Кадубовський О.А.,
Беседін Б.Б.

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ:

розв'язання задач
ІІ етапу
Всеукраїнської учнівської олімпіади
з математики – 2019

Випуск 24

навчальний посібник

умови

відповіді

розв'язання

#СЕРІЯ : ВИКЛАДАЧІ ДДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ – 2019

5 – 11 класи

Рекомендовано вченою радою
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»
як навчальний посібник
для факультативних занять з математики

Слов'янськ – 2020

УДК 51 (075.3)

О-543

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2019 : навчальний посібник / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін. – Слов'янськ : вид. центр «Маторін», 2020. – 88 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 24).

Адресовано вчителям та викладачам математики, як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням закладів загальної середньої освіти та студентам математичних спеціальностей педагогічних закладів вищої освіти.

РЕКОМЕНДОВАНО
вченою радою Державного вищого навчального закладу
«Донбаський державний педагогічний університет»,
Протокол №10 від 27.06.2020 р.

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук **С.О. ЧАЙЧЕНКО**,
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»,
проректор з науково-педагогічної роботи, професор кафедри математики та інформатики;

доктор фізико-математичних наук **Ю.В. ЖУЧОК**,
Луганський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри алгебри та системного аналізу.

Відповідальний за випуск:

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри
математики та інформатики О.А. Кадубовський

Зміст

ВІД АВТОРІВ

«Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!.»

Д. Пойа[1]

Даний посібник є 24-им випуском серії «Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям», заснованої у 2008 році. Посібник містить розв'язання задач II етапу (районного, міського) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, який проводився 17 листопада 2019 року відповідно до наказу МОН України від 06.08.2019 за №1077 «Про проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів з навчальних предметів у 2019/2020 навчальному році» та наказу Департаменту освіти і науки Донецької облдержадміністрації за №376/163-19-ОД від 17.10.2019 «Про проведення II етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з навчальних предметів у 2019/2020 навчальному році».

Як і в попередніх випусках для більшості задач олімпіади пропонується кілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого із запропонованих методів. Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в певному розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головна мета авторів посібника – «донести» до вчителів і учнів якомога більше корисних математичних ідей і принципів та показати їх застосування.

[1] Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 452 с.

Нагадаємо, що принципами в математиці називають деякі положення або методи, які використовуються в доведеннях математичних тверджень та під час розв’язання різноманітних задач. Дуже часто учні зустрічаються з ними при розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Перш за все учні, які беруть участь в олімпіадах, повинні володіти значною кількістю принципів. Нажаль шкільна програма не передбачає знайомства з більшістю із них. З основними математичними принципами можна ознайомитись у наведеній літературі, зокрема в [13][2].

У посібнику до окремих задач наводяться «доповнення», сенс яких полягає:

– у формулюванні двоїстої або схожої задачі,

– в узагальненні запропонованої задачі.

На думку авторів такі доповнення повинні активізувати і зацікавити учнів при підготовці до майбутніх олімпіад.

Автори посібника та керівництво фізико-математичного факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» висловлюють щиру подяку всім вчителям м. Слов'янськ, які беруть участь в організації та проведенні учнівських олімпіад з математики й семінарів, присвячених аналізу їх результатів.

Маємо надію, що представлений посібник буде корисним керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням, стане для багатьох з них поштовхом до більш змістовних міркувань і буде спонукати до систематичного ознайомлення з тим чи іншим розділом математики.

Вчіться творчому пошуку в процесі розв'язування задач!

Із найщирішими побажаннями, викладачі фізико-математичного факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет».

01.05.2020

---

[2] Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2005. – 344с.

«Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле»

А.Н. Крылов

«Каждый настолько превосходит других, насколько он больше других упражняется»

Я.А. Коменский

Звернення до самих юних та вже досвідчених учасників олімпіад з математики

«... Смягчается времен суровость, теряют новизну слова.
Талант – единственная новость, которая всегда нова.
Меняются репертуары, стареет жизни ералаш.
Нельзя привыкнуть только к дару, когда он так велик, как Ваш ...»[3]

Б. Пастернак

Юний друже! Для повного та бездоганного (в сенсі дотримання належного рівня математичної строгості) розв'язання задач вкрай необхідно навчитись ретельно аналізувати умову самої задачі. І якщо умовою задачі (ненавмисно або ж навпаки – навмисно) закладена «певна неоднозначність / недовизначеність», це зовсім не означає, що «задача не є коректною». Навпаки – саме такі задачі є прикладом так званих задач на дослідження, при розв'язуванні яких важливо розуміти, що розв'язати задачу на дослідження, зокрема математичну, це дати категоричну відповідь в кожному з можливих випадків (- обмежень) шляхом ретельного аналізу / дослідження повної системи всіх можливих додаткових умов-обмежень, кожна з яких:

по-перше – дозволяє повною мірою конкретизувати поставлене питання-завдання;

по-друге – не наділяє умову надлишковими даними (які можна одержати з певної частини вихідної інформації);

по-третє – не суперечить даним або наслідкам з них.

[3] Уривок із вірша «Актриса» (1957 р.), присвяченого Анастасії Платонівні Зуєвій – актрисі театру і кіно

«Среди равных умов при одинаковости прочих условий превосходит тот, кто знает геометрию»

Б. Паскаль

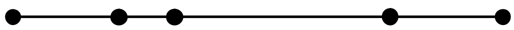
«Искусство решать геометрические задачи чем-то напоминает трюки иллюзионистов – иногда, даже зная решение задачи, трудно понять, как можно было до него додуматься»

И.Д. Новиков

ЧАСТИНА І. УМОВИ ЗАДАЧ

5 клас

1. Скільки відрізків зображено на рисунку (нижче)? Відповідь обґрунтуйте.



2. У шухляді знаходяться 13 червоних, 9 білих та 5 чорних кульок. Яку найменшу кількість кульок (із зав'язаними очима) необхідно вилучити із шухляди, щоб серед них гарантовано виявилося 6 кульок однакового кольору? Відповідь обґрунтуйте.

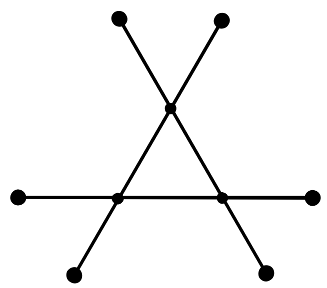
3. Укажіть найменше натуральне число, сума цифр якого дорівнює 101.

4. У Михайлика є лінійка, на шкалі якої позначено лише 0 см, 5 см і 13 см (рис. нижче). Як, користуючись цією лінійкою, він зможе побудувати відрізок завдовжки: 1) 3 см; 2) 1 см? Відповідь обґрунтуйте.

5. Софія та Марія мешкають в одному багатоповерховому будинку. На кожному поверсі в усіх під'їздах розташовано по 4 квартири. Софія мешкає на 5 поверсі у квартирі №83, а Марія – на 3 поверсі у квартирі №169. Скільки поверхів у цьому будинку?

6 клас

1. Скільки відрізків зображено на рисунку (нижче)? Відповідь обґрунтуйте.



2. Для учнів класу приготували однакові подарунки. В усіх подарунках було разом 588 цукерок, 140 яблук і 252 горіхи. Скільки учнів у класі, якщо їх більше, ніж 20?

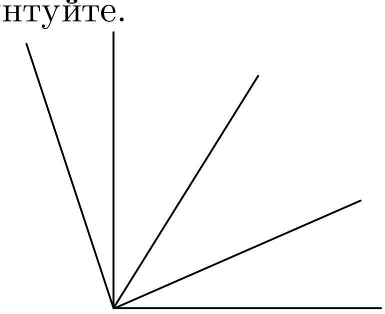
3. У числі 7******1 замість зірочок поставити такі цифри, щоб сума будь-яких сусідніх трьох цифр становила 11.

4. Майстер виготовляє одну деталь за 5 хвилин, а його учень таку ж деталь – за 9 хвилин. Працюючи разом, вони виготовили 42 деталі. Скільки деталей (із 42 зазначених) виготовив майстер?

5. Знайти всі двозначні числа, які діляться на 5 без остачі, а при діленні на 2, на 3 та на 4 дають в остачі 1.

7 клас

1. Скільки кутів менших за розгорнутий (градусна міра кожного з яких менша за градусну міру розгорнутого кута) зображено на рисунку (нижче)? Відповідь обґрунтуйте.



2. Ціну товару спочатку знизили на 20%, а потім нову ціну ще раз знизили на 15%. На скільки відсотків було знижено початкову ціну товару?

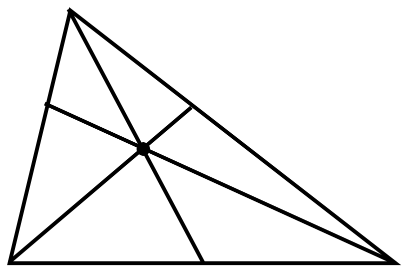
3. Якою цифрою закінчується значення (числового) виразу $11^{2021} + 14^{2020} - 13^{2019}$?

4. За яких умов рівняння $ax + b = cx + d$ має безліч коренів? Відповідь обґрунтуйте.

5. Відновити ребус ВОДА+ВОДА=ЗАВОД (однаковим літерам відповідають однакові цифри, а різними літерам – різні цифри).

8 клас

1. Скільки трикутників зображено на рисунку (нижче)? Відповідь обґрунтуйте.



2. $ABCD$ – квадрат. $AD = BE = EC$. Знайти градусну міру $\angle AED$.

3. Скільки існує таких тризначних чисел, запис кожного з яких не містить цифру 0, а при довільній перестановці цифр одержується число, яке ділиться на 4?

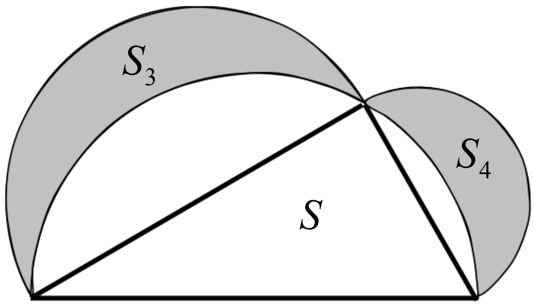
4. Автомобіль проїхав першу половину шляху зі швидкістю 60 км/год. Шлях, що залишився, половину часу він їхав зі швидкістю 80 км/год, а другу половину часу – зі швидкістю 100 км/год. Знайти у кілометрах за годину середню швидкість руху автомобіля.

5. В прямокутнику 5×6 зафарбовано 19 клітинок. Доведіть, що в ньому можна обрати квадрат 2×2, в якому зафарбовано не менше трьох клітинок.

9 клас

1. Доведіть нерівність $c^2 + 5d^2 + 4cd - 4d + 4 \geq 0$, де c, d – довільні дійсні числа.

2. На гіпотенузі та катетах прямокутного трикутника, як на діаметрах, побудовано півкола так, як показано на рисунку нижче. Доведіть, що сума площ замальованих фігур («луночок» Гіппократа) дорівнює площі трикутника.



3. При якому значенні параметра a сума кубів коренів рівняння $(x + a)(x^2 - 2x - 335) = 0$ становить 2019?

4. Основа висоти, опущеної з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 4 см та 9 см. Чи можна такий прямокутний трикутник розрізати на 13 рівних трикутників? Якщо так, то в який спосіб?

5. Фокусник збирається вгадати задумане двоцифрове число. Для цього він просить сказати йому остачі x, y, z від ділення задуманого числа на 3, 5 та 7 відповідно. Обчисливши суму $70x + 21y + 15z$, фокусник називає задумане число. Поясніть, як йому це вдається?

10 клас

1. Відомо, що при будь-якому n суму n перших членів арифметичної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = n^2 + 3n$. Знайдіть перший член та різницю такої прогресії.

2. Дано тетраедр $SABC$ та точки M, N і P, які належать продовженню ребра SA за точку A та граням ABC і SBC відповідно. Побудуйте переріз тетраедра $SABC$, якщо січна площина проходить через зазначені точки M, N і P.

3. Дано рівнобедрений $\triangle ABC$ з основою AC, довжина якої становить 12 см. Відомо, що радіус зовнівписаного кола цього трикутника, яке дотикається основи AC (та продовжень сторін BA і BC за точки A і C відповідно), становить 9 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в $\triangle ABC$.

4. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $ax^2 + 2(a+1)x + 3a + 1 \le 0$ справджується на множині $(-\infty;1)$.

5. Які з наступних тверджень (*в списку нижче*) є правдивими (правильними), а які хибними (помилковими)?

1. Три твердження *в цьому списку* хибні, інші правдиві.
2. Принаймні, одне твердження *в цьому списку* хибне.
3. Принаймні, одне твердження *в цьому списку* правдиве.
4. Всі твердження *в цьому списку* хибні.

11 клас

1. Відомо, що для довжин a, b і c сторін трикутника справджується рівність $c = \dfrac{ab}{a+b}$. Доведіть, що в такому трикутнику довжина однієї з висот дорівнює сумі довжин двох інших висот трикутника.

2. Відомо, що (двозначне) число $\overline{ab}$ більше за (двозначне) число $\overline{ba}$. Доведіть, що їх відношення не може бути натуральним числом.

3. Основа піраміди – паралелограм, сторони якого 16 см і 22 см. Відстань від вершини піраміди до центра основи 4 см. Знаючи, що довжини бічних ребер піраміди виражаються непарними послідовними числами, знайдіть довжини бічних ребер піраміди.

4. Розв'яжіть рівняння

$$\left(\operatorname{tg}\tfrac{19\pi}{3} - \operatorname{tg} x\right) \cdot \sqrt{6\cos\tfrac{15\pi}{4}\cos\tfrac{x}{2} - \cos x - 3} = 0.$$

5. Які з наступних тверджень (*в списку нижче*) є правдивими (правильними), а які хибними (помилковими)?

1. Два твердження *в цьому списку* хибні, інші правдиві.
2. Три твердження *в цьому списку* хибні, інші правдиві.
3. Принаймні, одне твердження *в цьому списку* хибне.
4. Принаймні, одне твердження *в цьому списку* правдиве.
5. Всі твердження *в цьому списку* хибні.

ЧАСТИНА II.
ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

5 клас

Задача №1. **10.**
Задача №2. **16.**
Задача №3. **299999999999.**
Задача №4. ***– задача на побудову*.**
Задача №5. **8 поверхів.**

6 клас

Задача №1. **18**.
Задача №2. **28**.
Задача №3. **71371371.**
Задача №4. **27**.
Задача №5. **25; 85**.

7 клас

Задача №1. **10.**.
Задача №2. **32%.**
Задача №3. **0**.
Задача №4. $\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}.$
Задача №5. **8947+8947=17894.**

8 клас

Задача №1. **16**.
Задача №2. 30^0 **або** 150^0.
Задача №3. **8: 444; 448; 484; 488; 844; 848; 884; 888.**
Задача №4. **72 км/год**.
Задача №5. ***– задача на доведення*.**

9 клас

Задача №1. – ***задача на доведення***.
Задача №2. – ***задача на доведення***.
Задача №3. $a = -1.$
Задача №4. так, можна: прямокутні трикутники з катетами 2 і 3 см.
Задача №5. нехай $S = 70x + 21y + 15z$, тоді:

якщо наведена сума S є двозначним числом, то $a = S$;
якщо $115 \le S \le 204$, то $a = S - 105;$
якщо $220 \le S \le 309$, то $a = S - 105 - 105 = S - 210$.
якщо ж $325 \le S \le 414$, то $a = S - 315.$

10 клас

Задача №1. $a_1 = 4,\ d = 2$.

Задача №2. – ***задача на побудову***.

Задача №3. $r = 4$.

Задача №4. $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

Задача №5. «2» і «3» – правдиві твердження;
«1» і «4» – хибні твердження.

11 клас

Задача №1. – ***задача на доведення***.

Задача №2. – ***задача на доведення***.

Задача №3. **11, 13, 15, 17 см.**

Задача №4. $x = \dfrac{\pi}{3} + 4\pi m,\ m \in Z$.

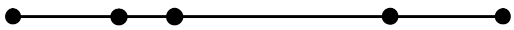
Задача №5. «1», «3», «4» – правдиві твердження;
«2» і «5» – хибні твердження.

ЧАСТИНА III.
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

5 клас

Задача 1

Скільки відрізків зображено на рисунку (нижче)? Відповідь обґрунтуйте.



Розв'язання

Для зручності введемо позначення так, як показано на рис. 5.1.1.

Рис. 5.1.1

1 спосіб

Усі відрізки, які зображено на рисунку 5.1.1, перелічимо за наступним принципом, а саме:

1) відрізки, між кінцями яких немає ***жодної*** з позначених точок:

$$AB,\ BC,\ CD,\ DE;$$

2) відрізки, між кінцями яких ***точно одна*** з позначених точок:

$$AC,\ BD,\ CE;$$

3) відрізки, між кінцями яких ***точно дві*** з позначених точок:

$$AD,\ BE;$$

4) відрізки, між кінцями яких ***точно три*** з позначених точок:

$$AE.$$

Таким чином, на рисунку 5.1.1 (а тому й на даному рисунку) зображено точно $(4+3+2+1)=10$ відрізків.

2 спосіб

Інший принцип підрахування відрізків:

1) відрізки з початком у точці A, розташовані праворуч від неї:

$$AB,\ AC,\ AD, AE;$$

2) відрізки з початком у точці B, розташовані праворуч від неї:

$$BC,\ BD,\ BE;$$

3) відрізки з початком у точці C, розташовані праворуч від неї:

$$CD, CE;$$

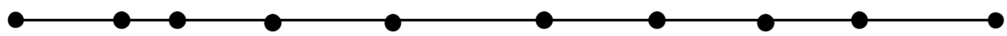
4) відрізки з початком у точці D, розташовані праворуч від неї:

$$DE.$$

Відповідь: 10.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

! Якою буде відповідь, якщо на прямій зафіксувати 10 точок?



! Якою буде відповідь, якщо на прямій зафіксувати 20 точок?

! Якою буде відповідь, якщо на прямій зафіксувати n точок ? (де n – довільне натуральне число)

А чи звертали Ви увагу? Що:

$$1+2=3=(2\cdot 3):2;$$
$$1+2+3=6=(3\cdot 4):2;$$
$$1+2+3+4=10=(4\cdot 5):2;$$
$$1+2+3+4+5=15=(5\cdot 6):2;$$
$$1+2+3+4+5+6=21=(6\cdot 7):2;$$
$$1+2+3+4+5+6+7=28=(7\cdot 8):2;$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8=36=(8\cdot 9):2;$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45=(9\cdot 10):2;$$
$$\ldots$$
$$1+2+3+4+5+\ldots+(n-1)+n=(n\cdot(n+1)):2.$$

Задача 3

Розв'язання

1) В першу чергу з'ясуємо питання щодо найменшої кількості цифр у запису шуканого $n-$значного натурального числа.

Очевидно, що найбільша сума цифр $(n+1)-$значного числа становить $(n+1)\cdot 9$ та є більшою за найбільшу суму цифр $(n\cdot 9)$ $n-$значного числа при будь якому натуральному n.

Оскільки серед усіх 11-значних чисел найбільшу суму цифр (**99**) має саме число 99 999 999 999, то шукане число (із сумою цифр **101**) не може бути $n-$значним числом при жодному натуральному n від 1 до 11 включно та є більшим за число 99 999 999 999.

Серед усіх 12-значних чисел найбільшу суму цифр (**108**) має число 999 999 999 999. Замінивши останню цифру цього числа на цифру «2», одержимо число 999 999 999 992, сума цифр якого становить **101**.

Таким чином, шукане натуральне число є 12-значним числом, яке не перебільшує число 999 999 999 992.

2) Доведемо, що серед 12-значних чисел найменшим числом, сума цифр якого становить 101, є саме число 299 999 999 999.

Серед 12-значних чисел, які починаються цифрою 1, саме число 199 999 999 999 має найбільшу суму цифр, яка становить лише **100**. І тому шукане 12-значне число не може починатися цифрою 1.

Очевидно, що довільне 12-значне число, яке починається цифрою 3, 4, 5, 6, 7, 8 або 9, є більшим за число 299 999 999 999. Звідки й випливає, що шукане 12-значне число може починатися лише цифрою 2.

Якщо в 12-значному числі 299 999 999 999 хоча б одну з цифр «9» замінити меншою цифрою, то сума цифр одержаного числа буде меншою від числа 101 принаймні на 1. Звідки й випливає, що шуканим натуральним числом є саме число 299 999 999 999.

Відповідь: 299999999999.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

! Знайти найбільше та найменше п'ятицифрові числа, у яких сума цифр дорівнює 10, якщо:

а) цифри можуть повторюватися; б) цифри не повторюються.

! Знайти найменше шестицифрове число, усі цифри в записі якого є різними, а сума його цифр становить 18.

Задача 5

Софія та Марія мешкають в одному багатоповерховому будинку. На кожному поверсі в усіх під'їздах розташовано по 4 квартири. Софія мешкає на 5 поверсі у квартирі №83, а Марія – на 3 поверсі у квартирі №169. Скільки поверхів у цьому будинку?

Розв'язання

1 спосіб

1) Нехай n – число поверхів багатоповерхівки, в якій мешкають Софія та Марія. Оскільки на кожному поверсі по 4 квартири, то в кожному під'їзді $4n$ квартир.

2) Оскільки Софія мешкає на 5 поверсі у квартирі №83, то номер квартири з найбільшим номером у попередньому під'їзді становить 64.

3) Оскільки Марія мешкає на 3 поверсі у квартирі №169, то номер квартири з найбільшим номером у попередньому під'їзді становить 160.

4) Оскільки в кожному під'їзді $4n$ квартир, то число $4n$ повинно бути спільним дільником чисел 64 та 160, або, що теж саме, число n повинно бути спільним дільником чисел 64:4 та 160:4. Тобто, n – спільний дільник чисел 16 та 40. Очевидно, що спільними дільниками цих чисел є виключно числа: 1; 2; 4; 8.

5) Оскільки за умовою в багатоповерхівці точно є 5 поверх, то $n \geq 5$ і тому шукане n може бути рівним лише числу 8.

2 спосіб

На кожному поверсі в усіх під'їздах розташовано по 4 квартири, тому розглянемо ділення чисел 83 і 169 на 4 з остачею:

$$83 = 4 \cdot 20 + 3, \quad 169 = 4 \cdot 42 + 1.$$

Якщо пронумерувати поверхи без урахування ділення на під'їзди, то можна вважати, що Софія мешкає на 21 поверсі, а Марія – на 43.

Знайдену кількість поверхів Софії можна «поділити» на під'їзди так, щоб вона потрапила саме на 5 поверх лише такими способами:

$$21 = 16 \cdot 1 + 5 \qquad \text{або} \quad 21 = 8 \cdot 2 + 5.$$

Інші варіанти $\left(21 = \underline{4} \cdot 4 + 5,\ \ 21 = \underline{2} \cdot 8 + 5,\ \ 21 = \underline{1} \cdot 16 + 5\right)$ можливі якщо кількість поверхів менша за 5, що суперечить умові задачі. Тобто будинок є або 8-поверховим, або 16-поверховим.

Якщо будинок 16-поверховий, то Марія мешкала б на 11 поверсі: $43 = 16 \cdot 2 + 11$, що суперечить умові. Якщо ж будинок 8-поверховий, то $43 = 8 \cdot 5 + 3$ і Марія мешкає на 3 поверсі у 6 під'їзді.

Відповідь: 8 поверхів.

Задача 2

У шухляді знаходяться 13 червоних, 9 білих та 5 чорних кульок. Яку найменшу кількість кульок (із зав'язаними очима) необхідно вилучити із шухляди, щоб серед них гарантовано виявилося 6 кульок однакового кольору? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання

1 спосіб

Нехай k – найменша кількість кульок, яку необхідно витягнути, щоб серед них *гарантовано* було 6 кульок одного кольору.

1) Розглянемо **двоїсту задачу**, а саме з'ясуємо:

яку найбільшу можливу кількість M з наявного числа кульок кожного кольору можна витягнути з мішка, щоб серед них не було 6-ти кульок одного кольору.

Тоді, очевидно, що розв'язком даної задачі буде $k = M + 1$.

2) За принципом Діріхле[4] серед $(3 \cdot 5 + 1) = 16$ кульок (3-ох можливих кольорів) обов'язково знайдеться 6 кульок одного кольору. Тому для сформульованої двоїстої задачі *з «необмеженою» кількістю кульок кожного з 3 кольорів* розв'язком **було би** число

$$15 = 5_{червоних} + 5_{білих} + 5_{чорних}.$$

В нашому випадку всього 27 кульок, з яких 13 червоних, 9 білих та 5 чорних кульок. Тому набір $5_{червоних} + 5_{білих} + 5_{чорних}$ є реалізованим. Звідки

$$M = 5_{червоних} + 5_{білих} + 5_{чорних} = 15.$$

Таким чином

$$k = M + 1 = 5_{червоних} + 5_{білих} + 5_{чорних} + \boxed{1}_{з\ решти} = 16.$$

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

! Нехай a' – найменше з чисел a і $(f-1)$, b' – найменше з чисел b і $(f-1)$, c' – найменше з чисел c і $(f-1)$. Доведіть, що $k = (a' + b' + c' + 1)$ – найменша кількість кульок, яку необхідно витягнути із шухляди з a червоними, b білими та c чорними кульками, щоб серед них гарантовано було f кульок одного кольору, де f – натуральне число, яке більше за 1 та не перевищує найбільше з чисел a, b, c.

---

[4] **Принцип Діріхле** є однією з форм «методу від супротивного». Цей принцип стверджує, що: *«якщо множину з* **N** *елементів розбито на* **n** *частин, які не мають спільних елементів, причому* **N>n***, то принаймні в одній з* **n** *частин буде більше одного елемента»*.

2 спосіб

Необхідно довести, що:

А) якщо взяти 16 кульок, то серед них гарантовано знайдеться 6 кульок одного кольору;

Б) число 16 – найменше число, яке має властивість А).

Доведення.

1) Доведемо, що серед 16 кульок гарантовано знайдеться 6 кульок одного кольору.

Серед 16 кульок не більше 5 чорних кульок, а тому, не менше 11 червоних та білих кульок.

Якщо 11 кульок розбити на дві групи – червоні та білі, – то одна з груп за принципом Діріхле буде містити не менше 6 кульок (оскільки припустивши обернене, одержали би протиріччя – що їх менше ніж 11).

2) Для того щоб довести, що це число (16) є мінімальним, необхідно показати, що для меншого властивість **А)** може і не виконуватися. А для останнього досить навести принаймні один приклад (реалізації – підтвердження зазначеному).

Дійсно: якщо обрати 15 кульок, то серед них може виявитися 5 червоних, 5 білих та 5 чорних кульок. Тобто, серед них не виявиться 6 кульок одного кольору.

Зауважимо, що наведений спосіб розв'язання передбачає (в певному сенсі) «знання відповіді», тобто спочатку необхідно висунути **гіпотезу** про мінімальне число кульок і лише потім провести доведення тверджень А) і Б). Тому вкрай важливим навчитись / привчитись спрямовувати свої міркування в бік висунення гіпотез. Для цього можна спробувати набрати найменш можливу кількість кульок, серед яких гарантовано не було би 6-ти одного кольору, тобто, щоб властивість А) не виконувалася.

Зрозуміло, що число кульок кожного кольору необхідно обрати *найбільш можливим*, але меншим за 6. Тоді очевидно, що матимемо набір точно з 15 кульок (що й доводить мінімальність числа 16).

Ну і на сам кінець, якщо до такого набору (з 15 кульок) додати кульку певного кольору, то кульок саме цього кольору і стане 6.

Відповідь: 16.

Задача 4

У Михайлика є лінійка, на шкалі якої позначено лише 0 см, 5 см і 13 см (рис. нижче). Як, користуючись цією лінійкою, він зможе побудувати відрізок завдовжки: 1) 3 см; 2) 1 см? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання

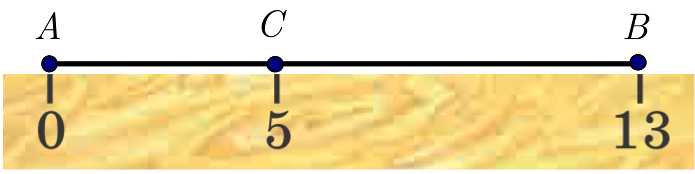
I. Побудуємо відрізок завдовжки 3 см.

1) За допомогою лінійки проведемо відрізок з кінцями у точках A і B та відмітимо внутрішню його точку C так, щоб:

точка A відповідала позначці «0» на лінійці,

точка B – позначці «13», а

точка C – позначці «5».

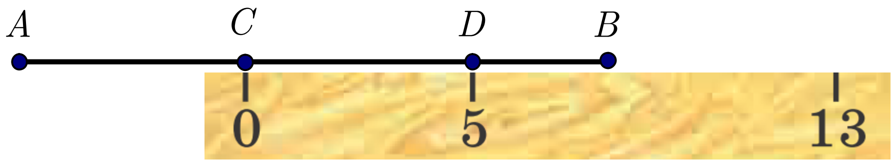


Тоді очевидно, що довжини наступних відрізків становлять $AB = 13$ см, $AC = 5$ см, $CB = 8$ см.

2) На промені CB від початкової точки C відкладемо відрізок CD завдовжки 5 см. Для цього розташуємо (прикладемо) лінійку так, щоб

точка C відповідала позначці «0» на лінійці, а

точка D – позначці «5».



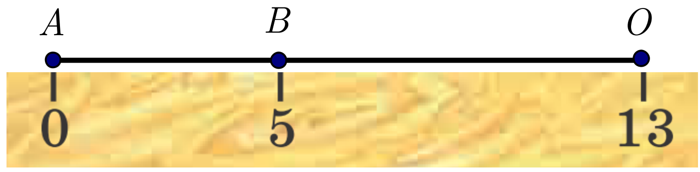
Оскільки $CB = 8$ см (за побудовою в 1) пункті), а $CD = 5$ см, то довжина відрізка DB становить

$$DB = CB - CD = 8 - 5 = 3 \text{ см.}$$

Зауважимо, що всі зазначені побудови слід виконувати на <u>одному</u> рисунку. Використання *різних* рисунків (в наведених авторами способах розв'язання) для кожного кроку розв'язання першої та другої підзадач покликане забезпечити більш свідоме розуміння та відокремлення послідовних кроків розв'язання задачі на побудову.

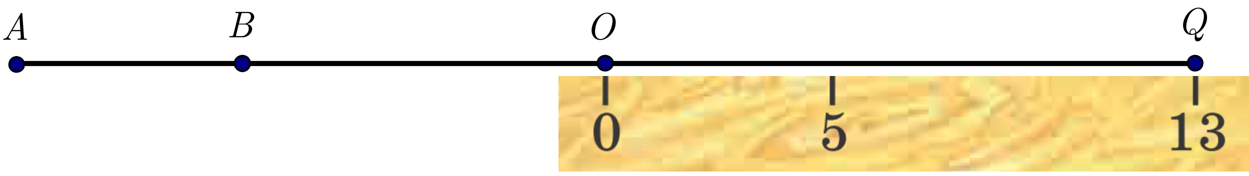
II. Побудуємо відрізок завдовжки 1 см.

1) Проведемо відрізок AO та відмітимо на ньому точку B так, як показано на рисунку нижче



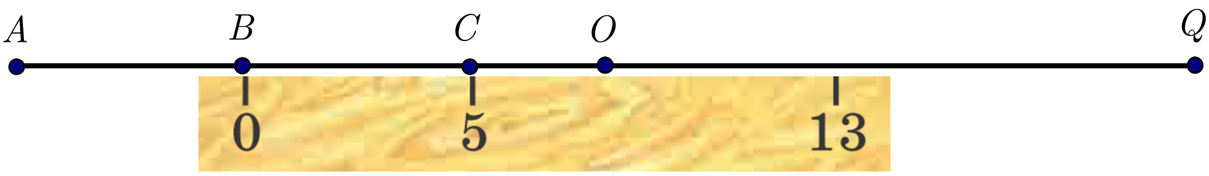
Тоді $AO = 13$ см, $AB = 5$ см, а $BO = 8$ см.

2) Проведемо відрізок OQ так, як показано на рисунку нижче



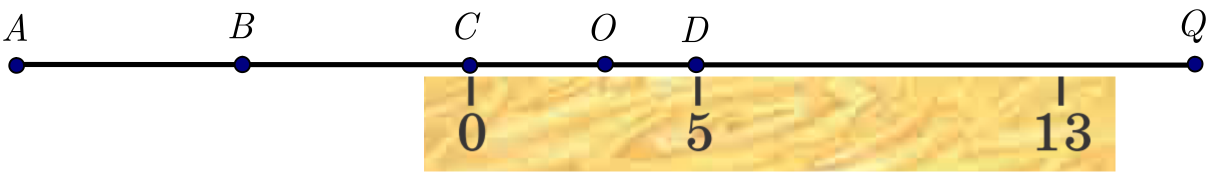
Тоді $AQ = AO + OQ = 26$ см, $BQ = BO + OQ = 21$ см.

3) Проведемо відрізок BC так, як показано на рисунку нижче



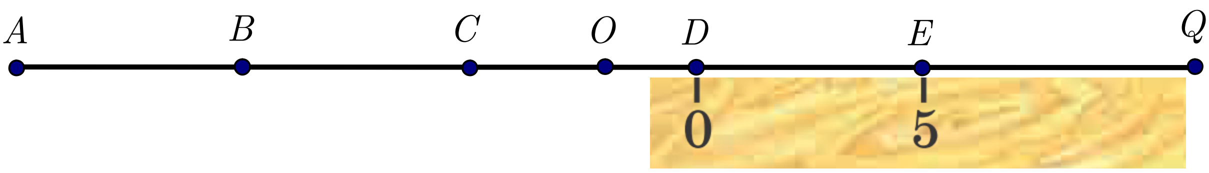
Тоді $BC = 5$ см, $CO = 3$ см, $CQ = CO + OQ = 16$ см.

4) Проведемо відрізок CD так, як показано на рисунку нижче



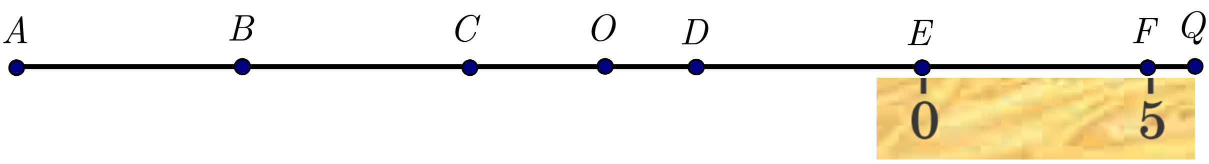
Тоді $CD = 5$ см, $OD = CD - CO = 2$ см, $DQ = OQ - OD = 11$ см.

5) Проведемо відрізок DE так, як показано на рисунку нижче



Тоді $DE = 5$ см, $EQ = DQ - DE = 6$ см.

6) Проведемо відрізок EF так, як показано на рисунку нижче

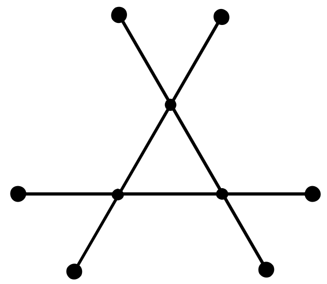


Тоді $EF = 5$ см, $FQ = EQ - EF = 1$ см.

6 клас

Задача 1

Скільки відрізків зображено на рисунку (нижче)? Відповідь обґрунтуйте.



Розв'язання

Для зручності введемо позначення так, як показано на рис. 6.1.1.

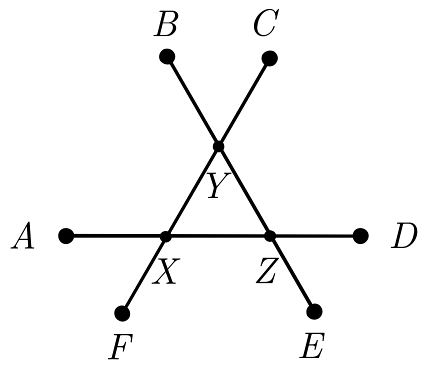


Рис. 6.1.1

Усі відрізки, які зображено на рисунку 6.1.1, перелічимо за наступним принципом, а саме:

1) відрізки, між кінцями яких немає ***жодної*** з позначених точок:

$$AX,\ XZ,\ ZD,\ BY,\ YZ,\ ZE,\ CY,\ YX,\ XF;$$

2) відрізки, між кінцями яких ***точно одна*** з позначених точок:

$$AZ,\ XD,\ BZ,\ YE,\ CX,\ YF;$$

3) відрізки, між кінцями яких ***точно дві*** з позначених точок:

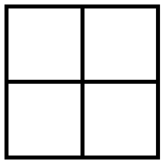
$$AD,\ BE,\ CF.$$

Таким чином, на рисунку 6.1.1 (а тому й на даному рисунку) зображено точно $(9+6+3)=18$ відрізків.

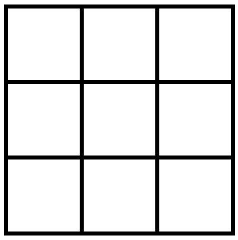
Відповідь: 18.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

?! Скільки відрізків зображено на рисунку (нижче)?



?! Скільки відрізків зображено на рисунку (нижче)?



Задача 2

Для учнів класу приготували однакові подарунки. В усіх подарунках було разом 588 цукерок, 140 яблук і 252 горіхи. Скільки учнів у класі, якщо їх більше, ніж 20?

Розв'язання

1) Нехай n – число учнів у класі; оскільки всі подарунки однакові, то n є спільним дільником для чисел 588, 140 та 252; звідки n – дільник числа $НСД(588;140;252)$;

2) $588 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^2$;

3) $140 = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$;

4) $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1$;

5) $НСД(588;140;252) = 2^2 \cdot 7^1 = 28$.

6) оскільки n – дільник числа 28, то $x \in \{1;2;4;7;14;28\}$; а з того що число учнів у класі більше ніж 20, маємо що $n = 28$.

Відповідь: 28.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

?! Яку найбільшу кількість однакових подарунків можна скласти з 320 горіхів, 240 цукерок і 200 пряників? Скільки цукерок, горіхів й пряників буде в кожному подарунку?

Задача 3

У числі 7******1 замість зірочок поставити такі цифри, щоб сума будь-яких сусідніх трьох цифр становила 11.

Розв'язання

1) Оскільки сума будь-яких трьох сусідніх цифр становить 11, то сума 2-ої і 3-ої цифр становить 4. І тому **4-та** цифра є цифрою 7.

$$A=\underbrace{\boxed{7}\boxed{}\boxed{}}_{11}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{1}\Rightarrow A=\boxed{7}\underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{4}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{1}\Rightarrow A=\boxed{7}\underbrace{\underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{4}\boxed{}}_{11}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{1}\Rightarrow$$

$$A=\boxed{7}\boxed{}\boxed{}\boxed{7}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{1}.$$

2) Оскільки сума будь-яких трьох сусідніх цифр становить 11, то сума 5-ої і 6-ої цифр становить 4. І тому **7-ма** цифра є цифрою 7.

$$A=\boxed{7}\boxed{}\boxed{}\underbrace{\boxed{7}\boxed{}\boxed{}}_{11}\boxed{}\boxed{1}\Rightarrow A=\boxed{7}\boxed{}\boxed{}\boxed{7}\underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{4}\boxed{}\boxed{1}\Rightarrow A=\boxed{7}\boxed{}\boxed{}\boxed{7}\underbrace{\underbrace{\boxed{}\boxed{}}_{4}\boxed{}}_{11}\boxed{1}\Rightarrow$$

$$A=\boxed{7}\boxed{}\boxed{}\boxed{7}\boxed{}\boxed{}\boxed{7}\boxed{1}.$$

3) Оскільки сума будь-яких трьох сусідніх цифр становить 11, а сума 7-ої і 8-ої цифр становить 8, то **6-та** цифра є цифрою 3.

$$A=\boxed{7}\boxed{}\boxed{}\boxed{7}\boxed{}\underbrace{\boxed{}\boxed{7}\boxed{1}}_{11}\Rightarrow A=\boxed{7}\boxed{}\boxed{}\boxed{7}\boxed{}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{1}.$$

4) Аналогічно, оскільки сума:

6-ої і 7-ої цифр становить 10, то **5-та** цифра є цифрою 1 –

$$A=\boxed{7}\boxed{}\boxed{}\boxed{7}\underbrace{\boxed{}\boxed{3}\boxed{7}}_{11}\boxed{1}\Rightarrow A=\boxed{7}\boxed{}\boxed{}\boxed{7}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{1};$$

4-ої і 5-ої цифр становить 8, то **3-тя** цифра є цифрою 3 –

$$A=\boxed{7}\boxed{}\underbrace{\boxed{}\boxed{7}\boxed{1}}_{11}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{1}\Rightarrow A=\boxed{7}\boxed{}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{1};$$

3-ої і 4-ої цифр становить 10, то **2-га** цифра є цифрою 3 –

$$A=\boxed{7}\underbrace{\boxed{}\boxed{3}\boxed{7}}_{11}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{1}\Rightarrow A=\boxed{7}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{1}.$$

Таким чином, шукане число є числом 71371371.

Відповідь: 71371371.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

?! У числі $\boxed{7}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{9}$ замінити зірочки числами так, щоб сума будь-яких трьох сусідніх чисел дорівнювала 20.

Задача 4

Майстер виготовляє одну деталь за 5 хвилин, а його учень таку ж деталь – за 9 хвилин. Працюючи разом, вони виготовили 42 деталі. Скільки деталей (із 42 зазначених) виготовив майстер?

Розв'язання

1 спосіб

1) $HCK(5;9) = 45$;

2) За 45 хвилин майстер виготовить 45:5=9 деталей, а його учень – 45:9=5 деталей; разом за 45 хвилин вини виготовлять 14 деталей;

3) Оскільки 42:14=3, то для виготовлення 42 деталей майстер з учнем витратили 45*3 хвилин; за цей час майстер виготовив 9*3=27 деталей.

2 спосіб

1) Оскільки майстер виготовляє одну деталь за 5 хвилин, а його учень таку ж деталь – за 9 хвилин, то їх продуктивності праці становлять $\frac{1}{5}$ та $\frac{1}{9}$ відповідно.

І тому, працюючи разом, сумісна продуктивність праці майстра та його учня становить $\frac{1}{5}+\frac{1}{9}=\frac{14}{45}$.

2) Працюючи разом майстер і учень виготовили 42 деталі, і тому витратили час $42:\frac{14}{45}=42\cdot\frac{45}{14}=3\cdot 45=135$ хв.

3) За 135 хвилин майстер, продуктивність праці якого $\frac{1}{5}$, виготовив $135\cdot\frac{1}{5}=27$ деталей.

Моделі роботи робітників	V – **об'єм роботи** (число деталей за відповідний час роботи)	P – **продуктивність** (число виготовлених деталей за 1 хвилину)	T – **час роботи** (у хвилинах)
Лише майстер	**1**	$\frac{1}{5}$	**5**
Лише учень	**1**	$\frac{1}{9}$	**9**
Майстер і учень разом	**42**	$\frac{1}{5}+\frac{1}{9}=\frac{14}{45}$	$42:\frac{14}{45}=42\cdot\frac{45}{14}=$ $=3\cdot 45=135$
Майстер	$135\cdot\frac{1}{5}=27$	$\frac{1}{5}$	**135**

Відповідь: 27.

Задача 5

Знайти всі двозначні числа, які діляться на 5 без остачі, а при діленні на 2, на 3 та на 4 дають в остачі 1.

Розв'язання

1 спосіб

Нехай x – шукане число, яке ділиться на 5 без остачі, а при діленні на 2, на 3 та на 4 дає в остачі 1.

Тоді число $y=\left(x-1\right)$ ділиться на 2, на 3 та на 4 без остачі. Тобто, число $y=\left(x-1\right)$ є кратним до числа $HCK\left(2;3;4\right)=12$. І тому всі двозначні числа, які діляться на 2, на 3 та на 4 без остачі мають вид:

12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96.

А всі двозначні числа, які більші за них на 1 мають вид:

13; 25; 37; 49; 61; 73; 85; 97.

Серед них є лише 2 числа, які діляться на 5 без остачі – це числа 25 і 85.

2 спосіб

1) Не важко переконатися в тому, що всі двозначні числа, які діляться на 5 без остачі, мають вид:

10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95.

2) Серед наведених чисел при діленні на 2 в остачі дають 1 лише непарні числа:

15; 25; 35; 45; 55; 65; 75; 85; 95.

3) Серед них при діленні на 4 в остачі дають 1 лише наступні:

25; 45; 65; 85.

4) Серед чотирьох останніх при діленні на 3 в остачі дають 1 лише числа

25 і 85.

Відповідь: $25;85$.

7 клас

Задача 1

Скільки кутів менших за розгорнутий (градусна міра кожного з яких менша за градусну міру розгорнутого кута) зображено на рисунку 7.1.1 (нижче)? Відповідь обґрунтуйте.

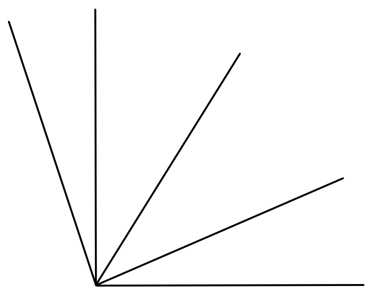


Рис. 7.1.1

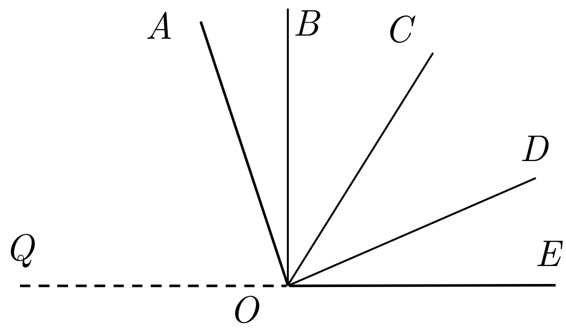


Рис. 7.1.2

Розв'язання

Для зручності введемо позначення так, як показано на рис. 7.1.2.

Оскільки промені OB, OC та OD проходять між сторонами (OA і OE) кута $\angle AOE$, то (*як наслідок з основної властивості (вимірювання кутів) величини кута / аксіоми вимірювання кутів*) кут $\angle AOE$ має найбільшу міру з усіх кутів, зображених на рисунку.

Побудуємо промінь OQ, доповняльний до променя OE. Тоді (*за визначенням*) $\angle QOE$ – розгорнутий кут, градусна міра якого (*за визначенням / аксіомою вимірювання кутів*) становить 180^0.

Оскільки промінь OA проходить між сторонами (OQ і OE) розгорнутого $\angle QOE$, то *як наслідок з основної властивості (вимірювання кутів) величини кута / аксіоми вимірювання кутів,* (градусна) міра найбільшого кута $\angle AOE$ менша за (градусну) міру розгорнутого кута. Звідки й випливає, що кожен з кутів, зображених на рисунку, є меншим за розгорнутий.

Усі кути, які зображено на рис. 7.1.2, перелічимо за наступним принципом, а саме: ***кути, між сторонами яких ...***

1) не проходить ***жодного*** променя: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$;
2) проходить точно ***один*** промінь: $\angle AOC$, $\angle BOD$, $\angle COE$;
3) проходить точно ***два*** променя: $\angle AOD$, $\angle BOE$;
4) проходить точно ***три*** променя: $\angle AOE$.

Відповідь: 10.

Задача 2

Ціну товару спочатку знизили на 20%, а потім нову ціну ще раз знизили на 15%. На скільки відсотків було знижено початкову ціну товару?

Розв'язання

1 спосіб

Нехай x – початкова ціна товару. Тоді

1) після (першого) її зниження на 20% нова ціна товару стала становити $x-\frac{x}{100}\cdot 20=x\left(1-\frac{20}{100}\right)=x\left(1-0,2\right)=0,8\cdot x$.

2) Після (другого) її зниження на 15% остаточна ціна товару стала становити

$$0,8x-\frac{0,8x}{100}\cdot 15=0,8x\left(1-\frac{15}{100}\right)=0,8x\left(1-0,15\right)=0,8x\cdot 0,85=0,68\cdot x.$$

3) Оскільки $0,68\cdot x=x\cdot\left(1-0,32\right)=x\cdot\left(1-\frac{32}{100}\right)=x-\frac{x}{100}\cdot 32$,

то остаточна (після двох знижень) ціна товару – $0,68\cdot x$ – одержана з початкової x в результаті зниження на 32%.

2 спосіб

1) Нехай A – початкова ціна товару, а x – «знижка» у грошових одиницях, яка відповідає зниженню на 20%. Тоді має місце пропорція

$$\begin{array}{ccc} A & \sim & 100\% \\ x & \sim & 20\% \end{array}, \text{ звідки } x=\frac{20\cdot A}{100}=\frac{1}{5}A.$$

І тому після зниження на 20% нова ціна B товару стала становити

$$B=A-\frac{1}{5}A=\frac{4}{5}A.$$

2) Нехай, далі, y – «знижка» у грошових одиницях, яка відповідає зниженню (проміжної ціни) $B=\frac{4}{5}A$ на 15%. Тоді має місце пропорція

$$\begin{array}{ccc} B & \sim & 100\% \\ y & \sim & 15\% \end{array}, \text{ звідки } y=\frac{15\cdot B}{100}=\frac{3}{20}B.$$

І тому після зниження на 15% остаточна ціна C товару стала становити

$$C=B-\frac{3}{20}B=\frac{17}{20}B.$$

Оскільки $B=\frac{4}{5}A$, то маємо що $C=\frac{17}{20}B=\frac{17}{20}\cdot\frac{4}{5}A=\frac{17}{25}A$.

3) Очевидно, що у грошових одиницях різниця початкової ціни A товару та остаточної її ціни C становить

$$A - C = A - \frac{17}{25}A = \frac{8}{25}A = \frac{32}{100}A.$$

Нехай p – відсоток, який становить різниця $A - C = \dfrac{32}{100}A$ від початкової ціни A. Тоді

$$p = \frac{A - C}{A} \cdot 100 = \frac{\frac{32}{100}A}{A} \cdot 100 = 32.$$

Таким чином (в результаті двох послідовних знижень ціни товару на 20% і 15%) початкову ціну товару було знижено на 32%.

Відповідь: 32%.

Задача 3

Якою цифрою закінчується значення (числового) виразу $11^{2021} + 14^{2020} - 13^{2019}$?

Розв'язання

1 спосіб

1) Не важко переконатися, що при початкових натуральних показниках:

– степені з основою **11** закінчуються цифрою $\boxed{1}$:

$$11^1 = 1\boxed{1},\quad 11^2 = 12\boxed{1},\ 11^3 = 133\boxed{1},\qquad 11^4 = 1464\boxed{1};$$

– степені з основою **14** закінчуються цифрою $\boxed{4}$ або $\boxed{6}$:

$$14^1 = 1\boxed{4},\quad 14^2 = 19\boxed{6},\ 14^3 = 274\boxed{4},\qquad 11^4 = 3841\boxed{6},$$

причому: $\boxed{4}$ – якщо показник непарний, $\boxed{6}$ – якщо непарний.

Оскільки 11^{2021} закінчується цифрою $\boxed{1}$, а число 14^{2020} – цифрою $\boxed{6}$, то їх сума $\left(11^{2021} + 14^{2020}\right)$ закінчується цифрою $\boxed{7}$.

2) Подамо від'ємник 13^{2019} у вигляді $13^{2019} = 13^{2016} \cdot 13^3 = \left(13^4\right)^{504} \cdot 13^3$.

Оскільки число $13^4 = 28561$ закінчується цифрою $\boxed{1}$, то його степінь $\left(13^4\right)^{504}$ також закінчується цифрою $\boxed{1}$. Очевидно, що $13^3 = 2197$ закінчується цифрою $\boxed{7}$. А тому добуток $\left(13^4\right)^{504} \cdot 13^3$ закінчується цифрою $\boxed{7}$.

Таким чином, оскільки і сума $\left(11^{2021} + 14^{2020}\right)$, і від'ємник 13^{2019} закінчуються однаковою цифрою $\boxed{7}$, то їх різниця закінчується «нулем».

2 спосіб («на виріст»)

1) Очевидно, що якщо від натурального $n-$значного ($n \geq 2$) числа M відняти останню його цифру m, то одержане число $(M-m)$ буде закінчуватися нулем і тому (націло) ділитися на 10. Звідки маємо, що кожне натуральне $n-$значне ($n \geq 2$) число M з останньою його цифру m, можна подати у вигляді

$$M = P \cdot 10 + m, \qquad (7.3.1)$$

де $P = (M-m):10$ – відповідне $(n-1)-$значне натуральне число.

Зауваження 7.3.1. Подання натурального числа M у вигляді (7.3.1) є наслідком з «теореми про ділення з остачею», згідно з якою

Для будь-яких натуральних чисел a і b існує єдина пара невід'ємних цілих чисел q і r, таких що

$$a = q \cdot b + r, \qquad 0 \leq r < b. \qquad (7.3.2)$$

Причому: *число q називають <u>неповною часткою</u>, а число r – <u>остачею</u> від ділення a на b.*

2) Введемо в розгляд функцію $L(M)$, яка кожному натуральному числу M ставить у відповідність (повертає значення) останню його цифру. Тобто, якщо число M подати у вигляді (7.3.1), то

$$L(M) = L(P \cdot 10 + m) = m.$$

Наприклад: $L(5) = 5$; $L(14) = L(1 \cdot 10 + 4) = 4$; $L(321) = L(32 \cdot 10 + 1) = 1$.

Не важко переконатися, що для довільних натуральних чисел a і b мають місце наступні властивості функції L:

$$L(a+b) = L\big(L(a) + L(b)\big), \qquad (7.3.3)$$

$$L(a \cdot b) = L\big(L(a) \cdot L(b)\big). \qquad (7.3.4)$$

3) За допомогою наступної таблиці проілюструємо існуючі залежності між натуральним показником n степеня з основою m, яка є цифрою, та останньою цифрою такого степеня:

$m = m^1$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
m^2	**1**	**4**	**9**	1**6**	2**5**	3**6**	4**9**	6**4**	8**1**
m^3	**1**	**8**	2**7**	6**4**	12**5**	21**6**	34**3**	51**2**	72**9**
m^4	**1**	1**6**	8**1**	25**6**	62**5**	129**6**	240**1**	409**6**	656**1**
m^5	**1**	3**2**	24**3**	102**4**	312**5**	777**6**	1680**7**	3276**8**	5904**9**
m^6	**1**	6**4**	72**9**	409**6**	1562**5**	4665**6**	11764**9**	26214**4**	53144**1**

А саме, для натуральних n і k мають місце рівності:

$$L(0^n) = 0; \qquad L(1^n) = 1; \qquad L(5^n) = 5; \qquad L(6^n) = 6, \qquad (7.3.5)$$

$$L\left(4^n\right)=\begin{cases}4, & n=2k-1\\ 6, & n=2k,\end{cases} \qquad L\left(9^n\right)=\begin{cases}9, & n=2k-1\\ 1, & n=2k,\end{cases} \tag{7.3.6}$$

$$L\left(2^n\right)=\begin{cases}2, & n=4k-3\\ 4, & n=4k-2\\ 8, & n=4k-1\\ 6, & n=4k-1\end{cases} \qquad L\left(3^n\right)=\begin{cases}3, & n=4k-3\\ 9, & n=4k-2\\ 7, & n=4k-1\\ 1, & n=4k-1\end{cases} \tag{7.3.7}$$

$$L\left(7^n\right)=\begin{cases}7, & n=4k-3\\ 9, & n=4k-2\\ 3, & n=4k-1\\ 1, & n=4k-1\end{cases} \qquad L\left(8^n\right)=\begin{cases}8, & n=4k-3\\ 4, & n=4k-2\\ 2, & n=4k-1\\ 6, & n=4k-1\end{cases} \tag{7.3.8}$$

4) Не важко переконатися, що $n-$ий степінь двочлена (натурального числа, поданого у вигляді $M=P\cdot 10+m$) можна подати у вигляді

$$\left(P\cdot 10+m\right)^n = P^n\cdot 10^n + a_1\cdot P^{n-1}\cdot m^1\cdot 10^{n-1} + a_2\cdot P^{n-2}\cdot m^2\cdot 10^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots + a_{n-2}\cdot P^2\cdot m^{n-2}\cdot 10^2 + a_{n-1}\cdot P^1\cdot m^{n-1}\cdot 10^1 + m^n. \tag{7.3.9}$$

Отже, якщо $M=P\cdot 10+m$, де $m\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, $M,P\in N$, то

$$L\left(\left(P\cdot 10+m\right)^n\right)=L\left(m^n\right). \tag{7.3.10}$$

5) З урахуванням співвідношень (7.3.3) – (7.3.10), маємо:

$$L\left(11^{2021}\right)=L\left(\left(10+1\right)^{2021}\right)=L\left(1^{2021}\right)=1;$$

$$L\left(14^{2020}\right)=L\left(\left(14^2\right)^{1010}\right)=L\left(196^{1010}\right)=L\left(\left(19\cdot 10+6\right)^{1010}\right)=L\left(6^{1010}\right)=6;$$

$$L\left(13^{2019}\right)=L\left(13^{2016}\cdot 13^3\right)=L\left(L\left(3^{2016}\right)\cdot L\left(3^3\right)\right)=$$
$$=L\left(L\left(\left(3^4\right)^{504}\right)\cdot L\left(27\right)\right)=L\left(L\left(\left(81\right)^{504}\right)\cdot 7\right)=L\left(L\left(1^{504}\right)\cdot 7\right)=L\left(1\cdot 7\right)=7.$$

Звідки $\quad L\left(11^{2021}+14^{2020}-13^{2019}\right)=$

$$=L\left(L\left(11^{2021}\right)+L\left(14^{2020}\right)-L\left(13^{2019}\right)\right)=L\left(1+6-7\right)=L\left(0\right)=0.$$

Відповідь: 0.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

?! Знайти останню цифру числа:

а) 2^{100}; б) 549^{49}; в) 2019^{2019}; г) $7^{7^7}=7^{\left(7^7\right)}$.

?! Чи ділиться число $47^{30}+39^{50}$ на 10?

?! Доведіть, що серед квадратів довільних п'яти натуральних чисел завжди можна обрати два, сума або різниця яких ділиться на 10.

А чи звертали Ви увагу? Що:

$$(a+b)^0 = \boxed{1}\cdot a^0b^0\text{, де } a+b\neq 0$$

$$(a+b)^1 = \boxed{1}\cdot a^1b^0+\boxed{1}\cdot a^0b^1$$

$$(a+b)^2 = \boxed{1}\cdot a^2b^0+\boxed{2}\cdot a^1b^1+\boxed{1}\cdot a^0b^2$$

$$(a+b)^3 = \boxed{1}\cdot a^3b^0+\boxed{3}\cdot a^2b^1+\boxed{3}\cdot a^1b^2+\boxed{1}\cdot a^0b^3$$

$$(a+b)^4 = \boxed{1}\cdot a^4b^0+\boxed{4}\cdot a^3b^1+\boxed{6}\cdot a^2b^2+\boxed{4}\cdot a^1b^3+\boxed{1}\cdot a^0b^4$$

$$(a+b)^5 = \boxed{1}\cdot a^5b^0+\boxed{5}\cdot a^4b^1+\boxed{10}\cdot a^3b^2+\boxed{10}\cdot a^2b^3+\boxed{5}\cdot a^1b^4+\boxed{1}\cdot a^0b^5$$

1) В першому одночлені – показник степеня з основою a дорівнює показнику n степеня двочлена, а показник степеня з основою b – 0; в останньому одночлені – показник степеня з основою a дорівнює 0, а показник степеня з основою b – показнику n степеня двочлена.

2) Сума показників степенів з основами a і b в кожному одночлені дорівнює відповідному показнику степеня двочлена.

3) В кожному одночлені, починаючи з другого, показник степеня з основою a зменшується на «один», а показник степеня з основою b – збільшується на «один» (у порівнянні з попереднім одночленом).

4) Коефіцієнти (числові множники) *першого* та *останнього* одночленів у кожному із зазначених многочленів дорівнюють по 1.

5) Коефіцієнти одночленів (починаючи з другого до передостаннього включно) можна визначити за допомогою «**Трикутника Паскаля**»

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Відмінністю формул для «степеня різниці» від формул для «степеня суми» є чередування знаків: перший – «+», другий – «–» і т.д.

$$(a-b)^1 = +\boxed{1}\cdot a^1b^0-\boxed{1}\cdot a^0b^1$$

$$(a-b)^2 = +\boxed{1}\cdot a^2b^0-\boxed{2}\cdot a^1b^1+\boxed{1}\cdot a^0b^2$$

$$(a-b)^3 = +\boxed{1}\cdot a^3b^0-\boxed{3}\cdot a^2b^1+\boxed{3}\cdot a^1b^2-\boxed{1}\cdot a^0b^3$$

$$(a-b)^4 = +\boxed{1}\cdot a^4b^0-\boxed{4}\cdot a^3b^1+\boxed{6}\cdot a^2b^2-\boxed{4}\cdot a^1b^3+\boxed{1}\cdot a^0b^4$$

$$(a-b)^5 = +\boxed{1}\cdot a^5b^0-\boxed{5}\cdot a^4b^1+\boxed{10}\cdot a^3b^2-\boxed{10}\cdot a^2b^3+\boxed{5}\cdot a^1b^4-\boxed{1}\cdot a^0b^5$$

А чи знали Ви? Що:

$$
\begin{aligned}
a^1 - b^1 &= (a-b)\\
a^2 - b^2 &= (a-b)\left(a^1b^0 + a^0b^1\right)\\
a^3 - b^3 &= (a-b)\left(a^2b^0 + a^1b^1 + a^0b^2\right)\\
a^4 - b^4 &= (a-b)\left(a^3b^0 + a^2b^1 + a^1b^2 + a^0b^3\right)\\
a^5 - b^5 &= (a-b)\left(a^4b^0 + a^3b^1 + a^2b^2 + a^1b^3 + a^0b^4\right)\\
\ldots & \quad \ldots\\
a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^1 + b^1 &= (a+b)\\
a^3 + b^3 &= (a+b)\left(+a^2b^0 - a^1b^1 + a^0b^2\right)\\
a^5 + b^5 &= (a+b)\left(+a^4b^0 - a^3b^1 + a^2b^2 - a^1b^3 + a^0b^4\right)\\
\ldots & \quad \ldots\\
a^{2n-1} + b^{2n-1} &= (a-b)\left(+a^{2n}b^0 - a^{2n-1}b^1 + a^{2n-2}b^2 - \ldots + a^2b^{2n-2} - a^1b^{2n-1} + a^0b^{2n}\right)
\end{aligned}
$$

Інформація «на виріст» та для старшокласників

Нагадаємо, що добуток натуральних чисел від 1 до n включно називають **факторіалом** натурального числа n та (заради скорочення запису) позначають $n!$, тобто

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!,$$

причому прийнято вважати, що

$$0! = 1.$$

Якщо коефіцієнти одночленів в многочлені, що є $n-$им степенем двочлена $(a+b)$, позначити як $c(n;k)$ (числовий множник одночлена $c(n;k) \cdot a^{n-k}b^k$), де k змінюється від 0 до n включно, то загальну формулу можна подати у вигляді

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^n = \\
&= c(n;0) \cdot a^n b^0 + c(n;1) \cdot a^{n-1}b^1 + c(n;2) \cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + c(n;k) \cdot a^{n-k}b^k + \ldots \\
&\ldots + c(n;n-2) \cdot a^2 b^{n-2} + c(n;n-1) \cdot a^1 b^{n-1} + c(n;n) \cdot a^0 b^n. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Добре відомо, що, крім «Трикутника Паскаля», зазначені коефіцієнти можна обчислювати за формулою

$$c(n;k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},\ 0 \le k \le n \qquad (**)$$

Задача 4

За яких умов рівняння $ax + b = cx + d$ має безліч коренів? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання

Очевидно, що дане рівняння $ax + b = cx + d$ можна подати у вигляді

$$x(a - c) = d - b. \qquad (7.4.1)$$

Розглянемо два можливі випадки: $(a - c) \neq 0$ та $(a - c) = 0$.

1) Нехай $(a - c) \neq 0$. Тоді рівняння (7.4.1) має єдиний корінь

$$x = \frac{d - b}{a - c}.$$

2) Нехай тепер $(a - c) = 0$. Тоді рівняння (7.4.1) набуває вид

$$x \cdot 0 = d - b. \qquad (7.4.2)$$

та можливими є лише два випадки: $d - b = 0$ та $d - b \neq 0$.

2.1) Якщо $d - b = 0$, то рівняння (7.4.2) набуває вид

$$x \cdot 0 = 0, \qquad (7.4.3)$$

кореням якого є будь-яке число.

2.2) Якщо ж $d - b \neq 0$, то жодне число не може бути коренем рівняння (7.4.2).

Таким чином, дане рівняння має безліч коренів лише у випадку, коли одночасно виконуються умови $a - c = 0$ та $d - b = 0$.

Відповідь: $\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}.$

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

?! За яких умов рівняння $ax = b$ не має коренів? Відповідь обґрунтуйте.

?! За яких умов рівняння $\frac{a}{x} = b$ не має коренів? Відповідь обґрунтуйте.

?! За яких умов рівняння $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ не має коренів? Відповідь обґрунтуйте.

?! За яких умов рівняння $\frac{ax + b}{cx + d} = f$ не має коренів? Відповідь обґрунтуйте.

Задача 5

Відновити ребус ВОДА+ВОДА=ЗАВОД (однаковим літерам відповідають однакові цифри, а різними літерам – різні цифри).

Розв'язання

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{cccc} В & О & Д & А \\ В & О & Д & А \end{array} \\
\hline
\begin{array}{ccccc} З & А & В & О & Д \end{array}
\end{array}
$$

З може бути лише одиницею (бо при додаванні в наступний розряд може перейти лише «1»). Оскільки А+А є парним числом, то Д може бути лише цифрою 0, 2, 4, 6 або 8.

Д може бути 0 лише за умов коли А=0 або А=5:
якщо А=0, то Д=0, чого бути не може, бо А і Д – різні цифри;
якщо А=5, то Д=0, О=1, чого бути не може, бо О і З – різні цифри.

Д може бути 2 лише за умов коли А=6:
якщо А=6, то Д=2, О=5, В=0, А=1, чого бути не може, бо суперечить припущенню А=6.

Д може бути 6 лише за умов коли А=3 або А=8:
якщо А=3, то Д=6, О=2, В=5, А=0, чого бути не може, бо суперечить припущенню А=3;
якщо А=8, то Д=6, О=3, В=7, А=4, чого бути не може, бо суперечить припущенню А=8.

Д може бути 8 лише за умов коли А=4 або А=9:
якщо А=4, то Д=8, О=6, В=3, А=7, чого бути не може, бо суперечить припущенню А=4;
якщо А=9, то Д=8, О=7, В=5, А=1, чого бути не може, бо суперечить припущенню А=9.

Таким чином, Д може бути лише 4. Тоді А=2 або А=7:
якщо А=2, то Д=4, О=8, В=6, А=3, чого бути не може, бо суперечить припущенню А=2;
тому А=7, звідки Д=4, О=9, В=8, А=7, З=1.

Відповідь: $8947 + 8947 = 17894$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5.

?! Відновити ребус ВАГОН+ВАГОН=ПОТЯГ (однаковим літерам відповідають однакові цифри, а різними літерам – різні цифри).

8 клас

Задача 1

Скільки трикутників зображено на рисунку 8.1.1 (нижче)? Відповідь обґрунтуйте.

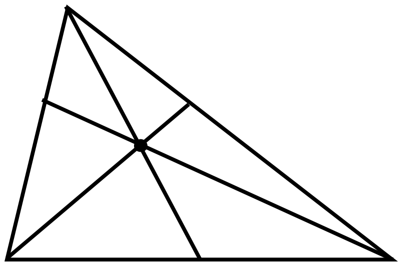


Рис. 8.1.1

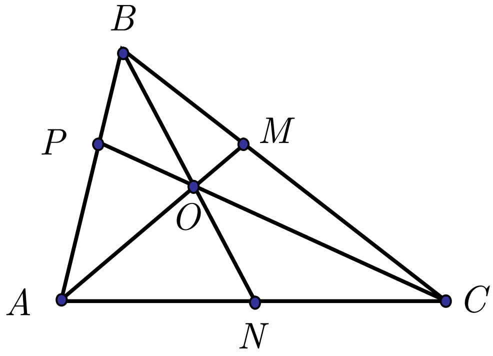


Рис. 8.1.2

Розв'язання

Для зручності введемо позначення так, як показано на рис. 8.1.2.

Усі трикутники, які зображено на рисунку 8.1.2, перелічимо за наступним принципом, а саме:

1) трикутники, внутрішність яких не містить ***жодного*** з відрізків $\{OA;OP;OB;OM;OC;ON\}$:

$$\triangle AOP,\ \triangle POB,\ \triangle BOM,\ \triangle MOC,\ \triangle CON,\ \triangle NOA;$$

2) трикутники, внутрішність яких містить ***точно один*** з відрізків $\{OA;OP;OB;OM;OC;ON\}$:

$$\triangle AOB,\ \triangle BOC,\ \triangle COA;$$

3) трикутники, внутрішність яких містить ***точно два*** з відрізків $\{OA;OP;OB;OM;OC;ON\}$:

$$\triangle AMB,\ \triangle PCB,\ \triangle BNC,\ \triangle MAC,\ \triangle CPA,\ \triangle NBA;$$

4) трикутники, внутрішність яких містить ***точно шість*** з відрізків $\{OA;OP;OB;OM;OC;ON\}$:

$$\triangle ABC.$$

Таким чином, на рисунку 8.1.2 (а тому й на даному рисунку) зображено точно $(9+6+3)=18$ відрізків.

Відповідь: 16.

Задача 2

Розв'язання

1) Оскільки $ABCD$ – квадрат, то $AD = BC$. І тому, з урахуванням умови $AD = BE = EC$, маємо що $\triangle BCE$ – рівносторонній. Звідки випливає, що $\angle BEC = \angle CBE = \angle ECB = 60^0$.

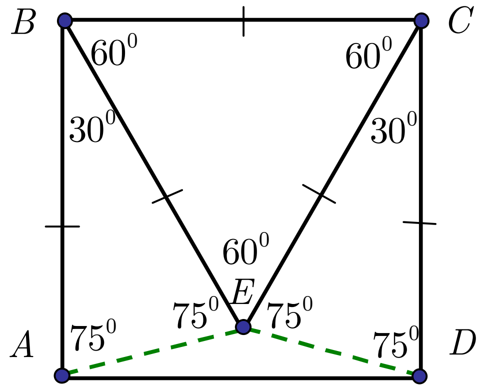


Рис. 8.2.1

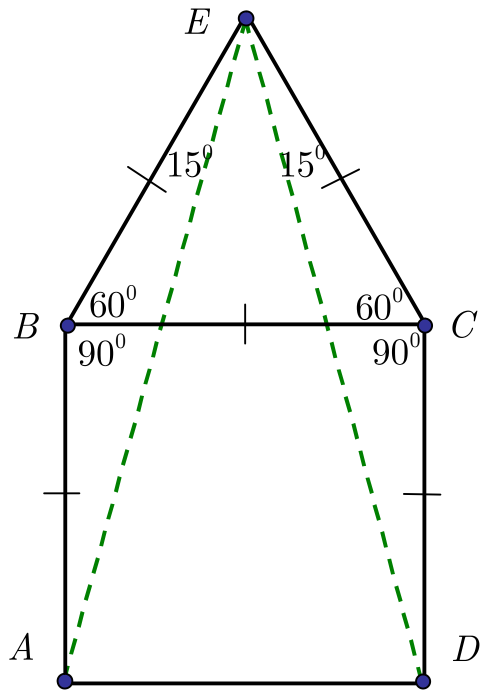


Рис. 8.2.2

2) Існує лише два різних випадки розташування вершини E правильного $\triangle BCE$ відносно прямої BC, а саме, з вершинами A (і D):

– в одній півплощині відносно BC – рис. 8.2.1;

– в різних півплощинах відносно BC – рис. 8.2.2.

3) Знайдемо градусну міру $\angle AED$ в першому випадку.

$\angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = 90^0 - 60^0 = 30^0$. Оскільки $AB = BE$, то кути при основі AE рівнобедреного трикутника ABE становлять по 75^0.

Аналогічно кути при основі ED рівнобедреного $\triangle ECD$ також становлять по 75^0. І тому

$$\angle AED = 360^0 - \angle AEB - \angle BEC - \angle CED = 360^0 - 75^0 - 60^0 - 75^0 = 150^0.$$

4) Знайдемо градусну міру $\angle AED$ в другому випадку.

$\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE = 90^0 + 60^0 = 150^0$. Оскільки $AB = BE$, то кути при основі AE рівнобедреного трикутника ABE становлять по 15^0.

Аналогічно кути при основі ED рівнобедреного $\triangle ECD$ також становлять по 15^0. І тому

$$\angle AED = \angle BEC - \angle BEA - \angle CED = 60^0 - 15^0 - 15^0 = 30^0.$$

Відповідь: 30^0 **або** 150^0.

Задача 3

Розв'язання

1) Нехай $A = \overline{xyz} = x \cdot 100 + y \cdot 10 + z$ – одне з шуканих тризначних чисел. Оскільки запис кожного з них не містить цифру 0, то $x, y, z \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

2) Добре відомо, що число $A = \overline{xyz}$ ділиться на 4 тоді і лише тоді, коли дві його останні цифри є або нулями (чого з урахуванням умови бути не може), або ж утворюють (двозначне) число, що ділиться на 4. Тобто, $A = \overline{xyz}$ ділиться на 4 тоді і лише тоді, коли число $B = \overline{yz}$ ділиться на 4.

3) Всі двозначні числа виду $B = \overline{yz}$, $y, z \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, які діляться на 4, вичерпуються наступними числами:

$$12,\ 16,\ 24,\ 28,\ 32,\ 36,\ 44,\ 48,\ 52,\ 56,\ 64,\ 68,\ 72,\ 76,\ 84,\ 88,\ 92,\ 96. \qquad (8.3.1)$$

Змінивши порядок їх цифр, одержимо наступні числа

$$21,\ 61,\ 42,\ 82,\ 23,\ 63,\ 44,\ 84,\ 25,\ 65,\ 46,\ 86,\ 27,\ 67,\ 48,\ 88,\ 29,\ 69. \qquad (8.3.2)$$

Серед чисел виду (8.3.2) є лише чотири числа, які діляться на 4

$$44,\ 48,\ 84,\ 88. \qquad (8.3.3)$$

Таким чином, кожне з чисел, яке задовольняє умову задачі, можна подати в одному з чотирьох можливих представленнях

$$A_1 = \overline{x44},\quad A_2 = \overline{x48},\quad A_3 = \overline{x84},\quad A_4 = \overline{x88}, \qquad (8.3.4)$$

де $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

4) Числа виду $A_1 = \overline{x44}$ задовольняють умову задачі тоді і тільки тоді, коли кожне з чисел $A_{11} = \overline{4x4}$ та $A_{12} = \overline{44x}$ ділиться на 4, що можливо лише при $x \in \{4,8\}$.

Числа виду $A_2 = \overline{x48}$ задовольняють умову задачі тоді і тільки тоді, коли кожне з чисел $A_{21} = \overline{4x8}$ та $A_{22} = \overline{48x}$ ділиться на 4, що можливо лише при $x \in \{4,8\}$.

Числа виду $A_3 = \overline{x84}$ задовольняють умову задачі тоді і тільки тоді, коли кожне з чисел $A_{31} = \overline{8x4}$ та $A_{32} = \overline{84x}$ ділиться на 4, що можливо лише при $x \in \{4,8\}$.

Числа виду $A_4 = \overline{x88}$ задовольняють умову задачі тоді і тільки тоді, коли кожне з чисел $A_{41} = \overline{8x8}$ та $A_{42} = \overline{88x}$ ділиться на 4, що можливо лише при $x \in \{4,8\}$.

Отже, існує лише 8 шуканих чисел $444; 448; 484; 488; 844; 848; 884; 888$.

Відповідь: 8 чисел.

Задача 4

Розв'язання

1 спосіб

Нехай S – весь шлях (у кілометрах), який проїхав автомобіль.

1) Оскільки автомобіль проїхав першу половину шляху зі швидкістю 60 км/год, то можна ввести позначення

$$S_1 = \frac{S}{2},\ v_1 = 60,\ \text{звідки}\ t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{S}{2} : 60 = \frac{S}{120}.$$

2) Оскільки шлях, що залишився, половину часу автомобіль їхав зі швидкістю 80 км/год, а другу половину часу – зі швидкістю 100 км/год, то можна ввести наступні позначення

$$t_2 = t_3 = x > 0,\quad v_2 = 80,\quad v_3 = 100,$$

звідки маємо, що $S_2 = v_2 \cdot t_2 = 80x,\ S_3 = v_3 \cdot t_3 = 100x.$

Крім того, справджується умова $S_2 + S_3 = \frac{S}{2}$. Звідки одержуємо рівність

$$80x + 100x = \frac{S}{2} \Rightarrow S = 360x.$$

3) З урахуванням введених позначень та останньої рівності, середня швидкість руху автомобіля становить

$$v_{сер} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{\frac{S}{2} + 80x + 100x}{\frac{S}{120} + x + x} = \frac{\frac{360x}{2} + 80x + 100x}{\frac{360x}{120} + x + x} = \frac{360x}{5x} = 72.$$

2 спосіб

Нехай S – весь шлях (у кілометрах), що проїхав автомобіль. Тоді першу половину шляху $\frac{S}{2}$ він проїхав за час $\frac{\frac{S}{2}}{60} = \frac{S}{120}$ год. Якщо t_1 – це час, протягом якого автомобіль їхав із швидкістю 80 км/год, а потім із швидкістю 100 км/год, то він проїхав $80t_1$ км і $100t_1$ км відповідно. За умовою $80t_1 + 100t_1 = \frac{S}{2}$, або $180t_1 = \frac{S}{2}$, звідки $t_1 = \frac{S}{360}$, отже

$$v_{сер} = \frac{S}{\frac{S}{120} + \frac{S}{180}} = \frac{S}{\frac{3S + 2S}{360}} = \frac{S}{\frac{5S}{360}} = \frac{360}{5} = 72\ \text{км/год.}$$

Відповідь: 72 км/год.

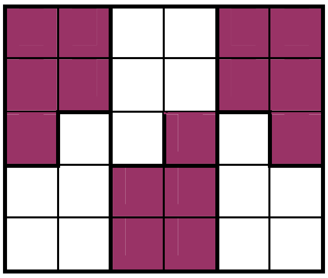
Задача 5

В прямокутнику 5×6 зафарбовано 19 клітинок. Доведіть, що в ньому можна обрати квадрат 2×2, в якому зафарбовано не менше трьох клітинок.

Розв'язання

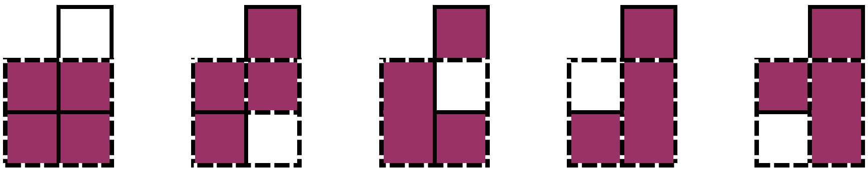
1 спосіб

1) Розріжемо даний прямокутник 5×6 на шість однакових фігур, як показано на рисунку нижче



2) Тоді за принципом Діріхлє, існує принаймні одна (з 6-ти таких 5-клітинкових фігур) фігура F_1, в якій розфарбовано щонайменше 4 клітинки (бо $19 = 6 \times 3 + 1$);

3) При довільному розфарбуванні 4 клітинок у середині фігури F_1 «пунктирний» квадрат 2×2 містить щонайменше 3 зафарбовані клітинки.



2-5 спосіб

1) В прямокутнику 5×6 **<u>виділимо</u>** (зафіксуємо) 6 клітин в один зі способів, зображених на рис. 8.5.1 – 8.5.4, а інші клітини прямокутника розіб'ємо на 6 квадратів 2×2 у відповідний спосіб

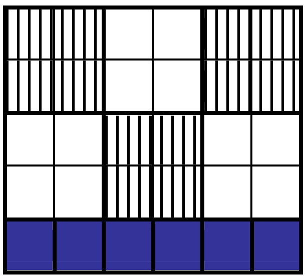


Рис. 8.5.1
до 2 способу доведення

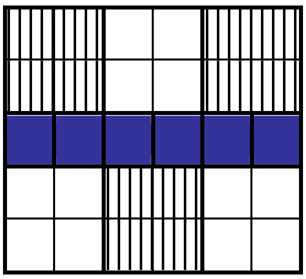


Рис. 8.5.2
до 3 способу доведення

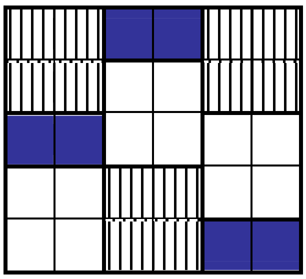


Рис. 8.5.3
до 4 способу доведення

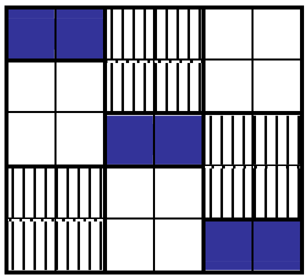
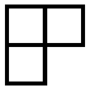


Рис. 8.5.4
до 5 способу доведення

2) Очевидно, що при будь-якому способі розфарбування 19 клітин у прямокутнику 5×6 серед клітин зазначених 6 квадратів 2×2 зафарбованих виявиться щонайменше $19-6=13$ клітин.
3) Оскільки $13=6\times2+1$, то за принципом Діріхлє серед зазначених 6 квадратів 2×2 знайдеться принаймні 1 (один), в якому буде зафарбовано не менше трьох клітинок.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5.

?! (**Задача 9.7 (10) з [29]**). У квадрата 5×5 пофарбовано 16 клітинок. Доведіть, що в ньому знайдеться фігурка виду



всі клітинки якої будуть пофарбованими.

Вказівка:
1) в квадраті 5×5 **виділіть** (зафіксуйте) 3 клітини в один зі способів, зображених на рис. 8.5.5 та 8.5.6, а інші клітини квадрата розбийте на 6 фігур (4 квадрати 2×2 та 2 триклітинкові фігурки наведеного вище виду) у відповідний спосіб.
2) Очевидно, що при будь-якому способі розфарбування 16 клітин у квадраті 5×5 серед клітин зазначених 6 фігур зафарбованих виявиться щонайменше $16-3=13$ клітин.
3) Оскільки $13=6\times2+1$, то за принципом Діріхлє серед зазначених 6 фігурок знайдеться принаймні 1 (одна), в якій буде зафарбовано не менше трьох клітинок.

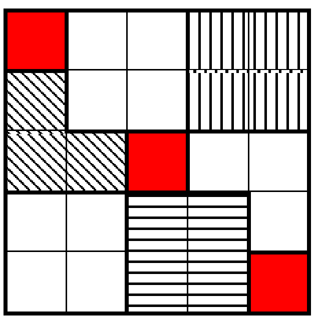


Рис. 8.5.5

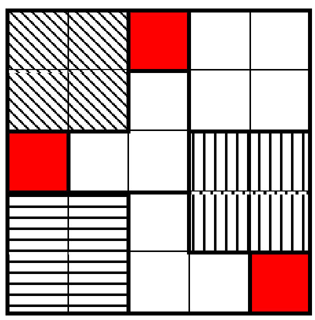


Рис. 8.5.6

! Порівняйте зі способом розв'язання, наведеним до задачі 9.7 (10) в [29].

9 клас

Задача 1

Доведіть нерівність $c^2+5d^2+4cd-4d+4\ge 0$, де c,d – довільні дійсні числа.

Розв'язання

1 спосіб

Перетворимо ліву частину даної нерівності наступним чином

$c^2+5d^2+4cd-4d+4=$

$=c^2+4cd+4d^2+d^2-4d+4=\left(c^2+4cd+4d^2\right)+\left(d^2-4d+4\right)=$

$=\left(c^2+2\cdot c\cdot(2d)+(2d)^2\right)+\left(d^2-2\cdot d\cdot 2+2^2\right)=(c+2d)^2+(d-2)^2$, тобто

$$c^2+5d^2+4cd-4d+4=(c+2d)^2+(d-2)^2. \qquad (9.1.1)$$

Оскільки для довільних дійсних чисел c і d справджуються нерівності

$$(c+2d)^2\ge 0 \text{ і } (d-2)^2\ge 0,$$

то за властивістю (числових) нерівностей має місце нерівність

$$(c+2d)^2+(d-2)^2\ge 0. \qquad (9.1.2)$$

І тому, з урахуванням порівнянь (9.1.1) і (9.1.2), для довільних дійсних чисел c і d має місце доводжувана нерівність

$$c^2+5d^2+4cd-4d+4=(c+2d)^2+(d-2)^2\ge 0.$$

2 спосіб

Введемо заміну $c=x$, $x\in R$ та розглянемо ліву частину доводжуваної нерівності як квадратичну функцію відносно змінної x

$$y=x^2+4dx+5d^2-4d+4=f(x).$$

Оскільки для довільного дійсного d дискримінант

$D=(4d)^2-4\cdot\left(5d^2-4d+4\right)\cdot 1=16d^2-20d^2+16d-16=$

$=-4d^2+16d-16=-4\left(d^2-4d+4\right)=-(d-2)^2\le 0$, тобто,

приймає не додатні значення, то квадратична функція (з додатним коефіцієнтом 1 при старшому її члені) при будь-яких дійсних значеннях аргументу x приймає не від'ємні значення функції $y=f(x)$.

Таким чином при довільних дійсних чисел d і $c=x$ квадратичний тричлен $c^2+4dc+5d^2-4d+4$ $\left(x^2+4dx+5d^2-4d+4\right)$ в лівій частині доводжуваної нерівності приймає не від'ємні значення. Звідки й випливає справедливість даної нерівності при всіх $c,d\in R$.

3 спосіб

Введемо заміну $d = x$, $x \in R$ та розглянемо ліву частину доводжуваної нерівності як квадратичну функцію відносно змінної x

$$y = c^2 + 5x^2 + 4cx - 4x + 4 = 5x^2 + (4c-4)x + c^2 + 4 = g(x).$$

Оскільки для довільного дійсного c дискримінант

$$D = (4c-4)^2 - 4\cdot(c^2+4)\cdot 5 = 16c^2 - 32c + 16 - 20c^2 - 80 =$$

$$= -4c^2 - 32c - 64 = -4(c^2 + 8d + 16) = -(c+2)^2 \le 0, \text{ тобто,}$$

приймає не додатні значення, то квадратична функція (з додатним коефіцієнтом 1 при старшому її члені) при будь-яких дійсних значеннях аргументу x приймає не від'ємні значення функції $y = g(x)$.

Таким чином при довільних дійсних чисел c і $d = x$ квадратичний тричлен $c^2 + 5d^2 + 4cd - 4d + 4$ $(5x^2 + (4c-4)x + c^2 + 4)$ в лівій частині доводжуваної нерівності приймає не від'ємні значення. Звідки й випливає справедливість даної нерівності при всіх $c, d \in R$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

?! Доведіть, що вираз $(a+b)(a+b-14)+49$ набуває невід'ємних значень при будь-яких a і b.

При яких a і b значення виразу $(a+b)(a+b-14)+49$ дорівнює 0?

?! Доведіть, що вираз $(a+b)(a+b-2c)+c^2$ набуває невід'ємних значень при будь-яких a, b і c.

При яких a, b і c значення виразу $(a+b)(a+b-2c)+c^2$ дорівнює 0?

?! Доведіть нерівність $4a^2 + 34b^2 - 12ab - 70b + 49 \ge 0$, де a, b – довільні дійсні числа.

?! Доведіть нерівність $a^4 + 24a^2 + 16 \ge 8a^3 + 32a$, де a – довільне дійсне число.

?! При яких a, b і c рівняння $x^2 + ax + y^2 + bx + c = 0$ має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$?

Задача 2

На гіпотенузі та катетах прямокутного трикутника, як на діаметрах, побудовано півкола так, як показано на рис. 9.2.1. Доведіть, що сума площ замальованих фігур («луночок» Гіппократа) дорівнює площі трикутника.

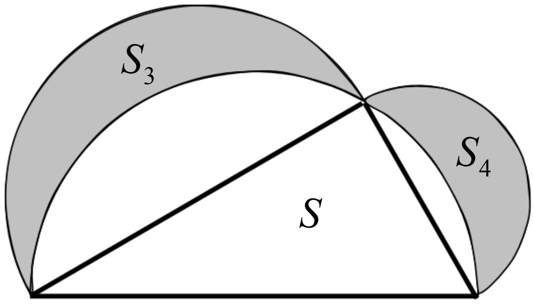


Рис. 9.2.1

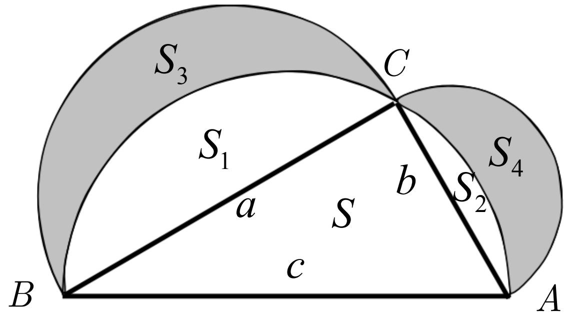


Рис. 9.2.2

Розв'язання

Нехай ABC – прямокутний трикутник з прямим кутом при вершині C; a,b,c – довжини катетів BC, AC та гіпотенузи AB, S – його площа, а S_3 та S_4 – площі його «луночок» Гіппократа (рс. 9.2.2). Тоді, з урахуванням введених позначень, необхідно довести, що $S_3 + S_4 = S$.

1 спосіб

1) Оскільки $BC = a$, то радіус півкола, побудованого на BC як на діаметрі, становить $a/2$. І тому має місце рівність

$$S_1 + S_3 = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi a^2}{8}. \qquad (9.2.1)$$

2) Оскільки $AC = b$, то радіус півкола, побудованого на AC як на діаметрі, становить $b/2$. І тому має місце рівність

$$S_2 + S_4 = \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi b^2}{8}. \qquad (9.2.2)$$

3) Оскільки $AB = c$, то радіус півкола, побудованого на AB як на діаметрі, становить $c/2$. І тому має місце рівність

$$S + S_1 + S_2 = \frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi c^2}{8}. \qquad (9.2.3)$$

4) За теоремою Піфагора має місце рівність $a^2 + b^2 = c^2$, звідки $\frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8}$. І тому, з урахуванням співвідношень (9.2.1) – (9.2.3), одержуємо справедливість доводжуваної рівності

$$S_1 + S_3 + S_2 + S_4 = S + S_1 + S_2 \Leftrightarrow S = S_3 + S_4.$$

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

А чи знали Ви, що:

якщо катети a, b і гіпотенуза c є ***відповідними лінійними елементами трьох подібних фігур*** F_a, F_b і F_c (відповідно), зокрема побудованих на сторонах прямокутного трикутника (рис. 9.2.3),

а S_a, S_b і S_c – площі зазначених подібних фігур F_a, F_b і F_c (відповідно), то має місце рівність

$$S_a + S_b = S_c. \qquad (9.2.4)$$

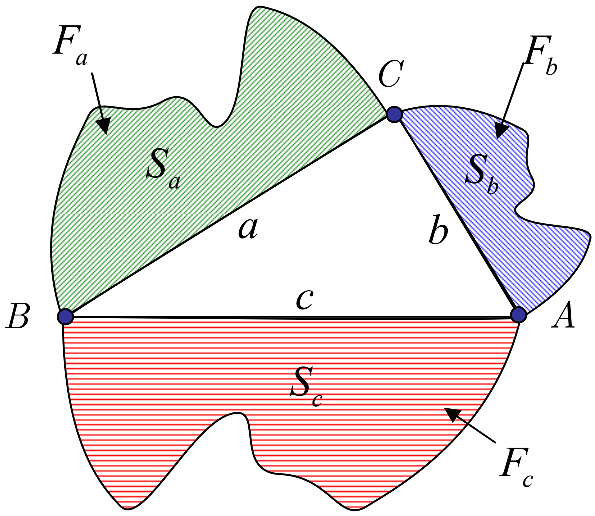


Рис. 9.2.3

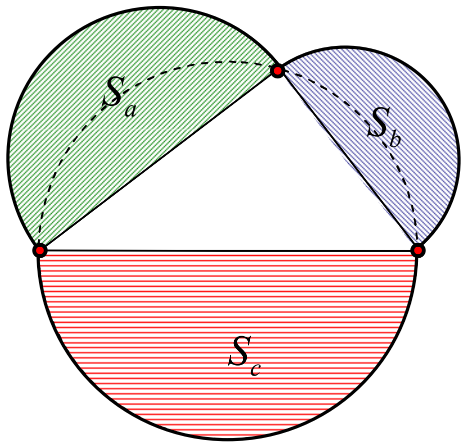


Рис. 9.2.4

Ну дійсно, оскільки F_a, F_b, F_c – подібні фігури, a, b, c – довжини їх відповідних лінійних елементів, то:

$$\frac{S_a}{S_c} = \frac{a^2}{c^2}, \qquad \frac{S_b}{S_c} = \frac{b^2}{c^2},$$

звідки, з урахуванням теореми Піфагора, маємо, що

$$\frac{S_a}{S_c} + \frac{S_b}{S_c} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{S_a}{S_c} + \frac{S_b}{S_c} = 1 \Rightarrow S_a + S_b = S_c.$$

2 спосіб

З урахуванням введених позначень, зокрема на рис. 9.2.2 та 9.2.4, не важко переконатися у тому, що для півкругів, побудованих на сторонах прямокутного трикутника ABC мають місце рівності

$$S_a = S_3 + S_1, \qquad S_b = S_4 + S_2, \qquad S_c = S + S_1 + S_2.$$

І тому, з урахуванням рівності (9.2.4), маємо наступну рівність

$$S_3 + S_1 + S_4 + S_2 = S + S_1 + S_2 \Leftrightarrow S = S_3 + S_4.$$

Задача 3

При якому значенні параметра a сума кубів коренів рівняння $(x+a)(x^2-2x-335)=0$ становить 2019?

Розв'язання

1 спосіб

1) $(x+a)(x^2-2x-335)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+a=0 \\ x^2-2x-335=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-a \\ x^2-2x+1=336 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-a \\ (x-1)^2=336 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-a \\ x-1=\pm 4\sqrt{21} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$x_1=-a,\; x_2=1+4\sqrt{21},\; x_3=1-4\sqrt{21}.$$

2) $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(-a)^3+\left(1+4\sqrt{21}\right)^3+\left(1-4\sqrt{21}\right)^3=$

$$=-a^3+1^3+\left(4\sqrt{21}\right)^3+3\cdot 1\cdot 4\sqrt{21}\left(1+4\sqrt{21}\right)+1^3-\left(4\sqrt{21}\right)^3-3\cdot 1\cdot 4\sqrt{21}\left(1-4\sqrt{21}\right)=$$

$$=-a^3+2+3\cdot 1\cdot 4\sqrt{21}\left(1+4\sqrt{21}-1+4\sqrt{21}\right)=$$

$$=-a^3+2+3\cdot 1\cdot 4\sqrt{21}\left(8\sqrt{21}\right)=-a^3+2+2016=2018-a^3.$$

3) $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2019 \Leftrightarrow 2018-a^3=2019 \Leftrightarrow -1=a^3 \Leftrightarrow a=-1.$

2 спосіб

1) $(x+a)(x^2-2x-335)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+a=0 \\ x^2-2x-335=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-a \\ x^2-2x-335=0. \end{array}\right.$

Позначимо корінь першого рівняння останньої сукупності як

$$x_3=-a. \qquad (9.3.1)$$

2) Розглянемо друге рівняння останньої системи

$$x^2-2x-335=0. \qquad (9.3.2)$$

Оскільки $D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-335)=4+4\cdot 335=4\cdot 336>0$,

то рівняння (9.3.2) має два дійсні (різні) корені x_1 та x_2, для яких за теоремою Вієта справджуються рівності

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=-335. \end{cases}$$

3) З урахуванням добре відомої формули

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b),$$

маємо

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2). \qquad (9.3.3)$$

З урахуванням рівностей (9.3.1) та (9.3.3) маємо, що

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2^3 - 3\cdot(-335)\cdot 2 + (-a)^3 = 2018 - a^3.$$

І тому

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2019 \Leftrightarrow 2018 - a^3 = 2019 \Leftrightarrow -1 = a^3 \Leftrightarrow a = -1.$$

А чи знали Ви, що:

для (зведеного) рівняння третього степеня

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \tag{9.3.4}$$

також має місце теорема Вієта. А саме: якщо x_1, x_2, x_3 – корені рівняння (9.3.4), зокрема дійсні, то мають місце рівності

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q \\ x_1x_2x_3 = -r. \end{cases} \tag{9.3.5}$$

3 спосіб

1) Перетворимо дане рівняння до рівняння виду

$$(x+a)(x^2 - 2x - 335) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2(a-2) + x(-2a-335) - 335a = 0.$$

2) Не важко встановити, що має місце тотожність

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + 3x_1x_2x_3.$$

3) З урахуванням рівностей (9.3.5), для коренів даного рівняння має місце рівність

$$\begin{aligned} & x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \\ & (2-a)^3 - 3(2-a)(-2a-335) + 3\cdot 335a = \\ & = (2-a)\left((2-a)^2 + 3(2a+335)\right) + 3\cdot 335a = \\ & = (2-a)\left(a^2 + 2a + 4 + 3\cdot 335\right) + 3\cdot 335a = \\ & = (2-a)\left(a(2+a) + 4 + 3\cdot 335\right) + 3\cdot 335a = \\ & = a(2-a)(2+a) + (2-a)(4 + 3\cdot 335) + 3\cdot 335a = \\ & = a\left(4 - a^2\right) + 2\cdot(4 + 3\cdot 335) - 4a - 3\cdot 335\cdot a + 3\cdot 335a = \\ & = 4a - a^3 + 2\cdot(4 + 3\cdot 335) - 4a = -a^3 + 218. \end{aligned}$$

І тому

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2019 \Leftrightarrow 2018 - a^3 = 2019 \Leftrightarrow -1 = a^3 \Leftrightarrow a = -1.$$

Відповідь: $a = -1.$

Задача 4

Розв'язання

1) Нехай H – основа висоти CH, опущеної з вершини прямого кута $\triangle ABC$, яка ділить гіпотенузу AB на відрізки $AH = 4$ см та $HB = 9$ см. – рис. 9.4.1. За відомим метричним співвідношенням прямокутного трикутника виконується рівність $CH = \sqrt{AH \cdot HB}$, звідки $CH = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$.

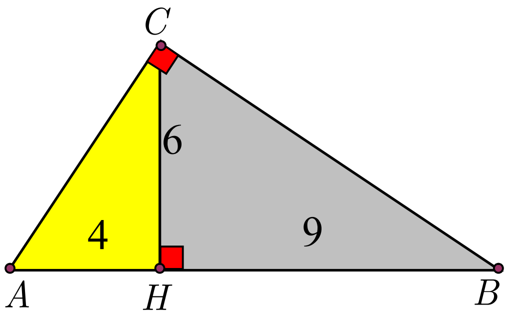


Рис. 9.4.1

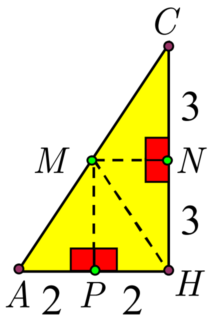


Рис. 9.4.2

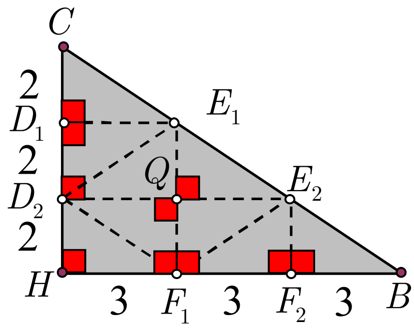


Рис. 9.4.3

2) Розріжемо $\triangle ABC$ вздовж висоти CH на два прямокутні трикутники – $\triangle CHA$ (рис. 9.4.2) та $\triangle CHB$ (рис. 9.4.3).

3) Нехай M, N, P – середини сторін AC, CH, HA (відповідно) $\triangle CHA$. Тоді MN та MP – середні лінії $\triangle CHA$. Тому $MN = AP = PH = 2$, $MN \parallel AH$; $MP = CN = NH = 3$, $MP \parallel CH$. Оскільки $CH \perp AH$, то (за властивістю паралельних прямих) $MN \perp CH$ та $MP \perp AH$. Звідки випливає, що прямокутні трикутники $\triangle MNC$, $\triangle MNH$, $\triangle HPM$ та $\triangle APM$ є рівними (*за двома катетами 2 см і 3 см*).

3) Розглянемо $\triangle CHB$. Нехай точки E_1, E_2 ділять сторону CB на три рівні відрізки, точки D_1, D_2 – сторону CH, а точки F_1, F_2 – сторону HB. Тоді $CD_1 = D_1D_2 = D_2H = 2$, $HF_1 = F_1F_2 = F_2B = 3$. Крім того, за оберненою теоремою Фалеса маємо, що $E_1D_1 \parallel E_2D_2 \parallel BH$ та $E_2F_2 \parallel E_1F_1 \parallel CH$. Оскільки $CH \perp BH$, то $E_1D_1 \perp CH$, $E_2D_2 \parallel CH$, $E_2F_2 \perp BH$, $E_1F_1 \perp BH$ та $E_1F_1 \perp E_2D_2$. Нехай далі $Q = E_1F_1 \cap E_2D_2$. Тоді чотирикутники $D_2D_1E_1Q$, HD_2QF_1 та $F_1QE_2F_2$ є прямокутниками. Звідки й випливає, що прямокутні трикутники $\triangle CD_1E_1$, $\triangle D_2D_1E_1$, $\triangle E_1QD_2$ $\triangle F_1QD_2$, $\triangle D_2HF_1$, $\triangle E_1QE_2$, $\triangle F_1QE_2$, $\triangle E_2F_2F_1$ та $\triangle E_2F_2B$ є рівними (*за двома катетами 2 см і 3 см*).

Отже, даний прямокутний трикутник можна розрізати на 13 рівних прямокутних трикутників (з катетами 2 і 3 см) у наведений вище спосіб.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4. Доведіть, що такий трикутник можна розрізати й на 16 рівних трикутників.

Задача 5

Фокусник збирається вгадати задумане двоцифрове число. Для цього він просить сказати йому остачі x, y, z від ділення задуманого числа на 3, 5 та 7 відповідно. Обчисливши суму $70x + 21y + 15z$, фокусник називає задумане число. Поясніть, як йому це вдається?

Розв'язання

Нехай a – шукане двозначне число. Тоді

1) $a = 3k + x$, $a = 5l + y$, $a = 7m + z$, звідки

$$x = a - 3k, \quad y = a - 5l, \quad z = a - 7m;$$

2) $S = 70x + 21y + 15z = 70(a - 3k) + 21(a - 5l) + 15(a - 7m) =$

$= 106a - 210k - 105l - 105m = a + 105(a - 2k - l - m)$;

Наведена сума або співпадає із шуканим двозначним числом a, або відрізняється від нього на величину, яка кратна числу 105.

3) Оскільки остачі від ділення шуканого числа a на 3, 5 та 7 задовольняють нерівності $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 4$ та $0 \le z \le 6$ відповідно, то наведена сума $S = 70x + 21y + 15z \le 70 \cdot 2 + 21 \cdot 4 + 15 \cdot 6 = 314$.

Тобто:

- якщо наведена сума S є двозначним числом, то $a = S$;
- якщо $115 \le S \le 204$, то $a = S - 105$;
- якщо $220 \le S \le 309$, то $a = S - 105 - 105 = S - 210$.
- якщо ж $325 \le S \le 414$, то $a = S - 315$.

Зауважимо, що натуральні значення $S \in [100; 114] \cup [205; 219] \cup [310; 324]$ не можуть бути реалізованими.

Таким чином, фокуснику щонайбільше двічі треба відняти від S число 105, щоб одержати шукане двозначне число.

Відповідь: нехай $S = 70x + 21y + 15z$, тоді:

якщо наведена сума S є двозначним числом, то $a = S$;
якщо $115 \le S \le 204$, то $a = S - 105$;
якщо $220 \le S \le 309$, то $a = S - 105 - 105 = S - 210$.
якщо ж $325 \le S \le 414$, то $a = S - 315$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5.

?! Доведіть, що натуральні значення

$$S \in [100; 114] \cup [205; 219] \cup [310; 324]$$

не можуть бути реалізованими.

10 клас

Задача 1

Відомо, що при будь-якому n суму n перших членів арифметичної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = n^2 + 3n$. Знайдіть перший член та різницю такої прогресії.

Розв'язання

1 спосіб

Очевидно, що $S_1 = a_1$. І тому, з урахуванням формули

$$S_n = n^2 + 3n = S(n),$$

маємо, що

$$a_1 = S_1 = S(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4.$$

Аналогічно

$$S_2 = S(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10.$$

Оскільки $S_2 = a_1 + a_2$, то одержуємо рівність

$$10 = 4 + a_2, \text{ звідки } a_2 = 6.$$

За визначенням різниці арифметичної прогресії маємо що

$$d = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2.$$

2 спосіб

Добре відомо, що суму перших n членів арифметичної прогресії можна обчислити за формулою

$$S(n) = \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n, \qquad (10.1.1)$$

де a_1 – перший член, а d – різниця арифметичної прогресії.

За допомогою тотожних перетворень зведемо праву частину даної формули $S_n = n^2 + 3n$ (для обчислення суми n перших членів заданої арифметичної прогресії) до виду (10.1.1).

$$S_n = n^2 + 3n = (n+3) \cdot n = \frac{2n+6}{2} \cdot n = \frac{8+2n-2}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot (n-1)}{2} \cdot n.$$

Звідки

$$S_n = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot (n-1)}{2} \cdot n \qquad (10.1.2)$$

Зіставляючи формули (10.1.1) та (10.1.2), одержуємо, що

$$a_1 = 4, \; d = 2.$$

3 спосіб

Не важко бачити, що права частина даної формули є многочленом $g(n)$ другого степеня відносно змінної n

$$S_n = n^2 + 3n = g(n).$$

Добре відомо, що суму S_n перших n членів арифметичної прогресії можна обчислити й за формулою (10.1.1).

Подамо праву частину (10.1.1) у вигляді многочлена $f(n)$ другого степеня відносно змінної n

$$S_n = S(n) = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = a_1 \cdot n + \frac{d}{2}(n-1) \cdot n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n = f(n).$$

Оскільки $f(n) = S_n = g(n)$, то при кожному натуральному n, значення $f(n)$ та $g(n)$ співпадають, бо виражають суму S_n перших n членів однієї арифметичної прогресії. Тобто, $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$ і т.д. Отже:

$$f(1) = g(1) \Rightarrow \frac{d}{2} \cdot 1^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) \cdot 1 = 1^2 + 3 \cdot 1 \Rightarrow \frac{d}{2} + a_1 - \frac{d}{2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 4.$$

$$f(2) = g(2) \Rightarrow \frac{d}{2} \cdot 2^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) \cdot 2 = 2^2 + 3 \cdot 2 \Rightarrow \frac{d}{2} \cdot 4 + 2a_1 - d = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d + 2a_1 = 10.$$

А з того що $a_1 = 4$, одержуємо $d + 2 \cdot 4 = 10$, звідки $d = 2$.

Відповідь: $a_1 = 4,\ d = 2$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

! А чи звертали Ви увагу? Що:

многочлени $f(n)$ та $g(n)$ співпадають (набувають однакових значень при кожному n) тоді і лише тоді, коли рівними є відповідні коефіцієнти, тобто

$$f(n) \equiv g(n) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{2} = 1 \\ a_1 - \dfrac{d}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a_1 - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

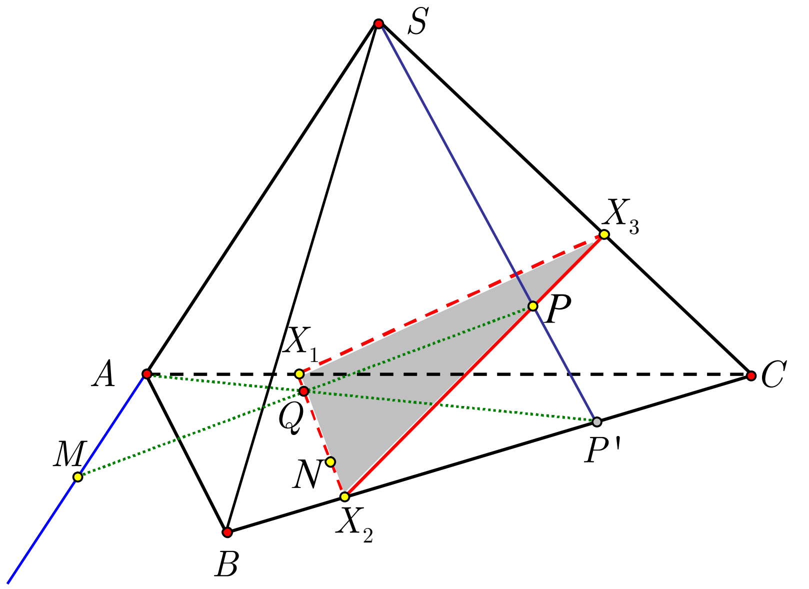
Задача 2

Розв'язання

Нехай γ – січна площина (площина перерізу), що визначається трьома точками M, N і P, які належать продовженню ребра SA за точку A та граням ABC і SBC відповідно (даного тетраедра $SABC$).

Зауважимо, що зазначені точки M, N і P не належать одній прямій.

1 спосіб



1) Оскільки точка P належить грані SBC, то промінь SP перетинає ребро BC (цієї грані) в певній точці P'.

2) Прямі MA та $P'P$ перетинаються у точці S і тому визначають у просторі єдину площину, що їх містить. Звідки точки M, A, P, P' належать одній площині.

А з того що чотирикутник $MAPP'$ є опуклим, випливає, що прямі MP та AP', які містять його діагоналі, перетинаються у певній точці Q.

Оскільки (за умовою) точки M і P належать (січній) площині γ, то (за аксіомою/наслідком з аксіом) площині γ належить вся пряма MP, зокрема точка Q.

Аналогічно, оскільки (за умовою та побудовою) точки A і P' належать площині ABC, то (за аксіомою/наслідком з аксіом) площині ABC належить вся пряма AP', зокрема точка Q.

Таким чином, точка Q одночасно належить площинам ABC і γ. Звідки (за аксіомою) випливає, що січна площина γ перетинає площину ABC по прямій, яка містить точку Q.

3) За умовою задачі точка N одночасно належить площинам ABC і γ. Звідки (за аксіомою) випливає, що січна площина γ перетинає площину ABC по прямій, яка містить точку N.

Отже, січна площина γ перетинає площину ABC по прямій, яка містить точки N і Q. Оскільки точки M, N і P не належать одній прямій, то точки N і Q не можуть співпасти. Звідки й випливає, що січна площина γ перетинає площину ABC по прямій NQ.

4*) Зауважимо, що оскільки точки N і Q є внутрішніми точками відносно (сторін) $\triangle ABC$, то в залежності від взаємного їх розташування:
– або пряма NQ проходить через одну з вершин трикутника і тому перетинає протилежну сторону у внутрішній її точці;
– або ж пряма NQ перетинає дві сторони $\triangle ABC$ у внутрішніх їх точках.

4) Для даного розташування точки N в площині $\triangle ABC$ пряма NQ перетинає саме ребра AC і BC грані ABC. Позначимо зазначені точки як X_1 та X_2 відповідно.

Оскільки січна площина γ перетинає ребра грані ABC у точках X_1 та X_2, то γ перетинає грань ABC по відрізку X_1X_2.

5) $X_2 \in (QN) \subset \gamma$, звідки $X_2 \in \gamma$. З іншого боку $X_2 \in (BC) \subset (SBC)$, тому точка X_2 належить площині грані SBC. За умовою точка $P \in \gamma$ та належить грані SBC. Отже, січна площина γ перетинає площину SBC по прямій, яка містить точки X_2 і P.

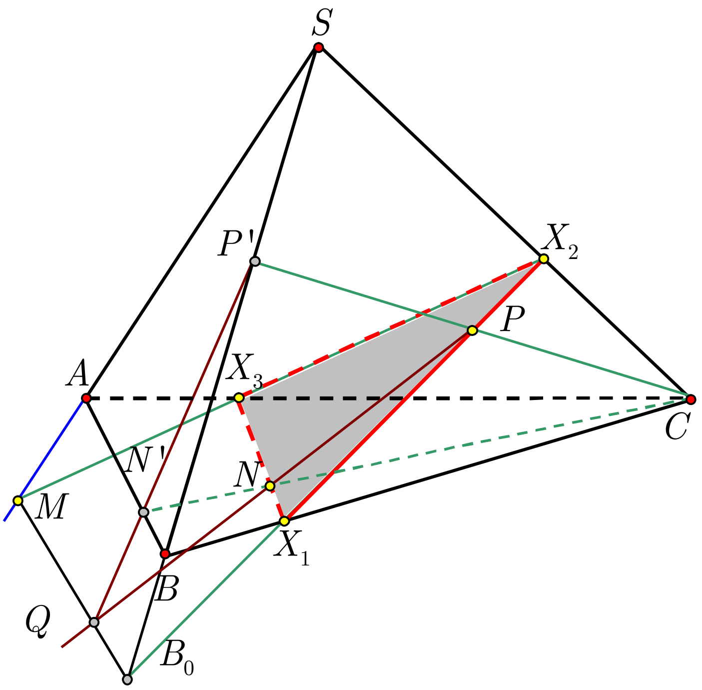
Для даного розташування точки P в площині $\triangle SBC$ пряма X_2P перетинає саме ребро SC грані SBC. Позначимо цю точку як X_3. Оскільки γ перетинає ребра грані SBC у точках X_2 та X_3, то γ перетинає грань SBC по відрізку X_2X_3.

6) $X_1 \in (QN) \subset \gamma$, звідки $X_1 \in \gamma$. З іншого боку $X_1 \in (AC) \subset (SAC)$, тому точка X_1 належить площині грані SAC.

$X_3 \in (X_2P) \subset \gamma$, звідки $X_3 \in \gamma$. З іншого боку $X_3 \in (SC) \subset (SAC)$, тому точка X_3 належить площині грані SAC. Отже, січна площина γ перетинає площину SAC по прямій, яка містить точки X_1 та X_3. Оскільки γ перетинає ребра грані SAC у точках X_1 та X_3, то γ перетинає грань SAC по відрізку X_1X_3.

Таким чином $X_1X_2X_3X_1$ – шуканий переріз.

2 спосіб



1) Оскільки т. P належить грані SBC, то промінь CP перетинає ребро SB (цієї грані) в певній точці P'.

2) Оскільки т. N належить грані ABC, то промінь CN перетинає ребро AB (цієї грані) в певній точці N'.

3) Прямі $P'P$ та $N'N$ перетинаються у точці C і тому визначають у просторі єдину площину, що їх містить. Звідки точки N', P', P, N належать одній площині.

4) Для даного розташування точок P і N прямі PN та $P'N'$ перетинаються. Позначимо точку їх перетину як Q.

$Q \in (NP) \subset \gamma$, звідки $Q \in \gamma$. З іншого боку $Q \in (P'N') \subset (SAB)$, тому точка Q належить площині грані SAB. За умовою точка $M \in \gamma$ та належить площині грані SAB (бо $M \in (SA)$). Отже, січна площина γ перетинає площину SAB по прямій MQ. Тобто, $(MQ) \subset \gamma$.

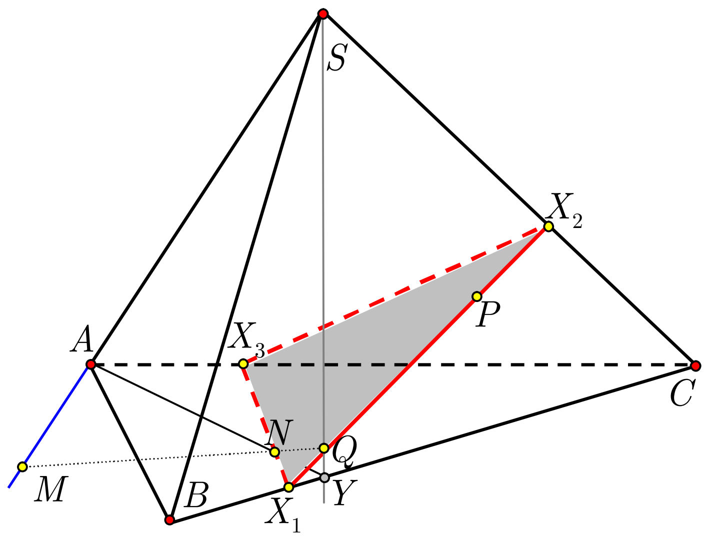
5) Нехай далі $B_0 = (MQ) \cap (SB)$. Оскільки $B_0 \in (MQ) \subset \gamma$, то $B_0 \in \gamma$. З іншого боку $B_0 \in (SB) \subset (SBC)$, тому B_0 належить площині грані SBC. За умовою т. $P \in \gamma$ та належить грані SBC. Отже, γ перетинає площину SBC по прямій B_0P. Позначимо точки перетину прямої B_0P з ребрами BC і CS через X_1 та X_2 відповідно. Тоді γ перетинає грань SBC по відрізку X_1X_2. Крім того, $X_1, X_2 \in \gamma$.

6) Оскільки $M \in (SA)$, а $X_2 \in (SC)$, то точки M, X_2 належать площині грані SAC. З іншого боку $M, X_2 \in \gamma$. Отже, γ перетинає площину SAC по прямій X_2M. Позначимо точку перетину прямої X_2M з ребром AC як X_3. Тоді γ перетинає грань SAC по відрізку X_2X_3. Крім того, $X_3 \in \gamma$.

7) Оскільки точки X_3 та X_1 належать ребрам CA та CB (відповідно) та $X_3, X_1 \in \gamma$, то γ перетинає грань ABC по відрізку X_3X_1.

Таким чином $X_1X_2X_3X_1$ – шуканий переріз.

3 спосіб



1) Оскільки т. N належить грані ABC, то промінь AN перетинає ребро BC (цієї грані) в певній точці Y.

2) Прямі AY та MN перетинаються у точці N і тому визначають у просторі єдину площину α, що їх містить.

$S \in (MA) \subset \alpha$, звідки $S \in \alpha$;

$S, Y \in \alpha$, звідки $(SY) \subset \alpha$.

3) Добре відомо, що *«якщо пряма перетинає продовження однієї зі сторін трикутника та другу його сторону у внутрішній її точці, то така пряма перетинає третю сторону також у внутрішній її точці»*. Тому пряма MN перетинає сторону SY ($\triangle ASY$) у внутрішній її точці Q.

4) Оскільки (за умовою задачі) точки $M, N \in \gamma$, $Q \in (MN)$, то $Q \in \gamma$. З іншого боку $Q \in (SY) \subset (SBC)$, і тому Q належить площині грані SBC. За умовою точка $P \in \gamma$ та грані SBC. Звідки й випливає, що січна площина γ перетинає площину грані SBC по прямій QP.

Для даного розташування точок P і Q пряма PQ перетинає саме ребра CB і CS грані SBC. Позначимо зазначені точки як X_1 та X_2 відповідно. Тоді січна площина γ перетинає грань SBC по відрізку X_1X_2. Крім того, $X_1, X_2 \in \gamma$.

5) За умовою точка $N \in \gamma$ та грані ABC. Точка X_1 також належить січній площині γ та площині грані ABC. Звідки й випливає, що січна площина γ перетинає площину грані ABC по прямій X_1N. При даному розташуванні X_1 та N пряма X_1N перетинає саме ребро AC грані ABC. І тому січна площина γ перетинає грань ABC по відрізку X_1X_3.

6) Оскільки точки X_3 та X_2 належать ребрам CA та CS (відповідно) та $X_2, X_3 \in \gamma$, то січна площина γ перетинає грань SAC по відрізку X_2X_3.

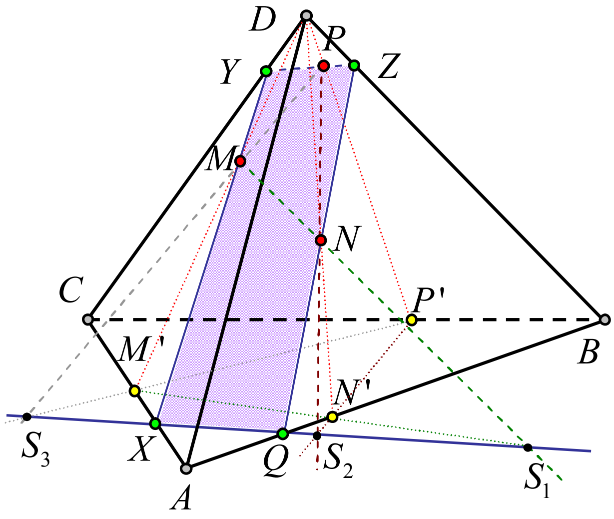
Таким чином $X_1X_2X_3X_1$ – шуканий переріз.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

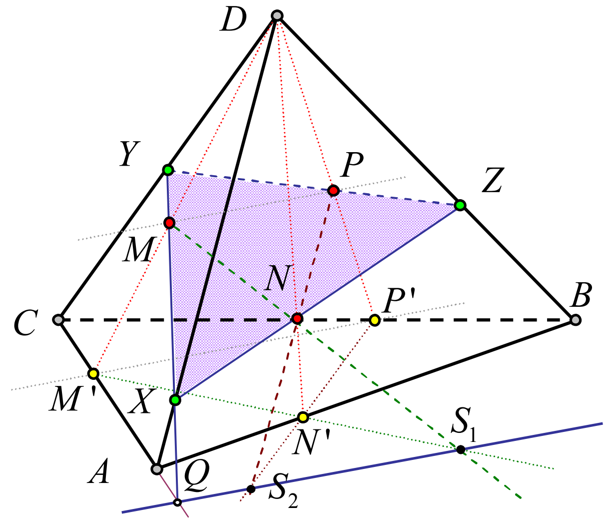
Має місце наступна класифікація положень трьох точок M, N, P січної площини на поверхні тетраедра

Жодні дві точки (з 3 можливих пар) не належать одній грані			Точно одна пара точок (з 3 можливих пар) належить певній грані		Точно дві пари точок (з 3 можливих пар) належать відповідним різним граням			Три пари точок (з 3 можливих пар) належать відповідним різним граням		
A			B		C			D		
↙	↓	↘	↙	↘	↙	↓	↘	↙	↓	↘
A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	C_1	C_2	C_3	D_1	D_2	D_3

Суть деталізації нижчого рівня (відповідних «підвипадків» A_i, B_i, C_i та D_i) розкривається нижче й наведено на відповідних рисунках.

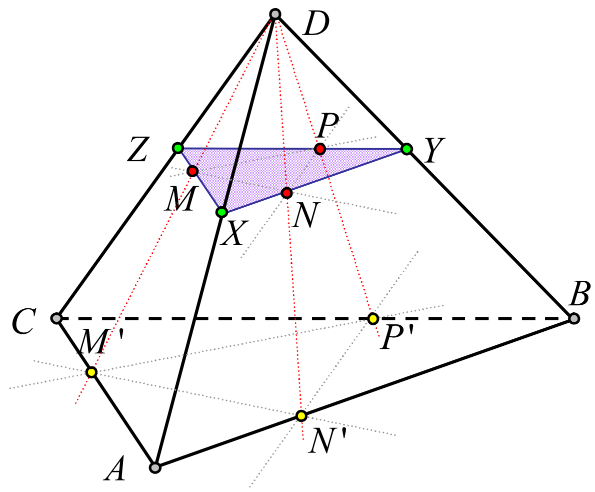


A_1: жодна з прямих MN, NP, PM не є паралельною до площини 4-ої грані ABC ($MN \not\parallel M'N', NP \not\parallel N'P', PM \not\parallel P'M'$)



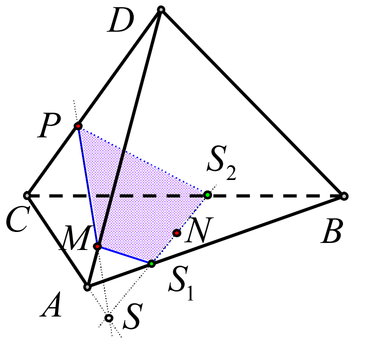
A_2: лише одна з прямих MN, NP, PM є паралельною до площини 4-ої грані ABC ($PM \parallel P'M', MN \not\parallel M'N', NP \not\parallel N'P' \Rightarrow$

$\Rightarrow S_1S_2 \parallel P'M' \parallel PM$)



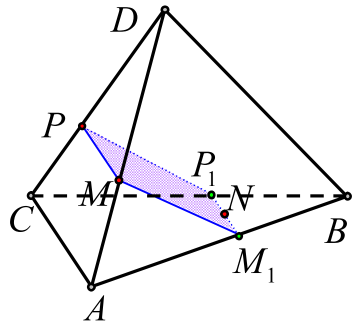
A_3: дві з прямих MN, NP, PM (а тому й всі три) є паралельними до площини 4-ої грані ABC

$(MN \parallel M'N', MP \parallel M'P' \Rightarrow (MNP) \parallel (M'N'P') \equiv (ABC) \Rightarrow NP, XY, YZ, ZX \parallel (ABC))$



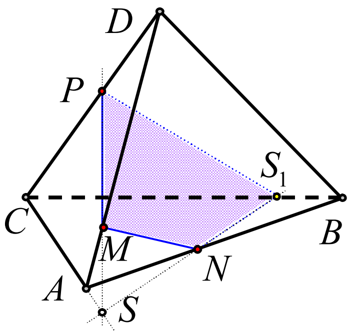
B_1: та пара точок, що належить певній грані, утворює відрізок, що <u>не є паралельним</u> до третього ребра цієї грані

($PM \nparallel CA$)



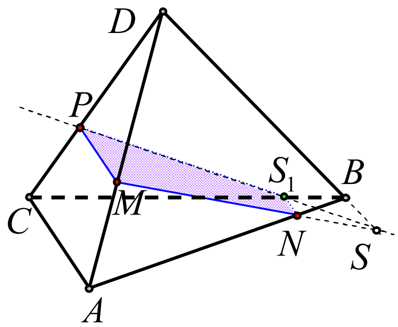
B_2: та пара точок, що належить певній грані, утворює відрізок, що <u>є паралельним</u> до третього ребра цієї грані

($PM \parallel CA$)



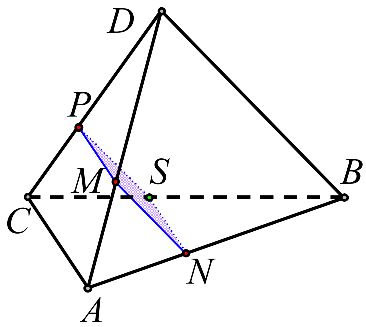
C_1: жоден з відрізків, утворених двома парами точок, що належать різним граням, <u>не є паралельним</u> до третього ребра відпов. грані

$PM \nparallel CA$, $MN \nparallel DB$



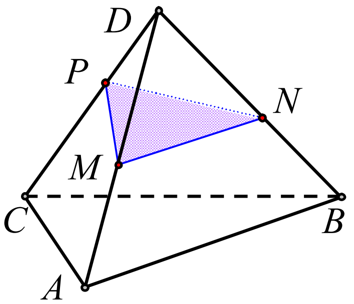
C_2: лише один з відрізків, утворених двома парами точок, що належать різним граням, <u>є паралельним</u> до третього ребра відпов. грані

$PM \parallel CA, MN \nparallel DB$

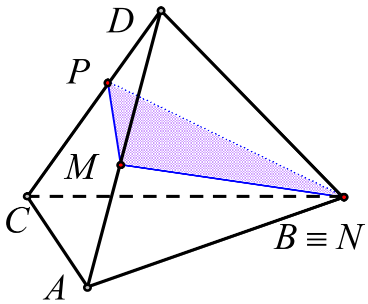


C_3: кожен з відрізків, утворених двома парами точок, що належать різним граням, <u>є паралельним</u> до третього ребра відпов. грані

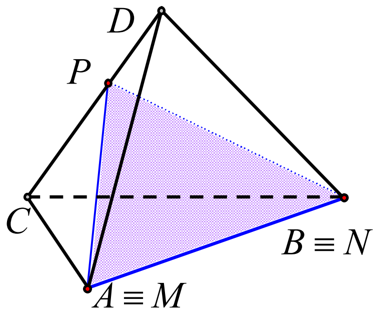
$PM \parallel CA, MN \parallel DB$



D_1: жодна з точок на ребрах не співпадає з вершиною тетраедра



D_2: лише 1 з 3 точок на ребрах співпадає з вершиною тетраедра



D_3: лише 2 з 3 точок на ребрах співпадають з вершинами тетраедра

Зауваження. В наведеній класифікації спосіб задання двох точок січної площини тетраедра, які належать:

– *певному ребру*, ототожнено із заданням відповідних вершин тетраедра (кінців зазначеного ребра);

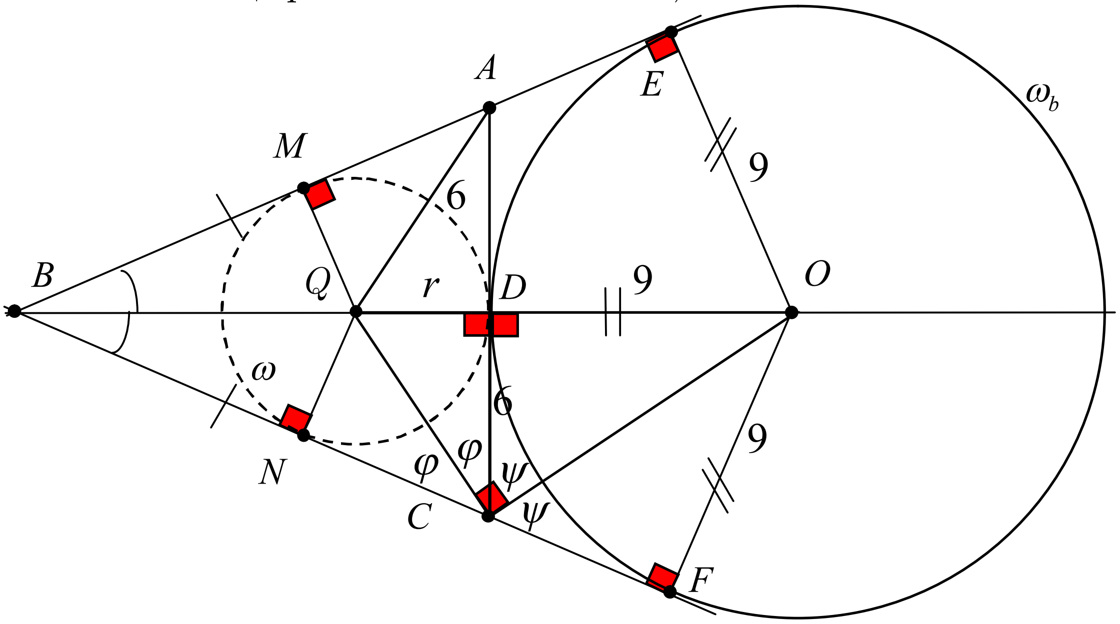
– певній грані – із заданням (відповідних) точок на відповідних ребрах цієї грані.

Задача 3

Розв'язання

1) Нехай Q – центр кола ω, вписаного в даний $\triangle ABC$ ($BA = BC$), а D – середина основи AC. Тоді $CD = DA = 6$ та за властивістю рівнобедреного трикутника медіана BD є висотою та бісектрисою $\triangle ABC$. І тому $Q \in BD$. Нехай далі M, N – точки дотику ω зі сторонами BA та CB відповідно. Тоді (за властивістю дотичної до кола) $QM \perp AB$, $QN \perp CB$. Крім того, оскільки $QD \perp AC$, то $QM = QD = QN = r$. А за властивістю відрізків дотичних проведених з однієї точки до кола має місце рівність $AM = AD = 6$.

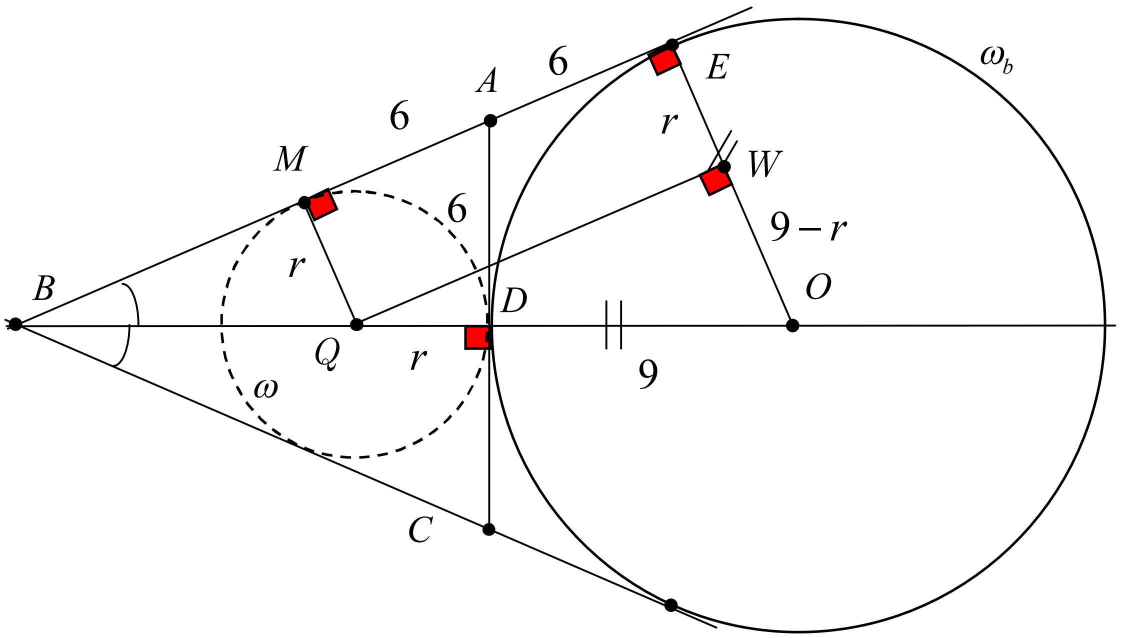
2) Нехай далі, O – центр кола ω_b, яке дотикається сторони AC та продовжень променів BA і BC в точках E та F відповідно. Тоді $OE \perp BE$, $OF \perp BF$. Оскільки $OE = OF$, то O належить бісектрисі $\angle EBF$, тобто променю BD. А з того що $BD \perp AC$ випливає, що $OD \perp AC$. І тому OD – радіус кола ω_b. Звідки $OE = OF = OD = 9$. Оскільки $OE = OD = OF$, то O належить бісектрисам $\angle EAD$ та $\angle DCF$. Крім того, за властивістю відрізків дотичних проведених з однієї точки до кола мають місце рівності: $AE = AD = 6$; $CF = CD = 6$.



1 спосіб

3) Оскільки центри Q і O належать бісектрисам суміжних кутів $\angle BCD$ та $\angle DCF$, то $\angle QCO = 90^0$. Тому $\triangle QCO$ є прямокутним з гіпотенузою QO. Тоді за відомим метричним співвідношенням прямокутного трикутника має місце рівність $CD^2 = QD \cdot DO$, звідки $6^2 = r \cdot 9$, $r = 4$.

2 спосіб



Оскільки M і E – точки дотику кіл ω та ω_b (відповідно) з прямою BA, то радіуси QM та OE (зазначених кіл) є перпендикулярними до прямої BA. Звідки $\angle QME = \angle OEM = 90^0$.

3) З точки Q опустимо перпендикуляр QW на пряму EO. Оскільки в чотирикутнику $QMEW$ три кути є прямими, то і четвертий $\angle MQW$ є прямим. Тому (за визначенням) чотирикутник $QMEW$ є прямокутником.

Звідки маємо, що $EW = MQ = r$, $QW = ME = 12$.

4) Оскільки $EO = 9$, $EW = r$, то (за наслідком з аксіоми вимірювання відрізків) $WO = 9 - r$.

Оскільки точки Q, D, O належать одній прямій, причому саме точка D лежить між точками Q і O, то за аксіомою вимірювання відрізків маємо, що

$$QO = QD + DO = r + 9.$$

5) З того що $QW \perp OE$ випливає, що $\triangle QWO$ є прямокутним з прямим кутом при вершині W. Тому за теоремою Піфагора має місце рівність

$$QW^2 + WO^2 = QO^2,$$

звідки одержуємо рівняння відносно змінної r

$$12^2 + (9-r)^2 = (9+r)^2,$$

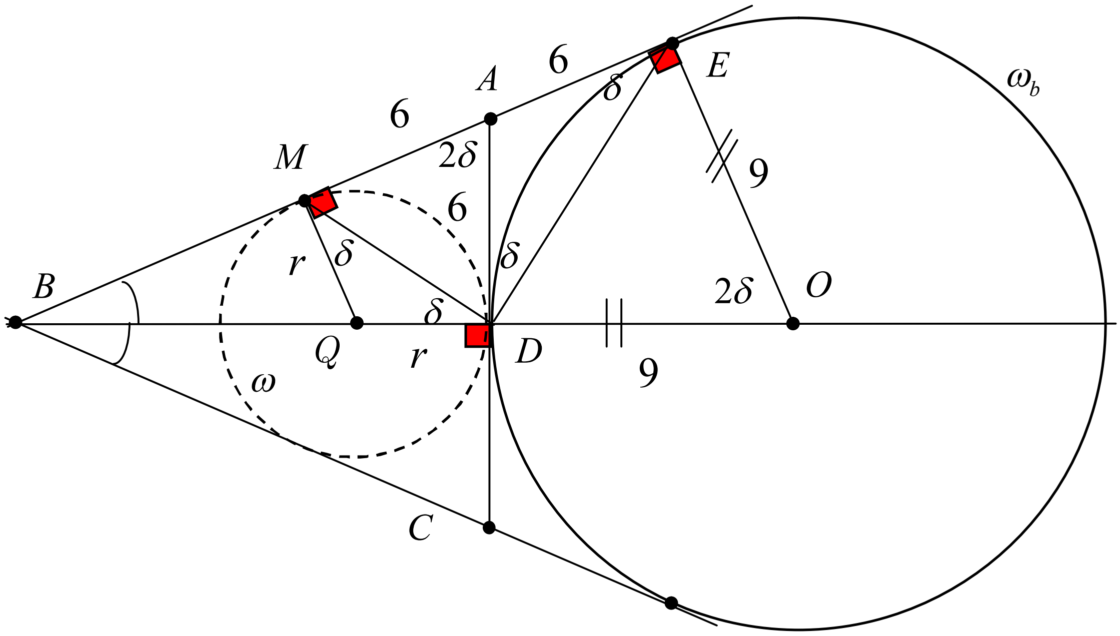
$$(9+r)^2 - (9-r)^2 = 12^2,$$

$$(9 + r - (9-r))(9 + r + 9 - r) = 12^2,$$

$$2r \cdot 18 = 6^2 \cdot 2^2,$$

$$r = 4.$$

3 спосіб



Оскільки $QM \perp AB$ і $OE \perp AB$, то (за відповідною ознакою паралельності прямих на площині) $QM \parallel OE$.

3) Нехай далі $\angle EOD = 2\delta$. Тоді за властивістю паралельних (QM і OE) та січної (BO) $\angle MQO = 180^0 - 2\delta$. Крім того, оскільки сума внутрішніх кутів опуклого чотирикутника $QMAD$ становить 360^0, то $\angle MAD = 2\delta$. $\angle DAE = \left(180^0 - 2\delta\right)$ – як кут, суміжний із $\angle MAD = 2\delta$.

4) Оскільки $QD = QM = r$, $AM = AD = 6$, $AD = AE = 6$, $OE = OD = 9$, то за визначенням трикутники QMD, ADM, AED і ODE є рівнобедреними з основами MD, DM, ED та DE відповідно. І тому $\angle QMD = \angle QDM = \delta$, $\angle ADM = \angle AMD = 90^0 - \delta$, $\angle AED = \angle ADE = \delta$ і $\angle ODE = \angle OED = 90^0 - \delta$.

5) За двома кутами $\triangle ADM$ і $\triangle ODE$ є подібними. Тому має місце пропорція $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{OE}{ED} \Rightarrow \dfrac{6}{MD} = \dfrac{9}{ED} \Rightarrow 2ED = 3MD \Rightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{MD}{ED}$, звідки

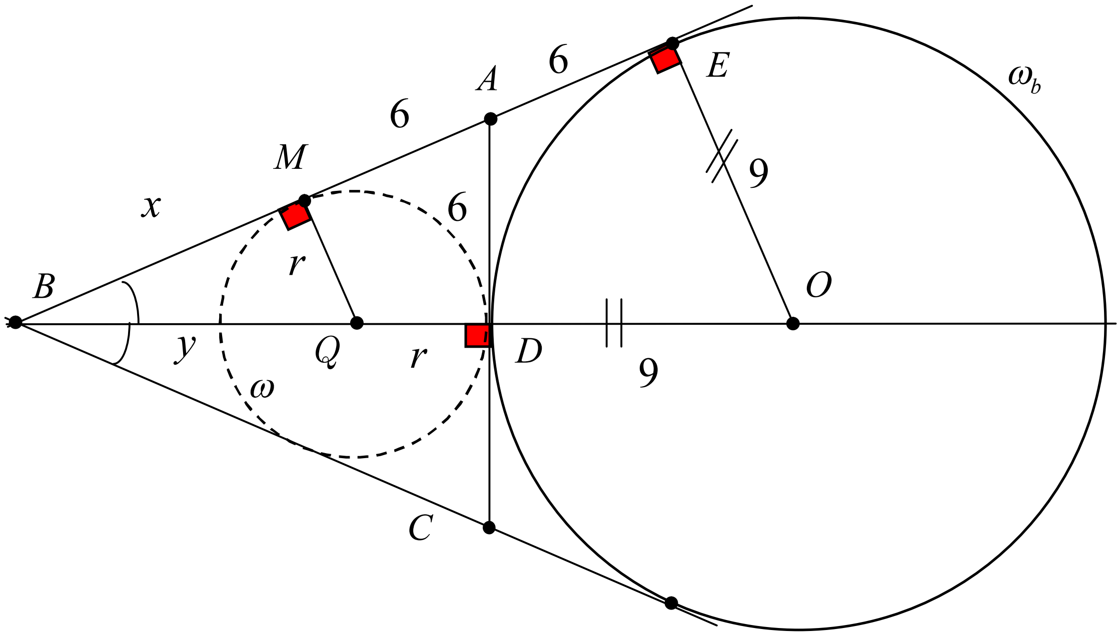
$$\frac{DM}{DE} = \frac{2}{3}. \qquad (10.3.1)$$

6) $\triangle QMD$ та $\triangle AED$ також є подібними за двома кутами. Тому має місце пропорція $\dfrac{QD}{DM} = \dfrac{AD}{DE} \Rightarrow \dfrac{r}{DM} = \dfrac{6}{DE} \Rightarrow r \cdot DE = 6DM$, звідки

$$r = 6 \cdot \frac{DM}{DE} \qquad (10.3.2)$$

З урахуванням (10.3.1) та (10.3.2) маємо, що $r = 6 \cdot \dfrac{DM}{DE} = 6 \cdot \dfrac{2}{3} = 4$.

4 спосіб



Введемо позначення $BM = x$, $BQ = y$. Тоді $BE = x + 12$, $BO = y + r + 9$.

3) За (спільним) гострим кутом прямокутні $\triangle BMQ$ і $\triangle BEO$ є подібними. Тому мають місце пропорції

$$\frac{MQ}{QB} = \frac{EO}{OB} \text{ та } \frac{MQ}{BM} = \frac{EO}{BE}.$$

Звідки, з урахуванням введених позначень, маємо

$$\begin{cases} \dfrac{r}{y} = \dfrac{9}{y + r + 9} \\ \dfrac{r}{x} = \dfrac{9}{x + 12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ry + r^2 + 9r = 9y \\ rx + 12r = 9x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(9 - r) = r(9 + r) \\ x(9 - r) = 12r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{r(9 + r)}{9 - r} \\ x = \dfrac{12r}{9 - r} \end{cases} \tag{10.3.3}$$

4) З прямокутного $\triangle BMQ$ за теоремою Піфагора має місце рівність

$$y^2 = x^2 + r^2,$$

звідки, з урахуванням (10.3.3), одержуємо рівняння відносно r

$$\left(\frac{r(9 + r)}{9 - r}\right)^2 = \left(\frac{12r}{9 - r}\right)^2 + r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2(9 + r)^2 = 144r^2 + r^2(9 - r)^2 \Rightarrow (9 + r)^2 = 144 + (9 - r)^2 \Rightarrow$$

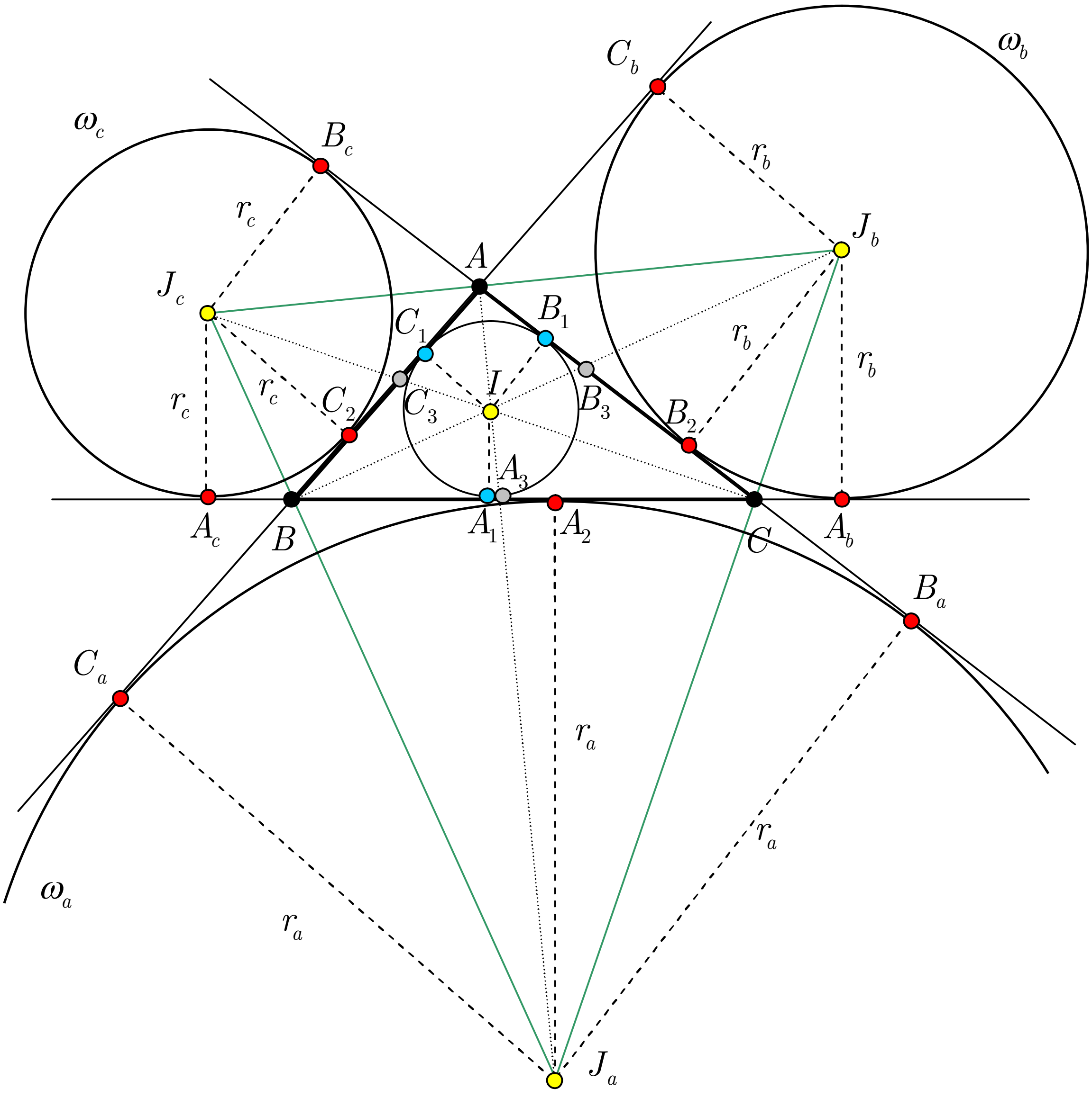
$$\Rightarrow (9 + r)^2 - (9 - r)^2 = 144 \Rightarrow (9 + r - (9 - r))(9 + r + 9 - r) = 12^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2r \cdot 18 = 6^2 \cdot 2^2 \Rightarrow r = 4.$$

Відповідь: $r = 4$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3.

Нехай I – центр кола ω, вписаного в $\triangle ABC$ зі сторонами $AB = c$, $BC = a$ та $CA = b$. Нехай далі A_1, B_1, C_1 – точки дотику кола ω зі сторонами BC, AC та AB відповідно, а A_3, B_3, C_3 – основи бісектрис кутів A, B, C відповідно.



Через J_a, J_b, J_c позначимо центри (зовнівписаних) кіл $\omega_a, \omega_b, \omega_c$, які дотикаються сторін BC, AC, AB (в точках A_2, B_2, C_2 відповідно) та продовжень відповідних сторін $\triangle ABC$.

Нехай далі: B_a, C_a – точки дотику кола ω_a з продовженнями сторін AC та AB відповідно; A_b, C_b – точки дотику кола ω_a з продовженнями сторін BC та BA відповідно; A_c, B_c – точки дотику кола ω_c з продовженнями сторін CB та CA відповідно; r_a, r_b, r_c – радіуси кіл $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ відповідно.

Всюди нижче: $2p = a + b + c$; S – площа $\triangle ABC$; h_a, h_b, h_c – довжини висот, опущених з вершин A, B, C $\triangle ABC$; R, r – радіуси описаного та вписаного кіл $\triangle ABC$; H – ортоцентр $\triangle ABC$.

А чи знали Ви? Що:

$J_a \in AI$, $J_b \in BI$, $J_c \in CI$; $A \in J_bJ_c$, $B \in J_aJ_c$, $C \in J_aJ_b$;

I – ортоцентр (точка перетину прямих, що містять висоти) $\triangle J_aJ_bJ_c$;

$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = G$ – т. Жергона; $AA_2 \cap BB_2 \cap CC_2 = N$ – т. Нагеля;

$AA_2 \cap BB_a \cap CC_a = N_a$, $BB_2 \cap AA_b \cap CC_b = N_b$, $CC_2 \cap AA_c \cap BB_c = N_c$;

$$\frac{AI}{IA_3} = \frac{b+c}{a} = \frac{AJ_a}{J_aA_3}, \quad \frac{BI}{IB_3} = \frac{a+c}{b} = \frac{BJ_b}{J_bB_3}, \quad \frac{CI}{IC_3} = \frac{a+b}{c} = \frac{CJ_c}{J_cC_3};$$

$$BA_3 = \frac{a \cdot c}{b+c}, A_3C = \frac{a \cdot b}{b+c}; \; CB_3 = \frac{b \cdot a}{a+c}, B_3A = \frac{b \cdot c}{a+c}; \; AC_3 = \frac{c \cdot b}{a+b}, C_3B = \frac{c \cdot a}{a+b};$$

$$AC_1 = AB_1 = p - a, \quad BC_1 = BA_1 = p - b, \quad CA_1 = CB_1 = p - c;$$

$$AC_a = AB_a = p, \quad BC_b = BA_b = p, \quad CA_c = CB_c = p;$$

$$AB_2 = AC_b = p - c, \quad BA_2 = BC_a = p - c, \quad CA_2 = CB_a = p - b,$$

$$AC_2 = AB_c = p - b, \quad BC_2 = BA_c = p - a, \quad CB_2 = CA_b = p - a;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} = \frac{r_a}{p} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg}\frac{\angle B}{2} = \frac{r_b}{p} = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg}\frac{\angle C}{2} = \frac{r_c}{p} = \frac{r}{p-c};$$

$$r_a = \frac{rp}{p-a} = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{rp}{p-b} = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{rp}{p-c} = \frac{S}{p-c};$$

$$r \cdot r_a = (p-b)(p-c), \quad r \cdot r_b = (p-a)(p-c), \quad r \cdot r_c = (p-a)(p-b);$$

$$S = rp = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c) = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c};$$

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R; \; r_a + r_b + r_c + r = AH + BH + CH + 2R;$$

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r^2 = AH^2 + BH^2 + CH^2 + (2R)^2;$$

$$r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c = p^2; \qquad r_a \cdot r_b \cdot r_c = pS = rp^2;$$

$$r_a^2 = \frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}, \quad r_b^2 = \frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}, \quad r_c^2 = \frac{p(p-a)(p-b)}{p-c};$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c};$$

$$\frac{S}{a} = \frac{r_b \cdot r_c}{r_b + r_c}, \quad \frac{S}{b} = \frac{r_a \cdot r_c}{r_a + r_c}, \quad \frac{S}{c} = \frac{r_a \cdot r_b}{r_a + r_b};$$

$$\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}, \quad \frac{2}{h_b} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}, \quad \frac{2}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b};$$

$$a = \frac{r_a(r_b + r_c)}{\sqrt{r_a \cdot r_b + r_b \cdot r_c + r_c \cdot r_a}}, \; b = \frac{r_b(r_a + r_c)}{\sqrt{r_a \cdot r_b + r_b \cdot r_c + r_c \cdot r_a}}, \; c = \frac{r_c(r_a + r_b)}{\sqrt{r_a \cdot r_b + r_b \cdot r_c + r_c \cdot r_a}}.$$

Задача 4

Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $ax^2+2(a+1)x+3a+1\le 0$ справджується на множині $(-\infty;1)$.

Розв'язання

1 спосіб

1) При $a=0$ дана нерівність набуває вид $2x+1\le 0 \Leftrightarrow x\le -\frac{1}{2}$, множина розв'язків якої $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ <u>не містить</u> проміжок $(-\infty;1)$.

2) Нехай тепер $a\ne 0$. Тоді ліву частину нерівності можна розглядати як квадратичний тричлен / квадратичну функцію, з коефіцієнтами залежними від параметра a, а саме $y=f(a)\cdot x^2+g(a)\cdot x+h(a)$, де $f(a)=a$, $f(a)=2(a+1)$, $h(a)=3a+1$.

Нехай далі $D=g^2(a)-4\cdot f(a)\cdot h(a)$ – дискримінант квадратичного тричлена. Тоді розв'язки даної нерівності, в залежності від значень параметра a, можна (інтерпретувати) унаочнити за допомогою ескізів $6-$ти суттєво різних положень графіка квадратичної функції $y=f(a)\cdot x^2+g(a)\cdot x+h(a)$ відносно осі OX, зображених на рисунку 10.4.1 $a)$ – $f)$.

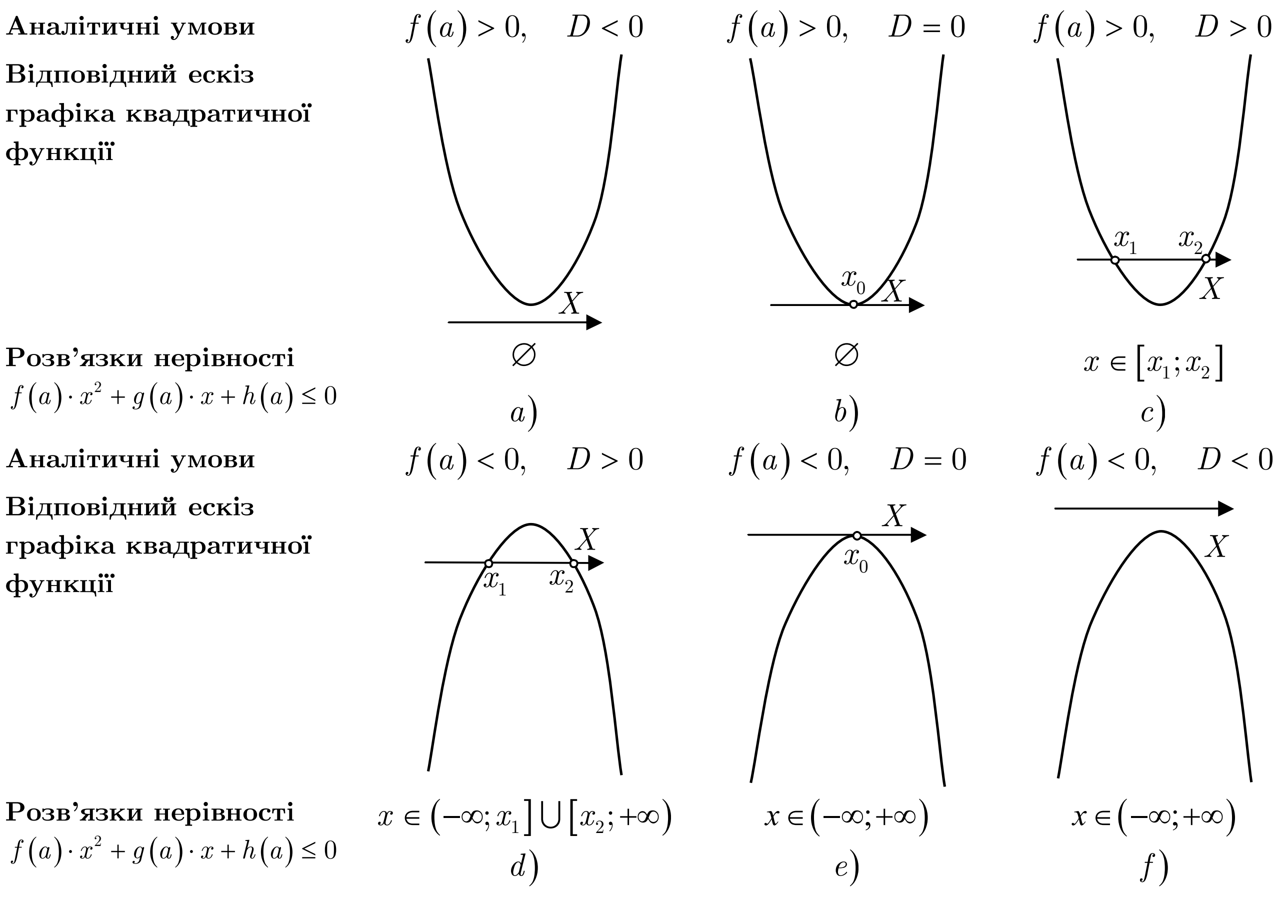


Рис. 10.4.1

3) З урахуванням ілюстрацій, зображених на рис. 10.4.1 $a)$, $b)$, $c)$, слід констатувати, що у відповідних випадках ($f(a)>0$, $D<0$, $D=0$, $D>0$) інтервал $(-\infty;1)$ не може бути підмножиною розв'язків даної нерівності.

Тобто, ті значення параметра a, при яких $f(a)>0 \Leftrightarrow a>0$, не задовольняють вимогу задачі.

4) З урахуванням розв'язків нерівності – $x\in R$, що відповідають випадкам, проілюстрованих на рис. 10.4.1 $e)$ і $f)$, вимогу задачі задовольняють ті значення параметра a, які є розв'язками системи

$$\begin{cases} f(a)<0 \\ D\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ 4(a+1)^2-4a(3a+1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ 4(1-a)(2a+1)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ (a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \left[\begin{array}{l} a\le -\frac{1}{2} \\ a\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a\in\left(-\infty;-\tfrac{1}{2}\right].$$

5) Нарешті дослідимо випадок, проілюстрований на рис. 10.4.1 $d)$. Для цього спочатку розв'яжемо відповідну систему

$$\begin{cases} f(a)<0 \\ D>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ 4(a+1)^2-4a(3a+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ (a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ -\frac{1}{2}<a<1 \end{cases},$$

звідки $a\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$. Проте розв'язок нерівності $x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$ в цьому випадку містить інтервал $(-\infty;1)$ лише за умов, коли $x_1\ge 1$. Тобто, при тих значеннях параметра $a\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$, при яких справджується нерівність $\frac{-2(a+1)+2\sqrt{(1-a)(2a+1)}}{2a}\ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)(2a+1)}\le 2a+1$. Оскільки

$$\begin{cases} \sqrt{(1-a)(2a+1)}\le 2a+1 \\ -\frac{1}{2}<a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)(2a+1)\le (2a+1)^2 \\ -\frac{1}{2}<a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(a+\frac{1}{2}\right)\ge 0 \\ -\frac{1}{2}<a<0 \end{cases},$$

то таких значень параметра a не існує.

І тому лише при $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ множина розв'язків даної нерівності містить проміжок $(-\infty;1)$.

2 спосіб

1) при $a=0$ нерівність набуває вид $2x+1\le 0 \Leftrightarrow x\le -\frac{1}{2}$, множина розв'язків якої $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ не містить проміжок $(-\infty;1)$.

2) при $a>0$ для величини $D=4(a+1)^2-4a(3a+1)=4(1-a)(2a+1)$ можливі три випадки:

2.1) якщо $D<0$, то нерівність не має розв'язків;

2.2) якщо $D=0$, то єдиним розв'язком нерівності є $x=-2$;

2.3) якщо $D>0$, то множиною розв'язків нерівності є відрізок $\left[x_1;x_2\right]$, який також не містить проміжок $(-\infty;1)$;

Отже, серед $a>0$ немає таких, при яких дана нерівність справджується на множині $(-\infty;1)$.

3) при $a<0$ для величини $D=4(1-a)(2a+1)$ також можливі три випадки:

3.1) якщо $D<0$, то $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, а розв'язками нерівності є множина $x\in(-\infty;+\infty)$, яка містить проміжок $(-\infty;1)$;

3.2) якщо $D=0$, то $a=-\frac{1}{2}$, а розв'язками нерівності є множина $x\in(-\infty;+\infty)$, яка містить проміжок $(-\infty;1)$;

3.3) якщо $D>0$, то $a\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$, а розв'язками нерівності є множина $x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$, яка містить проміжок $(-\infty;1)$ тоді і лише тоді, коли менший x_1 з коренів рівняння $ax^2+2(a+1)x+3a+1=0$ задовольняє умову $x_1\geq 1$.

Покажемо, що серед $a\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$ немає таких, при яких ця умова виконується, тобто, що система $\begin{cases} x_1\geq 1 \\ a\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\end{cases}$ не має розв'язків.

$$\begin{cases} \dfrac{-2(a+1)+2\sqrt{(1-a)(2a+1)}}{2a}\geq 1 \\ -\frac{1}{2}<a<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(a+1)+\sqrt{(1-a)(2a+1)}\leq a \\ -\frac{1}{2}<a<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(1-a)(2a+1)}\leq 2a+1 \\ -\frac{1}{2}<a<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-a)(2a+1)\leq(2a+1)^2 \\ (1-a)(2a+1)\geq 0 \\ -\frac{1}{2}<a<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0\leq(2a+1)\cdot 3a \\ a\in\left[-\frac{1}{2};1\right] \\ -\frac{1}{2}<a<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\left(a+\frac{1}{2}\right)\geq 0 \\ -\frac{1}{2}<a<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[0;+\infty) \\ a\in\left(-\frac{1}{2};0\right) \end{cases} \Rightarrow\varnothing$$

Таким чином при жодному $a\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$ множина розв'язків нерівності не містить проміжок $(-\infty;1)$. Отже, лише при $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ множина розв'язків даної нерівності містить проміжок $(-\infty;1)$.

Відповідь: множина розв'язків даної нерівності справджується на множині (містить проміжок) $(-\infty;1)$ при всіх $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

Задача 5

Які з наступних тверджень (*в списку нижче*) є правдивими (правильними), а які хибними (помилковими)?

1. Три твердження *в цьому списку* хибні, інші правдиві.
2. Принаймні, одне твердження *в цьому списку* хибне.
3. Принаймні, одне твердження *в цьому списку* правдиве.
4. Всі твердження *в цьому списку* хибні.

Розв'язання

1) «4-е» твердження не може бути правдивим, бо буде суперечити саме собі; тому правдивим є «2» твердження;

2) оскільки «2» твердження є правдивим, то правдивим є і «3» твердження;

3) «1-е» твердження не може бути правдивим, бо буде суперечити саме собі, і тому «1-е» твердження є хибним.

Відповідь: «2» і «3» – правдиві твердження;
«1» і «4» – хибні твердження.

11 клас

Задача 1

Відомо, що для довжин a, b і c сторін трикутника справджується рівність $c = \dfrac{ab}{a+b}$. Доведіть, що в такому трикутнику довжина однієї з висот дорівнює сумі довжин двох інших висот трикутника.

Розв'язання

Нехай S – площа трикутника, h_a, h_b, h_c – довжини висот, опущених на сторони довжин a, b і c відповідно. Тоді, як відомо, мають місце рівності $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$.

Звідки $a = \dfrac{2S}{h_a}, b = \dfrac{2S}{h_b}, c = \dfrac{2S}{h_c}$; $h_a = \dfrac{2S}{a}, h_b = \dfrac{2S}{b}, h_c = \dfrac{2S}{c}$. І тому мають місце наступні способи доведення твердження.

1 спосіб

$$c = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow \frac{2S}{h_c} = \frac{\frac{2S}{h_a} \cdot \frac{2S}{h_b}}{\frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b}} \Rightarrow \frac{2}{h_c} = \frac{4}{2\left(h_b + h_a\right)} \Rightarrow \frac{2}{h_c} = \frac{2}{h_b + h_a} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{1}{h_b + h_a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h_c = h_b + h_a.$$

2 спосіб

$$c = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{h_c}{ch_c} = \frac{h_b}{bh_b} + \frac{h_a}{ah_a} \Rightarrow \frac{h_c}{2S} = \frac{h_b}{2S} + \frac{h_a}{2S} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h_c = h_b + h_a.$$

3 спосіб

$$c = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow c = \frac{ab \cdot h_a h_b}{(a+b) \cdot h_a h_b} \Rightarrow c = \frac{4S^2}{2S\left(h_b + h_a\right)} \Rightarrow c = \frac{2S}{\left(h_b + h_a\right)} \Rightarrow h_b + h_a = \frac{2S}{c} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h_b + h_a = h_c.$$

4 спосіб

$$c = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow ac + bc = ab \Rightarrow \frac{4S^2}{h_a h_c} + \frac{4S^2}{h_b h_c} = \frac{4S^2}{h_a h_b} \Rightarrow \frac{1}{h_a h_c} + \frac{1}{h_b h_c} = \frac{1}{h_a h_b} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h_b + h_a = h_c.$$

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

?! Доведіть, що якщо в трикутнику довжина однієї з висот дорівнює сумі довжин двох інших висот, то довжина однієї зі сторін такого трикутника дорівнює відношенню добутку і суми довжин двох інших сторін.

Задача 2

Відомо, що (двозначне) число $\overline{ab}$ більше за (двозначне) число $\overline{ba}$. Доведіть, що їх відношення не може бути натуральним числом.

Розв'язання

1) Оскільки (двозначне) число $\overline{ab}$ більше за (двозначне) число $\overline{ba}$, то жодна з цифр a і b не може бути 0 і $a > b$.

2) Припустимо, що існує натуральне число k таке, що $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = k$. Тоді

$\overline{ab} = k \cdot \overline{ba} \Leftrightarrow 10a + b = k(10b + a) \Leftrightarrow$

$$a(10 - k) = b(10k - 1). \qquad (11.2.1)$$

3) Оскільки $a > b$, то

$\dfrac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{10k-1}{10-k} > 1 \Rightarrow \dfrac{10k-1}{k-10} < -1 \Rightarrow \dfrac{10k-1}{k-10} + 1 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{k-1}{k-10} < 0 \Rightarrow k \in (1;10)$. Звідки

$$k \in [2;9]. \qquad (11.2.2)$$

4) Оскільки $a, b \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, то $\dfrac{a}{b} \le 9$. Тому

$\dfrac{10k-1}{10-k} \le 9 \Rightarrow \dfrac{10k-1}{k-10} \ge -9 \Rightarrow \dfrac{10k-1}{k-10} + 9 \ge 0 \Rightarrow \dfrac{19k-91}{k-10} \ge 0 \Rightarrow$

$$k \in \left(-\infty; 4\tfrac{15}{19}\right] \cup (10;+\infty). \qquad (11.2.3)$$

5) З урахуванням (11.2.2) і (11.2.3) маємо, що $k \in \{2;3;4\}$; якщо припустити, що:

$k = 2$, то з рівності (11.2.1) матимемо, що $8 \cdot a = 19 \cdot b$, чого бути не може, оскільки цифра a не ділиться на просте число 19;

$k = 3$, то з рівності (11.2.1) матимемо, що $7 \cdot a = 29 \cdot b$, чого бути не може, оскільки цифра a не ділиться на просте число 29;

$k = 4$, то з рівності (11.2.1) матимемо, що $6 \cdot a = 39 \cdot b \Leftrightarrow 2 \cdot a = 13 \cdot b$, чого бути не може, оскільки цифра a не ділиться на просте число 13.

Таким чином, відношення (двозначних) чисел $\overline{ab}$ і $\overline{ba}$ не може бути натуральним числом.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

?! Відомо, що (тризначне) число $\overline{abc}$ більше за (тризначне) число $\overline{cba}$. Доведіть, що їх відношення не може бути натуральним числом.

Задача 3

Розв'язання

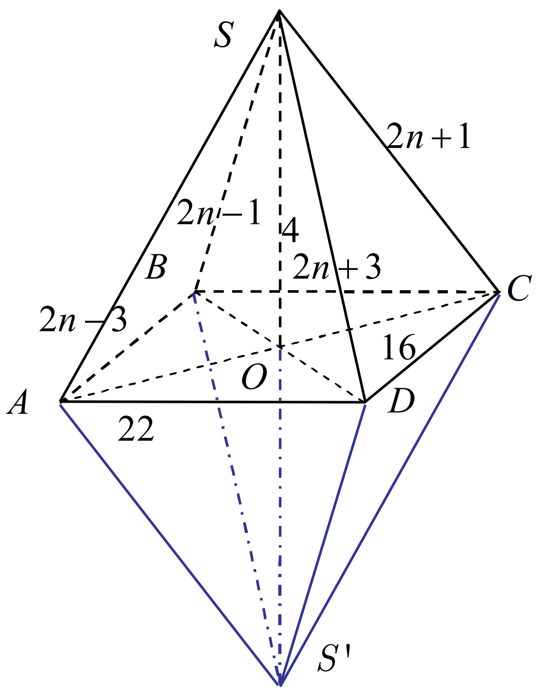
Нехай $SABCD$ – дана піраміда, основою якої є паралелограм $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Оскільки довжини сторін паралелограма 22 см і 16 см, то заради визначеності будемо вважати, що $AB = 16$, а $BC = 22$. Тоді (за властивостями паралелограма) маємо, що $AO = OC$, $BO = OD$; $CD = AB = 16$, $DA = BC = 22$.

Оскільки (за умовою) довжини бічних ребер піраміди виражаються непарними послідовними числами, то (без втрати загальності – з точністю до перепозначення) можна вважати, що саме

$SA = 2n - 3$, $SB = 2n - 1$, $SC = 2n + 1$, $SD = 2n + 3$, де $n \geq 2$.

Крім того, за умовою $SO = 4$ см.

1 спосіб



1) На промені SO відкладемо відрізок OS' так, щоб точка O була серединою відрізка SS'.

2) Сполучимо S' з вершинами паралелограма $ABCD$.

Оскільки $AO = OC$, $BO = OD$, $SO = OS'$, то (за ознакою паралелограма) чотирикутники $ASCS'$ і $BSDS'$ є паралелограмами зі спільною діагоналлю $SS' = 2SO = 8$.

3) Оскільки для паралелограма сума квадратів довжин діагоналей дорівнює сумі квадратів довжин всіх його сторін, то для паралелограмів $ABCD$, $ASCS'$ та $BSDS'$ справджуються відповідні рівності

$$AC^2 + BD^2 = 2\left(22^2 + 16^2\right) = 1480; \tag{11.3.1}$$

$$AC^2 + 8^2 = 2\left((2n-3)^2 + (2n+1)^2\right); \tag{11.3.2}$$

$$BD^2 + 8^2 = 2\left((2n-1)^2 + (2n+3)^2\right). \tag{11.3.3}$$

4) Додавши рівності (11.3.2) і (11.3.3) матимемо:

$$AC^2 + BD^2 + 2 \cdot 64 = 2\left((2n-3)^2 + (2n+1)^2 + (2n-1)^2 + (2n+3)^2\right). \tag{11.3.4}$$

З урахуванням (11.3.1), рівняння (11.3.4) набуває вид

$1480+128=2\left(16n^2+20\right)$, звідки маємо: $740+44=16n^2$, $784=16n^2$, $n^2=49$.

Оскільки $n \geq 2$, то з $n^2=49 \Rightarrow n=7$. Таким чином $SA=2\cdot 7-3=1$, $SB=2\cdot 7-1=13$, $SC=2\cdot 7+1=15$, $SD=2\cdot 7+3=17$.

2 спосіб

1) Розглянемо $\triangle ASC$.

В ньому $AO=OC$. Очевидно, що кути SOA і SOC є суміжними. І тому $\angle SOC=180^\circ-\angle SOA$. Звідки $\cos\angle SOC=-\cos\angle SOA$.

З $\triangle SOA$ за теоремою косинусів маємо рівність

$$\left(2n-3\right)^2=OA^2+4^2-2\cdot OA\cdot 4\cdot\cos\angle SOA. \qquad (11.3.5)$$

З $\triangle SOC$ за теоремою косинусів маємо рівність

$\left(2n+1\right)^2=OC^2+4^2-2\cdot OC\cdot 4\cdot\cos\angle SOC \Rightarrow$

$$\left(2n+1\right)^2=OA^2+4^2+2\cdot OA\cdot 4\cdot\cos\angle SOA. \qquad (11.3.6)$$

З (11.3.5) і (11.3.6) маємо

$$\left(2n-3\right)^2+\left(2n+1\right)^2=2OA^2+32. \qquad (11.3.7)$$

2) Розглянемо $\triangle BSD$.

В ньому $BO=OD$. Очевидно, що кути SOB і SOD є суміжними. І тому $\angle SOD=180^\circ-\angle SOB$. Звідки $\cos\angle SOD=-\cos\angle SOB$.

З $\triangle SOB$ за теоремою косинусів маємо рівність

$$\left(2n-1\right)^2=OB^2+4^2-2\cdot OB\cdot 4\cdot\cos\angle SOB. \qquad (11.3.8)$$

З $\triangle SOD$ за теоремою косинусів маємо рівність

$\left(2n+3\right)^2=OD^2+4^2-2\cdot OD\cdot 4\cdot\cos\angle SOD \Rightarrow$

$$\left(2n+3\right)^2=OB^2+4^2+2\cdot OB\cdot 4\cdot\cos\angle SOB. \qquad (11.3.9)$$

З (11.3.8) і (11.3.9) маємо

$$\left(2n-1\right)^2+\left(2n+3\right)^2=2OB^2+32. \qquad (11.3.10)$$

З рівностей (11.3.7) і (11.3.10) маємо

$$\left(2n-3\right)^2+\left(2n+1\right)^2+\left(2n-1\right)^2+\left(2n+3\right)^2=\tfrac{1}{2}\left(4OA^2+4OB^2\right)+64. \qquad (11.3.11)$$

3) Для $ABCD$ має місце «рівність паралелограма»

$$AC^2+BD^2=2\left(22^2+16^2\right)=1480 \Rightarrow 4OA^2+4OB^2=1480. \qquad (11.3.12)$$

З урахуванням (11.3.11) та (11.3.12) одержуємо рівняння

$\left(2n-3\right)^2+\left(2n+1\right)^2+\left(2n-1\right)^2+\left(2n+3\right)^2=\tfrac{1}{2}\cdot 1480+64 \Rightarrow$

$16n^2+20=740+64 \Rightarrow 16n^2=784 \Rightarrow n^2=49 \Rightarrow n=7$. Отже $SA=2\cdot 7-3=1$, $SB=2\cdot 7-1=13$, $SC=2\cdot 7+1=15$, $SD=2\cdot 7+3=17$.

Відповідь: 11, 13, 15, 17 см.

Задача 4

Розв'яжіть рівняння

$$\left(\operatorname{tg}\tfrac{19\pi}{3}-\operatorname{tg}x\right)\cdot\sqrt{6\cos\tfrac{15\pi}{4}\cos\tfrac{x}{2}-\cos x-3}=0\,. \qquad (11.5.1)$$

Розв'язання

1) $\operatorname{tg}\frac{19\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(2\pi\cdot 3+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$;

2) $\cos\frac{15\pi}{4}=\cos\left(\frac{16\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\pi\cdot 2-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos x=\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\frac{x}{2}-1$;

1 спосіб

4) **(11.5.1)** $\Leftrightarrow\left(\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}-\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)-3}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{-2\cos^2\tfrac{x}{2}+3\sqrt{2}\cos\tfrac{x}{2}-2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2\left(\sqrt{2}-\cos\tfrac{x}{2}\right)\left(\cos\tfrac{x}{2}-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\left(\sqrt{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}\operatorname{tg}x-\sqrt{3}=0\\ 2\left(\sqrt{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}\operatorname{tg}x=\sqrt{3}\\ \cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}\operatorname{tg}x=\sqrt{3}\\ \cos\frac{x}{2}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+\pi l,\ l\in Z\\ -\frac{\pi}{4}+2\pi m\leq\frac{x}{2}\leq\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in Z\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\pm\frac{\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+\pi l,\ l\in Z\\ -\frac{\pi}{2}+4\pi m\leq x\leq\frac{\pi}{2}+4\pi m,\ m\in Z\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\varnothing\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+\pi l,\ l\in Z\\ -\frac{\pi}{2}+4\pi m\leq x\leq\frac{\pi}{2}+4\pi m,\ m\in Z\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+\pi l,\ l\in Z\\ -\frac{\pi}{2}+4\pi m\leq\frac{\pi}{3}+\pi l\leq\frac{\pi}{2}+4\pi m,\ m\in Z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+\pi l,\ l\in Z\\ -\frac{1}{2}+4m\leq\frac{1}{3}+l\leq\frac{1}{2}+4m,\ m\in Z\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+\pi l,\ l\in Z\\ -\frac{5}{6}+4m\leq l\leq\frac{1}{6}+4m,\ m\in Z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+\pi l,\ l\in Z\\ l=4m,\ m\in Z\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+4\pi m,\ m\in Z\,.$$

2 спосіб

4) $(11.5.1) \Leftrightarrow \left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} - \left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) - 3} = 0\,.$ (11.5.2)

5) Очевидно, що ОДЗ даного рівняння є розв'язки системи

$$\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ 3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} - \left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) - 3 \geq 0. \end{cases} \quad (11.5.3)$$

$$3\sqrt{2}\cos\tfrac{x}{2} - \left(2\cos^2\tfrac{x}{2} - 1\right) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow -2\cos^2\tfrac{x}{2} + 3\sqrt{2}\cos\tfrac{x}{2} - 2 \geq 0\,;$$

$$\cos^2\tfrac{x}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\tfrac{x}{2} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \cos^2\tfrac{x}{2} - 2\cdot\cos\tfrac{x}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4} + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 \leq 0\,;$$

$$\left(\cos\tfrac{x}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 1 - \frac{18}{16} \leq 0 \Leftrightarrow \left(\cos\tfrac{x}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\cos\tfrac{x}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2;$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} \leq \cos\tfrac{x}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\tfrac{x}{2} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\tfrac{x}{2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} + 2\pi l \leq \tfrac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi l \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 4\pi l \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 4\pi l,\ l \in Z\,.$$

Оскільки $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, то розв'язками системи (10.5.3) а тому і ОДЗ рівняння (11.5.2) є дійсні $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 4\pi l; \dfrac{\pi}{2} + 4\pi l\right)$. Крім того, оскільки корені $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 4\pi l,\ l \in Z$ рівняння $\sqrt{3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} - \left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) - 3} = 0$ не є розв'язками системи (11.5.3), бо $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, то рівняння (11.5.2) є рівносильним до системи

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} + 4\pi l \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 4\pi l,\ l \in Z, \end{cases} \text{звідки} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in Z \\ -\dfrac{\pi}{2} + 4\pi l \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 4\pi l,\ l \in Z \end{cases} \quad (10.5.4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in Z \\ -\frac{\pi}{2} + 4\pi l \leq \frac{\pi}{3} + \pi m \leq \frac{\pi}{2} + 4\pi l,\ l \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in Z \\ -\frac{1}{2} + 4l \leq \frac{1}{3} + m \leq \frac{1}{2} + 4l,\ l \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in Z \\ -\frac{5}{6} + 4l \leq m \leq \frac{1}{6} + 4l,\ l \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in Z \\ m = 4l,\ l \in Z. \end{cases}$$

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{3} + 4\pi m,\ m \in Z$ **.**

Задача 5

Які з наступних тверджень (*в списку нижче*) є правдивими (правильними), а які хибними (помилковими)?

1. Два твердження *в цьому списку* хибні, інші правдиві.
2. Три твердження *в цьому списку* хибні, інші правдиві.
3. Принаймні, одне твердження *в цьому списку* хибне.
4. Принаймні, одне твердження *в цьому списку* правдиве.
5. Всі твердження *в цьому списку* хибні.

Розв'язання

1) «5-е» твердження не може бути правдивим, бо буде суперечити саме собі; тому правдивим є «3» твердження;

2) Оскільки «3» твердження є правдивим, то правдивим є і «4» твердження.

3) «2-е» твердження не може бути правдивим, бо буде суперечити саме собі, і тому «2-е» твердження є хибним.

4) «1-е» твердження не суперечить собі, і тому є правдивим.

Відповідь: «1», «3», «4» – правдиві твердження;
«2» і «5» – хибні твердження.

ДОДАТКИ

Додаток А.
Умови завдань III (обласного) етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2019 / 2020 н.р. (Донецька область)

(середній рівень)[5]

7 клас

0. Яке з наведених чисел є коренем рівняння $(x-1)+x(x-1)^2=0$?

а) 1; б) 2019; в) 2020; г) 2021.

(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень).

1. Знайдіть усі пари $(m;n)$ натуральних чисел, які задовольняють рівність: $m^{10}+23mn+n!=2020$, де через $n!$ позначений добуток усіх натуральних чисел від 1 до n. Відповідь обґрунтуйте.

2. Віка загадала слово з 20 букв, кожна з яких є A чи B. Олексій намагається його визначити. За одне запитання він може дізнатися таку інформацію про декілька літер, що йдуть поспіль: яких серед них більше – A чи B, якщо їх порівну, то Віка може назвати будь-яку з двох літер. За яку найменшу кількість запитань Олексій гарантовано зможе повністю визначити слово, що задумала Віка? Відповідь обґрунтуйте.

3. Відомо, що команда після x ігор в чемпіонаті мала рівно $n\%$ перемог, де n – ціле число. При якому найменшому x могло так статися, що після $x+1$ гри в неї стало рівно $(n+1)\%$ перемог? Відповідь обґрунтуйте.

4. У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і BC рівні. Точка E на прямій AB така, що $BD=BE$ та $AD\perp DE$. Доведіть, що серединні перпендикуляри до відрізків AD, CD та CE перетинаються в одній точці.

[5] Інститут модернізації змісту освіти, Київський національний університет імені Тараса Шевченка

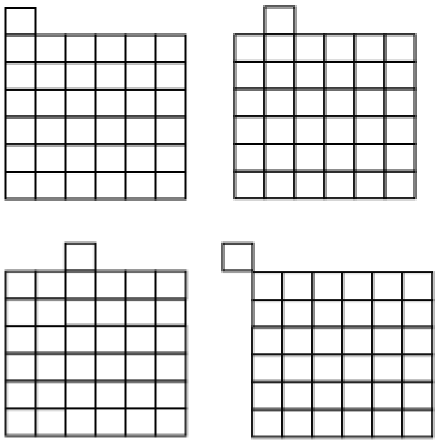
8 клас

0. Яке з наведених чисел є коренем рівняння $(x-10)^2=(10-x)^3$?

а) 10; б) 2019; в) 2020; г) 2021?

(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень).

1. Знайдіть усі можливі натуральні числа n такі, що менші ніж 1% від числа 2020, а число $n+1$ більше ніж 1% від числа 2019.
2. Вася виписав всі семицифрові числа, що містять кожну цифру від 1 до 7 рівно один раз. Доведіть, що жодне з виписаних чисел не ділиться на жодне інше з цих чисел.
3. Назвемо ***квазіквадратом*** фігуру, що складається з квадрату $n\times n$, до якої зовні приєднано ще один квадратик 1×1, що має спільну сторону з одним з квадратиків квадрату $n\times n$, а також спільну вершину з одним з кутових квадратиків квадрату $n\times n$. Так на рисунку нижче дві верхні фігурки є ***квазіквадратами***, а дві нижні – ні. Для яких $n\geq 3$ можна однаковими квазіквадратами заповнити усю площину? Квазіквадрати не мають накладатися один на інший, але їх можна повертати та перегортати.



4. Є n вибрані попарно різні додатні числа. Вася виписав на дошку всі можливі числа вигляду $a+\frac{b}{c}$, де a,b,c – різні числа з вибраних. Чи завжди серед виписаних чисел знайдуться два, що відрізняються не більше, ніж у 2 рази, якщо:

а) $n=4$? б) $n=3$?

5. Нехай $ABCDEF$ – вписаний у коло шестикутник, у якого $AB=BC$, $CD=DE$ та $EF=FA$. Доведіть, що прямі AD, BE та CF перетинаються в одній точці.

9 клас

0. Медіани трикутника в точці перетину, рахуючи від вершини, діляться у відношенні

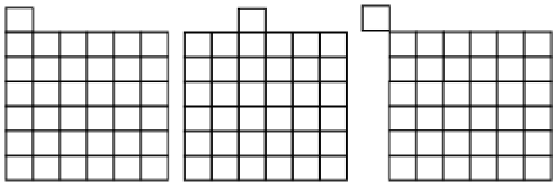
а) $2:1$; б) $219:2020$; в) $2021:2020$; г) $2020:2019$?

1. Доведіть, що не існує різних натуральних чисел a і b, для яких $\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}+\left\{\frac{b}{a}\right\}\right\}=0$.

Тут через $\{x\}$ позначена різниця між числом x та найбільшим цілим числом, що не перевищує x. Наприклад, $\left\{\frac{7}{5}\right\}=\frac{2}{5}$, $\left\{\frac{2019}{3}\right\}=0$ та $\left\{\frac{2020}{3}\right\}=\frac{1}{3}$.

2. Задане деяке просте число $p>2$. По колу стоять N людей, кожний з яких задумав деяке натуральне число, а далі на своєму папірці написав остачу від ділення свого числа на p. Далі кожний подивився на записане на папірці число сусіда справа, розглянув добуток свого записаного числа та підглянутого числа сусіда та на своєму папірці написав друге число, що дорівнює остачі від ділення обчисленого добутку на p. Яке максимальне значення може приймати N, якщо усі перші числа в усіх людей різні, а крім того у кожного на папірці записані два різних числа?

3. Назвемо ***квазіквадратом*** фігуру, що складається з квадрату $n\times n$, $n\geq 4$, до якої зовні приєднано ще один квадратик 1×1, що має спільну сторону з одним з квадратів квадрату $n\times n$. Так на рисунку нижче дві перші фігурки є ***квазіквадратами***, третя – ні. Чи завжди можна такими однаковими квазіквадратами покрити усю площину? Квазіквадрати не мають накладатися один на інший, але їх можна повертати та перегортати.



4. Нехай точка D лежить на дузі AC описаного кола трикутника ABC ($AB<BC$), що не містить точку B. На стороні AC вибрані довільна точка X та точка X', для якої $\angle ABX=\angle CBX'$. Доведіть, що незалежно від вибору точки X, коло, яке описане навколо $\triangle DXX'$, проходить через фіксовану точку, що відмінна від точки D.

5. Для довільних дійсних чисел $a,b,c\geq 1$ доведіть нерівність

$$3abc+a+b+c\geq 2(ab+bc+ca).$$

За яких умов в цій нерівності можлива рівність?

10 клас

0. Скільки діагоналей має опуклий шестикутник

а) 9; б) 2019; в) 2020; г) 2021?

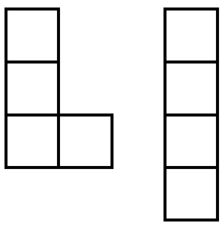
(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень).

1. Чи існують попарно різні натуральні числа a,b та c, для яких $\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}+\left\{\frac{b}{c}\right\}+\left\{\frac{c}{a}\right\}\right\}=0$? Дроби не обов'язково мають бути нескоротними.

Тут через $\{x\}$ позначена різниця між числом x та найбільшим цілим числом, що не перевищує x. Наприклад, $\left\{\frac{7}{5}\right\}=\frac{2}{5}$, $\left\{\frac{2019}{3}\right\}=0$ *та* $\left\{\frac{2020}{3}\right\}=\frac{1}{3}$.

2. Доведіть, що серед чисел $1,2,...,10000$ можна вибрати 7 чисел, які не є квадратами натуральних чисел, так, щоб не можна було з цих 7 чисел вибрати декілька, сума яких була б квадратом натурального числа.

3. Чи можна непарною кількістю $L-$тетраміно і деякою кількістю прямих тетраміно (рис. нижче) замостити деякий прямокутник? Тетраміно не можуть виходити за межі прямокутника, кожна клітинка прямокутника має бути покрита рівно одним тетраміно.



4. Для додатних чисел a,b,c доведіть нерівність

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+6\geq 9\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

5. Нехай Γ – півколо з діаметром AB. На цьому діаметрі вибирається точка C, а на півколі вибираються точки D та E так, що E лежить між B та D. Виявилося, що $\angle ACD=\angle ECB$. Точку перетину дотичних до Γ у точках D та E позначили через F. Доведіть, що

$$\angle EFD=\angle ACD+\angle ECB.$$

11 клас

0. Скільки граней має правильна трикутна призма

а) 5; б) 2019; в) 2020; г) 2021?

(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень).

1. З'ясуйте, яке з чисел більше 2 чи $1\ \operatorname{tg} 1$?

2. Доведіть, що серед чисел $1, 2, ..., 10000$ можна вибрати 8 чисел, які не є квадратами натуральних чисел, так, щоб не можна було з цих 8 чисел вибрати декілька, сума яких була б квадратом натурального числа.

3. Заданий білий квадрат $ABCD$ завбільшки 8×8, що складається з 64 одиничних квадратиків (клітинок) 1×1. За одну дію можна вибрати будь-який

а) квадрат; б) прямокутник,

що складається з цілої кількості одиничних квадратиків і містить принаймні одну з вершин квадрату $ABCD$, та поміняти в ньому колір кожної клітинки на протилежний (білий замінюється на чорний та навпаки). Чи можна за допомогою таких дій отримати довільне розфарбування клітин квадрату $ABCD$?

4. Дано гострокутний нерівнобедрений трикутник ABC, AK та CN – його бісектриси, I – їх точка перетину. Нехай точка X – друга точка перетину кіл описаних навколо $\triangle ABC$ та $\triangle KBN$. Нехай M – середина сторони AC. Доведіть, що пряма Ейлера $\triangle ABC$ перпендикулярна прямій BI тоді і тільки тоді, коли точки X, I та M – лежать на одній прямій.

Прямою Ейлера у нерівносторонньому трикутнику називається пряма, що проходить через точку перетину висот, точку перетину медіан та центр описаного кола трикутника.

5. Додатні числа a, b, c задовольняють умову $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Доведіть, що справджується нерівність $\frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c} \geq 4a^2 + 3b^2 + 2c^2$.

Додаток Б.
Умови завдань II етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів-членів МАН України з математики (Донецька область), 2019 / 2020 н.р.

9 клас

I рівень (кожне завдання оцінюється в 3 бали)

1. Зібрано 100 кг грибів. Вологість грибів складає 99%. Після просушки вологість стала 98%. Скільки стали важити гриби після просушки?

2. Спростити вираз: $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$.

3. Точка P поділяє сторону AD прямокутника $ABCD$ у відношенні $1:2$, причому $PB = PD$. Знайти величину кута між діагоналями цього прямокутника.

II рівень (кожне завдання оцінюється в 5 балів)

4. У рівнобедрений трикутник із кутом 1200 при вершині й бічною стороною а, вписано коло. Знайти радіус цього кола.

5. Довести нерівність $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \le 9$, якщо $a+b+c=6$.

III рівень (кожне завдання оцінюється в 7 балів)

6. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює P, а його бічна сторона на m більша основи. Знайти висоту, опущену на бічну сторону.

7. Скільки розв'язків має рівняння $\dfrac{2}{|1-x|+|x+1|} = a$?

10 клас

I рівень (кожне завдання оцінюється в 3 бали)

1. У бригаді було 5 робітників, середній вік яких становив 35 років. Після того як бригада поповнилась одним робітником, середній вік робітників став 34 роки. Скільки років робітнику, який поповнив бригаду?

2. Обчисліть $\dfrac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}} - \dfrac{1}{\sqrt{10}-3} - \sqrt{11}$.

3. Якщо між цифрами двозначного числа x вписати це ж число, то отримане чотирьохзначне число буде в 66 раз більше початкового двозначного. Знайти x.

II рівень (кожне завдання оцінюється в 5 балів)

4. Хорда, довжина якої 12 см, перпендикулярна до діаметра кола і ділить його на два відрізки, різниця довжин яких дорівнює 9 см. Знайдіть довжину кола.

5. Розв'язати рівняння $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$. У відповіді зазначте кількість розв'язків на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

III рівень (кожне завдання оцінюється в 7 балів)

6. При яких значеннях a рівняння $\left(a + 4x - x^2 - 1\right)\left(a + 1 - |x - 2|\right) = 0$ має рівно три корені?

7. Знайти найбільше значення функції $f(x) = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}}$.

11 клас

I рівень (кожне завдання оцінюється в 3 бали)

1. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = (3x - 7)^3$ в точці з ординатою $y_0 = 8$.

2. Спростити вираз: $\frac{\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}$.

3. При яких значеннях параметра b має один корінь рівняння $(b + 6)x^2 - (b - 2)x + 1 = 0$?

II рівень (кожне завдання оцінюється в 5 балів)

4. Розв'яжіть нерівність $4 \cdot 2^{2x^2 - 4x + 2} + 8 \cdot 2^{2x^2 - 4x} + 4^{(x-1)^2} \le 7 \cdot 16^2$. Якщо розв'язком нерівності є відрізок, то у відповідь запишіть його довжину, а якщо об'єднання відрізків – суму їхніх довжин.

5. У прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки 20 см і 15 см. Відстань точки простору, рівновіддаленої від сторін трикутника, до його площини дорівнює 24 см. Обчислити відстань від даної точки до сторін трикутника.

III рівень (кожне завдання оцінюється в 7 балів)

6. Побудуйте графік функції: $y = \sqrt{6 + x - 4\sqrt{x + 2}} + \sqrt{x + 2}$.

7. Сторони основи трикутної піраміди $SABC$ дорівнюють a, a, b. Всі бічні ребра нахилені до площини основи від кутом 60^0. Знайти об'єм піраміди.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Математичні олімпіади і турніри в Україні

1. Басанько А.М. За лаштунками підручника з математики : [збірник розвиваючих задач для учнів 5 – 7 класів] / А.М. Басанько, А.О. Романенко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. – 213 с.
2. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 1]. – Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 5(65). – 128 с.
3. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 2]. – Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 6(66). – 141 с.
4. Готуємось до олімпіади з математики / упорядн. А.Б. Веліховська, О.В. Гримайло. // Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2007. –Вип. 2 (50) – 160 с.
5. Змагання юних математиків України. 2003 рік / В.М. Лейфура. – Х. : Основа, 2004. – 80 с.
6. Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. : [збірник задач] / В.А. Вишенський, М. В. Карташов. – К. : Либідь, 1993. – 144 с.
7. Київські міські математичні олімпіади 2003–2011 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2011. – 192 с.
8. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад. 8-11 класи / Т. В. Коваль. – Тернопіль : Мандрівець, 2004. – 80 с.
9. Лось В.М. Математика : навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач / В.М. Лось, В.П. Тихієнко. – К. : Кондор, 2005 – 312 с.
10. Математичні олімпіади школярів України. 1991-2000 / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман. – К. : Техніка, 2003. – 541 с.
11. Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000 рр. / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. – Київ: Техніка, 2003. — 541 с.
12. Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр. / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. – Львів: Каменяр, 2008. — 348 с.
13. Математичні олімпіадні змагання школярів : 2006–2007 рр. / А.В. Анікушин, А.Р. Арман та ін. – К.: Літера, 2008 – 224 с.
14. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007–2008 та 2008–2009 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). – Л.: Каменяр, 2010. – 549 с.

15. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2009–2010 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2011. – 320 с.
16. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2010–2011 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2013. – 368 с.
17. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2011–2012 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2013. – 416 с.
18. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2012–2013 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2014. – 401 с.
19. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2013–2014 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2015. – 465 с.
20. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2014–2015 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2016. – 464 с.
21. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2015–2016 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2017. – 464 с.
22. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2016–2017 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2018. – 464 с.
23. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч : [навчальний посібник] – К. : А.С.К., 2005. – 344 с.
24. Сборник задач киевских математических олимпиад / В.А. Вышенский, Н.В. Карташев, В.И. Михайловский, М.И. Ядренко. – К. : Вища школа, 1984. – 240 с.
25. Українські математичні олімпіади : [довідник] / В.А. Вишенський, О.Г. Ганюшкін та ін. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с.
26. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики : [посібник для ЗНЗ]. – Чернівці, 2003. – 360 с.
27. Федак І.В. Олімпіади з математики: 1987–2016 роки. Завдання, відповіді. – Х. : Видавнича група «Основа», 2016. – 239 с.
28. Ясінський В.А. Олімпіадні задачі [випуск 1: навчальний посібник]. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 40 с.
29. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язання. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.
30. Ясінський В.А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад. Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2006. – 128 с.

ІІ і ІІІ тури Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики в Донецькій області

1. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / [Р. И. Довбыш, Л. Л. Потемкина, Н. Л. Трегуб и др.] – Донецк: ООО ПКФ «БАО», **2005**. – 336 с.
2. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2007 / Б.Б. Беседін, Г.М. Бірюкова, Г.О. Ганзера, В.М. Кадубовська, О.А. Кадубовський, Л.Г. Плесканьова, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2008**. – 40 с.
3. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2008 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, Л.Г. Плесканьова, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 2, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2009**. – 44 с.
4. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2009 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, Г.О. Ганзера, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 5, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2010**. – 44 с.
5. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2010 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 8, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2011**. – 80 с.
6. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2011 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко, М.М. Рубан // Випуск 10, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2012**. – 84 с.
7. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2012 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, М.М. Рубан, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 11, СЕРІЯ: Викладачі ДДП – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2013**. – 64 с.

8. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2013 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. – Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», **2014**. – 60 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 12).
9. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2014 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. – Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», **2015**. – 64 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 13).
10. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2015 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, О.В. Чуйко, С.І. Воробйова. – Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», **2016**. – 100 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 14).
11. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2016 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, О.В. Чуйко. – Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», **2017**. – 100 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 15).
12. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2018 : навчальний посібник / О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін, В. С. Сьомкін. – Слов'янськ : вид. центр «Маторін», **2019**. – 100 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 21).

Серія «Шкільні математичні гуртки»

1. Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. – М.: МЦНМО, 2011. – 104 с.
2. Блинков А.Д., Блинков Ю.А. Геометрические задачи на построение. – 2-е изд., стереот. – М.: МЦНМО, 2012. – 152 с.
3. Мерзон Г.А., Ященко И.В. Длина, площадь, объём. – М.: МЦНМО, 2012. – 48 с.
4. Блинков А.Д. Классические средние в арифметике и в геометрии. – 2-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2013. – 168 с.
5. Заславский А.А, Френкин Б.Р., Шаповалов А.В. Задачи о турнирах. – М.: МЦНМО, 2013. – 104 с.
6. Медников Л.Э. Чётность. – М.: МЦНМО, 2013. – 60 с.
7. Сгибнев А.И. Делимость и простые числа. – 2-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2013. – 112 с.
8. Шаповалов А. В. Как построить пример? – М.: МЦНМО, 2013. – 80 с.
9. Гуровиц В.М., Ховрина В.В. Графы. – 4-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2014. – 32 с.
10. Раскина И.В, Шноль Д.Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014. – 120 с.
11. Чулков П.В. Арифметические задачи. – изд. 4-е, стер. – М.: МЦНМО, 2014. – 64 с.
12. Блинков А.Д, Гуровиц В.М. Непрерывность. – М.: МЦНМО, 2015. – 160 с.
13. Шаповалов А.В. Математические конструкции: от хижин к дворцам. – М.: МЦНМО, 2015. – 176 с.
14. Блинков А.Д. Геометрия в негеометрических задачах. Электронное издание. – М.: МЦНМО, 2016. – 155 с.
15. Раскина И.В. Логика для всех: от пиратов до мудрецов. – М.: МЦНМО, 2016. – 208 с.
16. Блинков Ю.А., Горская Е.С. Вписанные углы – М.: МЦНМО, 2017. – 168 с.
17. Кноп К.А. Азы теории чисел. – М.: МЦНМО, 2017. – 80 с.
18. Блинков А.Д. Последовательности. – М.: МЦНМО, 2018. –160 с.
19. Сгибнев А.И. Геометрия на подвижных чертежах. – М.: МЦНМО, 2019. –184 с.

20. Лук'янова С. Розв'язування текстових задач арифметичними способами : 5–6 кл. – К. : Вид. дім «Шкіл. світ» : Вид. Л. Галіцина, 2006. – 128 с. – (Б-ка «Шкіл. світу»). – Бібліогр.: с. 127.
21. Методические рекомендации по решению задач повышенной трудности в курсе математики IV-V классов : для физико-математических специальностей педагогических институтов / [сост. : Б. А. Викол, Л. В. Викол., Н. И. Труш]. – Славянск : СГПИ, 1987. – 50 с.
22. Методические рекомендации по решению задач повышенной трудности в курсе математики VI-VIII классов (арифметика и алгебра) : для физико-математических специальностей педагогических институтов / [сост. : Б. А. Викол, Л. В. Викол., Н. И. Труш]. – Славянск : СГПИ, 1987. – 68 с.
23. Методические рекомендации по решению задач повышенной трудности в курсе математики VI-VIII классов (геометрия) : для физико-математических специальностей педагогических институтов / [сост. : Б. А. Викол, Е. В. Величко, Л. В. Викол., Н. И. Труш]. – Славянск : СГПИ, 1987. – 50 с.

Internet ресурси

1. Київські олімпіади з математики.
   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://matholymp.org.ua/
2. Сайт міжнародних олімпіад з математики
   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://www.imo-official.org/
3. Українська сторінка міжнародного конкурсу «Кенгуру».
   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://www.kangaroo.com.ua/index.php

Підписано до друку 30.05.2020 р.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 5.
Тираж 100 прим. Зам. № 1221.
Підприємець Маторін Б.І.

84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс +38 06262 3-20-99. Email:
matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.