Знайдемо, на скільки відсотків (q) число b менше ніж число a.

1) Оскільки число a на $p\%$ більше ніж число b, то має місце рівність

$$\frac{a}{b} \cdot 100 = 100 + p, \quad \text{звідки} \quad \frac{a}{b} = \frac{100+p}{100}. \tag{7.4.1}$$

І тому $\frac{b}{a} = \frac{100}{100+p} = \frac{100+p-p}{100+p} = \frac{100+p}{100+p} - \frac{p}{100+p} = 1 - \frac{p}{100+p}$.

2) З останньої рівності випливає, що

$$\frac{b}{a} \cdot 100 = 100 - \frac{100p}{100+p}. \tag{7.4.2}$$

І тому, з урахуванням (7.4.2), число b менше ніж число a на

$$q = \frac{100 \cdot p}{100+p}\%. \tag{7.4.3}$$

3) За умовою $p = 25$. І тому з урахуванням (7.4.3), дане число b менше ніж число a на

$$q = \frac{100 \cdot 25}{100+25}\% = \frac{250 \cdot 10}{125}\% = 20\%. \tag{7.4.4}$$

Відповідь: 20%.

Задача 5.

Кожна точка прямої пофарбована синім або червоним кольором. Доведемо, що на такій прямій знайдуться три різні точки A, B, C, які пофарбовано в один колір та такі, що точка B є серединою відрізка AC.

Доведення.

1) На даній прямій відмітимо дві (різні) точки E і F одного кольору. *Покажемо, що такі дві точки завжди існують*.

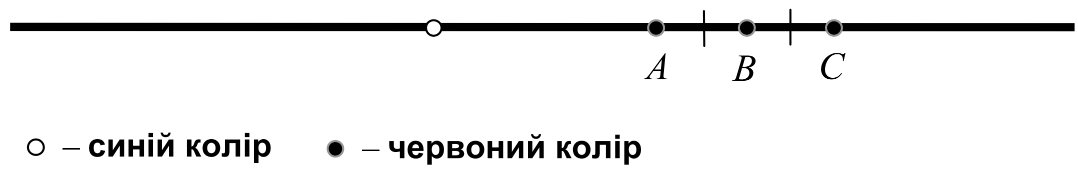


Рис. 1: до задачі 5

Якщо припустити, що на даній прямій не існує двох різних точок, наприклад, *синього* кольору (для червоного кольору – слід повторити аналогічні міркування), то з цього випливало би, що:

1.1) *або на прямій лише одна точка пофарбована у синій колір*, а решта точок прямої – у червоний; але ж в такому випадку достатньо розглянути одну з двох півпрямих (променів), на які єдина синя точка розбила пряму, відмітити на ній дві довільні точки A і C червоного кольору, а потім відмітити середину B відрізка AC; одержана трійка точок A, B, C і буде шуканою – рис. 1;

1.2) *або ж на прямій немає жодної синьої точки*, тобто, всі точки прямої пофарбовано у червоний колір; але ж в такому випадку достатньо відмітити на прямій дві довільні точки A і C червоного кольору, а потім відмітити середину B відрізка AC; одержана трійка точок A, B, C і буде шуканою – рис. 1;

2) Якщо середина B відрізка EF такого самого кольору, як і точки E, F, то твердження доведено (бо точки E, B, F будуть шуканими – задовольняти вимогу твердження).

3) Якщо ж середина B відрізка EF іншого кольору ніж точки E і F, то (заради визначеності) в подальшому будемо вважати, що E і F – синього, а B – червоного кольору.

Далі на прямій відмітимо такі дві точки A і C, що E – середина AF, а F – середина EC.

3.1) Якщо точка A синього кольору, то A, E, F буде шуканою трійкою точок – рис. 2;

Рис. 2: до задачі 5

3.2) якщо точка A червоного кольору, то можливими є лише два випадки

3.2.1) або точка C синього кольору; але ж тоді E, F, C буде шуканою трійкою точок – рис. 3;

Рис. 3: до задачі 5

3.2.2) або точка C червоного кольору; але ж тоді A, B, C буде шуканою трійкою точок – рис. 4.

Рис. 4: до задачі 5

Що й треба було довести.

8 клас

Задача 1.

Доведемо, що якщо $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, то $a=b=c$.

I спосіб

$$
\begin{aligned}
&a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \Rightarrow\\
&2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ca \Rightarrow\\
&2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0 \Rightarrow\\
&a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=0 \Rightarrow\\
&(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0 \Rightarrow\\
&\begin{cases} a-b=0\\ a-c=0\\ b-c=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c.
\end{aligned}
$$

II спосіб

За нерівністю Коші для довільних дійсних x та y має місце нерівність $2xy \leqslant x^2+y^2$, **рівність** $xy \boxed{=} \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$ в якій виконується (досягається) тоді і лише тоді, коли $x=y$.

Тому

$$
\begin{aligned}
&ab \leqslant \tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}b^2, \text{ причому } ab \boxed{=} \tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}b^2 \Leftrightarrow a=b;\\
&bc \leqslant \tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2, \text{ причому } bc \boxed{=} \tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2 \Leftrightarrow b=c;\\
&ac \leqslant \tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}c^2, \text{ причому } ac \boxed{=} \tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}c^2 \Leftrightarrow a=c.
\end{aligned}
$$

Звідки

$$ab+bc+cd \leqslant \tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2+\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}c^2=a^2+b^2+c^2,$$

причому $ab+bc+cd \boxed{=} a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow a=b=c$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

?! Доведіть, що якщо $a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$, то $a=b=c=d$.

?! Доведіть, що якщо $a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_k^2=a_1a_2+a_2a_3+...+a_{k-1}a_k+a_ka_1$, то $a_1=a_2=...=a_k$.

Задача 2.

Діти зібрали 100 кг грибів вологістю 99% і підсушили їх до вологості 98%. Знайдемо масу підсушених грибів.

Розв'язання.

I спосіб

1. Оскільки початкова вологість грибів становила 99%, то відсоток «грибного жмиха» (одержаного шляхом «видалення» всієї води з грибів) становив 1%. І тому маса «грибного жмиха» у 100 кг (щойно) зібраних грибів становила $\frac{100}{100} \cdot 1 = 1$ кг.

2. За умовою гриби підсушили до вологості 98%. Тому відсоток «грибного жмиха» (після підсушення) становить 2%.

Але ж маса «грибного жмиха» у підсушених грибах також дорівнює 1 кг (що становить вже 2% від всієї маси підсушених грибів). І тому маса підсушених грибів дорівнює $\frac{1}{2} \cdot 100 = 50$ кг.

II спосіб

1. Нехай x – маса води, «випареної» в результаті підсушення грибів з вологості 99% до вологості 98%.

Тоді маса грибів вологістю 98% (після їх підсушення) буде дорівнювати $(100 - x)$ кг.

2. Маса чистої води (до підсушення) у 100 кг грибів вологістю 99% становила $\frac{100}{100} \cdot 99 = 99$ кг.

Очевидно, що після підсушення маса чистої води у $(100 - x)$ кг грибів вологістю 98% становить $\frac{100-x}{100} \cdot 98$ кг. З іншого боку маса чистої води у $(100 - x)$ кг грибів вологістю 98% повинна становити $(99 - x)$ кг. Тому маємо рівняння

$$\frac{100 - x}{100} \cdot 98 = 99 - x.$$

Звідки

$(100 - x) \cdot 98 = (99 - x) \cdot 100\,;\ 9800 - 98x = 9900 - 100x\,;\ 2x = 100\,;\ x = 50\,.$

Таким чином маса підсушених грибів становить $100 - 50 = 50$ кг.

Відповідь: 50 кг.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

?! Діти зібрали m кг грибів вологістю $p\%$ і підсушили їх до вологості $q\%$ $(q < p < 100)$. Доведіть, що маса підсушених грибів становить

$$m \cdot \frac{100 - p}{100 - q} \quad \text{кг.}$$

Задача 3.

З'ясуємо, при якому значенні параметра a не має розв'язків рівняння

$$a^2x - 2a = 4x - 4 \tag{8.1.1}$$

1) Виконаємо наступні рівносильні перетворення над лівою і правою частинами даного рівняння:
$a^2x - 2a = 4x - 4 \Rightarrow a^2x - 4x = 2a - 4 \Rightarrow \left(a^2 - 4\right)x = 2(a-2)$. Звідки рівняння (8.1.1) можна подати у вигляді

$$(a-2)(a+2) \cdot x = 2(a-2). \tag{8.1.2}$$

2) Рівняння (8.1.2) (а разом з ним і рівняння (8.1.1)) не матиме розв'язків лише у випадку, коли виконуються умови

$$\begin{cases} (a-2)(a+2) = 0, \\ 2(a-2) \neq 0. \end{cases} \tag{8.1.3}$$

Не важко перевірити, що єдиним розв'язком системи (8.1.3) є значення параметра $a = -2$. Очевидно, що при $a = -2$ рівняння (8.1.2) набуває вид

$$0 \cdot x = -8 \tag{8.1.4}$$

та не має розв'язків.

Відповідь: $a = -2$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

?! При якому значенні параметра a рівняння (8.1.1):
1) має єдиний корінь; 2) має безліч розв'язків?

Задача 4.

На стороні AB трикутника ABC відмічено точку K. Відрізок CK перетинає медіану AM трикутника в точці P, причому $AK = AP$. Знайдемо відношення $BK : PM$.

I спосіб *– «за допомогою теореми Фалеса та теореми про пропорційні відрізки»*

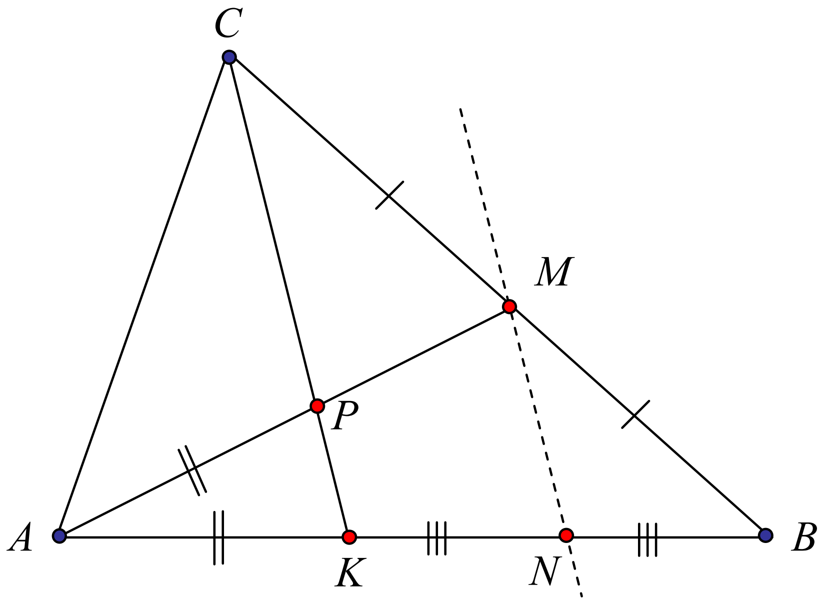


Рис. 5: до 1-го способу розв'язання задачі 4

1) Через точку M проведемо пряму паралельно до прямої CK і нехай вона перетинає пряму AB у точці N. Оскільки $CM = MB$, а паралельні прямі CK і MN перетинають сторони кута CBA, то за теоремою Фалеса $KN = NB$. Звідки $\boxed{KB = 2KN}$.

2) Оскільки паралельні прямі PK і MN перетинають сторони кута MAB та відтинають на його сторонах відрізки AP і PM та AK і KN відповідно, то за «теоремою про пропорційні відрізки» має місце пропорція $AP : PM = AK : KN$, звідки (за властивістю пропорції) має місце пропорція виду $\frac{AP}{AK} = \frac{PM}{KN}$. За умовою $AP = AK$. І тому справджується рівність $1 = \frac{PM}{KN}$, звідки $\boxed{PM = KN}$.

3) З урахуванням пунктів 1) і 2), шукане відношення $BK : PM$ становить

$$BK : PM = 2KN : KN = 2 : 1.$$

II спосіб – *«за допомогою теореми Фалеса <u>без</u> застосування теореми про пропорційні відрізки»*

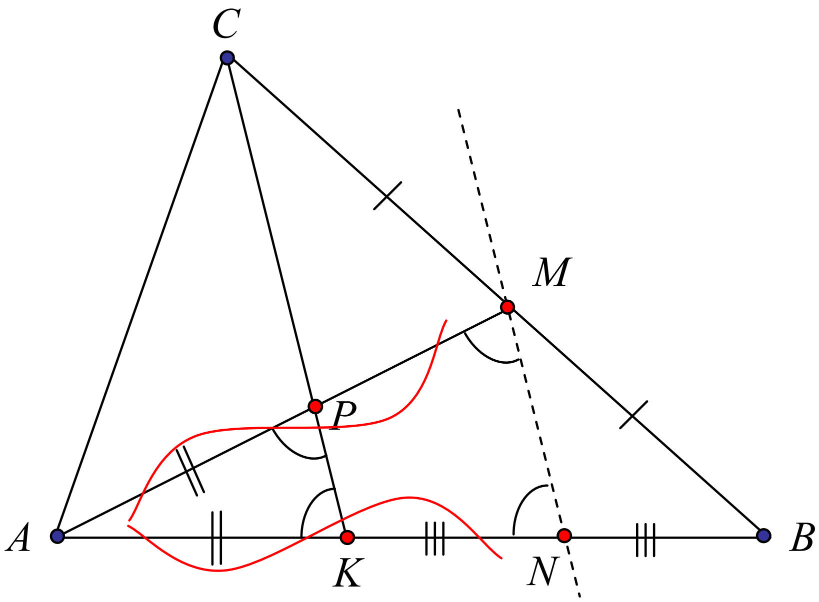


Рис. 6: до 2-го способу розв'язання задачі 4

1) Через точку M проведемо пряму паралельно до прямої CK і нехай вона перетинає пряму AB у точці N. Оскільки $CM = MB$, а паралельні прямі CK і MN перетинають сторони кута CBA, то за теоремою Фалеса $KN = NB$. Звідки

$$KB = 2KN. \tag{8.4.1}$$

2) За умовою $AP = AK$. І тому $\triangle\ PAK$ є рівнобедреним з основою PK. Звідки $\angle APK = \angle AKP = \varphi$ (як кути при основі рівнобедреного трикутника).

3) $\angle AMN = \angle APK = \varphi$ як відповідні кути при паралельних прямих MN і PK та січній AM.

4) $\angle ANM = \angle AKP = \varphi$ як відповідні кути при паралельних прямих MN і PK та січній AB.

5) Оскільки $\angle AMN = \angle ANM = \varphi$, то за ознакою (рівнобедреного трикутника) AMN є рівнобедреним з основою MN. Звідки $AM = AN$.

6) Оскільки $AM = AN$, $AP = AK$, то

$$PM = AM - AP = AN - AK = KN. \tag{8.4.2}$$

7) З урахуванням (8.4.1) та (8.4.2), остаточно маємо, що $BK : PM = 2 : 1$.

III спосіб – *«за допомогою теореми Фалеса <u>без</u> застосування теореми про пропорційні відрізки»*

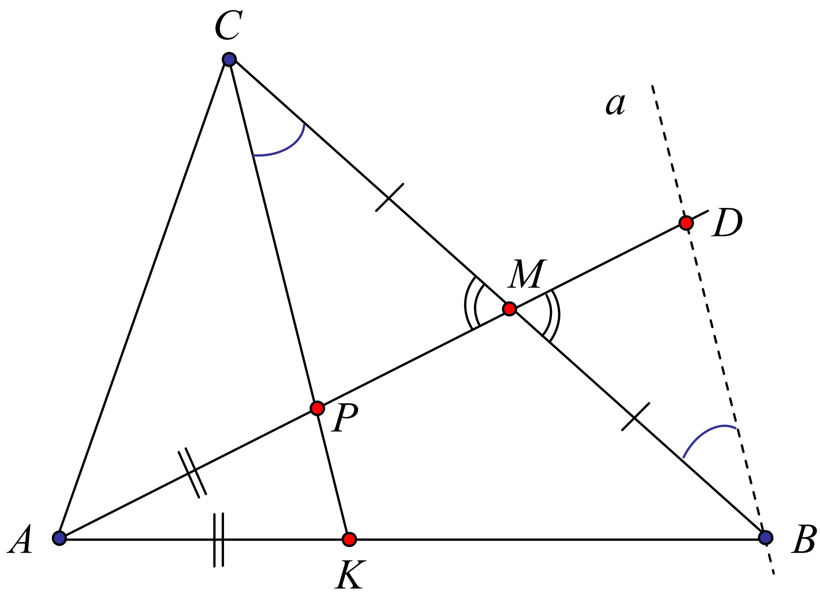


Рис. 7: до 3-го способу розв'язання задачі 4

1) Через точку B проведемо пряму a паралельно до прямої CK і нехай a перетинає пряму AM у точці D.

2) За умовою $AP = AK$. І тому $\triangle\ PAK$ є рівнобедреним з основою PK. Звідки $\angle APK = \angle AKP = \varphi$.

3) $\angle ADB = \angle APK = \varphi$ як відповідні кути при паралельних прямих a і PK та січній AD; $\angle ABD = \angle AKP = \varphi$ — як відповідні кути при паралельних прямих a і PK та січній AB.

4) Оскільки $PK || DB$, $DP \cap BK = A$, $\angle PDB = \angle KBD = \varphi$, то чотирикутник $KPDB$ є рівнобокою трапецією. Звідки

$$KB = PD. \tag{8.4.3}$$

5) Розглянемо $\triangle\ CMP$ і $\triangle\ BMD$. В них: $CM = MB$ (за умовою); $\angle CMP = \angle BMD$ (як вертикальні); $\angle MCP = \angle MBD$ (як внутрішні різнозсторонні при паралельних прямих CK і BD та січній CB). І тому (за стороною і прилеглими кутами) $\triangle\ CMP = \triangle\ BMD$. Звідки $2PM = 2MD = PD$.

Отже, з урахуванням (8.4.3), остаточно маємо, що $BK : PM = 2 : 1$.

Відповідь: $2 : 1$.

Задача 5.

З'ясуємо, чи можна розрізати квадрат 10×10 на 25 фігур виду

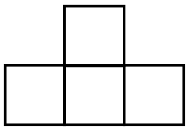


Рис. 8:

Розв'язання.

I спосіб

1) Розфарбуємо квадрат 10×10 у два кольори (сірий і білий) в шаховому порядку так, як показано на рис. 9.

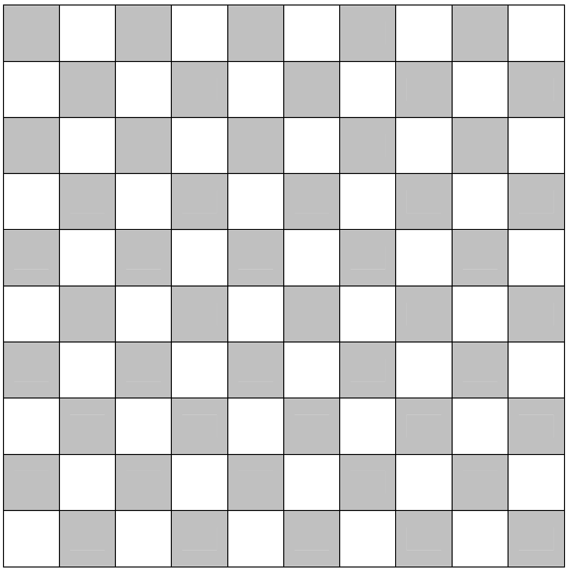


Рис. 9: до 1-го способу розв'язання задачі 5

2) Не важко перевірити, що при наведеному способі розфарбування сірих і білих клітинок 1×1 однакова кількість, яка становить 50.

3) При довільному розташуванні (в межах розфарбованого квадрату 10×10) тетраміно (зображеного на рис. 8), всередині нього може виявитися:

або 3 сірі і 1 біла клітинка – *тетраміно типу* 1,

або 1 сіра і 3 білі клітинки – *тетраміно типу* 2.

4) **Припустимо, що квадрат 10×10 можна розрізати на 25 тетраміно** (фігур, зображених на рис. 8). Тоді, з урахуванням пункту 3), серед них: n тетраміно типу 1 та $(25 - n)$ тетраміно типу 2, де n – ціле невід'ємне число ($n \in N \cup \{0\}$).

4.1) Підрахуємо кількість сірих клітинок. З одного боку, їх кількість становить 50. З іншого боку – $3 \cdot n + 1 \cdot (25 - n)$. Тому має місце рівність $3 \cdot n + 1 \cdot (25 - n) = 50$, звідки $2n = 25$, $n = 12,5 \notin Z$.

4.2) Таким чином, прийшли до протиріччя з тим, що $n \in N \cup \{0\}$. А тому наше припущення про те, що квадрат 10×10 можна розрізати на 25 тетраміно (фігур, зображених на рис. 8) є неправильним.

Отже, квадрат 10×10 не можна розрізати на 25 фігур виду 8.

II спосіб

1) У квадраті 10×10 розставимо всі натуральні числа від 1 до 100 у спосіб, зображений на рис. 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91

Рис. 10: до 2-го способу розв'язання задачі 5

2) Добре відомо, що $1 + 2 + ... + 99 + 100 = 101 \cdot \frac{100}{2} = 5050$.

3) Не важко перевірити, що при довільному розташуванні (в межах квадрату 10×10) тетраміно (зображеного на рис. 8), всередині нього містяться числа, **сума яких завжди є непарною**.

4) **Якщо припустити, що квадрат 10×10 можна розрізати на 25 тетраміно** (фігур, зображених на рис. 8), то, з урахуванням пункту 3), сума всіх чисел в квадраті 10×10 **повинна бути непарним числом**, як сума 25 непарних доданків. Чого бути не може на підставі пункту 2).

Отже, квадрат 10×10 не можна розрізати на 25 фігур виду 8.

Відповідь: НІ, не можна.

9 клас

Задача 1.

І спосіб

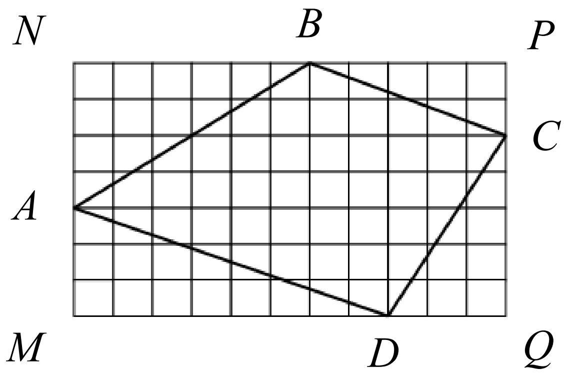


Рис. 11: до 1-го способу розв'язання задачі 1

1) Розглянемо чотирикутник $MNPQ$ рис. 11. В ньому (за умовою): $\angle M = \angle N = \angle P = \angle Q = 90^0$; $MN = PQ = 7$ см., $NP = QM = 1$ см. І тому $MNPQ$ є прямокутником зі сторонами 7 та 11 см. Звідки

$$S_{MNPQ} = MN \cdot NP = 7 \cdot 11 = 77 \text{ (см}^2\text{)} \qquad (9.1.1)$$

2) Розглянемо прямокутний $\triangle\, DMA$. Оскільки $DM = 8$, $MA = 3$ см., то

$$S_{\triangle DMA} = \frac{1}{2} DM \cdot MA = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12. \qquad (9.1.2)$$

3) Розглянемо прямокутний $\triangle\, ANB$. Оскільки $AN = 4$, $NB = 6$ см., то

$$S_{\triangle ANB} = \frac{1}{2} AN \cdot NB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12. \qquad (9.1.3)$$

4) Розглянемо прямокутний $\triangle\, BPC$. Оскільки $BP = 2$, $PC = 2$ см., то

$$S_{\triangle BPC} = \frac{1}{2} BP \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5. \qquad (9.1.4)$$

5) Розглянемо прямокутний $\triangle\, CQD$. Оскільки $CQ = 5$, $QD = 3$ см., то

$$S_{\triangle CQD} = \frac{1}{2} CQ \cdot QD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = \frac{15}{2} = 7,5. \qquad (9.1.5)$$

6) З визначення площі фігури випливає що

$$S_{ABCD} = S_{MNPQ} - S_{\triangle DMA} - S_{\triangle ANB} - S_{\triangle BPC} - S_{\triangle CQD},$$

звідки, з урахуванням (9.1.1) – (9.1.5), остаточно маємо, що
$S_{ABCD} = 77 - 12 - 12 - 5 - 7,5 = 40,5$ (см^2).

II спосіб

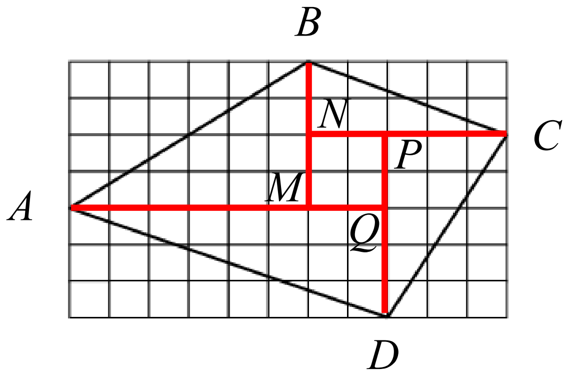


Рис. 12: до 2-го способу розв'язання задачі 1

1) Через вершини A, B, C, D даного чотирикутника проведемо прямі вздовж ліній клітчастого поля так, як показано на рис. 12. Не важко переконатися, що перетин зазначених ліній утворив вершини квадрату $MNPQ$, площа якого становить 4 (см^2).

2) Очевидно, що трикутники AMB, BNC, CPD і DQA є прямокутними з прямими кутами при вершинах M, N, P і Q відповідно. Більше того, з урахуванням умови задачі, довжини наступних відрізків становлять:
$AM = 6$, $MB = 4$; $BN = 2$, $NC = 5$, $CP = 3$, $PD = 5$;
$DQ = 3$, $QA = 8$ см. І тому мають місце рівності

$S_{AMB} = \frac{AM \cdot MB}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$ (см^2);
$S_{BNC} = \frac{BN \cdot NC}{2} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$ (см^2);
$S_{CPD} = \frac{CP \cdot PD}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7,5$ (см^2);
$S_{DQA} = \frac{DQ \cdot QA}{2} = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$ (см^2).

3) З визначення площі фігури випливає що

$$S_{ABCD} = S_{MNPQ} + S_{\triangle AMB} + S_{\triangle BNC} + S_{\triangle CPD} + S_{\triangle DQA},$$

звідки, з урахуванням пунктів 1) і 2), остаточно маємо, що
$S_{ABCD} = 4 + 12 + 5 + 7,5 + 12 = 40,5$ (см^2).

?! Наведіть геометричне тлумачення того, що площу даного чотирикутника можна знайти за допомогою співвідношення $S_{ABCD} = \frac{77-4}{2} + 4$.

III спосіб

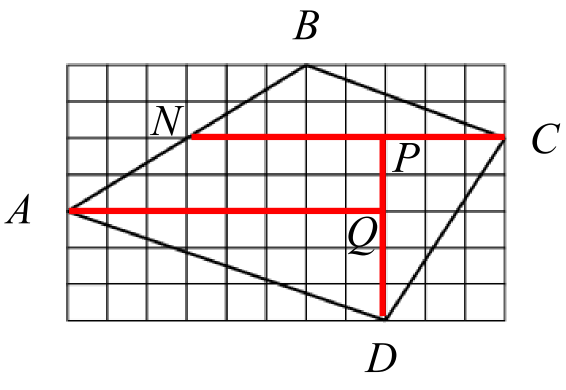


Рис. 13: до 3-го способу розв'язання задачі 1

1) Через вершини A, C, D даного чотирикутника проведемо прямі вздовж ліній клітчастого поля так, як показано на рис. 13. В результаті утворилися трикутники NBC, DPC і AQD та трапеція $ANPQ$. Звідки

$$S_{ABCD} = S_{NBC} + S_{DPC} + S_{AQD} + S_{ANPQ}. \tag{9.1.6}$$

2) В трикутнику NBC сторона $NC = 8$ см, а висота h_{NC}, опущена з вершини B на сторону NC становить 2 см.
Тому $S_{NBC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8$ (см^2).

3) В трикутнику DPC кут $\angle DPC = 90^0$, $DP = 5$ см, а $PC = 3$ см.
Тому $S_{DPC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7,5$ (см^2).

4) В трикутнику AQD кут $\angle AQD = 90^0$, $AQ = 8$ см, а $QD = 3$ см.
Тому $S_{AQD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$ (см^2).

5) В трапеції $ANPQ$ основи NP і AQ становлять 5 і 8 см відповідно, а висота $PQ = 2$ см.
Тому $S_{ANPQ} = \frac{5+8}{2} \cdot 2 = 13$ (см^2).

6) З урахуванням співвідношення (9.1.6) та пунктів 2)–5), остаточно маємо, що

$$S_{ABCD} = 8 + 7,5 + 12 + 13 = 40,5 \text{ (см}^2\text{)}. \tag{9.1.7}$$

IV спосіб

1) В площині чотирикутника $ABCD$ зафіксуємо прямокутну декартову систему координат XOY у спосіб, зображений на рис. 14. Причому в якості одиниці виміру (на кожній з координатних осей) оберемо 1 см.

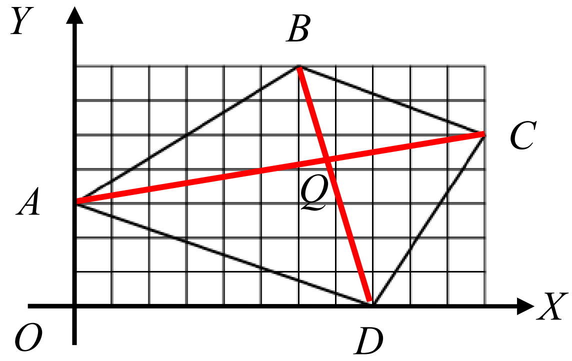


Рис. 14: до 4-го способу розв'язання задачі 1

2) Оскільки сторона малого квадратика 1×1 становить 1 см, то точки A, B, C, D мають наступні координати

$$A(0;3), \quad B(6;7), \quad C(11;5), \quad D(8;0). \tag{9.1.8}$$

3) Нехай Q – точка перетину діагоналей AC і BD, а φ — градусна міра $\angle CQD$. Тоді, як відомо, площу чотирикутника $ABCD$ можна знайти за формулою

$$S_{ABCD} = \tfrac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi. \tag{9.1.9}$$

4) Довжини діагоналей AC і BD знайдемо як модулі векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ відповідно. Не важко перевірити, що $\overrightarrow{AC}(11;2)$ та $\overrightarrow{BD}(2;-7)$. Тому $AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{11^2+2^2} = 5\sqrt{5}$; $\quad BD = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{2^2+(-7)^2} = \sqrt{53}$.

5) Оскільки φ – кут між прямими AC і BD (тобто не може бути тупим), то $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$.

$\cos\varphi$ знайдемо як косинус кута між векторами $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AC}$. Відомо, що косинус кута між векторами $\overrightarrow{m}$ і $\overrightarrow{n}$ можна знайти за формулою

$$\cos\angle(\overrightarrow{m};\overrightarrow{n}) = \frac{\langle\overrightarrow{m};\overrightarrow{n}\rangle}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|},$$

де $\langle\overrightarrow{m};\overrightarrow{n}\rangle$ – скалярний добуток $\overrightarrow{m}$ і $\overrightarrow{n}$, а $|\overrightarrow{m}|, |\overrightarrow{n}|$ – їх модулі. І тому $\cos\varphi = \frac{11\cdot 2+2\cdot(-7)}{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{53}} = \frac{8}{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{53}}$. Але ж тоді $\sin\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{8}{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{53}}\right)^2} = \frac{\sqrt{25\cdot 5\cdot 53-64}}{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{53}} = \frac{\sqrt{6625-64}}{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{53}} = \frac{\sqrt{6561}}{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{53}} = \frac{81}{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{53}}$.

Отже, з урахуванням (9.1.9), площа чотирикутника $ABCD$ становить

$$S_{ABCD} = \tfrac{1}{2}\cdot 5\sqrt{5}\cdot\sqrt{53}\cdot\frac{81}{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{53}} = \frac{81}{2} = 40,5 \text{ см}^2.$$

Відповідь: $40,5$ см. кв.

Задача 2.

Відомо, що a і b — корені рівняння $x^2 - x + q = 0$. Спростимо вираз

$$a^3 + b^3 + 3\left(a^3 b + ab^3\right) + 6\left(a^3 b^2 + a^2 b^3\right).$$

Розв'язання.

1) $a^3 + b^3 + 3\left(a^3 b + ab^3\right) + 6\left(a^3 b^2 + a^2 b^3\right) =$

$$= a^3 + b^3 + 3ab\left(a^2 + b^2\right) + 6a^2 b^2 (a + b). \tag{9.2.1}$$

2) Оскільки a і b — корені рівняння $x^2 - x + q = 0$, то за теоремою Вієта мають місце рівності

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a \cdot b = q. \end{cases} \tag{9.2.2}$$

3) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1^2 - 2q = 1 - 2q$;

4) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 1^3 - 3q \cdot 1 = 1 - 3q$.

5) З урахуванням результатів пунктів 2)–4), вираз (9.2.1) можна спростити наступним чином $a^3 + b^3 + 3ab\left(a^2 + b^2\right) + 6(ab)^2 (a + b) =$

$$= (1 - 3q) + 3q(1 - 2q) + 6q^2 \cdot 1 = 1 - 3q + 3q - 6q^2 + 6q^2 = 1.$$

Відповідь: якщо a і b — корені рівняння $x^2 - x + q = 0$, то вираз $a^3 + b^3 + 3\left(a^3 b + ab^3\right) + 6\left(a^3 b^2 + a^2 b^3\right) \equiv 1$.

А чи звертали Ви увагу?

?! Якщо $a + b = u$, $a \cdot b = v$, то

$a^2 + b^2 = u^2 - 2v$;

$a^3 + b^3 = u^3 - 3uv$;

$a^4 + b^4 = u^4 - 4u^2 v + 2v^2$;

$a^5 + b^5 = u^5 - 5u^3 v + 5uv^2$;

$a^6 + b^6 = u^6 - 6u^4 v + 9u^2 v^2 - 2v^3$;

$a^7 + b^7 = u^7 - 7u^5 v + 14u^3 v^2 - 7uv^3$;

$a^8 + b^8 = u^8 - 8u^6 v + 20u^4 v^2 - 16u^2 v^3 + 2v^4$;

$a^9 + b^9 = u^9 - 9u^7 v + 27u^5 v^2 - 30u^3 v^3 + 9uv^4$;

$a^{10} + b^{10} = u^{10} - 10u^8 v + 35u^6 v^2 - 50u^4 v^3 + 25u^2 v^4 - 2v^5$.

Задача 3.

З'ясуємо питання, при якому значенні параметра a рівняння

$$\left(a^2-4\right)\cdot x^2+(6-3a)\cdot x+2a-4=0 \tag{9.3.1}$$

має три корені.

Розв'язання.

1) Якщо $\left(a^2-4\right)\neq 0$, то рівняння (9.3.1) є квадратним (другого степеня). І тому не може мати більше двох (дійсних) різних коренів.

2) Нехай $\left(a^2-4\right)=0$. Тоді $a=-2$ або $a=2$.

2.1) При $a=-2$ вираз $\left(a^2-4\right)=0$, а рівняння (9.3.1) набуває вид

$$12\cdot x-8=0\Leftrightarrow 3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \tag{9.3.2}$$

та має лише один корінь.

2.2) При $a=2$ вираз $\left(a^2-4\right)=0$, а рівняння (9.3.1) набуває вид

$$0\cdot x=0. \tag{9.3.3}$$

Не важко переконатися у тому, що при підстановці <u>будь-якого числа</u> (замість x) у рівняння (9.3.3), воно (рівняння) перетворюється на правильну числову рівність виду $0=0$. І тому, за визначенням, (у випадку $a=2$ будь-яке число) є коренем рівняння (9.3.1).

Отже, при $a=2$ розв'язками даного рівняння є всі дійсні числа, тобто $x\in R$, або, що теж саме $x\in(-\infty;+\infty)$. Таким чином, дане рівняння має («може мати») три корені лише при $a=2$.

Відповідь: $a=2$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

?! При яких значеннях параметра a дане рівняння (9.3.1) має один дійсний корінь?

?! При яких значеннях параметра a дане рівняння (9.3.1) має точно один дійсний корінь?

Задача 4.

Розв'язання.

I спосіб *– за допомогою методу ПЛОЩ*

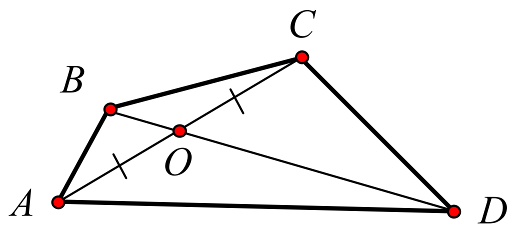


Рис. 15: до 1-го способу розв'язання задачі 4

1) Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, O – точка перетину його діагоналей AC і BD. Тоді, з урахуванням умови, мають місце рівності

$$\begin{cases} \angle A + \angle C = 180^0 \\ \angle B + \angle D = 180^0 \\ AO = OC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \angle C = 180^0 - \angle A \\ \angle D = 180^0 - \angle B \\ AO = OC \end{cases} \tag{9.4.1}$$

2) Оскільки $AO = OC$, то BO є медіаною трикутника ABC. І тому (за властивістю медіани трикутника) має місце рівність

$$S_{\triangle ABO} = S_{\triangle CBO}. \tag{9.4.2}$$

3) Оскільки DO також є медіаною трикутника ADC, то (за властивістю медіани трикутника) має місце рівність

$$S_{\triangle ADO} = S_{\triangle CDO}. \tag{9.4.3}$$

4) З урахуванням (9.4.2) та (9.4.3), має місце рівність

$$S_{\triangle BAD} = S_{\triangle BCD}, \tag{9.4.4}$$

яку, з урахуванням відомої формули для обчислення площі трикутника, можна подати у вигляді

$$\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin\angle A = \frac{1}{2}CB \cdot CD \cdot \sin\angle C \tag{9.4.5}$$

Оскільки $\angle C = 180^0 - \angle A$ та $\sin\angle A = \sin\left(180^0 - \angle A\right)$, то (9.4.4) можна подати у вигляді

$$AB \cdot AD = CB \cdot CD, \tag{9.4.6}$$

звідки й випливає, що $AB : BC = CD : DA$.

II спосіб *– за допомогою описаного кола та подібності трикутників*

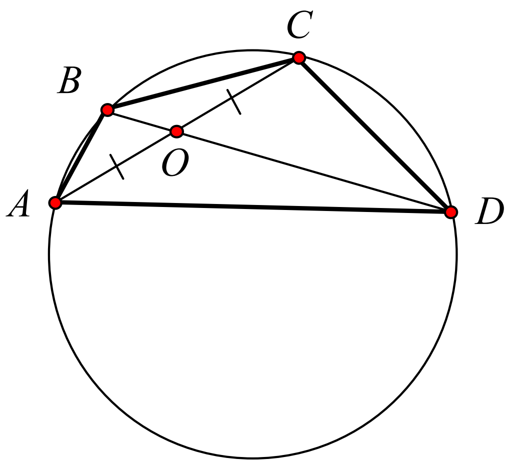


Рис. 16: до 2-го способу розв'язання задачі 4

1) Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, а O – точка перетину його діагоналей AC і BD. Оскільки у чотирикутнику $ABCD$ суми протилежних кутів становлять 180^0, то навколо нього можна описати коло ω.
2) Добре відомо, що точка перетину діагоналей вписаного чотирикутника ділить їх на відрізки, добутки яких є рівними, тобто

$$AO \cdot OC = BO \cdot OD. \tag{9.4.7}$$

2.1) З (9.4.7) випливає, що $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$, і тому $\triangle\ AOB \sim\triangle\ DOC$. Звідки

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{DO}. \tag{9.4.8}$$

2.2) З (9.4.7) випливає, що $\frac{CO}{OB} = \frac{DO}{OA}$, і тому $\triangle\ COB \sim\triangle\ DOA$. Звідки

$$\frac{BC}{AD} = \frac{CO}{DO}. \tag{9.4.9}$$

За умовою задачі $AO = OC$. Звідки $\frac{AO}{DO} = \frac{CO}{DO}$. І тому, з урахуванням (9.4.8) та (9.4.9), має місце рівність

$$\frac{AB}{DC} = \frac{BC}{AD} \Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{DC}{AD}, \tag{9.4.10}$$

з якої й випливає справедливість доводжуваного відношення.

III спосіб *– за допомогою описаного кола, центральної симетрії та подібності трикутників*

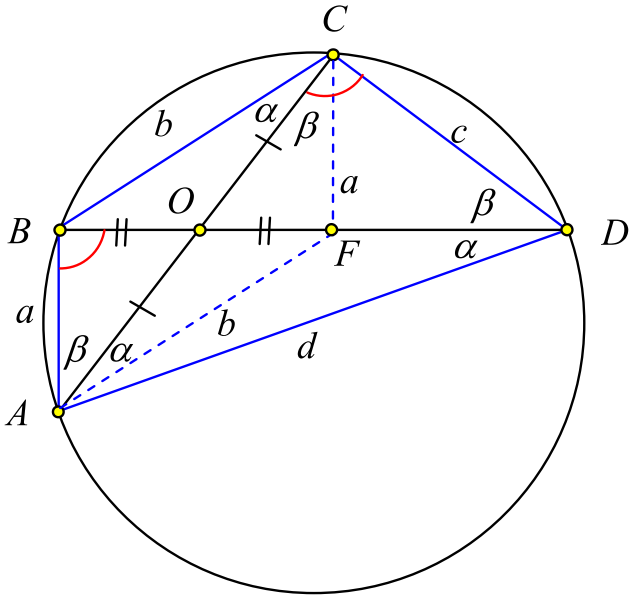


Рис. 17: до 3-го способу розв'язання задачі 4

1) Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, а O – точка перетину його діагоналей AC і BD. Оскільки у чотирикутнику $ABCD$ суми протилежних кутів становлять 180^0, то навколо нього можна описати коло ω.

2) Заради визначеності (та без втрати загальності — з точністю до перепозначення, наприклад) будемо вважати, що $\angle ABC \geqslant \angle ADC$.

2.1) Якщо $\angle ABC = \angle ADC$, то з урахуванням умови одержимо, що $\angle ABC = \angle ADC = 90^0$. Але ж тоді $DO = \frac{1}{2}AC = AO$ як медіана прямокутного $\triangle\ CDA$, що проведена до гіпотенузи AC. Аналогічно $BO = \frac{1}{2}AC = AO$ – як медіана прямокутного $\triangle\ CBA$, що проведена до гіпотенузи AC. Таким чином, у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі рівні та точкою перетину діляться навпіл. І тому $ABCD$ є прямокутником. Але ж тоді $AB = CD$, $BC = DA$. Звідки й випливає, що $AB : BC = CD : DA$.

2.2) Нехай тепер $\angle ABC > \angle ADC$. Тоді точка F, що є симетричною до вершини B відносно точки O, належить відрізку OD (справедливість останнього не важко показати методом від супротивного).

2.2.1) Оскільки $AO = OC$ (за умовою), $BO = OF$ (за побудовою), то за відомою ознакою $ABCD$ є паралелограмом. І тому за властивістю паралельних прямих і січної мають місце рівності

$$\angle BCA = \angle CAF = \alpha, \quad \angle FCA = \angle CAB = \beta.$$

Крім того, за властивістю паралелограма («протилежні сторони рівні») має місце рівність

$$AF = BC. \tag{9.4.11}$$

2.2.2) За властивістю вписаних у коло кутів мають місце рівності

$$\angle BDA = \angle BCA = \alpha, \quad \angle CDB = \angle CAB = \beta,$$

звідки

$$\angle CDA = \angle CDB + \angle BDA = \beta + \alpha = \angle BAC + \angle CAD = \angle BAF. \tag{9.4.12}$$

2.2.3) Розглянемо трикутники BAF та CDA. В них:

$\angle CDA = \angle BAF$ – як наслідок з (9.4.12);

$\angle ABD = \angle ACD$ – за властивістю вписаних у коло кутів.

Отже, за двома кутами трикутники BAF та CDA є подібними. І тому має місце пропорція

$$AB : AF = DC : DA, \tag{9.4.13}$$

яку, з урахуванням (9.4.11), можна подати у вигляді

$$AB : BC = CD : DA. \tag{9.4.14}$$

□

А чи звернули Ви увагу, що?

1) **основи бісектрис кутів** CFA та CDA (трикутників CFA і CDA відповідно) **співпадають**!

2) $BO \leqslant OD \Leftrightarrow \angle ABC \geqslant \angle ADC$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! Доведіть, що якщо основи бісектрис кутів CFA та CDA (трикутників CFA і CDA відповідно) співпадають, F належить медіані DO трикутника CDA, то справджується рівність $\angle CFA + \angle CDA = 180^0$.

IV спосіб *– за допомогою описаного кола, теореми Фалеса та подібності трикутників*

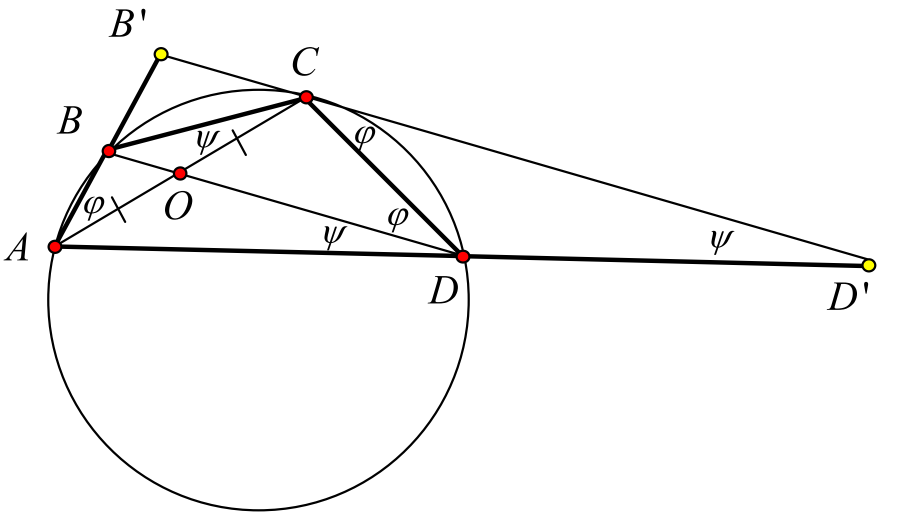


Рис. 18: до 4-го способу розв'язання задачі 4

1) Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, а O – точка перетину його діагоналей AC і BD. Оскільки у чотирикутнику $ABCD$ суми протилежних кутів становлять 180^0, то навколо нього можна описати коло ω.
2) Нехай далі $\angle BAC = \varphi$, а $\angle BCA = \psi$. Тоді за властивістю вписаних у коло кутів мають місце рівності

$$\angle BDC = \angle BAC = \varphi, \quad \angle BDA = \angle BCA = \psi. \tag{9.4.15}$$

Крім того, з трикутника ABC за теоремою синусів маємо, що

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}. \tag{9.4.16}$$

3) Через вершину C проведемо пряму l паралельно до діагоналі BD, і нехай вона (пряма l) перетинає продовження сторін AB і AD у точках B' і D' відповідно. Тоді $\angle B'D'A = \angle BDA = \psi$ як відповідні кути при паралельних $B'D'$, BD та січній AD'.

Крім того $\angle D'CD = \angle CDB = \varphi$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних $B'D'$, BD та січній CD.

Таким чином, в трикутнику CDD' $\angle DCD' = \varphi$, а $\angle CD'D = \psi$. І тому за теоремою синусів має місце пропорція

$$\frac{CD}{DD'} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}. \tag{9.4.17}$$

4) Оскільки $AO = OC$ (за умовою), $B'D'||BD$ (за побудовою), то за теоремою Фалеса має місце рівність

$$DD' = AD. \tag{9.4.18}$$

І тому (9.4.17) можна подати у вигляді

$$\frac{CD}{DA} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}. \tag{9.4.19}$$

Співставляючи (9.4.16) та (9.4.19) остаточно маємо, що

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DA} \Leftrightarrow AB : BC = CD : DA. \tag{9.4.20}$$

□

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4. Доведіть справедливість тверджень.

?! Нехай $BFCD$ – вписаний у коло ω чотирикутник, у якого $\angle BFC$ – гострий, а точка K перетину діагоналей ділить діагональ BC навпіл. Нехай також A – точка, симетрична вершині D відносно точки K, а XO – діаметр кола ω, який є перпендикулярним до BC (O, D в одній півплощині відносно BC). Тоді:

1) має місце рівність $BF : FC = CD : DB$;

2) основи бісектрис кутів BAC і BFC (трикутників BAC і BFC відповідно) співпадають;

3) FO – бісектриса кута BFC;

4) AL – бісектриса кута BAC, де $L = BC \cap FO$.

5) Якщо (додатково) $\angle BFC = 60^0$, то:

  5.1) $OB = OC = OM = OA$, де M – центр кола ω;

  5.2) $OK = KM$.

?! «Трикутник з кутом 120^0»[5]

Дано нерівнобедрений трикутник ABC, в якому $\angle A = 120^0$. Нехай AL — його бісектриса, AK — медіана, проведені з вершини A, точка O — центр описаного кола цього трикутника, F — точка перетину прямих OL і AK. Доведіть, що $\angle BFC = 60^0$.

[5]задачу запозичено із «Завдань для відбіркових етапів» XIX Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка

Задача 5.

З'ясуємо, чи можна розрізати квадрат 10×10 на 25 фігур виду

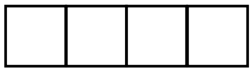


Рис. 19:

I спосіб

1) У квадраті 10×10 розставимо числа 1, 2, 3 і 4 у спосіб, наведений на рис. 20.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

Рис. 20: до 1-го способу розв'язання задачі 5

2) Не важко перевірити, що кількість клітинок, які містять: число «1» становить 25; число «2» – 26; число «3» – 25; число «4» – 24.

3) При довільному розташуванні (в межах квадрату 10×10, зображеного на рис. 20) тетраміно (зображеного на рис. 19), всередині нього **міститься кожне з чисел 1, 2, 3 і 4**.

4) **Якщо припустити, що квадрат** 10×10 **можна розрізати на 25 тетраміно** (фігур, зображених на рис. 19), то, з урахуванням пункту 3), квадрат 10×10 (зображений на рис. 20) **повинен містити**: 25 чисел **1**, 25 чисел **2**, 25 чисел **3** і 25 чисел **4**. Чого бути не може на підставі пункту 2).

Отже, квадрат 10×10 не можна розрізати на 25 фігур виду 19.

II спосіб

1) Розфарбуємо квадрат 10×10 у два кольори (сірий і білий) так, як показано на рис. 21.

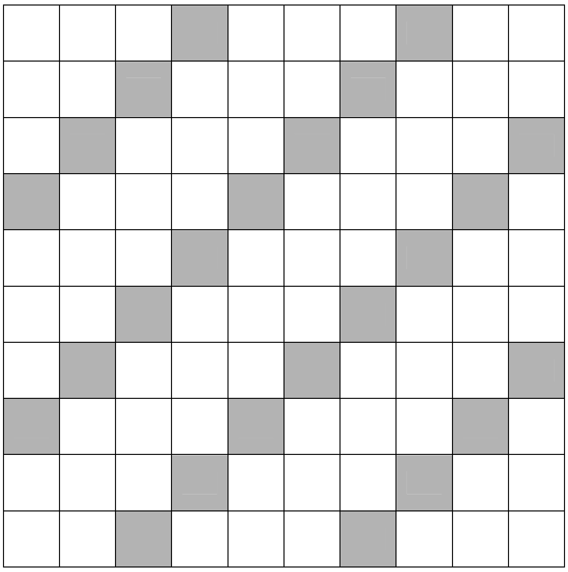


Рис. 21: до 2-го способу розв'язання задачі 5

2) Не важко перевірити, що при наведеному способі розфарбування число сірих клітинок 1×1 становить 24.

3) При довільному розташуванні (в межах розфарбованого квадрату 10×10, зображеного на рис. 21) тетраміно (зображеного на рис. 19), всередині нього завжди виявляється точно **1 сіра** та **3 білі** клітинки.

4) **Припустимо, що квадрат** 10×10 **можна розрізати на 25 тетраміно** (фігур, зображених на рис. 19).

Тоді, з урахуванням пункту 3), кожна з 25 зазначених фігур містить точно 1 сіру клітинку. І тому загальна кількість сірих клітинок повинна становити 25, чого бути не може на підставі пункту 2).

Таким чином наше припущення про те, що квадрат 10×10 можна розрізати на 25 тетраміно (фігур, зображених на рис. 19) є неправильним.

Отже, квадрат 10×10 не можна розрізати на 25 фігур виду 19.

Відповідь: НІ, не можна.

III спосіб

1) Розфарбуємо квадрат 10×10 у два кольори (сірий і білий) так, як показано на рис. 22.

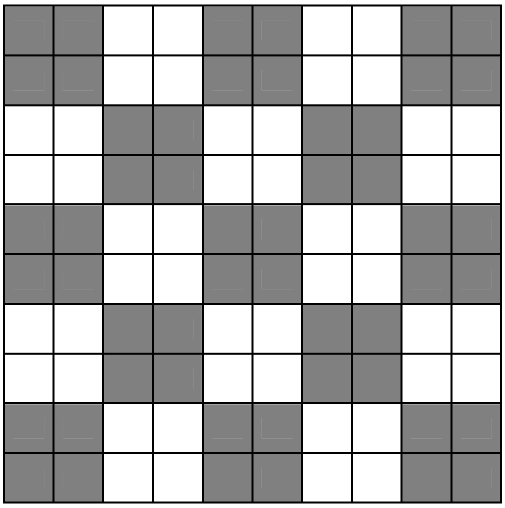


Рис. 22: до 3-го способу розв'язання задачі 5

2) Не важко перевірити, що при наведеному способі розфарбування число сірих клітинок становить **52**, а число білих клітинок – **48**.

3) При довільному розташуванні (в межах розфарбованого квадрату 10×10, зображеного на рис. 22) тетраміно (зображеного на рис. 19), всередині нього завжди виявляється точно **2 сірі** та **2 білі** клітинки.

4) **Припустимо, що квадрат** 10×10 **можна розрізати на 25 тетраміно** (фігур, зображених на рис. 19).

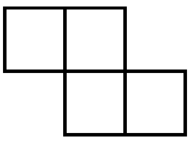
Тоді, з урахуванням пункту 3), кожна з 25 зазначених фігур містить точно 2 сірі клітинки. І тому загальна кількість сірих клітинок повинна становити 50, чого бути не може на підставі пункту 2).

Таким чином наше припущення про те, що квадрат 10×10 можна розрізати на 25 тетраміно (фігур, зображених на рис. 19) є неправильним.

Отже, квадрат 10×10 не можна розрізати на 25 фігур виду 19.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5.

?! Чи можна розрізати квадрат 10×10 на 25 фігур виду



10 клас

Задача 1.

Розв'яжемо рівняння

$$\sqrt[4]{8x-16-x^2}+\sqrt[3]{x-3}=1. \qquad (10.1.1)$$

1) Знайдемо ОДЗ даного рівняння. Для цього достатньо розв'язати нерівність

$$8x-16-x^2 \geqslant 0,$$

звідки $-(x-4)^2 \geqslant 0$, $(x-4)^2 \leqslant 0 \Rightarrow x=4$.

Таким чином ОДЗ даного рівняння складається з єдиного значення $x=4$ незалежної змінної x. Тому єдиним можливим коренем рівняння (10.1.1) може бути лише $x=4$.

2) Безпосередньою підстановкою значення $x=4$ перевіримо, чи є число 4 коренем рівняння (10.1.1):

$\sqrt[4]{8\cdot 4-16-4^2}+\sqrt[3]{4-3}=1$,

$\sqrt[4]{0}+\sqrt[3]{1}=1$,

$0+1=1$,

$1=1$.

Оскільки в результаті підстановки одержали правильну числову рівність, то $x=4$ – єдиний корінь даного рівняння (10.1.1).

Відповідь: $x=4$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

?! Розв'яжіть рівняння $2017\cdot\sqrt[4]{x^2-7x+12}-2016\cdot\sqrt{7x-x^2-12}=0$.

Задача 2.

Доведемо, що для арифметичної прогресії $a_1, a_2, ..., a_n$ з різницею d має місце рівність

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}. \qquad (10.2.1)$$

I спосіб

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=$$
$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2})(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{(\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3})(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})}+...+$$
$$+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{(\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n})(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}})}=$$
$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+...+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}=$$
$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}+...+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}=$$
$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_{n-2}}+\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}=$$
$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}.$$

II спосіб – *за методом математичної індукції*

1) Перевіримо, що доводжувана рівність є правильною при початковому $n_0=2$ (база індукції). А саме, що справджується рівність

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}. \qquad (10.2.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2})(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}=\dfrac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}$. Оскільки $d=a_2-a_1$, то з урахуванням останньої рівності, справджується рівність (10.2.2).

2) Припустимо, що доводжувана рівність є правильною при $n=k>2$. Тобто, що для певного $k>2$ справджується рівність

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}+\sqrt{a_k}}=\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_1}}{d} \qquad (10.2.3)$$

2.1) З припущення про те, що доводжувана рівність є правильною при $n = k$ (справджується (10.2.3)), доведемо, що рівність (10.2.1) виконується й при $n = k + 1$, тобто що справджується рівність

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}+\sqrt{a_k}}+\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_1}}{d} \tag{10.2.4}$$

Тоді, з урахуванням (10.2.3), для доведення рівності (10.2.4) необхідно довести рівність

$$\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_1}}{d}. \tag{10.2.5}$$

Для цього виконаємо наступні перетворення

$$\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_1}}{d} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_1}}{d}-\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_1}}{d} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}.$$

Оскільки $d = a_{k+1} - a_k$, то остання рівність є правильною. Тим самим доведено справедливість рівності (10.2.5), а разом із нею й (10.2.4).

Висновок: оскільки рівність (10.2.1) справджується при $n = 2$, а з припущення про те, що (10.2.1) виконується при $n = k > 2$, ми довели, що (10.2.1) виконується й при $n = k + 1$, то за принципом математичної індукції рівність (10.2.1) справджується для довільного натурального $n \geqslant 2$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

?! Доведіть, що якщо довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію, а довжини висот – геометричну, то такий трикутник є правильним.

Задача 3.

Дано трикутники ABC і $A'B'C'$. Відомо, що $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle C = \angle C' = 120^0$. Доведіть рівність трикутників ABC і $A'B'C'$.

***I спосіб** — за допомогою теореми синусів*

1) Розглянемо трикутник ABC. Нехай $\angle B = \varphi$. Тоді за теоремою синусів має місце рівність

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 120^0} = \frac{AC}{\sin\varphi}, \tag{10.3.1}$$

звідки

$$\sin\varphi = \frac{AC}{AB}\cdot\sin 120^0. \tag{10.3.2}$$

Більше того, оскільки трикутника ABC – тупокутний з тупим кутом $\angle C = 120^0$, то φ – гострий кут.

2) Розглянемо трикутник $A'B'C'$. Нехай $\angle B = \varphi'$. Тоді за теоремою синусів має місце рівність

$$\frac{A'B'}{\sin\angle C'} = \frac{A'C'}{\sin\angle B'} \Rightarrow \frac{A'B'}{\sin 120^0} = \frac{A'C'}{\sin\varphi'}, \tag{10.3.3}$$

звідки

$$\sin\varphi' = \frac{A'C'}{A'B'}\cdot\sin 120^0. \tag{10.3.4}$$

Більше того, оскільки трикутника $A'B'C'$ – тупокутний з тупим кутом $\angle C' = 120^0$, то φ' – гострий кут.

3) За умовою задачі $AB = A'B'$, $AC = A'C'$. І тому, з урахуванням (10.3.2) та (10.3.4), має місце рівність

$$\sin\varphi = \sin\varphi'. \tag{10.3.5}$$

А так як кути φ і φ' є гострими, то з рівності (10.3.5) та строгої монотонності функції $y = \sin x$ на проміжку $(0; 90^0)$ слідує, що $\varphi = \varphi'$.

4) Розглянемо трикутники ABC і $A'B'C'$: за умовою – $\angle C = \angle C'$; за доведеним вище — $\angle B = \varphi = \varphi' = \angle B'$. І тому в цих трикутниках відповідні кути рівні, зокрема $\angle A = \angle A'$. Оскільки $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$, то $\triangle\ ABC = \triangle\ A'B'C'$ *за двома сторонами та кутом між ними.*

II спосіб *— за допомогою теореми косинусів*

1) Розглянемо трикутник ABC. Нехай $BC = x$, $AB = c$, $AC = b$. Тоді за теоремою косинусів має місце рівність

$$c^2 = b^2 + x^2 - 2bx\cos 120^0 =$$

$$= b^2 + x^2 - 2bx\left(-\frac{1}{2}\right) = b^2 + x^2 + bx. \qquad (10.3.6)$$

2) Розглянемо трикутник $A'B'C$. Нехай $B'C' = y$. Оскільки за умовою $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, то, згідно введених позначень, $A'B' = c$, $A'C' = b$. І тому за теоремою косинусів має місце рівність

$$c^2 = b^2 + y^2 - 2by\cos 120^0 =$$

$$= b^2 + y^2 - 2by\left(-\frac{1}{2}\right) = b^2 + y^2 + by. \qquad (10.3.7)$$

3) З урахуванням (10.3.6) та (10.3.6), має місце рівність

$$b^2 + x^2 + bx = b^2 + y^2 + by, \qquad (10.3.8)$$

звідки одержуємо рівняння

$$x^2 + bx = y^2 + by \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + bx - y^2 - by = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) + b(x-y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y+b) = 0. \qquad (10.3.9)$$

Оскільки x, y, b – довжини сторін трикутників, то $x + y + b \neq 0$. А тому розв'язками рівняння (10.3.9) є значення $x = y$.

З урахуванням останньої рівності та введених позначень, має місце рівність

$$BC = B'C'. \qquad (10.3.10)$$

4) За умовою задачі – $AB = A'B'$, $AC = A'C'$; за доведеним вище – $BC = B'C'$. І тому $\triangle\ ABC = \triangle\ A'B'C'$ *за трьома сторонами.*

III спосіб *— шляхом узагальнення*

1) Доведемо «ЧЕТВЕРТУ» ознаку рівності трикутників, а саме:
якщо дві сторони одного трикутника дорівнюють двом сторонам іншого трикутника а кути, що лежать проти більших (з цих двох) сторін також рівні, то такі трикутники є рівними.

Доведення.

Нехай дано трикутники ABC і $A'B'C'$, які задовольняють умову твердження, а саме: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $AB \geqslant AC$, $A'B' \geqslant A'C'$, $\angle C = \angle C'$.

1.1) Якщо $AB = AC$, то, з урахуванням рівностей $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, маємо що $A'B' = A'C'$. Але ж тоді $\triangle\ ABC$ і $\triangle\ A'B'C'$ є рівнобедреними з рівними бічними сторонами та однаковими кутами при їх основах. І тому $\triangle\ ABC = \triangle\ A'B'C'$ *за двома сторонами та кутом між ними.*

1.2) В подальшому будемо вважати, що $AB > AC$. Звідки, з урахуванням умови, $A'B' > A'C'$.

Оскільки в будь-якому трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут і навпаки, то:

1.2.1) з нерівності $AB > AC$ випливає, що $\angle C > \angle B$, а

1.2.2) з нерівності $A'B' > A'C'$ випливає, що $\angle C' > \angle B'$.

1.3) Оскільки в трикутнику ABC $\angle C > \angle B$, то $\angle B$ – обов'язково гострий, бо з припущення про обернене прийдемо до протиріччя з *теоремою про суму кутів трикутника.* Аналогічно, оскільки в $\triangle\ A'B'C'$ $\angle C' > \angle B'$, то $\angle B'$ – гострий.

1.4) За теоремою синусів з $\triangle\ ABC$ має місце рівність

$$\sin\angle B = \frac{AC}{AB}\sin\angle C, \tag{10.3.11}$$

а з $\triangle\ A'B'C'$ – рівність

$$\sin\angle B' = \frac{A'C'}{A'B'}\sin\angle C'. \tag{10.3.12}$$

Оскільки за умовою $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle C = \angle C'$, то, з урахуванням (10.3.11) і (10.3.12), має місце рівність

$$\sin\angle B = \sin\angle B', \tag{10.3.13}$$

з якої (на підставі монотонності функції $y = \sin x$ на проміжку $(0; 90^0)$) випливає, що $\angle B = \angle B'$.

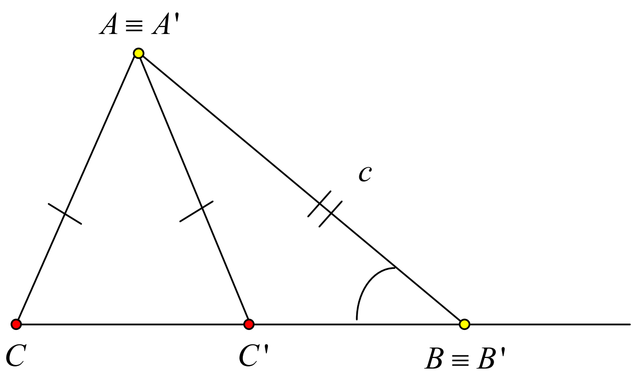
1.5) Розглянемо трикутники ABC і $A'B'C'$: за умовою – $\angle C = \angle C'$; за доведеним вище — $\angle B = \angle B'$. І тому в цих трикутниках відповідні кути рівні, зокрема $\angle A = \angle A'$. Оскільки $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$, то $\triangle\ ABC = \triangle\ A'B'C'$ *за двома сторонами та кутом між ними.*

2) Оскільки за умовою задачі $\angle C = \angle C' = 120^0$, то в трикутниках ABC і $A'B'C'$ сторони AB і $A'B'$ (відповідно) є найбільшими. А тому трикутники ABC і $A'B'C'$ задовольняють умовам (доведеної у першій частині) «ЧЕТВЕРТОЇ» ознаки рівності трикутників. Звідки й випливає, що $\triangle\ ABC = \triangle\ A'B'C'$.

ЗАУВАЖЕННЯ до задачі 3.

! Якщо «ЧЕТВЕРТУ» ознаку рівності трикутників переформулювати у вигляді *«якщо дві сторони одного трикутника дорівнюють двом сторонам іншого трикутника а кути, що лежать проти* ***менших*** *(з цих двох) сторін також рівні, то такі трикутники є рівними»*, то одержане твердження буде неправильним.

Для побудови контр-прикладу достатньо розглянути рівнобедрений трикутник ACC' з основою CC', а на промені CC' обрати таку точку B, щоб кут CAB був гострим. Далі розглянемо трикутник $A'B'C'$, в якому $B' \equiv B$, $A' \equiv A$. Тоді трикутники ABC і $A'B'C'$ будуть задовольняти умовам сформульованого твердження, проте не будуть рівними, оскільки один з них – гострокутний, а інший – тупокутний.



IV спосіб *— за допомогою рівності «відповідних» прямокутних трикутників*

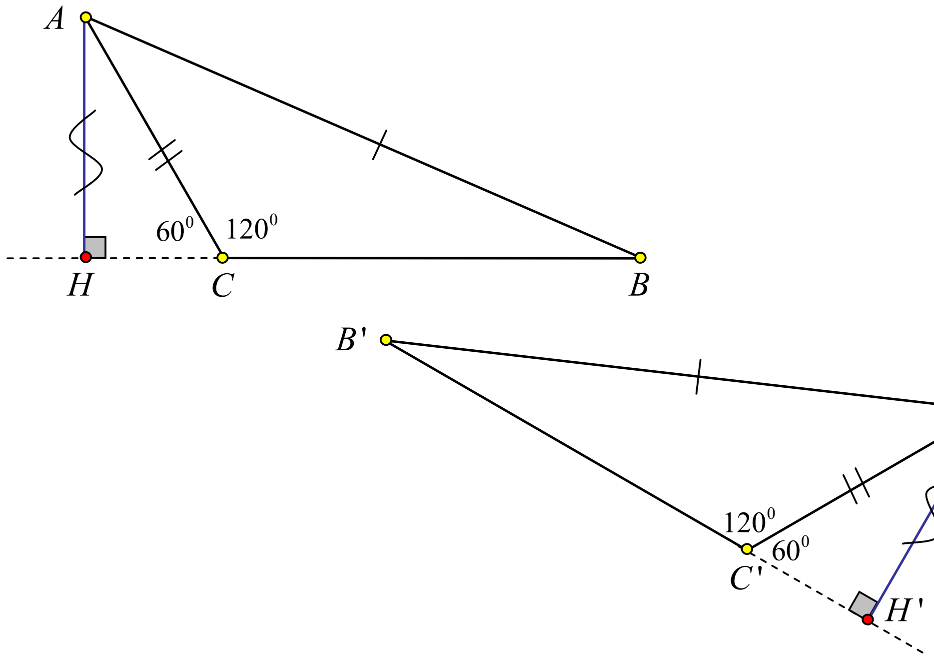


Рис. 23: до 5-го способу розв'язання задачі 3

1) Розглянемо $\triangle\ ACB$. Оскільки (за умовою) $\angle ACB = 120^0$, то основа H висоти, опущеної з вершини A, належить променю, доповняльному до променя CB. Крім того, $\angle ACH = 60^0$ (як кут суміжний із кутом $\angle ACB = 120^0$). Таким чином $\triangle\ AHC$ є прямокутним трикутником з гострим кутом $\angle ACH = 60^0$. І тому (як наслідок із визначення синуса гострого кута прямокутного трикутника) має місце рівність

$$AH = AC \cdot \sin 60^0 = \frac{AC\sqrt{3}}{2}. \qquad (10.3.14)$$

2) Розглянемо $\triangle\ A'C'B'$. Оскільки (за умовою) $\angle A'C'B' = 120^0$, то основа H' висоти, опущеної з вершини A', належить променю, доповняльному до променя $C'B'$. Крім того, $\angle A'C'H' = 60^0$ (як кут суміжний із кутом $\angle A'C'B' = 120^0$). Таким чином $\triangle\ A'H'C'$ є прямокутним трикутником з гострим кутом $\angle A'C'H' = 60^0$. І тому (як наслідок із визначення синуса гострого кута прямокутного трикутника) має місце рівність

$$A'H' = A'C' \cdot \sin 60^0 = \frac{A'C'\sqrt{3}}{2}. \qquad (10.3.15)$$

3) Розглянемо прямокутні трикутники AHB і $A'H'B'$.

Оскільки за умовою $AC = A'C'$, то з урахуванням (10.3.14) і (10.3.15), має місце рівність

$$AH = A'H'. \tag{10.3.16}$$

Крім того, за умовою задачі $AB = A'B'$. І тому (за катетом і гіпотенузою) $\triangle\ AHB = \triangle\ A'H'B'$. Звідки випливає рівність відповідних кутів, зокрема

$$\angle ABH = \angle A'B'H' \quad \Rightarrow \quad \angle ABC = \angle A'B'C'. \tag{10.3.17}$$

4) Розглянемо $\triangle\ ABC$ і $\triangle\ A'B'C'$. В них:

$\angle ACB = \angle A'C'B' = 120^0$ – за умовою;

$\angle ABC = \angle A'B'C'$ – за встановленою рівністю (10.3.16).

І тому за властивістю внутрішніх кутів трикутника має місце рівність $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Крім того (за умовою), $BA = B'A'$ та $CA = C'A'$.

Таким чином за І ознакою рівності трикутників («за двома сторонами і кутом між ними») $\triangle\ ABC = \triangle\ A'B'C'$. □

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3 (***V спосіб***).

! Один зі способів доведення «четвертої» ознаки рівності трикутників, зокрема твердження із задачі 3, може базуватися на розгляді двоїстої задачі на побудову (за допомогою циркуля та односторонньої лінійки без міток), яку можна сформулювати наступним чином: «Скільки різних (нерівних) трикутників можна побудувати за тупим кутом $\angle C = 120^0$, протилеглою стороною $AB = m$ та прилеглою стороною $AC = n$? ($m > n$)».

Для її розв'язання послідовність побудов може бути наступною:

1) побудуємо промінь CQ;

2) від променя CQ у фіксовану півплощину відкладемо $\angle PCQ = 120^0$;

3) на промені CP від початкової точки C відкладемо відрізок $CA = n$;

4) побудуємо коло ω радіуса m з центром у точці A; ω перетинає промінь CQ у точці B. Тоді $\triangle\ ABC$ – шуканий.

«З точністю до розташування на площині» промінь CQ фіксується в єдиний спосіб. Кожна наступна побудова **завжди** виконувана, причому **в єдиний спосіб**. Звідки й випливає існування та єдиність розв'язку даної метричної задачі на побудову.

А чи знали Ви інші ознаки рівності трикутників?

Два трикутники рівні, якщо:[6]

1) дві сторони і висота, опущена на одну з них, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і висоті іншого трикутника;
2) дві сторони і висота, опущена на третю сторону, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і висоті іншого трикутника;
3) кут, сторона, що прилягає до цього кута, і висота, опущена на цю сторону, одного трикутника відповідно рівні куту, стороні та висоті іншого трикутника;
4) кут, сторона, що прилягає до цього кута, і висота, опущена на сторону, протилежну даному куту, одного трикутника відповідно рівні куту, стороні та висоті іншого трикутника;
5) кут, сторона, протилежна до цього кута, і висота, опущена на іншу сторону, одного трикутника відповідно рівні куту, стороні та висоті іншого трикутника;
6) два кути і висота, проведена з вершини одного з них, відповідно рівні двом кутам і висоті іншого трикутника;
7) два кути і висота, проведена з вершини третього кута, відповідно рівні двом кутам і висоті іншого трикутника;
8) сторона і дві висоти, опущені на дві інші сторони, одного трикутника відповідно рівні стороні і двом висотам іншого трикутника;
9) сторона і дві висоти, одна з яких опущена на дану сторону, одного трикутника відповідно рівні стороні і двом висотам іншого трикутника;
10) кут і дві висоти, опущені на його сторони, одного трикутника відповідно рівні куту і двом висотам іншого трикутника;
11) кут і дві висоти, одна з яких проведена з даного кута, одного трикутника, відповідно рівні куту і двом висотам іншого трикутника;
12) дві сторони і медіана, проведена до однієї з них, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і медіані іншого трикутника;

[6] Запропоновані задачі запозичені з посібника авторів Смирнова И., Смирнов В. **50 задач о равенстве треугольников** // М.: Чистые пруды, 2007. – 32 с.

13) дві сторони і медіана, яка знаходиться між ними, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і медіані іншого трикутника;
14) два кути і медіана, проведена з вершини одного з них, відповідно рівні двом кутам і медіані іншого трикутника;
15) два кути і медіана, проведена з вершини третього кута, відповідно рівні двом кутам і медіані іншого трикутника;
16) сторона і дві медіани, проведені до двох інших сторін, одного трикутника відповідно рівні стороні і двом медіанам іншого трикутника;
17) сторона і дві медіани, одна з яких проведена до даної сторони, одного трикутника відповідно рівні стороні і двом медіанам іншого трикутника;
18) дві сторони і бісектриса, проведена до однієї з них, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і бісектрисі іншого трикутника;
19) дві сторони і бісектриса, яка знаходиться між ними, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і бісектрисі іншого трикутника;
20) кут, сторона, що прилягає до цього кута, і бісектриса, проведена до цієї сторони, одного трикутника відповідно рівні куту, стороні та бісектрисі іншого трикутника;
21) кут, сторона, що прилягає до цього кута, і бісектриса, проведена з вершини цього кута, одного трикутника відповідно рівні куту, стороні та бісектрисі іншого трикутника;
22) два кути і бісектриса, проведена з вершини одного з них, відповідно дорівнюють двох кутам і бісектрисі іншого трикутника;
23) два кути і бісектриса, проведена з вершини третього кута, відповідно дорівнюють двом кутам і бісектрисі іншого трикутника;
24) сторона, медіана і висота, проведені до цієї стороні, одного трикутника відповідно рівні стороні, медіані і висоті іншого трикутника;
25) сторона, бісектриса і висота, проведені до цієї стороні, одного трикутника відповідно рівні стороні, бісектрисі і висоті іншого трикутника;
26) сторона, медіана і висота, проведені до іншої сторони, одного трикутника відповідно рівні стороні, медіані і висоті іншого трикутника;

27) сторона, бісектриса і висота, проведені до іншої сторони, одного трикутника відповідно рівні стороні, бісектрисі і висоті іншого трикутника;
28) сторона, бісектриса і висота, проведені до двох інших сторін одного трикутника відповідно рівні стороні, бісектрисі і висоті іншого трикутника;
29) кут, медіана і висота, проведені з вершини цього кута, одного трикутника відповідно рівні куту, медіані і висоті іншого трикутника;
30) кут, бісектриса і висота, проведені з вершини цього кута, одного трикутника відповідно рівні куту, бісектрисі і висоті іншого трикутника;
31) кут, медіана і висота, проведені з вершини іншого кута, одного трикутника відповідно рівні куту, медіані і висоті іншого трикутника;
32) кут, бісектриса і висота, проведені з вершини іншого кута, одного трикутника відповідно рівні куту, бісектрисі і висоті іншого трикутника;
33) кут, бісектриса, проведена з його вершини, і висота, опущена на сторону, прилеглу до цього кута, одного трикутника відповідно рівні куту, бісектрисі і висоті іншого трикутника;
34) три висоти одного трикутника відповідно рівні трьом висотам іншого трикутника;
35) три медіани одного трикутника відповідно рівні трьом медіанам іншого трикутника.

Два рівнобедрені трикутники рівні, якщо:[7]

1) у них рівні основи та опущені на них висоти;
2) основа і висота, опущена на бічну сторону, одного з трикутників відповідно рівні основі та висоті іншого трикутника;
3) основа і медіана, проведена до бічної сторони, одного з трикутників відповідно рівні основі та медіані іншого трикутника;
4) основа і бісектриса, проведена до бічної сторони, одного з трикутників відповідно рівні основі та бісектрисі іншого трикутника;

[7]Запропоновані задачі запозичені з посібника авторів Смирнова И., Смирнов В. **50 задач о равенстве треугольников** // М.: Чистые пруды, 2007. – 32 с.

Чи будуть два трикутники рівні, якщо:[8]

1) дві сторони і кут одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і куту іншого трикутника?;
2) кут, сторона, що прилягає до цього кута, і висота, опущена на іншу сторону, прилеглу до даного кута, одного трикутника відповідно рівні куту, стороні та висоті іншого трикутника?;
3) кут, сторона, що прилягає до цього кута, і медіана, проведена до цієї сторони, одного трикутника відповідно рівні куту, стороні та медіані іншого трикутника?;
4) кут, сторона, що прилягає до цього кута, і медіана, проведена до сторони, протилежної даному куту, одного трикутника відповідно рівні куту, стороні та медіані іншого трикутника?;
5) кут, сторона, протилежна до цього кута, і медіана, проведена до іншої сторони, одного трикутника відповідно рівні куту, стороні і медіані іншого трикутника?;
6) кут, сторона, що прилягає до цього кута, і медіана, проведена до іншої сторони, прилеглої до даного кута, одного трикутника відповідно рівні куту, стороні і медіані іншого трикутника?;
7) кут і дві медіани, проведені до його сторін, одного трикутника відповідно рівні куту і двом медіанам другого трикутника?;
8) кут і дві медіани, одна з яких проведена з вершини даного кута, одного трикутника, відповідно рівні куту і двом медіанам іншого трикутника?;
9) кут, сторона, що прилягає до цього кута, і бісектриса, проведена до іншої сторони, прилеглої до даного кута, одного трикутника відповідно рівні куту, стороні та бісектрисі іншого трикутника?;
10) сторона, медіана і висота, проведені до двох інших сторін, одного трикутника відповідно рівні стороні, медіані і висоті другого трикутника?;
11) кут, медіана і висота, проведені з вершин двох інших кутів, одного трикутника відповідно рівні куту, медіані і висоті другого трикутника?

[8] Запропоновані задачі запозичені з посібника авторів Смирнова И., Смирнов В. **50 задач о равенстве треугольников** // М.: Чистые пруды, 2007. – 32 с.

Задача 4.

Через довільну але фіксовану точку Q на стороні BC нерівнобедреного трикутника ABC провести пряму QD, яка ділить трикутник на дві фігури рівних площ.

Базова задача 1. *В довільному трикутнику ABC медіана AA_0 ділить його на два трикутники рівних площ – рис. 24 a)*

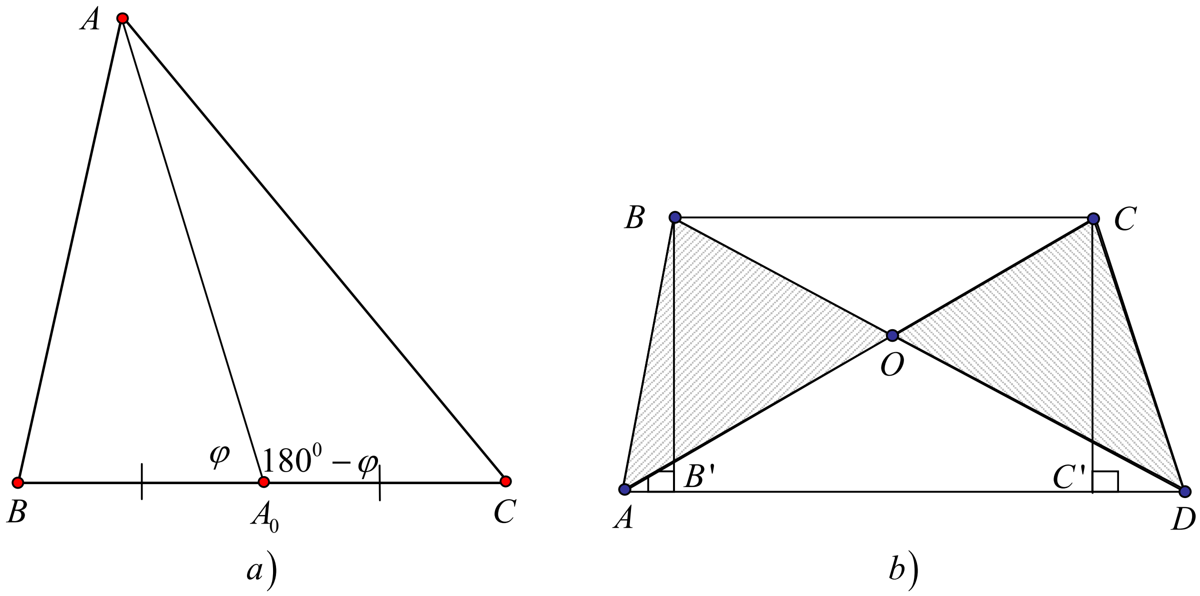


Рис. 24: до базової задачі 1

Справедливість твердження є наслідком, наприклад, наступних міркувань:

$S_{\triangle AA_0B} = \frac{1}{2} \cdot BA_0 \cdot AA_0 \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot AA_0 \cdot \sin\varphi = \frac{1}{4} BC \cdot AA_0 \cdot \sin\varphi$;

$S_{\triangle AA_0C} = \frac{1}{2} \cdot CA_0 \cdot AA_0 \cdot \sin(180^0 - \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot AA_0 \cdot \sin\varphi = \frac{1}{4} BC \cdot AA_0 \cdot \sin\varphi$.

Базова задача 2. *В довільній трапеції $ABCD$ (з основами AD, BC та точкою O перетину діагоналей AC і BD) площі трикутників AOB і DOC є рівними – рис. 24 b)*

Справедливість твердження є наслідком, наприклад, наступних міркувань:

Нехай BB' і CC' – висоти трапеції. Тоді, як добре відомо, $BB' = CC'$. І тому

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BB' = \frac{1}{2} AD \cdot CC' = S_{\triangle ACD}.$$

Звідки

$$S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD}.$$

Але ж тоді

$$S_{\triangle ABO} = S_{\triangle DCO}.$$

I спосіб *– за базовими задачами 1 і 2*

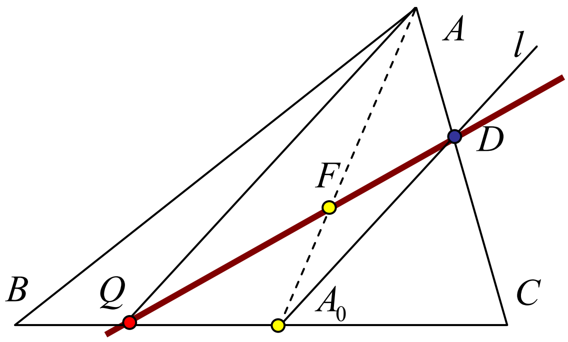


Рис. 25: до 1-го способу розв'язання задачі 4

1) Якщо точка Q співпадає із серединою A_0 сторони BC, то шуканою прямою («QD») буде пряма, що містить медіану AA_0 трикутника ABC. Бо за базовою задачею 1 має місце рівність $S_{\triangle AA_0B} = S_{\triangle AA_0C}$.

2) Розглянемо тепер випадок, коли точка Q не співпадає із серединою A_0 сторони BC. Заради визначеності (та без втрати загальності) будемо вважати, що точка Q лежить між точками B і A_0.

2.1) Сполучимо відрізком точки A і Q та через A_0 проведемо пряму l паралельно до прямої AQ. Тоді пряма l перетинає сторону AC у певній точці D (*за допомогою методу від супротивного наведіть строгі обґрунтування зазначеного факту неаксіоматичного характеру!*).

2.2) Розглянемо чотирикутник AQA_0D. Оскільки $AQ||DA_0$ (за побудовою), а прямі AD і QA_0 перетинаються у вершині C (тобто, AD і QA_0 не є паралельними), то AQA_0D є трапецією з основами AQ, DA_0.

2.3) Нехай далі F – точка перетину діагоналей трапеції AQA_0D. Тоді за базовою задачею 2 має місце рівність

$$S_{\triangle QFA_0} = S_{\triangle AFD}. \qquad (10.4.1)$$

2.4) Доведемо, що $S_{BADQ} = S_{\triangle CDQ}$. Для цього достатньо показати, що $S_{BADQ} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

З визначення площі фігури випливає, що $S_{BADQ} = S_{BAFQ} + S_{\triangle AFD}$. А, з урахуванням (10.4.1), маємо

$$S_{BADQ} = S_{BAFQ} + S_{\triangle QFA_0} = S_{\triangle BAA_0}. \qquad (10.4.2)$$

І тому, з урахуванням базової задачі 1, $S_{BADQ} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

***II спосіб** – за допомогою побудови «четвертого пропорційного»*

Базова задача 3. *Якщо пряма, яка не проходить через жодну з вершин трикутника, перетинає одну з його сторін, то така пряма перетинає лише одну з двох інших сторін трикутника.*

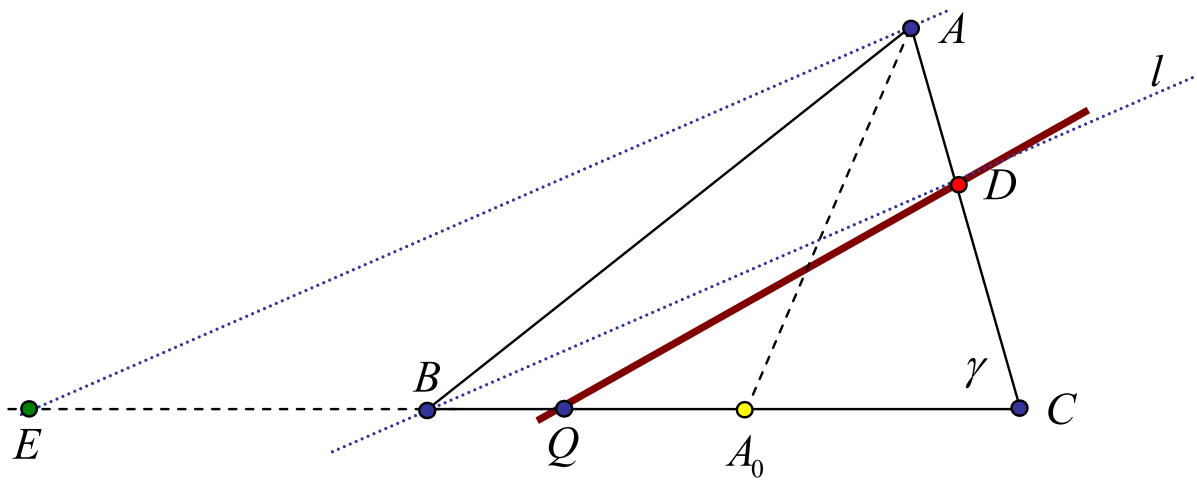


Рис. 26: до 2-го способу розв'язання задачі 4

Якщо точка Q співпадає із серединою A_0 сторони BC, то шуканою прямою («QD») буде пряма, що містить медіану AA_0 трикутника ABC.

Тому в подальшому будемо досліджувати лише той випадок, коли точка Q не співпадає із серединою A_0 сторони BC.

I етап. Аналіз

1.1) Будемо вважати, що точка Q лежить між точками B і A_0.

Отже, припустимо що шукану пряму m (яка проходить через точу Q і ділить $\triangle ABC$ на дві фігури рівних площ) побудовано. Тоді пряма m не може проходити через жодну з вершин даного трикутника ABC:
через B (або/і C) не може, бо тоді m «не ділить» $\triangle ABC$ на дві фігури; через A не може, бо тоді m відтинала би $\triangle AQB$, площа якого менша за площу трикутника AA_0B (менша за половину площі $\triangle ABC$).

Більше того m не може перетинати й сторону AB, бо в цьому випадку пряма m також відтинала би трикутник, площа якого менша за площу трикутника AA_0B (менша за половину площі $\triangle ABC$).

Таким чином, шукана пряма m (у випадку коли Q лежить між B і A_0) перетинає саме сторону AC в певній точці D. **А розв'язування самої задачі зводиться до побудови точки D на стороні AC.**

1.2) Нехай далі $\gamma = \angle ACB$. Тоді, з урахуванням відомої формули, мають місце рівності

$$2S_{ABC} = CA \cdot CB \cdot \sin\gamma; \quad 2S_{DCQ} = CD \cdot CQ \cdot \sin\gamma. \tag{10.4.3}$$

Оскільки (за припущенням) $S_{\triangle DCQ} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, то, з урахуванням (10.4.3), має місце рівність

$$\tfrac{1}{2}CA \cdot CB \cdot \sin\gamma = CD \cdot CQ \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow CA \cdot CB = 2CD \cdot CQ, \tag{10.4.4}$$

звідки

$$CD = \frac{CA \cdot CB}{2 \cdot CQ} \tag{10.4.5}$$

Оскільки за умовою дано трикутник ABC та точку Q, то довжини відрізків CA, CB, CQ (а тому і $2 \cdot CQ$) є (слід вважати) заданими (сталими величинами). І тому відрізок CD, заданий формулою (10.4.5) можна побудувати (за допомогою циркуля та лінійки) як «четвертий пропорційний» відрізок.

Таким чином, відклавши на промені CA від початкової точки C відрізок CD, заданий формулою (10.4.5), можна побудувати точку D, а разом із нею і шукану пряму QD.

II етап. Побудова

2.1) На промені QB від точки Q відкладемо відрізок $QE = CQ$.

Тим самим на промені CB від початкової точки C відкладено відрізок $CE = 2CQ$.

2.2) Через точку B проведемо пряму l паралельно до прямої EA. Тоді l (за базовою задачею 3) перетинає сторону AC в певній точці D.

QD — шукана пряма (яка ділить $\triangle\ ABC$ на дві фігури рівних площ).

III етап. Доведення

3.1) За побудовою $BD||EA$. І тому за теоремою про пропорційні відрізків справджується рівність $\frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CD}$.

3.2) За побудовою $CE = 2CQ$. І тому останню пропорцію можна подати у вигляді $\frac{2CQ}{CB} = \frac{CA}{CD}$. Звідки $CD = \frac{CA \cdot CB}{2 \cdot CQ}$.

3.3) $S_{DCQ} = \frac{1}{2}CD \cdot CQ \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}\frac{CA \cdot CB}{2 \cdot CQ} \cdot CQ \cdot \frac{2S_{ABC}}{CA \cdot CB} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

IV етап. Дослідження

4.1) Якщо точка Q співпадає з вершиною B, то шукана січна (пряма «QD») співпадає з прямою, яка містить медіану $\triangle\ ABC$, проведену до сторони AC.

4.2) Якщо точка Q співпадає з вершиною C, то шукана січна (пряма «QD») співпадає з прямою, яка містить медіану $\triangle\ ABC$, проведену до сторони AB.

4.3) Якщо точка Q співпадає із серединою A_0 сторони BC, то шукана січна (пряма «QD») співпадає з прямою, яка містить медіану AA_0 трикутника ABC.

4.4) Якщо точка Q лежить між точками B і A_0, то шукана січна (пряма «QD») перетинає сторону AC і завжди може бути побудована у зазначений спосіб.

4.5) Якщо точка Q лежить між точками A_0 і C, то шукана січна (пряма «QD») перетинає сторону AB і також завжди може бути побудована в аналогічний спосіб.

Таким чином, дана задача завжди має єдиний розв'язок.

Єдиність шуканої січної — прямої «QD» (яка ділить $\triangle\ ABC$ на дві фігури рівних площ) не важко показати методом від супротивного. (Доведення «єдиності» пропонуємо читачу в якості неважкої вправи)

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! При якому положенні точки Q на стороні BC шукана пряма QD буде: 1) паралельною до сторони AB?

2) паралельною до сторони AC?

?! Дано (опуклий чотирикутник) $ABCD$. Через вершину A провести пряму, яка ділить чотирикутник на дві фігури рівних площ.[9]

?! Дано (опуклий чотирикутник) $ABCD$. Через точку Q на стороні AD провести пряму, яка ділить чотирикутник на дві фігури рівних площ.

[9] Гейдман Б.П. Площади многоугольников. – М.: 2001. – 24 с. (Библиотека «Математическое просвещение», выпуск 9)

Задача 5.

I спосіб

Розфарбуємо квартали міста у шаховому порядку так, щоб праворуч від першого і другого велосипедиста у момент старту знаходився чорний квартал.

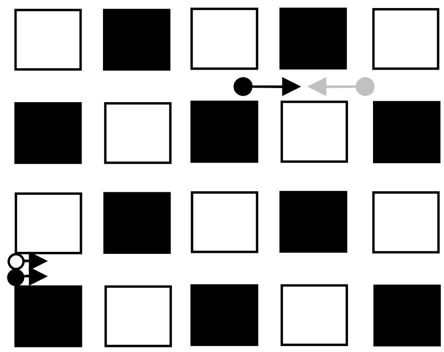


Рис. 27:

Тоді у будь-який момент часу праворуч від кожного з велосипедистів знаходиться чорний квартал.

Це дійсно так, бо на кожному перехресті (крім першого – стартового) кожен велосипедист обов'язково повертає: або ліворуч, і тоді праворуч від нього знаходиться чорний квартал відмінний від того, який він щойно проїхав, або ж праворуч, і тоді велосипедист огинає (залишаючись зліва від нього) той самий чорний квартал, який щойно проїхав.

1) Зустріч велосипедистів не може відбутися на жодному з перехресть. Це випливає з того, що перший велосипедист (рухаючись зі сталою швидкістю 1 квартал за хвилину) з'являється на перехрестях кожної хвилини (з моменту початку руху), тобто, в моменти часу t $(t = 1, 2, \dots)$, які є натуральними числами. Оскільки другий велосипедист починає свій рух через півхвилини після першого і рухається зі сталою швидкістю 1 квартал за хвилину, то на перехрестях він з'являється в моменти часу $t + 0,5$ $(t = 1, 2, \dots)$, які не є натуральними числами. Тому не існує такого моменту часу, в який велосипедисти одночасно з'являються на перехрестях.

2) Оскільки велосипедисти рухаються з однаковою швидкістю і різницею у часі в півхвилини, то жоден з них не може наздогнати іншого: на перехресті цього статися не може за доведеним раніше;

посеред деякого з кварталів цього також не може статися, оскільки з припущення про обернене і умови руху з однаковою швидкістю, на наступному перехресті вони з'являться одночасно, чого не може бути.

3) Отже, зустріч велосипедистів якщо і є можливою, то лише посеред деякого з кварталів, причому, за умови руху назустріч один одному. Але останнє також не можливе, бо для одного з них в цьому разі чорний квартал буде розташований ліворуч, а для іншого – праворуч.

II спосіб

1) Жоден з велосипедистів не може наздогнати іншого оскільки другий стартував на півхвилини пізніше першого, і на протязі всього часу вони рухались з постійними однаковими швидкостями. На перехресті кварталів зустріч також не може відбутися, оскільки велосипедисти з'являються на них в різні моменти часу. Надалі будемо вважати, що кожен квартал міста обмежують (по периметру) 4 різні вулиці, які починаються і закінчуються в межах цього кварталу.

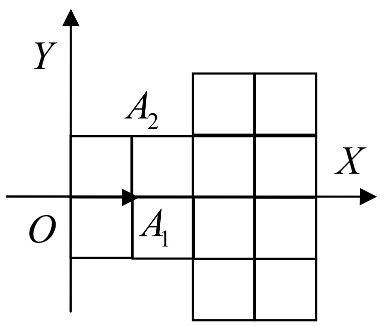


Рис. 28:

2) Звернемо увагу на той факт, що кожен з велосипедистів для повернення у початкове положення (на стартове перехрестя), рухаючись згідно зазначених правил, повинен подолати парну кількість вулиць міста. Нехай т. O – стартове перехрестя, а т. A_1 – перше перехрестя, на якому повертають велосипедисти.

Зафіксуємо в площині міста прямокутну систему координат XOY з початком в т. O, віссю OX, додатній напрямок якої визначається т. A_1, та одиницею виміру OA_1. Додатній напрямок на осі OY визначимо у звичний спосіб. Дослідимо траєкторію руху велосипедиста, початок і кінець якої співпадають з точкою O. Для цього позначимо через A_i ($i = 1, 2, ...$) перехрестя, які велосипедист послідовно проїжджає (належать траєкторії його руху – замкненій ламаній $OA_1A_2...A_nO$). Оскільки на кожному перехресті велосипедист повертає ліворуч або праворуч, то положення точки A_{i+1} ($A_{n+1} = O$) відрізняється від положення точки A_i лише одною координатою – першою або другою. Більше того: якщо вулиця A_iA_{i+1} паралельна до осі OX, а напрямок від перехрестя A_i до перехрестя A_{i+1} співпадає (не співпадає) з додатним напрямком осі OX, то абсциса точки A_{i+1} збільшиться (зменшиться) на одну одиницю у порівнянні з абсцисою точки A_i. Те ж саме має місце для вулиць паралельних до осі OY.

Той факт, що велосипедист повернувся на стартове перехрестя (у т. $O(0; 0)$) означає, що:

2.1) сумарне число вулиць, яке велосипедист проїжджав паралельно до осі OX є парним – скільки разів рухався в додатному напрямку осі OX, стільки ж і у від'ємному її напрямку;

2.2) сумарне число вулиць, яке велосипедист проїжджав паралельно до осі OY є парним – скільки разів рухався в додатному напрямку осі OY, стільки ж і у від'ємному її напрямку.

Таким чином, довільна траєкторія $OA_1A_2...A_nO$ велосипедиста, який рухається кварталами міста згідно зазначених правил, містить **парну** кількість вулиць.

3) Покажемо тепер, що велосипедисти не можуть зустрітися посеред деякої вулиці, рухаючись на зустріч один одному. Доведення проведемо методом від супротивного, а саме:

припустимо, що вказана зустріч сталася посеред певної вулиці (між двома перехрестями однієї вулиці). Тоді на момент зустрічі перший велосипедист подолав $3/4$, а другий – $1/4$ цієї вулиці. Більше того, до зазначеної події, кожен з них подолав однакову кількість k повних вулиць.

Отже, велосипедисти разом на момент зустрічі подолали **непарну** кількість $2k+1$ вулиць міста.

Якщо, перший з велосипедистів після зустрічі продовжить рух, повторивши траєкторію руху другого в зворотному напрямку, то через певний час він повернеться у початкове положення (на стартове перехрестя) і подолає при цьому (з моменту свого старту) непарну кількість вулиць міста. Чого бути не може, оскільки будь-яка траєкторія руху, що починається і закінчується у фіксованому перехресті, містить парну кількість вулиць міста.

Прийшли до протиріччя з припущенням, і тому наша гіпотеза про можливість зустрічі велосипедистів посеред вулиці (рухаючись на зустріч один одному) є хибною. Таким чином, велосипедисти не можуть зустрітися.

Відповідь: НІ, не можуть зустрітися.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5.

Суть методу доведення від супротивного

«Отбросьте все невозможное, и то, что останется и будет ответом, каким бы невероятным он не казался!»

Цитата з книги: «Пригоди Шерлока Холмса»

Логічною основою методу доведення від супротивного є «**закон виключення третього**»: з двох супротивних тверджень одне завжди є істинним («правильним»), друге — хибним («неправильним»), а третього бути не може.

Завдяки цьому закону замість доведення певного твердження (під час використання методу доведення від супротивного) доводять, що супротивне йому твердження — хибне («неправильне»), і на цій підставі роблять висновок, що істинним («правильним») є саме доводжуване твердження.

11 клас

Задача 1.

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, зображений на рис. 29. Заради визначеності будемо вважати, що довжина його ребра становить a (лін. од.).

I частина. *Доведемо, що куб можна перетнути площиною так, щоб в перерізі утворився правильний трикутник*

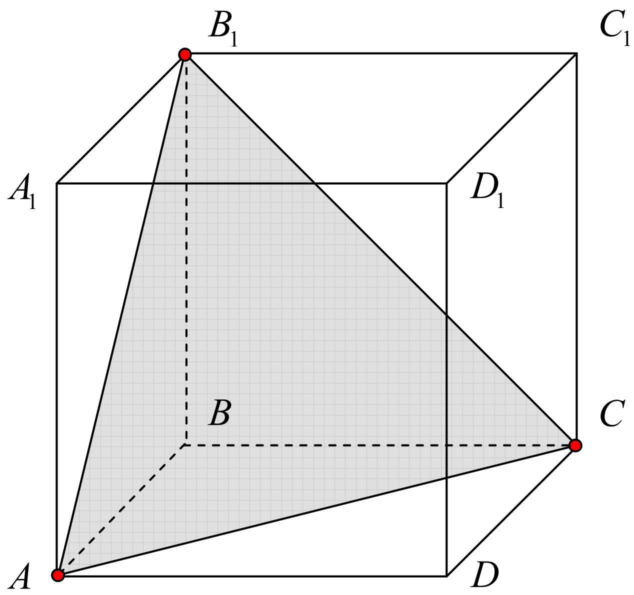


Рис. 29: до 1-ої частини задачі 1

1) Не важко переконатися, що вершини A, C, B_1 такого куба не належать одній прямій (справедливість останнього випливає, наприклад з того, що пряма B_1C_1, яка містить вершину B_1 є мимобіжною із прямою AC).
2) Розглянемо (січну) площину γ, що визначається точками A, C і B_1.
3) Оскільки $A, B_1 \in \gamma$, то пряма $AB_1 \in \gamma$. І тому γ перетинає грань ABB_1A_1 по відрізку AB_1. Аналогічно γ перетинає грань $ABCD$ по відрізку AC, а грань BCC_1B_1 – по відрізку CB_1.

І тому перерізом куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ січною площиною γ є фігура ACB_1, яка, з урахуванням пункту 1), є трикутником.
4) Оскільки AC, CB_1 і B_1A є діагоналями квадратів ($ABCD$, BCC_1B_1 і ABB_1A_1 відповідно) зі стороною a, то (як добре відомо)

$$AC = CB_1 = B_1A = a\sqrt{2}.$$

Звідки й випливає, що $\triangle\ ACB_1$ є правильним.

II частина. *Доведемо, що куб <u>можна</u> перетнути площиною так, щоб в перерізі утворився правильний шестикутник*

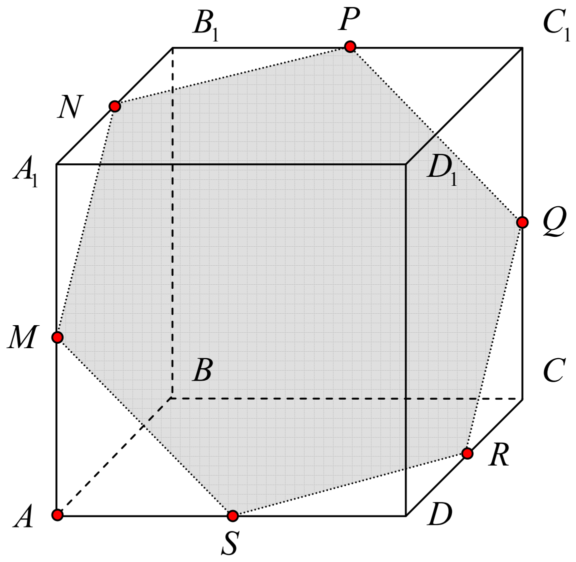


Рис. 30: до 2-ої частини задачі 1

Розглянемо точки M, N, P, Q, R і S, що є серединами ребер (куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, зображеного на рис. 30) AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD і DA відповідно. Доведемо, що $MNPQRS$ є правильним шестикутником.

Для доведення гіпотези необхідно показати виконання 3 умов:

A) що точки M, N, P, Q, R і S належать одній площині;

B) рівність довжин відрізків MN, NP, PQ, QR, RS і SM;

C) рівність кутів $\angle MNP$, $\angle NPQ$, $\angle PQR$, $\angle QRS$, $\angle RSM$ і $\angle SMN$.

I спосіб доведення.

1) Доведемо виконання умови **B)**.

Відрізки MN, NP, PQ, QR, RS і SM є **середніми лініями** (рівних за двома катетами прямокутних) трикутників AA_1B_1, $A_1B_1C_1$, B_1C_1C, C_1CD, CDA і DAA_1 відповідно (з «основами-гіпотенузами», рівними $a\sqrt{2}$). І тому (за властивістю середньої лінії трикутника) мають місце рівності

$$MN = NP = PQ = QR = RS = SM = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad (11.1.1)$$

2) Доведемо виконання умови **A)**.

2.1) Добре відомо, що в кубі відповідні діагоналі протилежних граней є паралельними, зокрема: $AB_1 || DC_1$, $A_1C_1 || AC$, $B_1C || A_1D$.

2.2) Оскільки MN і QR є середніми лініями трикутників AA_1B_1 і C_1CD відповідно, то $MN||AB_1$, $QR||DC_1$, звідки, з урахуванням пункту 2.1) та властивістю паралельних прямих, маємо що $MN||QR$.

Повторюючи аналогічні міркування, маємо що $NP||RS$; $PQ||SM$.

2.3) Оскільки P та S — середини паралельних і рівних ребер куба, то в чотирикутнику PC_1DS протилежні сторони PC_1 та SD паралельні і рівні. А тому PC_1DS є паралелограмом. Звідки $PS||C_1D$. Отже,

$$NM||PS||QR \tag{11.1.2}$$

Повторюючи аналогічні міркування, не важко показати, що

$$MS||NR||PQ, \qquad NP||MQ||SR \tag{11.1.3}$$

2.4) Оскільки $NP||MQ$, то існує єдина площина γ (яка визначається паралельними прямими NP і MQ), що містить точки N, P, M, Q.

Оскільки $NM||QR$, то існує єдина площина γ_1 (яка визначається паралельними прямими NM і QR), що містить точки M, N, Q, R.

Оскільки площини γ і γ_1 мають три спільні точки M, N, Q, то площини γ і γ_1 співпадають. Тобто, точки M, N, P, Q, R належать γ.

Оскільки $NP||SR$, то існує єдина площина γ_2 (яка визначається паралельними прямими NP і SR), що містить точки N, P, S, R.

Оскільки площини γ і γ_2 мають три спільні точки N, P, R, то площини γ і γ_2 співпадають. Звідки й випливає, що точки M, N, P, Q, R, S належать одній площині γ.

3) Доведемо виконання умови **C)**.

3.1) Довжини відрізків SN, MP, NQ, PR, QS і RM є рівними, як відстані між серединами мимобіжних ребер куба. Не важко переконатися (наприклад, двічі застосовуючи теорему Піфагора), що довжина будь-якого з них становить $a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

3.2) З урахуванням пункту 3.1) та рівностей (11.1.1) трикутники MNP, NPQ, PQR, QRS, RSM і SMN є рівними за III ознакою рівності трикутників. Звідки й випливає виконання умови **C)**.

Таким чином, $MNPQRS$ є правильним шестикутником.

II спосіб доведення.

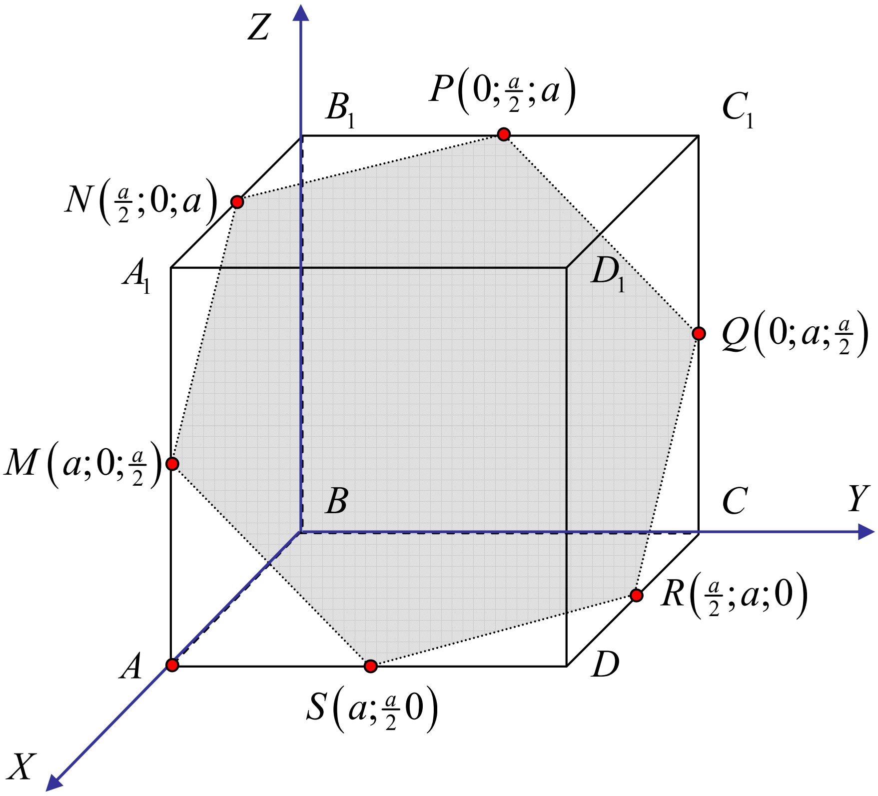


Рис. 31: до 2-ої частини задачі 1

1) Зафіксуємо у просторі прямокутну декартову систему координат з початком у вершині B та осями OX, OY і OZ, додатні напрями яких співпадають із напрямами векторів $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BB_1}$ відповідно – рис. 31.

Оскільки ребро куба становить a (лін.од.), то точки M, N, P, Q, R і S (відносно введеної системи координат) мають наступні координати:

$$M(a;0;\tfrac{a}{2}),\ N(\tfrac{a}{2};0;a),\ P(0;\tfrac{a}{2};a),\ Q(0;a;\tfrac{a}{2}),\ R(\tfrac{a}{2};a;0),\ S(a;\tfrac{a}{2};0). \quad (11.1.4)$$

Не важко перевірити, що наступні вектори мають координати:

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{NP}(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};0), & \overrightarrow{NM}(\frac{a}{2};0;-\frac{a}{2}), & \overrightarrow{MS}(0;\frac{a}{2};-\frac{a}{2}), \\ \overrightarrow{SR}(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};0), & \overrightarrow{QR}(\frac{a}{2};0;-\frac{a}{2}), & \overrightarrow{PQ}(0;\frac{a}{2};-\frac{a}{2}). \end{array} \quad (11.1.5)$$

2) Доведемо виконання умови **B)**.

2.1) Оскільки $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{SR}$, то

$$NP=SR=|\overrightarrow{NP}|=|\overrightarrow{SR}|=\sqrt{(-\tfrac{a}{2})^2+(\tfrac{a}{2})^2+0^2}=\frac{\sqrt{a}}{2}.$$

2.2) Оскільки $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{QR}$, то

$$NM=QR=|\overrightarrow{NM}|=|\overrightarrow{QR}|=\sqrt{(\tfrac{a}{2})^2+0^2+(-\tfrac{a}{2})^2}=\frac{\sqrt{a}}{2}.$$

2.3) Оскільки $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{PQ}$, то
$$MS = PQ = |\overrightarrow{MS}| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{0^2 + (\tfrac{a}{2})^2 + (-\tfrac{a}{2})^2} = \tfrac{\sqrt{a}}{2}.$$
Більше того, мають місце рівності
$$NP = SR = NM = QR = MS = PQ = \frac{\sqrt{a}}{2}. \qquad (11.1.6)$$

3) Доведемо виконання умови **A)**.

3.1) Якщо $\overrightarrow{OC} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$, де $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ непаралельні вектори, а $\alpha, \beta \in R$, то вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ належать одній площині, або, що теж саме — чотири точки O, A, B, C належать одній площині.

3.2) Оскільки координати векторів $\overrightarrow{NP}(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0)$ і $\overrightarrow{NM}(\frac{a}{2}; 0; -\frac{a}{2})$ не є пропорційними, то вектори $\overrightarrow{NP}$ і $\overrightarrow{NM}$ не є паралельними.

3.3) Оскільки:
$\overrightarrow{NQ}(-\frac{a}{2}; a; -\frac{a}{2}) = 2\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NM}$, то M, N, P, Q належать одній площині;
$\overrightarrow{NR}(0; a; -a) = 2\overrightarrow{NP} + 2\overrightarrow{NM}$, то точки M, N, P, R належать одній площині.
$\overrightarrow{NS}(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -a) = \overrightarrow{NP} + 2\overrightarrow{NM}$, то точки M, N, P, S належать одній площині.

Отже, шість точок M, N, P, Q, R, S належать одній площині.

4) Доведемо виконання умови **C)**.

4.1) Для цього кути $\angle MNP$, $\angle NPQ$, $\angle PQR$, $\angle QRS$, $\angle RSM$ і $\angle SMN$ будемо розглядати як кути між парами векторів $\overrightarrow{NM}$ і $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PN}$ і $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QP}$ і $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RQ}$ і $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{SR}$ і $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{MS}$ і $\overrightarrow{MN}$ (відповідно).

4.2) Добре відомо, що кут між векторами $\overrightarrow{m}$ і $\overrightarrow{n}$ (зі спільним початком) можна знайти за допомогою співвідношення $\cos\angle(\overrightarrow{m}; \overrightarrow{n}) = \frac{\langle \overrightarrow{m}; \overrightarrow{n} \rangle}{|\overrightarrow{m}| \cdot |\overrightarrow{n}|}$, де $\langle \overrightarrow{m}; \overrightarrow{n} \rangle$ – скалярний добуток векторів $\overrightarrow{m}$ і $\overrightarrow{n}$, а $|\overrightarrow{m}|, |\overrightarrow{n}|$ – їх модулі.

4.3) Як випливає з пункту 2), модуль кожного із зазначених у підпункті 4.1) векторів становить $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

4.4) Оскільки:
$\overrightarrow{NM} = (\frac{a}{2}; 0; -\frac{a}{2})$, $\overrightarrow{NP} = (-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0)$, то $\cos\angle(\overrightarrow{NM}; \overrightarrow{NP}) = \dfrac{-a^2/4}{\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2}$, звідки $\angle MNP = 120^0$;
$\overrightarrow{PN} = (\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; 0)$, $\overrightarrow{PQ} = (0; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2})$, то $\cos\angle(\overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PQ}) = \dfrac{-a^2/4}{\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2}$, звідки $\angle NPQ = 120^0$;

$\overrightarrow{QP} = (0; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2})$, $\overrightarrow{QR} = (\frac{a}{2}; 0; -\frac{a}{2})$, то $\cos\angle(\overrightarrow{QP}; \overrightarrow{QR}) = \dfrac{-a^2/4}{\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2}$,
звідки $\angle PQR = 120^0$
$\overrightarrow{RQ} = (-\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2})$, $\overrightarrow{RS} = (\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; 0)$, то $\cos\angle(\overrightarrow{RQ}; \overrightarrow{RS}) = \dfrac{-a^2/4}{\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2}$,
звідки $\angle QRS = 120^0$;
$\overrightarrow{SR} = (-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0)$, $\overrightarrow{SM} = (0; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2})$, то $\cos\angle(\overrightarrow{SR}; \overrightarrow{SM}) = \dfrac{-a^2/4}{\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2}$,
звідки $\angle RSM = 120^0$;
$\overrightarrow{MS} = (0; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2})$, $\overrightarrow{MN} = (-\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2})$, то $\cos\angle(\overrightarrow{MS}; \overrightarrow{MN}) = \dfrac{-a^2/4}{\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2}$,
звідки $\angle SMN = 120^0$.

Таким чином, $MNPQRS$ є правильним шестикутником.

Відповідь: ТАК, ТАК.

Доповнення до задачі 1.

?! Доведіть, що якщо від вершини куба на трьох його ребрах, що виходять із неї, відкласти відрізки однакової довжини (меншої за довжину ребра куба), то в перерізі куба площиною, яка проходить через кінці зазначених відрізків, одержимо правильний трикутник.

?! Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ січною площиною γ, що проходить через точки

1) M, N і P, які є серединами ребер AA_1, A_1B_1 та B_1C_1 відповідно;
2) M, N і Q, які є серединами ребер AA_1, A_1B_1 та C_1C відповідно;
3) M, P і R, які є серединами ребер AA_1, B_1C_1 та CD відповідно.

?! Чи можна в перерізі куба площиною одержати:

1) п'ятикутник? («так»); 2) правильний п'ятикутник? («ні»).

Відповідь обґрунтуйте!

?! Чи можна в перерізі куба площиною одержати:

1) квадрат? («так»); 2) прямокутник? («так»);
3) ромб? («так»); 4) трапецію? («так»);
5) прямокутну трапецію? («ні»).

Відповідь обґрунтуйте!

Задача 2.

Доведіть, що число

$$a = \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}} \qquad (11.2.1)$$

є цілим.

1) Оскільки

$$35 - 8\sqrt{19} = 35 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{19} = 19 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{19} =$$
$= \sqrt{19}^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{19} + 4^2 = \left(\sqrt{19} - 4\right)^2$, то

$$\sqrt{35 - 8\sqrt{19}} = \sqrt{\left(\sqrt{19} - 4\right)^2} = \left|\sqrt{19} - 4\right| = \sqrt{19} - 4 \qquad (11.2.2)$$

і тому, з урахуванням (11.2.1), має місце рівність

$$a = \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\left(\sqrt{19} - 4\right)}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{19} + 32}} = \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{35 - 8\sqrt{19}}} \qquad (11.2.3)$$

2) З урахуванням (11.2.2) та (11.2.3) має місце рівність

$$a = \sqrt{\sqrt{19} - \left(\sqrt{19} - 4\right)} = \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{19} + 4} = \sqrt{4} = 2. \qquad (11.2.4)$$

Таким чином, дане число є натуральним, а тому й цілим. Що й треба було довести.

Відповідь: $\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}} = 2 \in N \subset Z$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! Доведіть, що число $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ є натуральним.

?! Доведіть, що число $\sqrt[3]{8 - 9\sqrt{3}} + \sqrt[3]{8 + 21\sqrt{3}}$ є натуральним.

?! Доведіть, що число $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}}$ є натуральним.

Задача 3.

Нехай $ABCD$ – паралелограм, в якому гострий кут $\angle BAD = \varphi$, $AC = d_1$, $BD = d_2$. Знайдемо площу такого паралелограма.

I спосіб

За ради визначеності позначимо довжини сторін AD і AB, як a і b відповідно. Тоді, за властивістю паралелограма («притилежні сторони рівні») $BC = a$, $CD = b$. Крім того, за властивістю паралелограма (щодо його кутів) $\angle BCD = \angle BAD = \varphi$, $\angle ABC = \angle CDB = 180^0 - \varphi$.

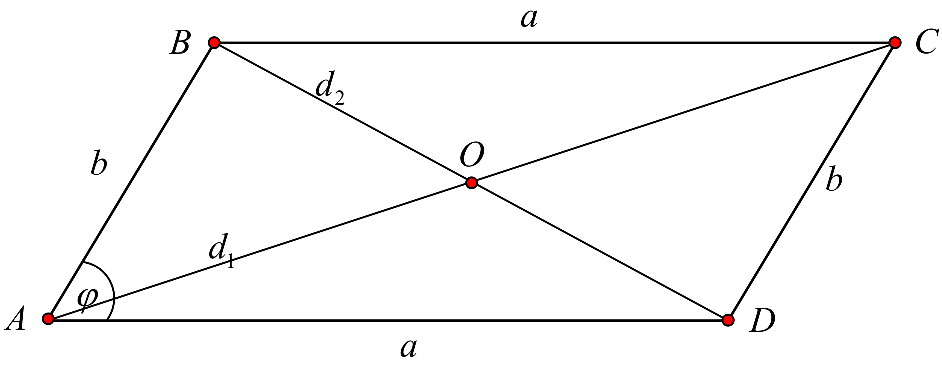


Рис. 32: до 1-го способу розв'язання задачі 3

1) Розглянемо трикутник ABD. В ньому: $\angle BAD = \varphi$; $AB = b$; $AD = a$; $BD = d_2$. І тому за теоремою косинусів має місце рівність

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi. \tag{11.3.1}$$

2) Розглянемо $\triangle\ ABC$. В ньому: $\angle ABC = 180^0 - \varphi$; $BA = b$; $BC = a$; $AC = d_1$. І тому за теоремою косинусів має місце рівність

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(180^0 - \varphi\right) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi. \tag{11.3.2}$$

Зауваження 1: оскільки за умовою φ – гострий кут, то $\cos\varphi > 0$. Але ж тоді $-\cos\varphi < 0$. І тому має місце нерівність

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi > a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi,$$

звідки слідує, що діагональ $AC = d_1$ більша за діагональ $BD = d_2$. Іншими словами дійшли висновку про те, що: *в довільному паралелограмі, який не є прямокутником, проти гострого кута «лежить» менша діагональ, а проти більшого (суміжного) кута – більша діагональ.*

3) З урахуванням (11.3.1) та (11.3.2), маємо наступну рівність $d_1^2 - d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi - \left(a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi\right) = 4ab\cos\varphi$, звідки

$$a \cdot b = \frac{d_1^2 - d_2^2}{4\cos\varphi}. \tag{11.3.3}$$

4) Добре відомо, що площу паралелограма можна знайти як добуток двох його (непаралельних) сторін на синус кута між ними. Тобто $S_{ABCD} = a \cdot b \cdot \sin\varphi$. І тому, з урахуванням (11.3.3), маємо

$$S_{ABCD} = \tfrac{d_1^2 - d_2^2}{4\cos\varphi} \cdot \sin\varphi = \tfrac{d_1^2 - d_2^2}{4} \cdot \operatorname{tg}\varphi = \tfrac{1}{4}\left(d_1^2 - d_2^2\right) \cdot \operatorname{tg}\varphi\,.$$

Зауваження 2: оскільки за умовою задачі не сказано, яка саме діагональ d_1 чи d_2 лежить проти гострого кута φ, то, щоб не припуститися можливої помилки, у відповіді різницю $d_1^2 - d_2^2$ слід подати за модулем. Тобто, остаточна формула, що є відповіддю до задачі, сформульованої саме у запропонований спосіб, має вид

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4}\left|d_1^2 - d_2^2\right| \cdot \operatorname{tg}\varphi. \tag{11.3.4}$$

II спосіб

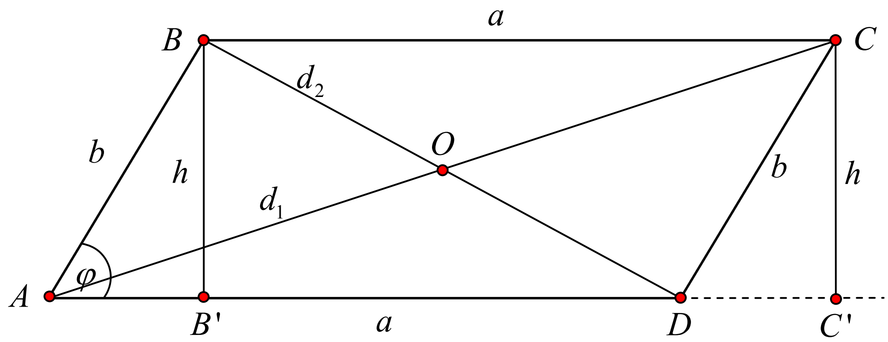


Рис. 33: до 2-го способу розв'язання задачі 3

1) Нехай BB', CC' ($B', C' \in AD$)– висоти паралелограма. Тоді, як відомо, $BB' = CC'$. За ради визначеності покладемо $BB' = CC' = h$. 2) Розглянемо трикутник $AB'B$ (з прямим кутом $AB'B$). В ньому: $AB = b$ (згідно введених позначень), $\angle BAB' = \varphi$ (за умовою). І тому, з урахуванням визначення косинуса гострого кута прямокутного трикутника, маємо що $AB' = b\cos\varphi$. Звідки

$$B'D = a - b\cos\varphi. \tag{11.3.5}$$

2) Розглянемо прямокутні трикутники $AB'B$ та $DC'C$. В них: $AB = DC$ (як протилежні сторони паралелограма); $\angle CDC' = \angle BAD = \varphi$ (як відповідні кути при паралельних прямих AB і DC та січній AC'). І тому $\triangle\ AB'B = \triangle\ DC'C$ (за гіпотенузою та гострим кутом). Звідки $DC' = AB' = b\cos\varphi$. Отже, з урахуванням рівності $AD = BC = a$ (як протилежні сторони паралелограма), маємо що

$$AC' = AD + DC' = a + b\cos\varphi. \qquad (11.3.6)$$

3) Розглянемо прямокутний $\triangle\ B'BD$. Тоді, з урахуванням (11.3.5) та введених позначень, за теоремою Піфагора має місце рівність

$$d_2^2 = h^2 + (a - b\cos\varphi)^2. \qquad (11.3.7)$$

4) Розглянемо прямокутний $\triangle\ AC'C$. Тоді, з урахуванням (11.3.6) та введених позначень, за теоремою Піфагора має місце рівність

$$d_1^2 = h^2 + (a + b\cos\varphi)^2. \qquad (11.3.8)$$

5) Віднімаючи ліві та праві частини рівностей (11.3.8) та (11.3.7), одержуємо рівність $\left|d_1^2 - d_2^2\right| = 4ab\cos\varphi$. Звідки $a \cdot b = \frac{\left|d_1^2 - d_2^2\right|}{4\cos\varphi}$. І тому площа S паралелограма $ABCD$ становить
$S = a \cdot b \cdot \sin\varphi = \frac{\left|d_1^2 - d_2^2\right|}{4\cos\varphi} \cdot \sin\varphi = \frac{1}{4}\left|d_1^2 - d_2^2\right| \cdot \operatorname{tg}\varphi$.

Відповідь: $S = \frac{1}{4}\left|d_1^2 - d_2^2\right| \cdot \operatorname{tg}\varphi$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

?! Доведіть, що коли a і b – довжини сторін паралелограма (який не є ромбом), а ψ – гострий кут між його діагоналями, то площу такого паралелограма можна знайти за формулою

$$S = \frac{1}{2}\left|a^2 - b^2\right| \cdot \operatorname{tg}\psi.$$

?! Нехай a, b, d_1 і d_2 – довжини сторін та діагоналей паралелограма (який не є прямокутником або ромбом), φ – гострий кут паралелограма, а ψ – гострий кут між його діагоналями. Доведіть, що має місце рівність

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\psi} = \left|\frac{2a^2 - 2b^2}{d_1^2 - d_2^2}\right|.$$

Задача 4.

Розв'яжемо рівняння

$$\cos\left(\pi\left(\cos^2 2x - 6\cos^2 x + 1\right)\right) = 1. \qquad (11.4.1)$$

I спосіб

1) $\pi\left(\cos^2 2x - 6\cos^2 x + 1\right) = 2k\pi, \quad k \in Z\,;$
$\cos^2 2x - 6\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} + 1 = 2k\,;\ \cos^2 2x - 3 - 3\cos 2x + 1 - 2k = 0, \quad k \in Z\,;$

$$\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 - 2k = 0, \quad k \in Z. \qquad (11.4.2)$$

2) Введемо заміну $\cos 2x = t$. Тоді рівняння (11.4.2) набуває вид

$$t^2 - 3t - 2(1+k) = 0, \quad k \in Z. \qquad (11.4.3)$$

Причому, оскільки для дійсних x: $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$, то $|t| \leqslant 1$ $(\star)$.

Дискримінант рівняння (11.4.3) становить

$$D = 3^2 + 4\cdot 2(1+k) = 9 + 8 + 8k = 8k + 17\,.$$

2.1) Не важко перевірити, що $D < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{17}{8}$. І тому при цілих $k \leqslant -3$ рівняння (11.4.3) та разом з ним і дане рівняння (11.4.1) не має розв'язків.

2.2) Очевидно, що $D = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{17}{8} \notin Z$.

2.3) Не важко переконатися, що $D > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{17}{8}$. Звідки
$t_1 = \frac{3-\sqrt{8k+17}}{2}$ і $t_2 = \frac{3+\sqrt{8k+17}}{2}$ – дійсні різні корені рівняння (11.4.3).

2.3.1) При довільному $k \geqslant -2$ виконуються умови $8k + 17 \geqslant 1$, $\sqrt{8k+17} \geqslant 1$, $t_2 = \frac{3+\sqrt{8k+17}}{2} \geqslant 2$. Звідки при $k \geqslant -2$ корінь t_2 не задовольняє умову $(\star)$.

2.3.2) Тепер з'ясуємо, при яких з цілих $k \geqslant -2$ корінь t_1 задовольняє умову $(\star)$, або, що теж саме виконується подвійна нерівність

$$-1 \leqslant \frac{3-\sqrt{8k+17}}{2} \leqslant 1. \qquad (11.4.4)$$

Розв'яжемо цю подвійну нерівність
$-1 \leqslant \frac{3-\sqrt{8k+17}}{2} \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant 3 - \sqrt{8k+17} \leqslant 2 \Leftrightarrow -5 \leqslant -\sqrt{8k+17} \leqslant -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 \leqslant \sqrt{8k+17} \leqslant 5 \Leftrightarrow 1 \leqslant 8k + 17 \leqslant 25 \Leftrightarrow -16 \leqslant 8k \leqslant 8 \Leftrightarrow -2 \leqslant k \leqslant 1\,.$

Таким чином, при цілих $-2 \leqslant k \leqslant 1$ корінь t_1 задовольняє умову $(\star)$.

3) З урахуванням заміни $\cos 2x = t$, маємо рівняння

$$\cos 2x = \frac{3 - \sqrt{8k+17}}{2}, \quad k = -2; -1; 0; 1, \tag{11.4.5}$$

звідки $2x = \pm \arccos\left(\frac{3-\sqrt{8k+17}}{2}\right) + 2m\pi, m \in Z$, або ж остаточно

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{3 - \sqrt{8k+17}}{2}\right) + m\pi, m \in Z, k = -2; -1; 0; 1.$$

II спосіб

1) $\pi\left(\cos^2 2x - 6\cos^2 x + 1\right) = 2l\pi, \quad l \in Z$;
$\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 6\cos^2 x + 1 = 2l$;
$4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - 6\cos^2 x + 1 = 2l$;
$4\cos^4 x - 10\cos^2 x = 2k$;

$$2\cos^4 x - 5\cos^2 x - l = 0, \quad l \in Z. \tag{11.4.6}$$

2) Введемо заміну $\cos^2 x = t$. Тоді рівняння (11.4.6) набуває вид

$$2t^2 - 5t - l = 0, \quad l \in Z. \tag{11.4.7}$$

Причому, оскільки для дійсних x: $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$, то $0 \leqslant t \leqslant 1$ $(\star\star)$.

Дискримінант рівняння (11.4.7) становить

$$D = (-5)^2 + 4 \cdot 2 \cdot l = 25 + 8l.$$

2.1) Не важко перевірити, що $D < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{25}{8}$. І тому при цілих $l \leqslant -4$ рівняння (11.4.7) та разом з ним і дане рівняння (11.4.1) не має розв'язків.

2.2) Очевидно, що $D = 0 \Leftrightarrow l = -\frac{25}{8} \notin Z$.

2.3) Не важко переконатися, що $D > 0 \Leftrightarrow l > -\frac{25}{8}$. Звідки $t_1 = \frac{5-\sqrt{25+8l}}{4}$ і $t_2 = \frac{5+\sqrt{25+8l}}{4}$ – дійсні різні корені рівняння (11.4.7).

2.3.1) При довільному $l \geqslant -3$ виконуються умови $25 + 8l \geqslant 1$, $\sqrt{25+8l} \geqslant 1$, $t_2 = \frac{5+\sqrt{25+8l}}{4} > 1$. Звідки при $l \geqslant -3$ корінь t_2 не задовольняє умову $(\star\star)$.

2.3.2) Тепер з'ясуємо, при яких <u>з цілих $l \geqslant -3$</u> корінь t_1 задовольняє умову $(\star\star)$, або, що теж саме виконується подвійна нерівність

$$0 \leqslant \frac{5-\sqrt{25+8l}}{4} \leqslant 1. \qquad (11.4.8)$$

Розв'яжемо цю подвійну нерівність
$0 \leqslant \frac{5-\sqrt{25+8l}}{4} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 5-\sqrt{25+8l} \leqslant 4 \Leftrightarrow -5 \leqslant -\sqrt{25+8l} \leqslant -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 \leqslant \sqrt{25+8l} \leqslant 5 \Leftrightarrow 1 \leqslant 25+8l \leqslant 25 \Leftrightarrow -24 \leqslant 8l \leqslant 0 \Leftrightarrow -3 \leqslant l \leqslant 0$.
Таким чином, при цілих $-3 \leqslant l \leqslant 0$ корінь t_1 задовольняє умову $(\star\star)$.

3) З урахуванням заміни $\cos^2 x = t$, маємо рівняння

$$\cos^2 x = \frac{5-\sqrt{25+8l}}{4}, \quad l \in \{-3;-2;-1;0\}, \qquad (11.4.9)$$

звідки $\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{5-\sqrt{25+8l}}{4}$; $1+\cos 2x = \frac{5-\sqrt{25+8l}}{2}$, $l \in \{-3;-2;-1;0\}$;

$$\cos 2x = \frac{3-\sqrt{25+8l}}{2}, \quad l = -3;-2;-1;0;$$

$2x = \pm \arccos\left(\frac{3-\sqrt{25+8l}}{2}\right) + 2m\pi, m \in Z$, або ж остаточно

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{3-\sqrt{25+8l}}{2}\right) + m\pi,\ m \in Z,\ l \in \{-3;-2;-1;0\}.$$

Поклавши $l = k-1$, одержимо

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{3-\sqrt{17+8k}}{2}\right) + m\pi,\ m \in Z,\ k \in \{-2;-1;0;1\}.$$

Відповідь: $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{3-\sqrt{8k+17}}{2}\right) + m\pi,\ m \in Z,\ k \in \{-2;-1;0;1\}$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! Доведіть, що розв'язки рівнянь

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{25+8l}}{4}}, \quad l \in \{-3;-2;-1;0\}$$

співпадають з наведеними у відповіді розв'язками даного рівняння (11.4.1).

Задача 5.

З'ясуємо, чи можна розрізати квадрат 10×10 на 25 фігур виду

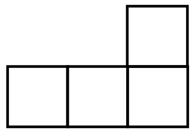


Рис. 34:

Розв'язання.

I спосіб

1) У квадраті 10×10 розставимо всі натуральні числа від 1 до 100 у спосіб, зображений на рис. 35.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Рис. 35: до 1-го способу розв'язання задачі 5

2) Добре відомо, що $1 + 2 + ... + 99 + 100 = 101 \cdot \frac{100}{2} = 5050$.

3) Не важко перевірити, що при довільному розташуванні (в межах квадрату $10{\times}10$) тетраміно (зображеного на рис. 34), всередині нього містяться числа, **сума яких завжди є непарною**.

4) **Якщо припустити, що квадрат** 10×10 **можна розрізати на 25 тетраміно** (фігур, зображених на рис. 34), то, з урахуванням пункту 3), сума всіх чисел в квадраті 10×10 **повинна бути непарним числом**, як сума 25 непарних доданків. Чого бути не може на підставі пункту 2).

Отже, квадрат 10×10 не можна розрізати на 25 фігур виду 34.

II спосіб

1) Розфарбуємо квадрат 10×10 у два кольори (сірий і білий) так, як показано на рис. 36.

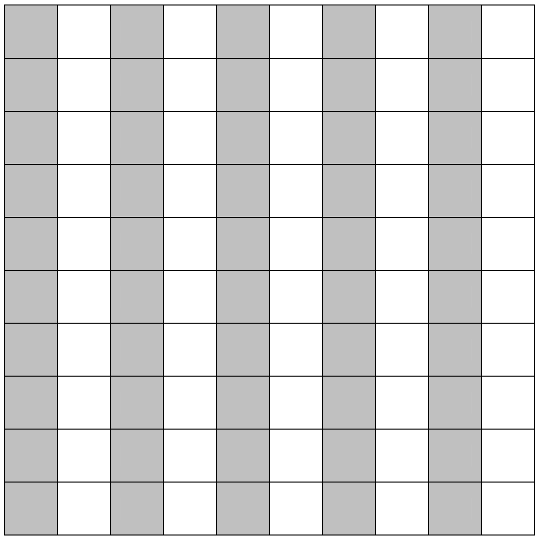


Рис. 36: до 2-го способу розв'язання задачі 5

2) Не важко перевірити, що при наведеному способі розфарбування сірих і білих клітинок 1×1 однакова кількість, яка становить 50.

3) При довільному розташуванні (в межах розфарбованого квадрату 36) тетраміно (зображеного на рис. 34), всередині нього може виявитися:

або 3 сірі і 1 біла клітинка – *тетраміно типу* 1,

або 1 сіра і 3 білі клітинки – *тетраміно типу* 2.

4) **Припустимо, що квадрат** 10×10 **можна розрізати на 25 тетраміно** (фігур, зображених на рис. 34). Тоді, з урахуванням пункту 3), серед них: n тетраміно типу 1 та $(25 - n)$ тетраміно типу 2, де n – ціле невід'ємне число ($n \in N \cup \{0\}$).

4.1) Підрахуємо кількість сірих клітинок. З одного боку, їх кількість становить 50. З іншого боку – $3 \cdot n + 1 \cdot (25 - n)$. Тому має місце рівність $3 \cdot n + 1 \cdot (25 - n) = 50$, звідки $2n = 25$, $n = 12{,}5 \notin Z$.

4.2) Таким чином, прийшли до протиріччя з тим, що $n \in N \cup \{0\}$. А тому наше припущення про те, що квадрат 10×10 можна розрізати на 25 тетраміно (фігур, зображених на рис. 34) є неправильним.

Отже, квадрат 10×10 не можна розрізати на 25 фігур виду 34.

Відповідь: НІ, не можна.

III спосіб

1) У квадраті 10×10 розставимо натуральні числа 1, 2, 3 і 4 у спосіб, зображений на рис. 37.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2

Рис. 37: до 3-го способу розв'язання задачі 5

2) Тоді очевидно, що сума всіх чисел, розставлених у квадраті 10×10, зображеного на рис. 37, становить $30 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 20 \cdot 4 = 230$, тобто **сума є парною**.

3) Не важко перевірити, що при довільному розташуванні (в межах квадрату 10×10) тетраміно (зображеного на рис. 34), всередині нього містяться числа, **сума яких завжди є непарною**.

4) **Якщо припустити, що квадрат 10×10 можна розрізати на 25 тетраміно** (фігур, зображених на рис. 34), то, з урахуванням пункту 3), **сума всіх чисел в квадраті 10×10 повинна бути непарним числом**, як сума 25 непарних доданків. Чого бути не може на підставі пункту 2).

Отже, квадрат 10×10 не можна розрізати на 25 фігур виду 34.

ЧАСТИНА IV.
Умови завдань III етапів (обласних) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2015-2017 рр.

2015 рік[10]

8 клас

1. Петрик виписав усі послідовні натуральні числа від 2015 до 3000 та зміг вибрати 10 з них таких, що їх сума просте число. Чи могла і суми тих чисел, що залишилися не вибраними, також у сумі давати просте число?

2. Петрик написав деяке натуральне число n. Після цього він переставив у цьому числі цифри і вийшло число m, яке виявилось у 3 рази менше n.

$a)$ Чи обов'язково число n ділиться націло на 9?

$b)$ Чи обов'язково число n ділиться націло на 27?

3. Для яких натуральних n квадрат $n \times n$ можна покрити прямокутниками 1×4 можливо в декілька шарів? Покрити у декілька шарів у даному випадку означає, що кожна комірка 1×1 покрита однаковою кількістю прямокутників.

4. По круглому треку їздять в одному напрямі з постійними але попарно різними швидкостями $n \geqslant 3$ велосипедистів. У одного з них є фляга з водою. У момент, коли відбувається зустріч двох велосипедистів, у одного з яких фляга, відбувається миттєва передача цієї фляги другому велосипедисту. Відомо, що зустріч трьох велосипедистів в одній точці неможлива.

[10] Завдання розроблені кафедрою обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

a) Чи може так трапитись, що існують два велосипедисти, до яких фляга жодного разу не потрапить, як довго б не їздили велосипедисти?

b) Чи може так трапитись, що існує один велосипедист, до якого фляга жодного разу не потрапить, як довго б не їздили велосипедисти?

5. Точка P лежить всередині трикутника ABC і задовольняє умови $\angle ABP = \angle PCA$, точка Q така, що $PBQC$ – паралелограм. Доведіть, що $\angle QAB = \angle CAP$.

9 клас

1. В турнірі брали участь 78 тенісистів, усі різного віку. Усього було зіграно 310 матчів, причому ніякі двоє не грали між собою більше одного разу. Доведіть, що можна вибрати 4-х тенісистів так, щоб або наймолодший у цій четвірці обіграв інших трьох, або найстарший у цій четвірці обіграв інших трьох.

2. З цифр 0, 1, 2, ..., 9, використавши кожну рівно один раз, утворили 5 двоцифрових чисел. Якщо найменше з них позначити через n, то інші дорівнюють відповідно $2n,\ 3n,\ 4n,\ 5n$. Яке значення може приймати n?

3. Для яких непарних натуральних n квадрат $n \times n$ можна покрити Z-тетраміно (рис. 38) можливо в декілька шарів? Покрити у декілька шарів у даному випадку означає, що кожна комірка 1×1 покрита однаковою кількістю тетраміно, які можна повертати та перегортати у будь-якому напрямі.

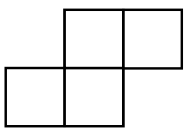


Рис. 38: Z-тетраміно

4. *Задача №4 для 8 класу.*

5. Вписаний у коло чотирикутник $ABCD$ задовольняє умови $AD = BD$, M – точка перетину діагоналей, I – центр кола вписаного у ΔBCM, N – друга точка перетину прямої AC та описаного кола ΔBMI. Доведіть, що $AN \cdot NC = CD \cdot BN$.

10 клас

1. Петрик на кожній перерві з'їдав цукерок більше ніж на попередній. Скільки він міг з'їсти цукерок на 4-й перерві, якщо усього за 5 перерв він з'їв 31 цукерку, при цьому на першій перерві він з'їв у 3 рази менше ніж на останній?

2. *Задача №2 для 9 класу.*

3. Для яких парних натуральних n квадрат $n \times n$ можна покрити Z-тетраміно (рис. 38) можливо в декілька шарів? Покрити у декілька шарів у даному випадку означає, що кожна комірка 1×1 покрита однаковою кількістю тетраміно, які можна повертати та перегортати у будь-якому напрямі.

4. Дійсні x, y, z такі, що $x < y < z < 6$. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{1}{y-x} + \frac{1}{z-y} \leqslant 2, \\ \frac{1}{6-z} + 2 \leqslant x. \end{cases}$$

5. *Задача №5 для 9 класу.*

11 клас

1. Знайдіть найменше натуральне число, яке закінчується на 16, має суму цифр 16 та ділиться на 16.

2. Дійсні числа x, y, z задовольняють умову: $\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y}$. Які значення може приймати вираз $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$?

3. *Задача №3 для 10 класу.*

4. *Задача №4 для 10 класу.*

5. На площині дано два кола ω_1 та ω_2 з центрами O_1 та O_2 відповідно, які дотикаються зовнішнім чином у точці M, при цьому радіус кола ω_2 більший за радіус кола ω_1. Розглянемо точку $A \in \omega_2$ таку, що точки O_1, O_2 та A не колінеарні. AB та AC — дотичні до кола ω_1 (B та C є точками дотику). Лінії MB і MC перетинають вдруге коло ω_2 у точках E і F відповідно. Точка перетину EF і дотичної в точці A до кола ω_2 позначимо через D. Доведіть, що точка D лежить на фіксованій лінії, коли точка A рухається по колу ω_2 таким чином, що точки O_1, O_2 та A не колінеарні.

2016 рік[11]

7 клас

1. Розставте у виразі $7-6-5-4-3-2-1=0$ знаки дужок таки чином, щоб вийшла вірна рівність.

2. Чи можна точно сказати, яке число більше: $\text{ДВА} \times \text{ШІСТЬ}$ чи ДВАДЦЯТЬ, якщо різним буквам відповідають різні цифри, а однаковим – однакові?

3. Є вирізані з паперу в клітинку три квадрати 2×2, 3×3 та 6×6. Треба розрізати 2 з них на дві частини (не обов'язково одним прямолінійним розрізом, але обов'язково вздовж ліній між клітинами) таким чином, щоб з одержаних частин можна було скласти квадрат.

4. У кожну з вершин правильного n-кутника помістили знак «$+$» чи «$-$». За один крок можна поміняти знаки у трьох будь-яких сусідніх вершин. Чи при будь-якій початковій розстановці знаків можна усі знаки у вершинах зробити однаковими за скінченну кількість кроків, якщо

$a)$ $n=2015$; $b)$ $n=2016$?

8 клас

1. Чи можна розкласти гирі вагою $1;2;\ldots;9$ грам на три купки таким чином, щоб у першій купці було 2 гирі, у другій – 3 гирі, а у третій купці – 4 гирі та щоб сумарна вага кожної купки була однаковою.

2. У рівнобедреному трикутнику ABC з вершиною у точці B на стороні BC взято точку M так, що $BM=MA=AC$. Знайдіть кути $\triangle ABC$.

3. Відомо, що змінні a, b задовольняють умову $\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}=1$. Які значення може приймати вираз $(a+b)(\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2})$?

4. Розв'яжіть в натуральних числах x, y рівняння:

$$x(x^2+19)=y(y^2-10).$$

5. *Задача №4 для 7 класу.*

[11]Завдання розроблені кафедрою обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

9 клас

1. Відомо, що квадратний тричлен ax^2+bx+c має корені. Чи випливає звідси, що й квадратний тричлен $a^3x^2+b^3x+c^3$ також має корені?

2. *Задача №3 для 8 класу.*

3. Для кожної послідовності u довжини 5, що складається з 0 та 1, позначимо через $D(u)$ – множину усіх послідовностей довжини 4, які отримуються з u викреслюванням одного з елементів. Множина A складається з декількох послідовностей довжини 5 таких, що для кожної пари $u,v\in A$ множини $D(u)$ та $D(v)$ не перетинаються. Яке максимальне можливе значення $|A|$?

4. *Задача №4 для 8 класу.*

5. На стороні AB трикутника ABC вибрали точки M,N (точка M належить відрізку AN). Дотична в точці M до описаного кола $\triangle\ ACM$ перетинає відрізок CN у точці P, а дотична в точці N до описаного кола $\triangle\ BCN$ перетинає відрізок CM у точці Q. Виявилось, що чотирикутник $ABPQ$ – рівнобічна трапеція. Доведіть, що $\triangle\ ABC$ – рівнобедрений.

10 клас

1. Відомо, що добуток чотирьох чисел – коренів рівнянь $x^2+2bx+c=0$ та $x^2+2cx+b=0$, де b та c додатні, дорівнює 1. Які значення можуть приймати b та c?

2. Чи можна усі комірки квадрату 2016×2016 пофарбувати у 6 кольорів (кожна комірка повністю фарбується у один з кольорів) так, щоб кожний прямокутник 2×3 містив рівно по одній клітині кожного кольору?

3. *Задача №3 для 9 класу.*

4. *Задача №5 для 9 класу.*

5. Для довільних додатних x,y,z доведіть нерівність:

$$\frac{x^2}{xy+z}+\frac{y^2}{yz+x}+\frac{z^2}{zx+y}\geqslant\frac{(x+y+z)^3}{3(x^2(y+1)+y^2(z+1)+z^2(x+1))}.$$

11 клас

1. *Задача №1 для 10 класу.*

2. *Задача №2 для 10 класу.*

3. Для яких натуральних $n \geqslant 2$ існує такий многочлен з цілими коефіцієнтами, що для кожного дільника d числа n справджується рівність: $f(d) = \frac{n}{d}$.

4. Знайдіть усі функції $f : R \to R$ які $\forall x, y \in R$ задовольняє умову: $f\left(f\left(f(x) + y\right) + y\right) = x + y + f(y)$.

5. Для трикутника ABC позначимо через I_B – центр зовні вписаного кола, а через M – середину дуги BC описаного кола, що не містить вершини A. Пряма MI_B вдруге перетинає описане коло в точці T. Доведіть, що має місце рівність: $TI_b^2 = TB \cdot TC$.

2017 рік[12]

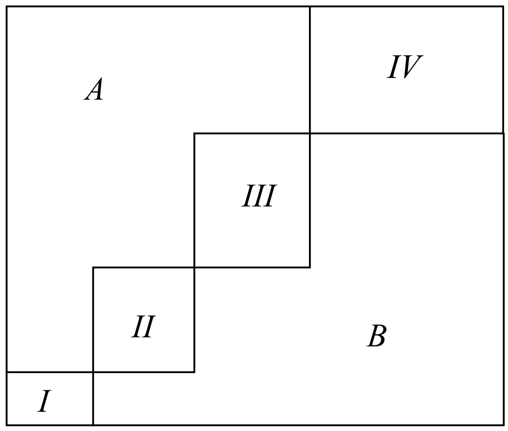
7 клас

1. На дошці записують послідовність цифр за таким правилом: якщо останні цифри, записані на дошці, дорівнюють a та b, то за ними записується остання цифра добутку ab. Наприклад, якщо спочатку записані $1; 8$, то далі послідовність продовжується таким чином: $1; 8; 8; 4; \ldots$. Знайдіть 2017-ту виписану цифру послідовності, якщо вона почалася з цифр $3; 4$. Відповідь обґрунтуйте.

2. У компанії друзів кожному подобалася або математика, або інформатика. Відомо, що ті, кому подобалась математика, мали середній вік 15 років, а ті, кому подобалась інформатика, мали середній вік 25 років. Одного дня Андрійкові перестала подобатись інформатика, та стала подобатись математика. Внаслідок цього середній вік тих, кому подобалась інформатика, а також тих, кому подобалась математика, став більшим на 1. З'ясуйте, скільки всього було друзів у цій компанії та наведіть відповідний приклад, що така ситуація можлива.

[12] Завдання розроблені кафедрою обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

3. Прямокутник з периметром 2016 розрізаний на чотири прямокутники I, II, III, IV, а також дві області A та B, як це зображено на рисунку. Периметри прямокутників відносяться як $P_I : P_{II} : P_{III} : P_{IV} = 1 : 3 : 5 : 7$. Чому дорівнюють суми периметрів фігур A та B? Відповідь обґрунтуйте.



4. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше могло виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічиїх не буває? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. По колу розставлені 8 кружечків. Чи можна записати у цих кружечках числа $1; 2; ...; 8$ таким чином, щоб сума чисел, що записані у будь-яких двох сусідніх кружечках, не ділилася ні на 3, ні на 5, ні на 7?

2. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок.

Після якого туру найшвидше могло виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо:

a) це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічиїх не буває?

b) це був чемпіонат з гандболу, де за перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується?

3. Добуток трьох чисел $\overline{abc} \cdot \overline{ab} \cdot a = 3****7$ є шестицифровим числом з першою цифрою 3 та останньою цифрою 7. Цифри a, b, c не обов'язково різні. Чому може дорівнювати цей добуток? Наведіть усі можливі відповіді.

4. На сторонах BC та CD квадрату $ABCD$ вибрані точки M та N відповідно таким чином, що $\angle MAN = 45^\circ$. На відрізку MN, як на діаметрі, побудували коло w, яке перетинає відрізки AM та AN у точках P та Q відповідно. Доведіть, що точки B, P та Q лежать на одній прямій.

5. Знайдіть усі пари цілих чисел (a, b), які задовольняють умову:

$$a^2 + b^2 = a + b + ab.$$

9 клас

1. Знайдіть найбільший спільний дільник набору з 2017 таких чисел:

$$2017 + 1, \quad 2017^2 + 1, \quad 2017^3 + 1, \ldots, \quad 2017^{2017} + 1.$$

2. У чемпіонаті з гандболу взяли участь 8 команд. За перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Команди, що на даний момент або наприкінці турніру набрали однакову кількість очок, розподіляються по місцях по додаткових показниках (особиста зустріч, різниця м'ячів тощо). В деякий момент після чергового туру виявилось, що усі команди набрали різну кількість очок. Чи зможе наприкінці чемпіонату посісти перше місце команда, що у той момент була на 8-му місці?

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \left(x^2+1\right)y = z^2+1 \\ \left(y^2+1\right)z = x^2+1 \\ \left(z^2+1\right)x = y^2+1 \end{cases}$$

4. Є набір з десяти карток, на яких записано по одній цифрі $0;\ 1;\ \ldots;\ 9$. Андрій та Олеся по черзі (розпочинає Андрій) вибирають по одній картці та складають їх послідовно зліва направо так, що у кожного утворюється пятицифрове число (картку з цифрою 0 на своєму першому кроці жоден з гравців вибирати не може). Андрій перемагає у цій грі, якщо число, яке утворилося у нього, ділиться націло на 6. Інакше перемагає Олеся. Кожен з гравців прагне перемогти. Хто за таких умов може забезпечити собі перемогу?

5. У трикутнику ABC проведені медіани BB_1 та CC_1, що перетинаються в точці M. Доведіть, що в чотирикутник AC_1MB_1 можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли $AB = AC$.

10 клас

1. Знайдіть найбільше дев'ятицифрове натуральне число, що задовольняє умови: усі його цифри різні, кожні дві сусідні цифри числа відрізняються не менше ніж на 2 та воно кратне 3.

2. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше може виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо:

a) це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічиїх не буває.

b) це був чемпіонат з футболу, де за перемогу нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується.

3. Заданий квадрат $ABCD$. Нехай точка M – середина сторони BC, а H – основа перпендикуляра з вершини C на відрізок DM. Доведіть, що $AB = AH$.

4. *Задача №4 для 9 класу.*

5. Для невід'ємних чисел x, y, z доведіть нерівність:

$$3\left(x^2 + y + z\right)\left(x + y^2 + z\right)\left(x + y + z^2\right) \geqslant (x + y + z)^4.$$

11 клас

1. *Задача №1 для 10 класу.*

2. Добуток трьох чисел $\overline{abc} \cdot \overline{bca} \cdot \overline{cab} = 3******1$ є восьмицифровим числом з першою цифрою 3 та останньою цифрою 1. Цифри a, b, c попарно різні. Чому може дорівнювати цей добуток? Наведіть усі можливі відповіді.

3. Доведіть, що при будь-якому значенні параметру a рівняння

$$x^4 + a^2x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + a - 1 = 0$$

має принаймні один дійсний розв'язок.

4. У чемпіонаті з гандболу взяли участь 8 команд. За перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Команди, що на даний момент або наприкінці турніру набрали однакову кількість очок, розподіляються по місцях по додаткових показниках (особиста зустріч, різниця м'ячів тощо). В деякий момент після чергового туру виявилось, що усі команди набрали різну кількість очок. Яке найвище місце зможе наприкінці чемпіонату посісти команда, що у той момент була на 8-му місці?

5. У трикутнику ABC проведена бісектриса AD. Коло k, проходить через вершину A та дотикається до сторони BC у точці D. Доведіть, що описане коло $\triangle ABC$ дотикається до кола k у точці A.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / [Р. И. Довбыш, Л. Л. Потемкина, Н. Л. Трегуб и др.] – Донецк: ООО ПКФ «БАО», **2005**. – 336 с.
2. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2007** / Б.Б. Беседін, Г.М. Бірюкова, Г.О. Ганзера, В.М. Кадубовська, О.А. Кадубовський, Л.Г. Плесканьова, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Навчальний посібник. — Слов'янськ, 2008. — 40 с.
3. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2008** / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, Л.Г. Плесканьова, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 2, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ — учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. — Слов'янськ, 2009. — 44 с.
4. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2009** / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, Г.О. Ганзера, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 5, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ — учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. — Слов'янськ, 2010. — 44 с.
5. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2010** / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 8, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ — учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. — Слов'янськ, 2011. — 80 с.
6. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2011** / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко, М.М. Рубан // Випуск 10, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ — учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, 2012. – 84 с.
7. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2012** / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, М.М. Рубан, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 11, СЕРІЯ: Викладачі ДДП — учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. — Слов'янськ, 2013. — 64 с.
8. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2013** / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. — Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», 2014. — 60 с. — (Викладачі ДДПУ — учням, студентам, вчителям, вип. 12).

9. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2014** / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. — Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», 2015. — 64 с. — (Викладачі ДДПУ — учням, студентам, вчителям, вип. 13).
10. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — **2015** / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, О.В. Чуйко, С.І. Вороб-йова. — Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», 2016. — 100 с. — (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 14).

Internet ресурси

1. Київські олімпіади з математики (сайт київських та всеукраїнських олімпіад та турнірів з математики, де можна знайти тексти завдань, результати та умови проведення математичних змагань, що проходили в Україні протягом останніх років) [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://matholymp.org.ua/

2. Фізико-математичний журнал «Квант» (завдання різних математичних олімпіад за 1971-2002рр) [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://kvant.mirror1.mccme.ru/

3. Сайт міжнародних олімпіад з математики [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.imo-official.org/

4. Олимпиады для школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://olimpiada.ru/

5. Всероссийская олимпиада по математике [Електронний ресурс]. – Режим доступа: math.rusolymp.ru/

6. Российская страница международного математического конкурса «Кенгуру» [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://mathkang.ru/

7. Українська сторінка міжнародного конкурсу «Кенгуру» [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.kangaroo.com.ua/index.php

8. Турнир городов Международная математическая олимпиада для школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.turgor.ru/

9. Сайт Московского Центра Непрерывного Математического Образования [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.mccme.ru/

10. Задачная база олимпиадных задач (декілька тисяч олімпіадних задач російських і міжнародних математичних змагань). [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://zaba.ru/, http://problems.ru/