Кадубовський О.А.,
Беседін Б.Б.

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ:

розв’язання задач
II етапу
Всеукраїнської учнівської олімпіади
з математики – 2020

Випуск 27

навчальний посібник

умови

відповіді

розв’язання

#СЕРІЯ : ВИКЛАДАЧІ ДДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
ІІ ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ – 2020
5 – 11 класи

Рекомендовано вченою радою
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»
як навчальний посібник
для факультативних занять з математики

Слов'янськ – 2021

УДК 51 (075.3)

О-543

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2020 : навчальний посібник / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін. – Слов'янськ : вид. центр «Маторін», 2021. – 94 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 27).

Адресовано вчителям та викладачам математики, як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням закладів загальної середньої освіти та студентам математичних спеціальностей педагогічних закладів вищої освіти.

РЕКОМЕНДОВАНО

вченою радою Державного вищого навчального закладу
«Донбаський державний педагогічний університет»,
Протокол №1 від 30.08.2021 р.

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук **С.О. ЧАЙЧЕНКО**,
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»,
проректор з науково-педагогічної роботи, професор кафедри математики та інформатики;

доктор фізико-математичних наук **Ю.В. ЖУЧОК**,
ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»,
професор кафедри алгебри та системного аналізу.

Відповідальний за випуск:

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики О.А. Кадубовський

© О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, 2021 р.

Зміст

ВІД АВТОРІВ 4
ЧАСТИНА І. УМОВИ ЗАДАЧ 7
ЧАСТИНА ІІ. ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ 12
ЧАСТИНА ІІІ. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ 14
5 клас 14
6 клас 22
7 клас 29
8 клас 38
9 клас 48
10 клас 62
11 клас 72
ДОДАТКИ 84
Умови завдань ІІІ (обласного) етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2020 / 2021 н.р. (Донецька область) 84
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА 89

ВІД АВТОРІВ

«Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!»

***Д. Пойа*[1]**

Даний посібник є 27-им випуском серії «Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям», заснованої у 2008 році. Посібник містить розв'язання задач II етапу (районного, міського) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, який проводився 8 листопада 2020 року відповідно до наказу МОН України від 24.09.2020 за №1175 «Про проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів з навчальних предметів у 2020/2021 навчальному році» та наказу Департаменту освіти і науки Донецької облдержадміністрації за №252/163-20-ОД від 28.09.2020 «Про проведення II етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з навчальних предметів у 2020/2021 навчальному році».

Як і в попередніх випусках для більшості задач олімпіади пропонується кілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого із запропонованих методів. Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в певному розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головна мета авторів посібника – «донести» до вчителів і учнів якомога більше корисних математичних ідей і принципів та показати їх застосування.

Нагадаємо, що принципами в математиці називають деякі положення або методи, які використовуються в доведеннях математичних тверджень та під час розв’язання різноманітних задач. Дуже часто учні зустрічаються з ними при розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Перш за все учні, які беруть участь в олімпіадах, повинні володіти значною кількістю принципів. Нажаль шкільна програма не передбачає знайомства з більшістю із них.

---
[1] Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 452 с.

З основними математичними принципами можна ознайомитись у наведеній літературі, зокрема в [13][2].

У представленому посібнику до окремих задач наводяться «доповнення», сенс яких полягає:

– у формулюванні двоїстої або схожої задачі,

– в узагальненні запропонованої задачі.

На думку авторів такі доповнення повинні активізувати і зацікавити учнів при підготовці до майбутніх олімпіад.

Автори посібника та керівництво фізико-математичного факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» висловлюють щиру подяку всім вчителям м. Слов'янськ, які беруть участь в організації та проведенні учнівських олімпіад з математики й семінарів, присвячених аналізу їх результатів.

Маємо надію, що представлений посібник буде корисним керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням, стане для багатьох з них поштовхом до більш змістовних міркувань і буде спонукати до систематичного ознайомлення з тим чи іншим розділом математики.

Вчіться творчому пошуку в процесі розв'язування задач!

Із найщирішими побажаннями, викладачі фізико-математичного факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет».

24.08.2021

[2] Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2005. – 344с.

«Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле»

А.Н. Крылов

«Каждый настолько превосходит других, насколько он больше других упражняется»

Я.А. Коменский

Звернення до самих юних та вже досвідчених учасників олімпіад з математики

«… *Смягчается времен суровость, теряют новизну слова.*
Талант – единственная новость, которая всегда нова.
Меняются репертуары, стареет жизни ералаш.
Нельзя привыкнуть только к дару, когда он так велик, как Ваш …»[3]

Б. Пастернак

Юний друже! Для повного та бездоганного (в сенсі дотримання належного рівня математичної строгості) розв'язання задач вкрай необхідно навчитись ретельно аналізувати умову самої задачі. І якщо умовою задачі (ненавмисно або ж навпаки – навмисно) закладена «певна неоднозначність / недовизначеність», це зовсім не означає, що «задача не є коректною». Навпаки – саме такі задачі є прикладом так званих задач на дослідження, при розв'язуванні яких важливо розуміти, що розв'язати задачу на дослідження, зокрема математичну, це дати категоричну відповідь в кожному з можливих випадків (- обмежень) шляхом ретельного аналізу / дослідження повної системи всіх можливих додаткових умов-обмежень, кожна з яких:

по-перше – дозволяє повною мірою конкретизувати поставлене питання-завдання;

по-друге – не наділяє умову надлишковими даними (які можна одержати з певної частини вихідної інформації);

по-третє – не суперечить даним або наслідкам з них.

[3] Уривок із вірша «Актриса» (1957 р.), присвяченого Анастасії Платонівні Зуєвій – актрисі театру і кіно

«Среди равных умов при одинаковости прочих условий превосходит тот, кто знает геометрию»

Б. Паскаль

«Искусство решать геометрические задачи чем-то напоминает трюки иллюзионистов – иногда, даже зная решение задачи, трудно понять, как можно было до него додуматься»

И.Д. Новиков

ЧАСТИНА І.
УМОВИ ЗАДАЧ

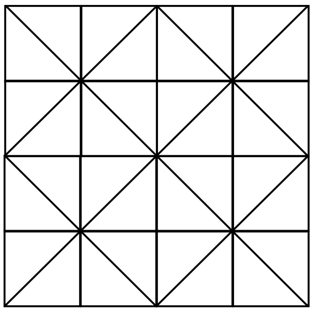
5 клас

1. У літньому таборі 220 дітей та 24 вихователі. Автобус може перевозити не більше 38 пасажирів. Яку найменшу кількість автобусів знадобиться, щоб за один раз перевезти усіх з табору до міста?

2. Розставити між деякими з цифр 1111111 знаки «+» або «−» таким чином, щоб вийшов вираз з сумою 100.

3. В одному місті всі мешканці розмовляють англійською або французькою. Англійською мовою розмовляє 90% усіх мешканців, французькою – 80%. Скільки відсотків мешканців володіє лише однією мовою?

4. Скільки квадратів зображено на рисунку нижче? Відповідь обґрунтуйте.



5. Складіть із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (кожну цифру можна використовувати лише один раз) три трицифрові числа так, щоб сума двох чисел дорівнювала третьому, і при цьому в одного з цих чисел цифра десятків була рівною 8. Достатньо навести приклад.

6 клас

1. Троє друзів збирали гриби. Перший зібрав 41% усіх грибів, другий – 14%, а третій – решту 90 грибів. Скільки всього грибів вони зібрали?

2. Два пароплави заходять у порт після кожного рейсу. Перший робить рейс за 6 днів, а другий – за 8 днів. Якось у суботу вони зустрілись в порту. Через скільки днів вони зустрінуться в порту в суботу наступного разу.

3. Усередині відрізка AB відмітили три точки C, D і E, причому довжина AC становить 10 см, D – середина відрізка AB і E – середина відрізка BC. Знайдіть довжину відрізка DE.

4. Кішка з кошенятами з’їдають куплений господарем корм за 8 днів. Якби кішку годували саму, то їй вистачило б корму на 11 днів. На скільки повних днів вистачило б корму кошенятам? (Денну норму корму для кожного кошеняти вважати однаковою).

5. Іван брав участь у вікторині з історії. За кожну правильну відповідь учаснику нараховується 8 балів, за кожну неправильну – списується 8 балів, за відсутність відповіді списується 3 бали. За результатами вікторини Іван набрав 35 балів. На скільки питань Іван не дав відповідь, якщо у вікторині було 30 питань?

7 клас

1. Якою цифрою закінчується значення (числового) виразу

$$15^{2019}+26^{2020}+29^{2021}?$$

2. Товар подешевшав на 20%. На скільки відсотків більше можна купити товару за ту ж кількість грошей?

3. Усередині тупого кута AOB провели три промені OC, OD і OE, причому OC перпендикулярний до OA, OD – бісектриса кута AOB і OE – бісектриса кута BOC. Знайдіть величину кута DOE.

4. Знайдіть усі такі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, для яких виконується рівність

$$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+\overline{a}=2021.$$

5. Іван брав участь у вікторині з історії. За кожну правильну відповідь учаснику нараховується 8 балів, за кожну неправильну – списується 8 балів, за відсутність відповіді списується 3 бали. За результатами вікторини Іван набрав 35 балів. На скільки питань Іван не дав відповідь, якщо у вікторині було 35 питань?

8 клас

1. Доведіть, що для довільних дійсних чисел виконується нерівність:

$$x^2 - 2xy + 2020y^2 \geq 0$$

2. Спростити вираз

$$\frac{a^1 + a^2 + ... + a^{2020}}{a^{-1} + a^{-2} + ... + a^{-2020}}.$$

3. Два автомобілі знаходяться на одній дорозі на відстані 200 км, один рухається зі швидкістю 60 км/год, а інший – 40 км/год. Через який час відстань між ними може знову стати 200 км? Розгляньте усі можливі випадки та в кожному з них дайте відповідь.

4. У паралелограмі $ABCD$ точки M і N є серединами сторін BC та CD відповідно. Відрізки AM і AN перетинають діагональ BD у точках M' та N' відповідно. Знайти довжину відрізка $M'N'$, якщо довжина діагоналі BD становить 12 см.

5. Іван брав участь у вікторині з історії. За кожну правильну відповідь учаснику нараховується 8 балів, за кожну неправильну – списується 8 балів, за відсутність відповіді списується 3 бали. За результатами вікторини Іван набрав 35 балів. На скільки питань Іван відповів правильно, якщо у вікторині було 33 питання?

9 клас

1. Обчислити

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 99^2 - 100^2 + 101^2.$$

2. Про квадратичну функцію $y = f(x)$ відомо, що існує рівно три значення аргументу, при яких модуль значення функції дорівнює 2. Скільки коренів має рівняння $f(x) = 1{,}1$?

3. Розв’язати рівняння $(x+1)|x-1| = a$ в залежності від значень параметра a.

4. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, а кут BDC становить 75^0. Точка P лежить зовні прямокутника, а кут APB становить 150^0. Доведіть, що кути BAP та POB є рівними.

5. У липні взято кредит у банку терміном на 15 років. Умови його повернення є наступними:

– кожного січня борг зростає на $x\%$ у порівнянні з кінцем попереднього (календарного) року;

– з лютого по червень кожного року необхідно сплатити («погасити») нарахований у січні банком відсоток;

– у липні кожного року (крім першого) борг повинен бути меншим на сталу величину у порівнянні з боргом на липень минулого року.

Знайдіть x, якщо відомо, що за весь термін сплатили на 15% більше, ніж було взято у кредит.

10 клас

1. Обчислити

$$70\cdot\left(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+71\right)+71.$$

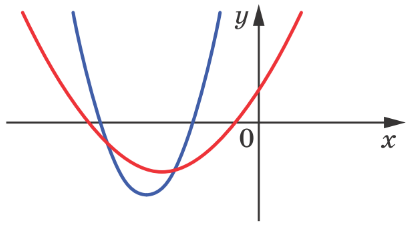
2. Кожне ребро тетраедра $DABC$ дорівнює a, точки M і K – середини ребер AB та CD відповідно. Доведіть, що MK – спільний перпендикуляр до прямих AB і CD та знайдіть довжину MK.

3. Висота BH трикутника ABC вдруге перетинає коло, описане навколо $\triangle ABC$ в точці K, BN – діаметр. Доведіть, що $AN=KC$. Знайдіть NK, якщо довжина радіуса описаного кола становить 20 см, $\angle BAC=25^0$, $\angle BCA=85^0$.

4. Чи можуть графіки квадратичних функцій

$$y=ax^2+bx+c \qquad \text{та} \qquad y=bx^2+cx+a$$

бути розміщені так, як показано на рисунку нижче?



Відповідь обґрунтуйте.

5. На столі лежить 40 карток, серед яких є червоні та сині. Кожного кольору є принаймні одна картка. Натуральні числа на всіх синіх картках є різними, а натуральні числа на червоних картках є меншими за будь-яке число на синіх картках. Середнє арифметичне чисел на всіх картках становить 19. Якщо збільшити кожне з чисел на синіх картках утричі, то середнє арифметичне становитиме 39.

1) Чи може на столі бути точно 10 синіх карток?
2) Чи може на столі бути точно 10 червоних карток?

Відповідь обґрунтуйте.

11 клас

1. Порівняйте між собою числа $a=\left(-3\right)^{3^3}$, $b=3^{(-3)^3}$ та $c=3^{3^{-3}}$.

2. Розв'яжіть рівняння $\left[2020x+2021\right]=1$, де $\left[x\right]$ – ціла частина числа.

(*Цілою частиною дійсного числа* x *(або функцією Антьє) називають найбільше ціле число* $\left[x\right]$, *що не перевищує* x. *Наприклад*: $\left[-2{,}5\right]=-3$; $\left[-2\right]=-2$; $\left[-0{,}2\right]=-1$; $\left[0{,}2\right]=0$; $\left[2\right]=2$; $\left[2{,}3\right]=2$)

3. Дано похилу шестикутну призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Побудувати переріз площиною, яка визначається точками A, C та E_1. Всі виконані побудови під час встановлення виду перерізу обґрунтуйте.

4. Знайти геометричне місце точок площини, через які можна провести по дві дотичні до графіка функції

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

5. На столі лежить 40 карток, серед яких є червоні та сині. Кожного кольору є принаймні одна картка. Натуральні числа на всіх синіх картках є різними, а натуральні числа на червоних картках є меншими за будь-яке число на синіх картках. Середнє арифметичне чисел на всіх картках становить 19. Якщо збільшити кожне з чисел на синіх картках утричі, то середнє арифметичне становитиме 39.

1) Чи може на столі бути точно 11 синіх карток?
2) Чи може на столі бути точно 11 червоних карток?

Відповідь обґрунтуйте.

ЧАСТИНА ІІ.
ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

5 клас

Задача №1 ***7.***

Задача №2 ***100.***

Задача №3 ***30%.***

Задача №4 ***35.***

Задача №5 ***наприклад: 124+659=783; 127+359=486.***

6 клас

Задача №1 ***200.***

Задача №2 ***168.***

Задача №3 ***5.***

Задача №4 ***29.***

Задача №5 ***7.***

7 клас

Задача №1 ***0.***

Задача №2 ***25%.***

Задача №3 45^0**.**

Задача №4 ***1820.***

Задача №5 ***15.***

8 клас

Задача №1 ***на доведення.***

Задача №2 a^{2021}**.**

Задача №3 ***4 години, 20 годин.***

Задача №4 ***4 см.***

Задача №5 ***14.***

9 клас

Задача №1 ***5151.***

Задача №2 ***2.***

Задача №3

якщо	$a \in (-\infty; 0)$,	**то**	$x = -\sqrt{1-a}$
якщо	$a = 0$,	**то**	$x = \pm 1$
якщо	$a \in (0; 1)$,	**то**	$x = \pm\sqrt{1-a}$, $x = \sqrt{a+1}$
якщо	$a = 1$,	**то**	$x = 0$, $x = \sqrt{2}$
якщо	$a \in (1; +\infty)$,	**то**	$x = \sqrt{a+1}$

Задача №4 ***на доведення.***

Задача №5 ***1,875.***

10 клас

Задача №1 71^{10}.

Задача №2 ***на доведення;*** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Задача №3 ***на доведення;*** $20\sqrt{3}$.

Задача №4 ***ні.***

Задача №5 ***1) – так; 2) – ні.***

11 клас

Задача №1 $a < b < c$.

Задача №2 $x \in \left[-1; -\frac{2019}{2020}\right)$.

Задача №3 ***на побудову.***

Задача №4 $y < x^2 - 4x + 3$ ***– множина тих і лише тих точок (координатної) площини, які розташовано нижче точок параболи*** $y = x^2 - 4x + 3$.

Задача №5. ***1) – так; 2) – ні.***

ЧАСТИНА III.
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

5 клас

Задача 1

У літньому таборі 220 дітей та 24 вихователі. Автобус може перевозити не більше 38 пасажирів. Яку найменшу кількість автобусів знадобиться, щоб за один раз перевезти усіх з табору до міста?

Розв'язання.

1) Оскільки у літньому таборі 220 дітей та 24 вихователі, то для їх перевезення з табору до міста знадобиться

$$220 + 24 = 244$$

посадкових місць в автобусах.

2) За умовою задачі один автобус може перевозити не більше 38 пасажирів. Щоб кількість автобусів для перевезення була найменшою, необхідно в кожному з них, за винятком можливо останнього, заповнювати всі 38 посадкових місць.

3) Неважко перевірити, що справджується числова рівність

$$244 = 38 \cdot \boxed{6} + 16.$$

Тому найменша кількість автобусів, яка знадобиться, щоб за один раз перевезти усіх дітей та вихователів з табору до міста, становить

$$6 + 1 = 7.$$

Відповідь: 7.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1

?! Кожен із 40 учасників семінару має бути забезпечений двома однаковими пляшками води. Укажіть найменшу кількість упаковок, кожна з яких містить 12 пляшок води, яких вистачить для всіх учасників семінару.

?! Із 68 жовтих і 85 червоних троянд склали букети, розділивши жовті та червоні троянди порівну. Скільки найбільше букетів можна одержати?

?! Яка найменша кількість метрів тканини може бути в рулоні, щоб його можна було продати без залишку по 6 м, по 8 м або по 10 м?

Задача 2

Розставити між деякими з цифр 1111111 знаки «+» або «–» таким чином, щоб вийшов вираз з сумою 100.

Розв'язання.

1 спосіб.

111-11+1-1=(111-11)+(1-1)=100+0=100.

2 спосіб.

111-11-1+1=100-1+1=99+1=100.

3 спосіб.

1-1+111-11=(1-1)+(111-11)=0+100=100.

4 спосіб.

1-11+111-1=(1+111)-(11+1)=112-12=100.

5 спосіб.

1-11-1+111=(1+111)-(11+1)=112-12=100.

6 спосіб.

1-1-11+111=(1+111)-(11+1)=112-12=100.

Відповідь: 111-11+1-1;
111-11-1+1;
1-1+111-11;
1-11+111-1;
1-11-1+111;
1-1-11+111.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 2

?! Розставити знаки «+» або «-» між цифрами 987654321 таким чином, щоб цей вираз дорівнював 100.

?! Між деякими цифрами 1 2 3 4 5 постав знаки дій («+», «–», «×», «:») і дужки так, щоб у результаті виконання дій отримати число 40.

?! Замість зірочок (*) записати знаки дій («+», «–», «×», «:») і розставити дужки так, щоб одержати правильну рівність

48*4*2*3=24.

Задача 3

В одному місті всі мешканці розмовляють англійською або французькою. Англійською мовою розмовляє 90% усіх мешканців, французькою – 80%. Скільки відсотків мешканців володіє лише однією мовою?

Розв'язання.

1 спосіб.

1) Оскільки англійською мовою розмовляє 90 % усіх мешканців міста, то 10 % мешканців міста англійською мовою не розмовляє, а розмовляє лише французькою.
2) Оскільки французькою мовою розмовляє 80 % усіх мешканців міста, то 20 % мешканців міста французькою мовою не розмовляє, а розмовляє лише англійською.
3) Лише однією мовою володіють ті мешканці міста, які розмовляють лише французькою або лише англійською, тобто $10\% + 20\% = 30\%$ усіх мешканців міста.

2 спосіб.

1) Нехай обома мовами (і англійською, і французькою) володіє $x\%$ усіх мешканців міста. Тоді лише англійською мовою володіє $(90 - x)\%$, а лише французькою – $(80 - x)\%$ усіх мешканців міста.
2) Оскільки усі мешканці міста діляться на три категорії:
   – мешканці, які володіють лише англійською мовою;
   – мешканці, які володіють лише французькою мовою;
   – мешканці, які володіють обома мовами,

   то має місце рівність (рівняння відносно змінної x)
   $$(90 - x) + (80 - x) + x = 100,$$
   звідки
   $$170 - x = 100,$$
   $$x = 70.$$
3) Оскільки обома мовами володіє 70% мешканців міста та кожен з мешканців міста розмовляє або англійською, або французькою, то лише однією мовою володіють решта зі 100% мешканців, тобто $100\% - 70\% = 30\%$ усіх мешканців міста.

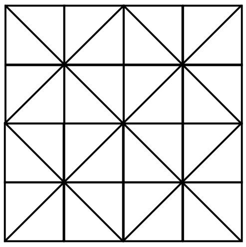
Відповідь: 30%.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 3

?! Зі 100 учнів ліцею 28 вивчають англійську мову, 30 – німецьку, 42 – французьку, 8 – англійську і німецьку, 10 – французьку і англійську, 5 учнів – німецьку і французьку, 3 – вивчають усі три мови. Скільки учнів вивчають лише англійську, лише французьку, лише німецьку? Скільки учнів не вивчають жодної мови?

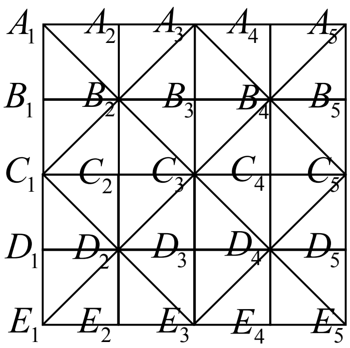
Задача 4

Скільки квадратів зображено на рисунку нижче? Відповідь обґрунтуйте.



Розв'язання.

1) Занумеруємо вершини фігури у спосіб зазначений нижче



2) Неважко перевірити, що фігура містить наступні набори квадратів:

2.1) **16** квадратів (зі стороною довжини 1 лін. од.):
$A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, $A_3A_4B_4B_3$, $A_4A_5B_5B_4$;
$B_1B_2C_2C_1$, $B_2B_3C_3C_2$, $B_3B_4C_4C_3$, $B_4B_5C_5C_4$;
$C_1C_2D_2D_1$, $C_2C_3D_3D_2$, $C_3C_4D_4D_3$, $C_4C_5D_5D_4$;
$D_1D_2E_2E_1$, $D_2D_3E_3E_2$, $D_3D_4E_4E_3$, $D_4D_5E_5E_4$.

2.2) **9** квадратів (зі стороною довжини 2 лін. од.):
$A_1A_3C_3C_1$, $A_2A_4C_4C_2$, $A_3A_5C_5C_3$;
$B_1B_3D_3D_1$, $B_2B_4D_4D_2$, $B_3B_5D_5D_3$;
$C_1C_3E_3E_1$, $C_2C_4E_4E_2$, $C_3C_5E_5E_3$;

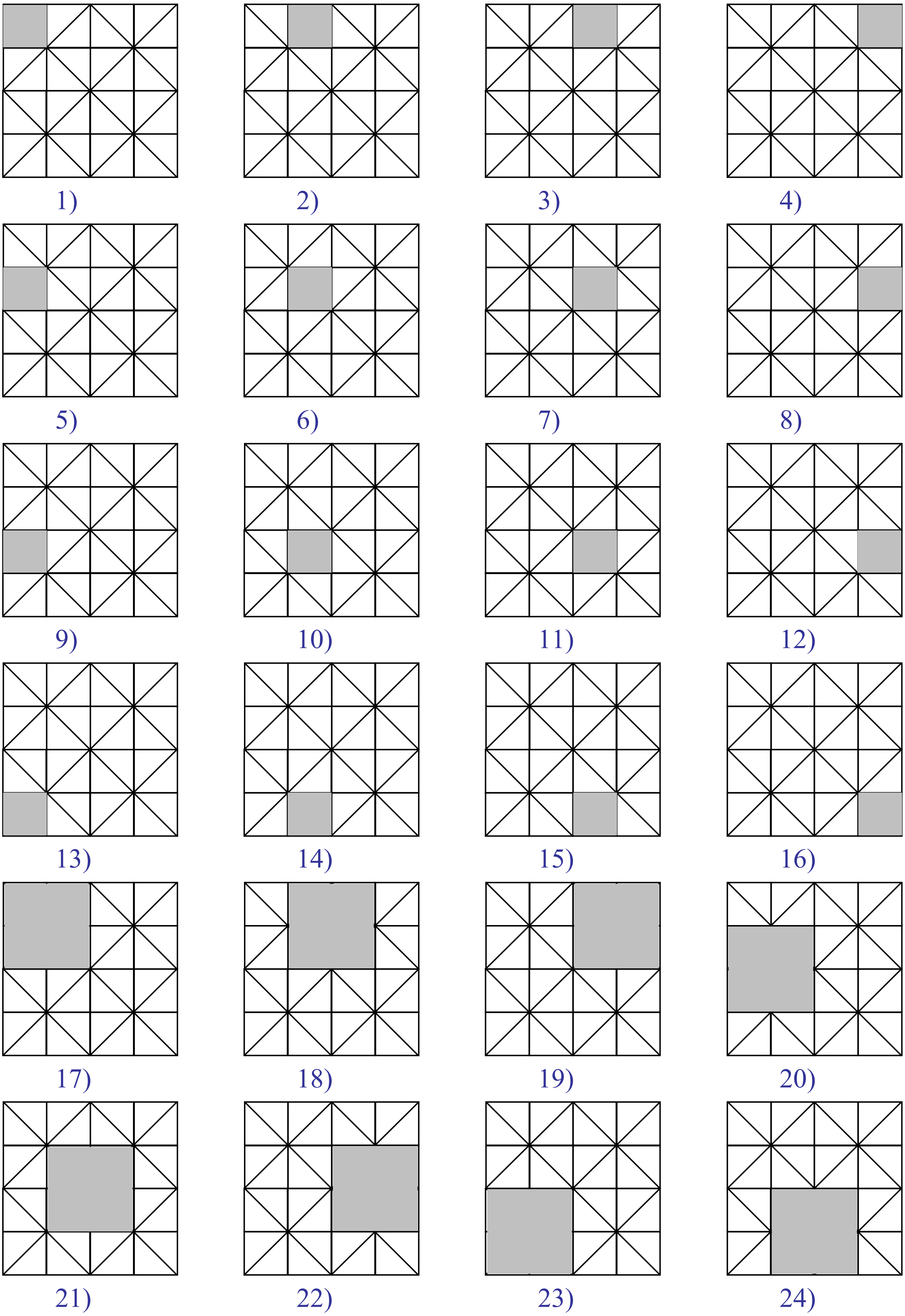
2.3) **4** квадрати (зі стороною довжини 3 лін. од.):
$A_1A_4D_4D_1$, $A_2A_5D_5D_2$, $B_1B_4E_4E_1$, $B_2B_5E_5E_2$;

2.4) **1** квадрат (зі стороною довжини 4 лін. од.) – $A_1A_5E_5E_1$;

2.5) **1** квадрат з вершинами у точках $C_1A_3C_5E_3$.

2.6) **4** квадрати з вершинами у наступних точках:
$C_1B_2C_3D_2$, $B_2A_3B_4C_3$, $D_2C_3D_4E_3$, $C_3B_4C_5D_4$;

3) На рисунку 6.4 1)–35) наведено всі зазначені вище квадрати



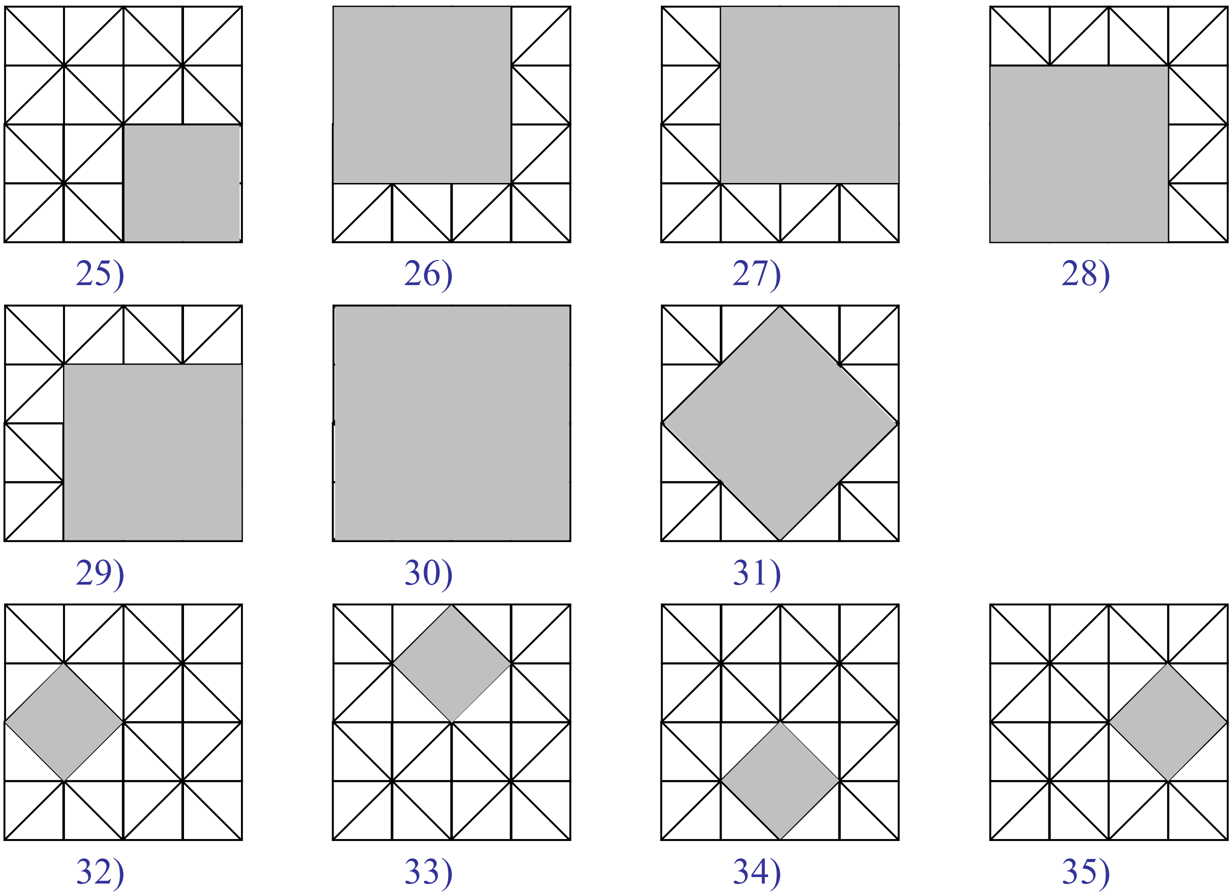
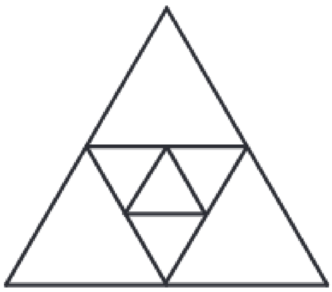


Рис. 6.4: *до задачі 4*

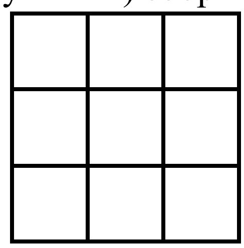
Відповідь: 35.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 4

?! Скільки трикутників зображено на рисунку (нижче)?



?! Скільки квадратів (прямокутників) зображено на рисунку (нижче)?



Задача 5

Складіть із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (кожну цифру можна використовувати лише один раз) три трицифрові числа так, щоб сума двох чисел дорівнювала третьому, і при цьому в одного з цих чисел цифра десятків була рівною 8. Достатньо навести приклад.

Розв'язання.

Побудуємо приклад таких трьох (тризначних) чисел, щоб цифра десятків саме суми була рівною 8.

+			
		8	

Відомо, що при додаванні одиниць двох чисел розряд десятків може не збільшитися або ж збільшитися щонайбільше на 1. Тому сума цифр десятків доданків (перших двох чисел) може становити або 8, або 7.

Заради визначеності побудуємо приклад, коли сума цифр десятків доданків становить 7.

Тоді, з точністю до перестановки доданків, цифри їх десятків можуть бути лише наступними: {1;6}, {2;5} та {3;4} – випадки 1) – 3) нижче.

+		1	
		6	
		8	

1) випадок

+		2	
		5	
		8	

2) випадок

+		3	
		4	
		8	

3) випадок

Цифри одиниць доданків повинні бути різним, їх сума бути більшою за 10 та мають бути відмінними від цифр десятків.

Сума цифр сотень доданків повинна бути числом меншим за 10. Тому цифри одиниць доданків та їх суми можуть бути

в 1) випадку – лише наступними:

1.1) {5,7;2}, {7,5;2}; залишаються цифри 3, 4 і 9, сума жодних 2 з яких не дорівнює третій;

1.2) {5,9;4}, {9,5;4}; залишаються цифри 2, 3 і 7, сума жодних 2 з яких не дорівнює третій;

1.3) {4,9;3}, {9,4;3}; залишаються цифри 2, 5 і 7, сума перших 2 з яких дорівнює третій.

Таким чином знайдено наступні чотири розв'язки задачі:

+	2	1	4
	5	6	9
	7	8	3

1

+	5	1	4
	2	6	9
	7	8	3

2

+	2	1	9
	5	6	4
	7	8	3

3

+	5	1	9
	2	6	4
	7	8	3

4

в 2) випадку – лише наступними:

2.1) {4,7;1}, {7,4;1}; залишаються цифри 3, 6 і 9, сума перших 2 з яких дорівнює третій; таким чином знайдено наступні чотири розв’язки задачі:

+	3	2	4
	6	5	7
	9	8	1

5

+	6	2	4
	3	5	7
	9	8	1

6

+	3	2	7
	6	5	4
	9	8	1

7

+	6	2	7
	3	5	4
	9	8	1

8

2.2) {6,7;3}, {7,6;3}; залишаються цифри 1, 4 і 9, сума жодних 2 з яких не дорівнює третій;

2.3) {4,9;3}, {9,4;3}; залишаються цифри 1, 6 і 7, сума перших 2 з яких дорівнює третій; таким чином знайдено наступні чотири розв’язки задачі:

+	1	2	4
	6	5	9
	7	8	3

9

+	6	2	4
	1	5	9
	7	8	3

10

+	1	2	9
	6	5	4
	7	8	3

11

+	6	2	9
	1	5	4
	7	8	3

12

2.4) {7,9;6}, {9,7;6}; залишаються цифри 1, 3 і 4, сума перших 2 з яких дорівнює третій; таким чином знайдено наступні чотири розв’язки задачі:

+	1	2	7
	3	5	9
	4	8	6

13

+	3	2	7
	1	5	9
	4	8	6

14

+	1	2	9
	3	5	7
	4	8	6

15

+	3	2	9
	1	5	7
	4	8	6

16

в 3) випадку – лише наступними:

3.1) {2,9;1}, {9,2;1}; залишаються цифри 5, 6 і 7, сума жодних 2 з яких не дорівнює третій;

3.2) {5,6;1}, {6,5;1}; залишаються цифри 2, 7 і 9, сума перших 2 з яких дорівнює третій; таким чином знайдено наступні чотири розв’язки задачі:

+	2	3	5
	7	4	6
	9	8	1

17

+	7	3	5
	2	4	6
	9	8	1

18

+	2	3	6
	7	4	5
	9	8	1

19

+	7	3	6
	2	4	5
	9	8	1

20

3.3) {5,7;2}, {7,5;2}; залишаються цифри 1, 6 і 9, сума жодних 2 з яких не дорівнює третій.

Відповідь: 124+659=783, 127+359=486, 129+357=486, 129+654=783, 154+629=783, 157+329=486, 159+327=486, 159+624=783, 214+569=783, 219+564=783, 235+746=981, 236+745=981, 245+736=981, 246+735=981, 264+519=783, 269+514=783, 324+657=981, 327+654=981, 354+627=981, 357+624=981, 152+784=936, … .

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 2

?! Складіть із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (кожну цифру можна використовувати лише один раз) три трицифрові числа так, щоб сума двох чисел дорівнювала третьому, і при цьому в одного з цих чисел цифра десятків була рівною 8. Знайдіть усі такі числа, коли сума цифр десятків доданків становить 8.

6 клас

Задача 1

Троє друзів збирали гриби. Перший зібрав 41% усіх грибів, другий – 14%, а третій – решту 90 грибів. Скільки всього грибів вони зібрали?

Розв'язання.

1 спосіб.

1) Оскільки усі гриби, які було зібрано трьома друзями, становлять 100%, то третій з них зібрав
$$100\% - 41\% - 14\% = 45\%.$$

2) За умовою задачі третій з друзів зібрав 90 грибів, що становить 45% від усіх зібраних грибів. Тому загальна кількість грибів, зібраних трьома друзями, становить
$$\frac{90}{45} \cdot 100 = 200.$$

2 спосіб.

1) Нехай всього було зібрано x грибів. Оскільки третій з друзів зібрав 90 грибів, то перші два друга зібрали разом $(x-90)$ грибів.

2) За умовою задачі перший з друзів зібрав 41%, а другий – 14% усіх грибів. Тому разом вони зібрали 55% усіх грибів.

3) З урахуванням введених позначень перший і другий з друзів разом зібрали $\left(\frac{x}{100} \cdot 55\right)$ грибів. Тому маємо рівняння
$$x - 90 = \frac{x}{100} \cdot 55,$$
звідки
$$(x-90) \cdot 100 = x \cdot 55,$$
$$100x - 90 \cdot 100 = 55x,$$
$$100x - 55x = 9000,$$
$$45x = 9000,$$
$$x = 9000 : 45,$$
$$x = 200.$$

Відповідь: 200.

Задача 2

Два пароплави заходять у порт після кожного рейсу. Перший робить рейс за 6 днів, а другий – за 8 днів. Якось у суботу вони зустрілись в порту. Через скільки днів вони зустрінуться в порту в суботу наступного разу.

Розв'язання.

Нехай n – шукана кількість днів, через яку пароплави зустрінуться у порту в суботу наступного разу.

1) Оскільки перший пароплав робить рейс за 6 днів, то n повинно націло ділитися на число 6. Тобто 6 є дільником числа n.

2) За умовою другий пароплав робить рейс за 8 днів, тому n повинно націло ділитися на число 8. Тобто 8 є дільником числа n.

3) Оскільки пароплави повинні зустрітися саме у суботу (в такий самий день тижня, в який вони зустрілися востаннє), то n повинно націло ділитися і на число 7. Тобто 7 є дільником числа n.

Таким чином шукане число n повинно бути спільним кратним чисел 6, 8 та 7.

4) Оскільки n є найменшим («в порту в суботу наступного разу»), то шукане число n повинно бути найменшим спільним кратним чисел 6, 8 та 7, тобто

$$n = \text{НСК}(6;8;7) = 168.$$

Відповідь: 168.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 2

?! Для учнів класу приготували однакові подарунки. У всіх подарунках було разом 588 цукерок, 140 яблук і 252 горіхи.

Скільки учнів у класі, якщо їх більше, ніж 20?

Скільки цукерок одержав кожен учень?

Скільки яблук одержав кожен учень?

Скільки горіхів одержав кожен учень?

Задача 3

Усередині відрізка AB відмітили три точки C, D і E, причому довжина AC становить 10 см, D – середина відрізка AB і E – середина відрізка BC. Знайдіть довжину відрізка DE.

Розв'язання.

1 спосіб.

1) З'ясуємо взаємне розташування точок A, B, C, D і E.

1.1) Оскільки D – середина відрізка AB і E – середина відрізка BC, то точка D знаходиться між точками A і B, а точка E – між точками C і B.

1.2) Оскільки точки A, C і D є різними, причому A – (лівий) кінець відрізка, то можливими є лише наступні **два випадки**:

або точка D знаходиться між точками A і C,

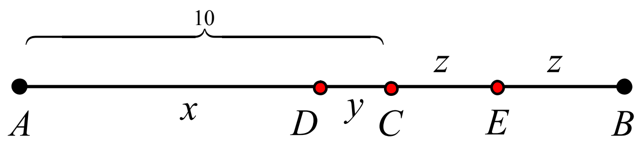
або ж точка C знаходиться між точками A і D.

2) Нехай точка D знаходиться між точками A і C, тоді

$$AC = AD + DC$$

та справджується рівність

$$AD + DC = 10 \qquad (6.3.1)$$



2.1) Оскільки D – середина відрізка AB, то

$$AD = DB. \qquad (6.3.2)$$

2.2) Оскільки E – середина відрізка BC, то

$$CB = CE + EB. \qquad (6.3.3)$$

2.3) Крім того, оскільки точка C знаходиться між точками D і E, то

$$DE = DC + CE. \qquad (6.3.4)$$

2.4) Нехай $AD = x$ см, $DC = y$ см, а $CE = z$ см. Тоді, з урахуванням введених позначень:

співвідношення (6.3.2) набуває вид $\quad x = y + 2z, \qquad (6.3.5)$

а співвідношення (6.3.1) набуває вид $\quad x + y = 10. \qquad (6.3.6)$

Рівність (6.3.6), з урахуванням співвідношення (6.3.5), можна подати у вигляді

$$y + 2z + y = 10,$$

звідки

$$2(y+z) = 10, \; y + z = 5.$$

Таким чином, з урахуванням рівності (6.3.4) та введених позначень, маємо що

$$DE = y + z = 5.$$

3) Нехай тепер точка C знаходиться між точками A і D, тоді

$$AD = AC + CD. \qquad (6.3.7)$$

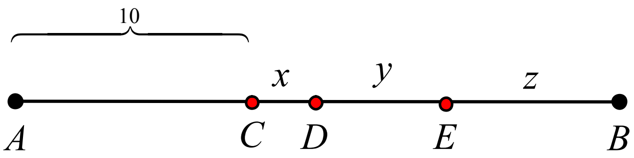
3.2) Оскільки D – середина відрізка AB, то

$$AD = DB. \qquad (6.3.8)$$

3.1) Оскільки E – середина відрізка CB, довжина якого є меншою за довжину відрізка AB, то довжина BE (половина довжини відрізка CB) є меншою за довжину BD (половину довжини відрізка AB). Звідки й випливає, що точка E розташована між точками D і B. Тому мають місце рівності

$$DB = DE + EB, \tag{6.3.9}$$

$$CE = EB \tag{6.3.10}$$



3.3) Нехай $CD = x$ см, $DE = y$ см, а $EB = z$ см. Тоді, з урахуванням введених позначень:

співвідношення (6.3.7), набуває вид $AD = 10 + x$, (6.3.11)

співвідношення (6.3.9), набуває вид $DB = y + z$, (6.3.12)

співвідношення (6.3.8), набуває вид $10 + x = y + z$, (6.3.13)

співвідношення (6.3.10), набуває вид $x + y = z$. (6.3.14)

З урахуванням (6.3.14) співвідношення (6.3.13) набуває вид

$$10 + x = y + x + y, \tag{6.3.15}$$

звідки $10 = 2y$, а $y = 5$.

Таким чином, з урахуванням введених позначень, маємо що $DE = y = 5$.

2 спосіб («на виріст»).

1) Розглянемо таку координатну пряму, що:
– її початок співпадає з точкою A,
– напрям осі визначається напрямком від точки A до точки B, а
– одиничний відрізок є таким, що AC становить 10 см.

Тоді точка A має координату 0 (нуль) – $A(0)$, а точка C має координату 10 – $C(10)$.

2) Нехай далі точка B має координату b – $B(b)$. Тоді:

оскільки D – середина відрізка AB, то точка D має координату

$$\frac{0+b}{2} = \frac{b}{2};$$

оскільки E – середина відрізка CB, то точка E має координату

$$\frac{10+b}{2}.$$

3) Оскільки $\frac{10+b}{2} > \frac{b}{2}$, то точка $E\left(\frac{10+b}{2}\right)$ розташована праворуч від точки $D\left(\frac{b}{2}\right)$. Тому довжина відрізка DE становить

$$DE = \frac{10+b}{2} - \frac{b}{2} = \frac{10+b-b}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Відповідь: **5.**

Задача 4

Кішка з кошенятами з'їдають куплений господарем корм за 8 днів. Якби кішку годували саму, то їй вистачило б корму на 11 днів. На скільки повних днів вистачило б корму кошенятам?

(Денну норму корму для кожного кошеняти вважати однаковою).

Розв'язання.

1) Оскільки денна норма корму для кожного з кошенят є однаковою, то денна норма корму для всіх кошенят разом також є однаковою.

2) Нехай x – денна норма корму кішки, а y – денна норма корму усіх кошенят. Тоді денна норма корму кішки та усіх кошенят становить $x+y$.

Нехай далі z – кількість (обсяг) корму, який купив господар.

3) Оскільки кішка з кошенятами з'їдають весь куплений господарем корм за 8 днів, то має місце рівність $(x+y)\cdot 8 = z$, звідки

$$z = 8x + 8y. \tag{6.4.1}$$

Оскільки кішці (одній) вистачило б корму на 11 днів, то має місце рівність

$$z = 11x. \tag{6.4.2}$$

З рівностей (6.4.1) та (6.4.2) має місце рівність $8x+8y=11x$, звідки

$$8y = 3x,\ y = \frac{3x}{8}. \tag{6.4.3}$$

4) Оскільки y – денна норма корму усіх кошенят, а z – кількість (обсяг) корму, який купив господар, то кількість днів, за які кошенята з'їдять весь корм становить

$$\frac{z}{y} = z : y = 11x : \frac{3x}{8} = 11x \cdot \frac{8}{3x} = \frac{88 \cdot x}{3 \cdot x} = \frac{88}{3} = 29\frac{1}{3}.$$

З останнього й випливає, що кошенятам вистачило б корму на 29 повних днів.

Відповідь: 29.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4

?! Петрик зриває за 21 хвилину 48 яблук, а Сашко за 84 хвилини – 36 яблук. Скільки яблук зірве Петрик за час, за який Сашко зірве 54 яблука?

?! Двоє робітників, працюючи разом, можуть скосити траву на ділянці за 2 години 6 хвилин. Скільки часу (у годинах) витратить на скошування трави на цій ділянці другий робітник, працюючи самостійно, якщо йому потрібно на виконання цього завдання на 4 години більше, ніж першому робітникові?

Задача 5

Іван брав участь у вікторині з історії. За кожну правильну відповідь учаснику нараховується 8 балів, за кожну неправильну – списується 8 балів, за відсутність відповіді списується 3 бали. За результатами вікторини Іван набрав 35 балів.

На скільки питань Іван не дав відповідь, якщо у вікторині було 30 питань?

Розв'язання.

1) Нехай під час вікторини Іван надав x **правильних** відповідей, y **неправильних** відповідей та на z питань **не навів відповідей** зовсім. Оскільки за результатами вікторини Іван набрав 35 балів, то:

1.1) x є натуральним числом, y – натуральним числом або нулем, z – натуральним числом або нулем;

1.2) $x > y$.

Відповідно до правил вікторини за кожну правильну відповідь **нараховується 8 балів**, за кожну неправильну – **списується 8 балів**, а за відсутність відповіді – **списується 3 бали**. Тому, з урахуванням введених позначень, справджується рівність

$$8x - 8y - 3z = 35. \qquad (6.5.1)$$

Оскільки у вікторині було **35 питань**, то справджується рівність

$$x + y + z = 30. \qquad (6.5.2)$$

1 спосіб

2) Оскільки $x > y$, то

$$x = y + k, \text{ де } k \in N. \qquad (6.5.3)$$

З урахуванням (6.5.3), рівності (6.5.1) та (6.5.2) можна подати у вигляді наступної системи

$$\begin{cases} 8(y+k) - 8y - 3z = 35 \\ y + k + y + z = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8k = 35 + 3z \\ y = \dfrac{30 - (z+k)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 4 + \dfrac{3 \cdot (z+1)}{8} & (*) \\ y = \dfrac{30 - (z+k)}{2} & (**) \end{cases}$$

3) Оскільки k є натуральним числом, то, з урахуванням (*), вираз $4 + \dfrac{3 \cdot (z+1)}{8}$ також є натуральним числом, що можливо лише за умов, коли дріб $\dfrac{z+1}{8}$ є натуральним числом. Цей дріб є натуральним числом тоді і лише тоді, коли z належить множині чисел $\{7;15;23;31;...\}$, тобто коли $z = 7 + 8l$, де l є натуральним числом або нулем.

3.1) Якщо $z = 7$, то, з урахуванням (*), маємо що $k = 7$. Звідки, з урахуванням (**), маємо що

$$y = \frac{30-14}{2} = \frac{16}{2} = 8, \; x = 8 + 7 = 15.$$

3.2) Якщо $z=15$, то, з урахуванням (*), маємо що $k=10$. Звідки, з урахуванням (**), маємо що:

$$y=\frac{30-25}{2}=\frac{5}{2}, \tag{7.5.4}$$

чого не може бути, бо y повинен бути натуральним числом або нулем.

3.3) якщо $z\ge 23$, то, з урахуванням (*), маємо що $k\ge 13$. Звідки $z+k\ge 36$, а, з урахуванням (**), маємо що $y<0$, чого бути не може, бо y повинен бути натуральним числом або нулем.

Таким чином Іван не навів відповіді на 7 питань вікторини.

2 спосіб

2*) З урахуванням рівностей (6.5.1) та (6.5.2) маємо наступну систему

$$\begin{cases}8x-8y-3z=35\\ x+y+z=30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x-8y=35+3z\\ x+y=30-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=\dfrac{35+3z}{8}\\ x+y=30-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=\dfrac{275-5z}{8}\\ 2y=\dfrac{205-11z}{8}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{275-5z}{16}\\ y=\dfrac{205-11z}{16}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=15-\dfrac{5(z-7)}{16}\\ y=8-\dfrac{11\cdot(z-7)}{16}\end{cases} \tag{6.5.5}$$

3*) Оскільки x є натуральним числом, y – натуральним числом або нулем, z – натуральним числом або нулем, то, з урахуванням системи (6.5.5), дріб $\dfrac{(z-7)}{16}$ має бути натуральним числом, що можливо лише коли z має вид

$z=7+16l$, де l є натуральним числом або нулем. (6.5.6)

3.1) Якщо $l=0$, то, з урахуванням (6.5.6), маємо що $z=7$. Тому, з урахуванням (6.5.5), маємо що $x=15$, а $y=8$.

3.2) Якщо $l\ge 1$, $l\in N$ то, з урахуванням (6.5.6), маємо що $z\ge 23$. Тоді, з урахуванням (6.5.5), маємо, що $y<0$, чого бути не може, бо y повинен бути натуральним числом або нулем.

Таким чином Іван не навів відповіді на 7 питань вікторини.

Відповідь: **7.**

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 5

?! На скільки питань Іван відповів правильно, якщо б у вікторині було 24 питання?

?! На скільки питань Іван не надав відповідей (зовсім), якщо б у вікторині було 25 питань?

?! На скільки питань Іван навів неправильну відповідь, якщо б у вікторині було 37 питань?

7 клас

Задача 1

Якою цифрою закінчується значення (числового) виразу $15^{2019} + 26^{2020} + 29^{2021}$?

Розв'язання.
1 спосіб.

1) Не важко перевірити, що:

$$15^1 = 1|\underline{5};\ 15^2 = 22|\underline{5};\ 15^3 = 337|\underline{5}.$$

Оскільки добуток двох чисел, кожне з яких закінчується цифрою 5, також закінчується цифрою 5, то число 15^{2019} (яке є добутком 2019 чисел, кожне з яких закінчується дорівнює 15) також закінчується цифрою 5.

2) Не важко перевірити, що:

$$26^1 = 2|\underline{6};\ 26^2 = 26 * 26 = 67|\underline{6}.$$

Оскільки добуток двох чисел, кожне з яких закінчується цифрою 6, також закінчується цифрою 6, то число 26^{2020} (яке є добутком 2020 чисел, кожне з яких закінчується дорівнює 26) також закінчується цифрою 6.

3) Не важко перевірити, що:

$$29^1 = 2|\underline{9};\ 29^2 = 29 * 29 = 84|\underline{1};\ 29^3 = 841 * 29 = 2438|\underline{9}.$$

Оскільки:

– добуток двох чисел, кожне з яких закінчується 9, закінчується цифрою 1;

– добуток двох чисел, одне з яких закінчується 1 а інше 9, закінчується цифрою 9, а;

– добуток чисел, кожне з яких закінчується цифрою 1, також закінчується цифрою 1,

то степінь з основою 29 закінчується або цифрою 1, або ж цифрою 9, в залежності від показника. Якщо показник є непарним числом – цифрою 9, якщо показник є парним числом – цифрою 1.

Тому число 29^{2021} закінчується цифрою 9.

4) Оскільки перший доданок числового виразу закінчується цифрою 5, другий доданок – цифрою 6, а третій – цифрою 9, то сума доданків даного числового виразу закінчується цифрою 0, бо $5 + 6 + 9 = 2|\underline{0}$.

Відповідь: 0.

2 спосіб («на виріст»)

1) Очевидно, що якщо від натурального $n-$значного ($n \geq 2$) числа M відняти останню його цифру m, то одержане число $(M-m)$ буде закінчуватися нулем і тому (націло) ділитися на 10. Звідки маємо, що кожне натуральне $n-$значне ($n \geq 2$) число M з останньою його цифру m, можна подати у вигляді

$$M = P \cdot 10 + m, \tag{7.1.1}$$

де $P = (M-m):10$ – відповідне $(n-1)-$значне натуральне число.

Зауваження 7.1.1. Подання натурального числа M у вигляді (7.1.1) є наслідком з «теореми про ділення з остачею», згідно з якою

Для будь-яких натуральних чисел a і b існує єдина пара невід'ємних цілих чисел q і r, таких що

$$a = q \cdot b + r, \qquad 0 \leq r < b. \tag{7.1.2}$$

***Причому**: число q називають <u>неповною часткою</u>, а число r – <u>остачею</u> від ділення a на b.*

2) Введемо в розгляд функцію $L(M)$, яка кожному натуральному числу M ставить у відповідність (повертає значення) останню його цифру. Тобто, якщо число M подати у вигляді (7.1.1), то

$$L(M) = L(P \cdot 10 + m) = m.$$

Наприклад: $L(5)=5$; $L(14)=L(1\cdot 10+4)=4$; $L(321)=L(32\cdot 10+1)=1$.

Не важко переконатися, що для довільних натуральних чисел a і b мають місце наступні властивості функції L:

$$L(a+b) = L\big(L(a)+L(b)\big), \tag{7.1.3}$$

$$L(a \cdot b) = L\big(L(a)\cdot L(b)\big). \tag{7.1.4}$$

3) За допомогою наступної таблиці проілюструємо існуючі залежності між натуральним показником n степеня з основою m, яка є цифрою, та останньою цифрою такого степеня:

$m=m^1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
m^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729
m^4	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
m^5	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
m^6	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441

А саме, для натуральних n і k мають місце рівності:

$$L(0^n)=0; \qquad L(1^n)=1; \qquad L(5^n)=5; \qquad L(6^n)=6, \tag{7.1.5}$$

$$L(4^n)=\begin{cases}4, & n=2k-1\\ 6, & n=2k,\end{cases} \qquad L(9^n)=\begin{cases}9, & n=2k-1\\ 1, & n=2k,\end{cases} \tag{7.1.6}$$

$$L\left(2^n\right)=\begin{cases}2, & n=4k-3\\ 4, & n=4k-2\\ 8, & n=4k-1\\ 6, & n=4k\end{cases} \qquad L\left(3^n\right)=\begin{cases}3, & n=4k-3\\ 9, & n=4k-2\\ 7, & n=4k-1\\ 1, & n=4k\end{cases} \qquad (7.1.7)$$

$$L\left(7^n\right)=\begin{cases}7, & n=4k-3\\ 9, & n=4k-2\\ 3, & n=4k-1\\ 1, & n=4k\end{cases} \qquad L\left(8^n\right)=\begin{cases}8, & n=4k-3\\ 4, & n=4k-2\\ 2, & n=4k-1\\ 6, & n=4k\end{cases} \qquad (7.1.8)$$

4) Не важко переконатися, що $n-$ий степінь двочлена (натурального числа, поданого у вигляді $M=P\cdot 10+m$) можна подати у вигляді

$$\left(P\cdot 10+m\right)^n=P^n\cdot 10^n+a_1\cdot P^{n-1}\cdot m^1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot P^{n-2}\cdot m^2\cdot 10^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-2}\cdot P^2\cdot m^{n-2}\cdot 10^2+a_{n-1}\cdot P^1\cdot m^{n-1}\cdot 10^1+m^n. \quad (7.1.9)$$

Отже, якщо $M=P\cdot 10+m$, де $m\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, $M,P\in N$, то

$$L\left(\left(P\cdot 10+m\right)^n\right)=L\left(m^n\right). \quad (7.1.10)$$

5) З урахуванням співвідношень (7.1.3) – (7.1.10), маємо:

$$L\left(15^{2019}\right)=L\left(\left(10+5\right)^{2019}\right)=L\left(5^{2019}\right)=5;$$

$$L\left(14^{2020}\right)=L\left(26^{2020}\right)=L\left(\left(2\cdot 10+6\right)^{2020}\right)=L\left(6^{2020}\right)=6;$$

$$L\left(29^{2021}\right)=L\left(\left(2\cdot 10+9\right)^{2021}\right)=L\left(9^{2021}\right)=9.$$

Звідки $L\left(15^{2019}+26^{2020}+29^{2021}\right)=$

$$=L\left(L\left(15^{2019}\right)+L\left(26^{2020}\right)+L\left(29^{2021}\right)\right)=L\left(5+6+9\right)=L\left(20\right)=0.$$

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 1

?! Знайти останню цифру числа:

а) 2^{100}; б) 549^{49}; в) 2019^{2019}; г) $7^{7^7}=7^{\left(7^7\right)}$.

?! Чи ділиться число $47^{30}+39^{50}$ на 10?

?! Доведіть, що серед квадратів довільних п’яти натуральних чисел завжди можна обрати два, сума або різниця яких ділиться на 10.

А чи звертали Ви увагу? Що:

$$(a+b)^0 = \quad \boxed{1}\cdot a^0b^0 \text{, де } a+b\neq 0$$

$$(a+b)^1 = \quad \boxed{1}\cdot a^1b^0 + \boxed{1}\cdot a^0b^1$$

$$(a+b)^2 = \quad \boxed{1}\cdot a^2b^0 + \boxed{2}\cdot a^1b^1 + \boxed{1}\cdot a^0b^2$$

$$(a+b)^3 = \quad \boxed{1}\cdot a^3b^0 + \boxed{3}\cdot a^2b^1 + \boxed{3}\cdot a^1b^2 + \boxed{1}\cdot a^0b^3$$

$$(a+b)^4 = \quad \boxed{1}\cdot a^4b^0 + \boxed{4}\cdot a^3b^1 + \boxed{6}\cdot a^2b^2 + \boxed{4}\cdot a^1b^3 + \boxed{1}\cdot a^0b^4$$

$$(a+b)^5 = \quad \boxed{1}\cdot a^5b^0 + \boxed{5}\cdot a^4b^1 + \boxed{10}\cdot a^3b^2 + \boxed{10}\cdot a^2b^3 + \boxed{5}\cdot a^1b^4 + \boxed{1}\cdot a^0b^5$$

1) В першому одночлені – показник степеня з основою a дорівнює показнику n степеня двочлена, а показник степеня з основою b – 0; в останньому одночлені – показник степеня з основою a дорівнює 0, а показник степеня з основою b – показнику n степеня двочлена.

2) Сума показників степенів з основами a і b в кожному одночлені дорівнює відповідному показнику степеня двочлена.

3) В кожному одночлені, починаючи з другого, показник степеня з основою a зменшується на «один», а показник степеня з основою b – збільшується на «один» (у порівнянні з попереднім одночленом).

4) Коефіцієнти (числові множники) *першого* та *останнього* одночленів у кожному із зазначених многочленів дорівнюють по 1.

5) Коефіцієнти одночленів (починаючи з другого до передостаннього включно) можна визначити за допомогою «**Трикутника Паскаля**»

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Відмінністю формул для «степеня різниці» від формул для «степеня суми» є чередування знаків: перший – «$+$», другий – «$-$» і т.д.

$$(a-b)^1 = \quad +\boxed{1}\cdot a^1b^0 - \boxed{1}\cdot a^0b^1$$

$$(a-b)^2 = \quad +\boxed{1}\cdot a^2b^0 - \boxed{2}\cdot a^1b^1 + \boxed{1}\cdot a^0b^2$$

$$(a-b)^3 = \quad +\boxed{1}\cdot a^3b^0 - \boxed{3}\cdot a^2b^1 + \boxed{3}\cdot a^1b^2 - \boxed{1}\cdot a^0b^3$$

$$(a-b)^4 = \quad +\boxed{1}\cdot a^4b^0 - \boxed{4}\cdot a^3b^1 + \boxed{6}\cdot a^2b^2 - \boxed{4}\cdot a^1b^3 + \boxed{1}\cdot a^0b^4$$

$$(a-b)^5 = \quad +\boxed{1}\cdot a^5b^0 - \boxed{5}\cdot a^4b^1 + \boxed{10}\cdot a^3b^2 - \boxed{10}\cdot a^2b^3 + \boxed{5}\cdot a^1b^4 - \boxed{1}\cdot a^0b^5$$

Задача 2

Товар подешевшав на 20%. На скільки відсотків більше можна купити товару за ту ж кількість грошей?

Розв'язання.

1 спосіб.

1) Нехай одиниця товару коштувала x (грошових одиниць), а закупівля відбувалась на суму S (грошових одиниць). Тоді:

   1.1) до подешевшання можна було купити $V=\dfrac{S}{x}$ одиниць товару;

   1.2) після подешевшання вартість одиниці товару стала складати

$$x-\frac{x}{100}\cdot 20=x-0,2x=0,8x;$$

2) Оскільки після подешевшання одиниця товару стала коштувати $0,8x$, то за ту ж кількість грошей (на ту ж суму S грошей) можна купити

$$V'=\frac{S}{0,8x}=\frac{10\cdot S}{10\cdot 0,8x}=\frac{10\cdot S}{8x}=\frac{10}{8}\cdot\frac{S}{x}=\frac{5}{4}\cdot\frac{S}{x}$$

   одиниць товару.

3) Знайдемо скільки відсотків становить нова кількість V' одиниць товару від старої кількості V

$$\frac{V'}{V}\cdot 100\%=\frac{\frac{5}{4}\cdot\frac{S}{x}}{\frac{S}{x}}\cdot 100\%=\frac{5}{4}\cdot 100\%=125\%.$$

Таким чином, після подешевшання за ту ж кількість грошей можна купити товару на 25% більше.

Відповідь: 25%.

А чи звертали Ви увагу? Що:

! Збільшення величини A на $p\%$ є рівносильним множенню величини A на відповідний числовий коефіцієнт, а саме

$$A\nearrow p\% \quad\sim\quad A\cdot\frac{100+p}{100}.$$

! Зменшення величини B на $q\%$ є рівносильним множенню величини B на відповідний числовий коефіцієнт, а саме

$$B\searrow q\% \quad\sim\quad B\cdot\frac{100-q}{100}.$$

Задача 3

Усередині тупого кута AOB провели три промені OC, OD і OE, причому OC перпендикулярний до OA, OD – бісектриса кута AOB і OE – бісектриса кута BOC. Знайдіть величину кута DOE.

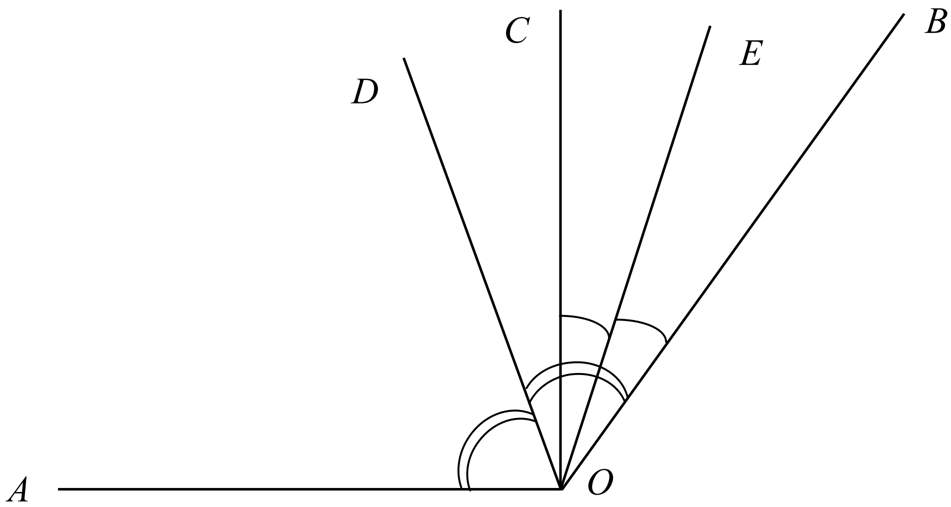
Розв'язання.

1) За умовою OE – бісектриса кута BOC, тому промінь OE проходить між сторонами $\angle BOC$ та $\angle BOE = \angle EOC$.

2) Оскільки OD – бісектриса тупого кута AOB, то промінь OE проходить між сторонами $\angle AOB$ а кожен з двох рівних кутів AOD і DOB обов'язково є гострим (поясніть чому?).

3) За умовою промінь OC перпендикулярний до OA, тому $\angle AOC = 90^0$. Оскільки кожен з двох рівних кутів AOD і DOB є гострим, то промінь OD проходить між сторонами $\angle AOC$.

Таким чином промені OC, OD і OE, які задовольняють умову задачі є такими, що: промінь OD проходить між сторонами $\angle AOC$; промінь OC – між сторонами $\angle DOE$; промінь OE – між сторонами $\angle COB$.



4) З урахуванням 3), шуканий кут DOE становить

$$\angle DOE = \angle DOC + \angle COE.$$

Нехай даний тупий кут $\angle AOB = \alpha$. Тоді:

$$\angle AOD = \angle DOB = \frac{\alpha}{2}, \quad \text{звідки} \quad \angle DOC = 90^0 - \frac{\alpha}{2},$$

тому $\angle COB = \alpha - 90^0$, звідки $\angle COE = \dfrac{\alpha - 90^0}{2} = \dfrac{\alpha}{2} - 45^0$,

тому $\angle DOE = \angle DOC + \angle COE = 90^0 - \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2} - 45^0 = 45^0$.

Відповідь: 45^0.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 3

?! Чому дорівнює кут між бісектрисами суміжних кутів?

Задача 4

Знайдіть усі такі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, для яких виконується рівність $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+\overline{a}=2021$.

Розв'язання.

1) За умовою – $\overline{abcd}$ є чотиризначним числом. Тому $a,b,c,d\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, причому $a\neq 0$.

2) Оскільки $\overline{abcd}=a\cdot 1000+b\cdot 100+c\cdot 10+d$,
$\overline{abc}=a\cdot 100+b\cdot 10+c$,
$\overline{ab}=a\cdot 10+b$, $\overline{a}=a$,

то рівність, яка виконується, можна подати у вигляді

$1000a+100(a+b)+10(a+b+c)+(a+b+c+d)=2021$, або ж

$$1111a+111b+11c+d=2021. \qquad (7.4.1)$$

3) Якщо припустити, що $a\geq 2$, то числовий вираз $1111\cdot a\geq 2222$. Звідки ліва частина співвідношення (7.4.1) буде не меншою за число 2222. І тому рівність (7.4.1) не може бути правильною. Звідки й випливає, що $a=1$.

4) При $a=1$ рівність (7.4.1) набуває вид

$1111+111b+11c+d=2021$, звідки

$$111b+11c+d=910. \qquad (7.4.2)$$

5) Якщо припустити, що $b=9$, то числовий вираз $111\cdot b=999$. Звідки ліва частина співвідношення (7.4.2) буде не меншою за число 999. І тому рівність (7.4.2) не може бути правильною. Звідки й випливає, що $b\neq 9$.

6) Якщо припустити, що $b\leq 7$, то числовий вираз $111\cdot b\leq 777$.

При будь-яких $c,d\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ числовий вираз $11c+d\leq 11\cdot 9+9$, тобто $11c+d\leq 108$. Звідки ліва частина співвідношення (7.4.2) буде не більшою за число $777+108=885$. І тому рівність (7.4.2) не може бути правильною. Звідки й випливає, що $b=8$.

7) При $b=8$ рівність (7.4.2) набуває вид

$$11c+d=22. \qquad (7.4.3)$$

При будь-якому $c\geq 3$ числовий вираз $11c\geq 33$, звідки ліва частина співвідношення (7.4.3) буде не меншою за число 33. І тому при $c\geq 3$ рівність (7.4.3) не може бути правильною.

При $c=0$ рівність (7.4.3) набуває вид $d=22$, чого бути не може, бо $d\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

При $c=1$ рівність (7.4.3) набуває вид $d=11$, чого бути не може, бо $d\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

При $c=2$ рівність (7.4.3) набуває вид $d=0$.

Таким чином, єдиним чотиризначним числом, яке задовольняє умову задачі, є число 1820.

Відповідь: 1820.

Задача 5

Іван брав участь у вікторині з історії. За кожну правильну відповідь учаснику нараховується 8 балів, за кожну неправильну – списується 8 балів, за відсутність відповіді списується 3 бали. За результатами вікторини Іван набрав 35 балів.

На скільки питань Іван не дав відповідь, якщо у вікторині було 35 питань?

Розв'язання.

1) Нехай під час вікторини Іван надав x **правильних** відповідей, y **неправильних** відповідей та на z питань **не навів відповідей** зовсім. Оскільки за результатами вікторини Іван набрав 35 балів, то:

1.1) x є натуральним числом, y – натуральним числом або нулем, z – натуральним числом або нулем;

1.2) $x > y$.

Відповідно до правил вікторини за кожну правильну відповідь **нараховується 8 балів**, за кожну неправильну – **списується 8 балів**, а за відсутність відповіді – **списується 3 бали**. Тому, з урахуванням введених позначень, справджується рівність

$$8x - 8y - 3z = 35. \qquad (7.5.1)$$

Оскільки у вікторині було **35 питань**, то справджується рівність

$$x + y + z = 35. \qquad (7.5.2)$$

1 спосіб

2) Оскільки $x > y$, то

$x = y + k$, де k – натуральне число. (7.5.3)

З урахуванням (7.5.3), рівності (7.5.1) та (7.5.2) можна подати у вигляді наступної системи

$$\begin{cases} 8(y+k) - 8y - 3z = 35 \\ y + k + y + z = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8k = 35 + 3z \\ y = \dfrac{35 - (z+k)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 4 + \dfrac{3\cdot(z+1)}{8} & (*) \\ y = \dfrac{35-(z+k)}{2} & (**) \end{cases}$$

3) Оскільки k є натуральним числом, то, з урахуванням (*), вираз $4 + \dfrac{3\cdot(z+1)}{8}$ також є натуральним числом, що можливо лише коли дріб $\dfrac{z+1}{8}$ є натуральним числом. Цей дріб є натуральним числом тоді і лише тоді, коли z належить множині чисел $\{7;15;23;31;...\}$, тобто коли $z = 7 + 8l$, де l є натуральним числом або нулем.

3.1) Якщо $z = 7$, то, з урахуванням (*), маємо що $k = 7$. Звідки, з урахуванням (**), маємо що

$$y = \frac{35-14}{2} = \frac{21}{2},$$

чого не може бути, бо y повинен бути натуральним числом або нулем.

3.2) Якщо $z = 15$, то, з урахуванням (*), маємо що $k = 10$. Звідки, з урахуванням (**), маємо що:

$$y = \frac{35-25}{2} = \frac{10}{2} = 5 \in N,\ x = 5 + 10 = 15. \qquad (7.5.4)$$

3.3) якщо $z \geq 23$, то, з урахуванням (*), маємо що $k \geq 13$. Звідки $z + k \geq 36$, а, з урахуванням (**), маємо що $y < 0$, чого бути не може, бо y повинен бути натуральним числом або нулем.

Таким чином Іван не навів відповіді на 15 питань вікторини.

2 спосіб

2*) З урахуванням рівностей (7.5.1) та (7.5.2) маємо наступну систему

$$\begin{cases} 8x - 8y - 3z = 35 \\ x + y + z = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 8y = 35 + 3z \\ x + y = 35 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \dfrac{35+3z}{8} \\ x + y = 35 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{315-5z}{8} \\ 2y = \dfrac{245-11z}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{315-5z}{16} \\ y = \dfrac{245-11z}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 - \dfrac{5\cdot(1+z)}{16} \\ y = 16 - \dfrac{11\cdot(1+z)}{16} \end{cases} \qquad (7.5.5)$$

3*) Оскільки x є натуральним числом, y – натуральним числом або нулем, z – натуральним числом або нулем, то, з урахуванням системи (7.5.5), дріб $\dfrac{(1+z)}{16}$ має бути натуральним числом, що можливо лише коли z має вид

$z = 15 + 16l$, де l є натуральним числом або нулем. (7.5.6)

3.1) Якщо $l = 0$, то, з урахуванням (7.5.6), маємо що $z = 15$. Тому, з урахуванням (7.5.5), маємо що $x = 15$, а $y = 5$.

3.2) Якщо $l \geq 1$, l – натуральне число, то, з урахуванням (7.5.6), маємо що $z \geq 31$. Тоді, з урахуванням (7.5.5), маємо, що $y < 0$, чого бути не може, бо y повинен бути натуральним числом або нулем.

Таким чином Іван не навів відповіді на 15 питань вікторини.

Відповідь: 15.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 5

?! На скільки питань Іван не надав відповідей (зовсім), якщо б у вікторині було 30 питань?

?! На скільки питань Іван відповів правильно, якщо б у вікторині було 24 питання?

?! На скільки питань Іван не надав відповідей (зовсім), якщо б у вікторині було 25 питань?

?! На скільки питань Іван навів неправильну відповідь, якщо б у вікторині було 37 питань?

8 клас

Задача 1

Доведіть, що для довільних дійсних чисел виконується нерівність:

$$x^2 - 2xy + 2020y^2 \ge 0$$

Розв'язання.

1 спосіб.

Перетворимо ліву частину доводжуваної нерівності наступним чином

$$x^2 - 2xy + 2020y^2 =$$

$$= x^2 - 2xy + y^2 + 2019y^2 = \left(x - y\right)^2 + 2019y^2.$$

Оскільки при довільних (дійсних) x, y кожен з доданків $\left(x-y\right)^2$ та $2019y^2$ останнього виразу є невід'ємною величиною, то й сума, а разом з нею і ліва частина доводжуваної нерівності є невід'ємною величиною.

2 спосіб («на виріст»).

1) Якщо $y = 0$, то ліва частина доводжуваної нерівності набуває вид $x^2 \ge 0$ і тому є невід'ємною величиною.

2) Якщо $y \ne 0$, то $y^2 > 0$. І тому доводжувана нерівність є рівносильною до наступної

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} + 2020 \ge 0,$$

тобто для доведення вихідної нерівності досить довести справедливість останньої.

Перетворимо ліву частину доводжуваної нерівності наступним чином

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} + 2020 =$$

$$= \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} + 1 + 2019 =$$

$$= \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 + 2019.$$

Оскільки при довільних (дійсних) x та $y \ne 0$ кожен з доданків $\left(\frac{x}{y} - 1\right)^2$ та 2019 останнього виразу є невід'ємною величиною, то й сума, а разом з нею і ліва частина доводжуваної нерівності є невід'ємною величиною.

3 спосіб («на виріст»).

1) Якщо $x = 0$, то ліва частина доводжуваної нерівності набуває вид $y^2 \geq 0$ і тому є невід'ємною величиною.

2) Якщо $x \neq 0$, то $x^2 > 0$. І тому доводжувана нерівність є рівносильною до наступної

$$1 - 2\frac{y}{x} + 2020\left(\frac{y}{x}\right)^2 \geq 0,$$

тобто для доведення вихідної нерівності досить довести справедливість останньої.

Перетворимо ліву частину доводжуваної нерівності наступним чином

$$1 - 2\frac{y}{x} + 2020 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 =$$

$$= 1 - 2\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2019 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{y}{x} - 1\right)^2 + 2019 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Оскільки при довільних (дійсних) y та $x \neq 0$ кожен з доданків $\left(\frac{y}{x} - 1\right)^2$ та $2019 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2$ останнього виразу є невід'ємною величиною, то й сума, а разом з нею і ліва частина доводжуваної нерівності є невід'ємною величиною.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 1

?! Доведіть, що для довільних дійсних чисел виконується нерівність

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 \geq 0.$$

?! Доведіть, що для довільних дійсних чисел виконується нерівність

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 \geq 0.$$

Задача 2

Спростити вираз $\dfrac{a^1+a^2+\ldots+a^{2020}}{a^{-1}+a^{-2}+\ldots+a^{-2020}}$.

Розв'язання.

1 спосіб.

$$\frac{a^1+a^2+\ldots+a^{2020}}{a^{-1}+a^{-2}+\ldots+a^{-2020}}=$$

$$=\frac{a^1+a^2+\ldots+a^{2020}}{\frac{1}{a^1}+\frac{1}{a^2}+\ldots+\frac{1}{a^{2019}}+\frac{1}{a^{2020}}}=\frac{a\cdot\left(1+a^1+\ldots+a^{2019}\right)}{\frac{a^{2019}+a^{2018}+\ldots+a^1+1}{a^{2020}}}=$$

$$=\frac{a\cdot\left(1+a^1+\ldots+a^{2019}\right)\cdot a^{2020}}{a^{2019}+a^{2018}+\ldots+a^1+1}=\frac{\left(\cancel{1+a^1+\ldots+a^{2019}}\right)\cdot a^{2021}}{\cancel{1+a^1+\ldots+a^{2019}}}=a^{2021}.$$

2 спосіб.

$$\frac{a^1+a^2+\ldots+a^{2020}}{a^{-1}+a^{-2}+\ldots+a^{-2020}}=\frac{a^{2021}\cdot\left(\cancel{a^{-2020}+a^{-2019}+\ldots+a^{-2}+a^{-1}}\right)}{\cancel{a^{-1}+a^{-2}+\ldots+a^{-2020}}}=a^{2021}.$$

3 спосіб («на виріст»).

$$\frac{a^1+a^2+\ldots+a^{2020}}{a^{-1}+a^{-2}+\ldots+a^{-2020}}=$$

$$=\frac{a\cdot\left(1+a^1+\ldots+a^{2019}\right)}{\frac{1}{a}\cdot\left(1+\left(\frac{1}{a}\right)^1+\ldots+\left(\frac{1}{a}\right)^{2019}\right)}=\frac{a\cdot(a-1)\cdot\left(a^{2019}+\ldots+a^1+1\right)}{\frac{1}{a}\cdot(a-1)\cdot\left(1+\left(\frac{1}{a}\right)^1+\ldots+\left(\frac{1}{a}\right)^{2019}\right)}=$$

$$=\frac{a\cdot\left(a^{2020}-1\right)}{\frac{1}{a}\cdot(a-1)\cdot\left(1+\left(\frac{1}{a}\right)^1+\ldots+\left(\frac{1}{a}\right)^{2019}\right)}=\frac{a\cdot\left(a^{2020}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a}-1\right)}{\frac{1}{a}\cdot(a-1)\cdot\left(\frac{1}{a}-1\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{2019}+\ldots+\left(\frac{1}{a}\right)^1+1\right)}=$$

$$=\frac{a\cdot\left(a^{2020}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a}-1\right)}{\frac{1}{a}\cdot(a-1)\cdot\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{2020}-1\right)}=\frac{\left(a^{2020}-1\right)\cdot(1-a)}{\frac{1}{a}\cdot(a-1)\cdot\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{2020}-1\right)}=-\frac{\left(a^{2020}-1\right)}{\frac{1}{a}\cdot\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{2020}-1\right)}=$$

$$=\frac{1-a^{2020}}{\left(\frac{1}{a}\right)^{2021}-\frac{1}{a}}=\frac{\left(1-a^{2020}\right)\cdot a^{2021}}{\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{2021}-\frac{1}{a}\right)\cdot a^{2021}}=\frac{\left(\cancel{1-a^{2020}}\right)\cdot a^{2021}}{\left(\cancel{1-a^{2020}}\right)}=a^{2021}.$$

Відповідь: a^{2021}.

Задача 3

Два автомобілі знаходяться на одній дорозі на відстані 200 км, один рухається зі швидкістю 60 км/год, а інший – 40 км/год. Через який час відстань між ними може знову стати 200 км? Розгляньте усі можливі випадки та в кожному з них дайте відповідь.

Розв'язання.

1) Оскільки два автомобілі рухаються по одній дорозі та знаходяться (у початковий момент) на відстані 200 км один від одного, то можливими є лише два випадки:

або автомобілі рухаються на зустріч один одному,

або ж автомобілі рухаються в одному напрямку (один за одним).

Крім того, у другому випадку можливі два підвипадки:

– автомобіль, швидкість якого 40 км/год, – попереду, а інший – позаду;

– автомобіль, швидкість якого 60 км/год, – попереду, а інший – позаду.

Більше того, у другому підвипадку, через те що попереду більш швидкий автомобіль, то відстань між автомобілями з часом буде лише збільшуватися. І тому відстань не може знову становити 200 км.

2) Нехай автомобілі рухаються на зустріч один одному. Тоді через певний час t_0 автомобілі обов'язково зустрінуться, подолавши початкову відстань між ними у 200 км. За час t_0 (на момент зустрічі) перший автомобіль подолає відстань $40 \cdot t_0$ км, а інший – $60 \cdot t_0$ км. Тому має місце рівність

$$40 \cdot t_0 + 60 \cdot t_0 = 200,$$

звідки $t_0 = 2$. Таким чином, в зазначеній моделі руху автомобілі зустрінуться через 2 години та продовжать рухатися у протилежних напрямках, збільшуючи відстань між собою. Оскільки швидкості автомобілів залишаються незмінними, то з моменту зустрічі відстань між ними становитиме 200 км точно через 2 години. Тому, якщо автомобілі рухаються на зустріч один одному, то відстань між ними знову становитиме 200 км через 4 години.

3) Нехай автомобілі рухаються в одному напрямку, а саме: попереду – той, швидкість якого 40 км/год, позаду – інший. Тоді через певний час T_0 швидший автомобіль наздожене повільнішого. Причому за це час швидший подолає відстань $60 \cdot T_0$ км, а повільніший – $40 \cdot T_0$ км. Оскільки у початковий момент часу відстань між ними становила 200 км, то має місце рівність

$$60 \cdot T_0 - 40 \cdot T_0 = 200,$$

звідки $T_0 = 10$. Оскільки швидкості автомобілів залишаються незмінними, то з моменту зустрічі (коли один наздогнав іншого) відстань між ними становитиме 200 км точно через 10 годин. Тому, якщо автомобілі рухаються в одному напрямку, то відстань між ними знову становитиме 200 км через 20 годин.

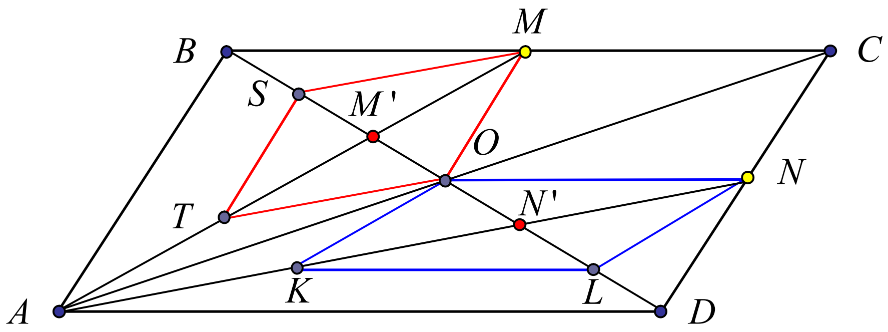
Відповідь: 4 години, 20 годин.

Задача 4

Розв'язання.

1 спосіб

(*за допомогою властивостей середньої лінії трикутника*)[4]



1) Нехай O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Тоді, за властивістю паралелограма, $BO = OD$.

2) Оскільки O – середина діагоналі AC, а M – середина сторони BC, то OM – середня лінія $\triangle ACB$. І тому $OM \parallel AB$ та $OM = AB/2$.

3) Нехай S – середина відрізка BM', а T – середина відрізка AM'. Тоді ST – середня лінія $\triangle AM'B$. І тому $TS \parallel AB$ та $TM = AB/2$.

   Оскільки $OM \parallel AB$ і $TS \parallel AB$, то $TS \parallel OM$. Оскільки в опуклому чотирикутнику $TSMO$ протилежні сторони TS і OM є паралельними та рівними, то за ознакою він є паралелограмом. Звідки $OM' = M'S$. І тому
$$OM' = M'S = SB = BO/3. \qquad (8.4.1)$$

4) Оскільки O – середина діагоналі AC, а N – середина сторони CD, то ON – середня лінія $\triangle ACD$. І тому $ON \parallel AD$ та $ON = AD/2$.

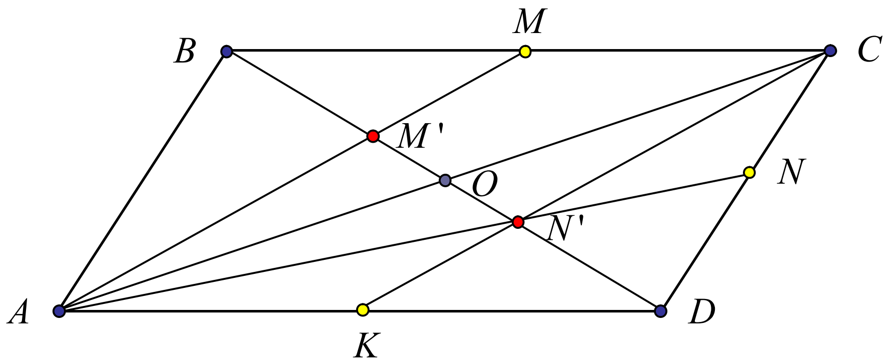
5) Нехай K, L – середини відрізків AN' та DN' відповідно. Тоді KL – середня лінія $\triangle AN'D$. І тому $KL \parallel AD$ та $KL = AD/2$.

6) Оскільки $KL \parallel AD$ і $ON \parallel AD$, то $KL \parallel ON$. Оскільки в опуклому чотирикутнику $KONL$ протилежні сторони KO і LN є паралельними та рівними, то за ознакою він є паралелограмом. Звідки $ON' = N'L$. І тому
$$ON' = N'L = LD = OD/3. \qquad (8.4.2)$$

7) Оскільки $BO = OD$, то, з урахуванням (8.4.1) і (8.4.2), маємо, що $OM' = M'S = SB = ON' = N'L = LD$. Звідки випливає, що
$$M'N' = \frac{2}{6}BD = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3}\cdot 12 = 4 \text{ см}.$$

[4] Мерзляк А.Г. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підручник для 8 кл. загальноосвітніх навчальних закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х. : Гімназія, 2016. – 224 с.

2 спосіб («на виріст»)
з використанням факту, що в довільному трикутнику медіани перетинаються в одній точці та за допомогою теореми Фалеса



1) Нехай O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$.
Оскільки точка N – середина сторони CD, а O – середина діагоналі AC, то N' – точка перетину медіан AN та DO $\triangle ADC$.

2) Нехай K – точка перетину сторони AD та променя CN'. Оскільки N' є точкою перетину медіан $\triangle ADC$, то K – середина сторони AD.

3) Очевидно, що за трьома сторонами $\triangle ABC = \triangle CDA$.
Крім того, медіани AM та CK є відповідними лінійними елементами, а $\angle AMB$ і $\angle CKD$ – відповідними кутами в цих рівних трикутниках. І тому
$$\angle AMB = \angle CKD. \qquad (8.4.3)$$

4) Оскільки прямі AD і BC є паралельними, то (за властивістю паралельних та січної) має місце рівність
$$\angle AMB = \angle MAD. \qquad (8.4.4)$$

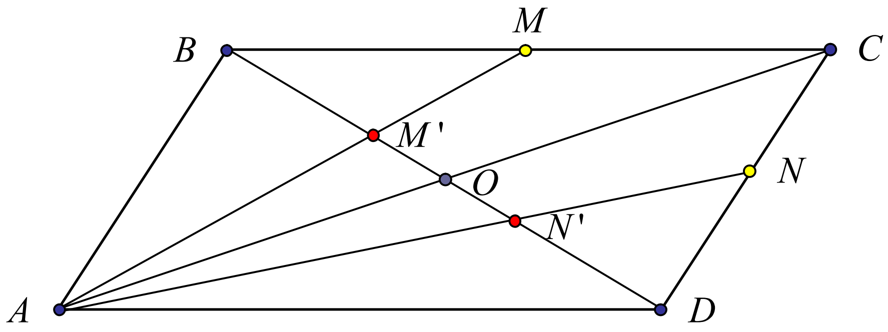
5) З (8.4.3) і (8.4.4) маємо, що $\angle MAD = \angle CKD$. Тому за ознакою прямі AM та CK є паралельними.

6) Оскільки $BM = MC$ і $MM' \parallel CN'$ (бо $AM \parallel CK$), то за теоремою Фалеса маємо, що
$$BM' = M'N'. \qquad (8.4.5)$$

7) Оскільки $AK = KD$ і $AM' \parallel KN'$ (бо $AM \parallel CK$), то за теоремою Фалеса маємо, що
$$M'N' = N'D. \qquad (8.4.6)$$

8) З (8.4.5) і (8.4.6) маємо, що $BM' = M'N' = N'D$. І тому
$$M'N' = \frac{BD}{3} = \frac{12}{3} = 4 \text{ см}.$$

3 спосіб («на виріст»)
за допомогою властивості точки перетину медіан трикутника



1) Нехай O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$.
Тоді за властивістю паралелограма
$$OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ см.}$$

2) Розглянемо $\triangle ABC$.
Оскільки точка M – середина сторони BC а O – середина діагоналі AC, то M' – точка перетину медіан AM та BO $\triangle ABC$. І тому (за властивістю точки перетину медіан трикутника) має місце відношення
$$BM' : M'O = 2:1.$$
Оскільки $BO = 6$ см, то, з урахуванням останнього відношення, маємо що
$$BM' = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3}\cdot 6 = 4 \text{ см, а } M'O = \frac{1}{3}BO = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2 \text{ см.}$$

3) Очевидно, що за трьома сторонами $\triangle ABC = \triangle CDA$.
Крім того, оскільки точка N – середина сторони CD а O – середина діагоналі AC, то N' – точка перетину медіан AN та DO $\triangle ADC$.
Більше того, відрізки $M'O$ та $N'O$ є відповідними лінійними елементами цих рівних трикутників. І тому $N'O = M'O = 2$ см.

4) За аксіомою вимірювання відрізків маємо, що
$$M'N' = M'O + ON' = 2 + 2 = 4 \text{ см.}$$

Відповідь: 4 см.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 4

?! Скільки на площині існує паралелограмів з вершинами в трьох даних точках, які не належать одній прямій?

?! Чи однозначно визначається паралелограм своїм центром симетрії та двома своїми вершинами?

А чи знали Ви? Що:

має місце наступна «Чудова властивість медіан паралелограма»[5]

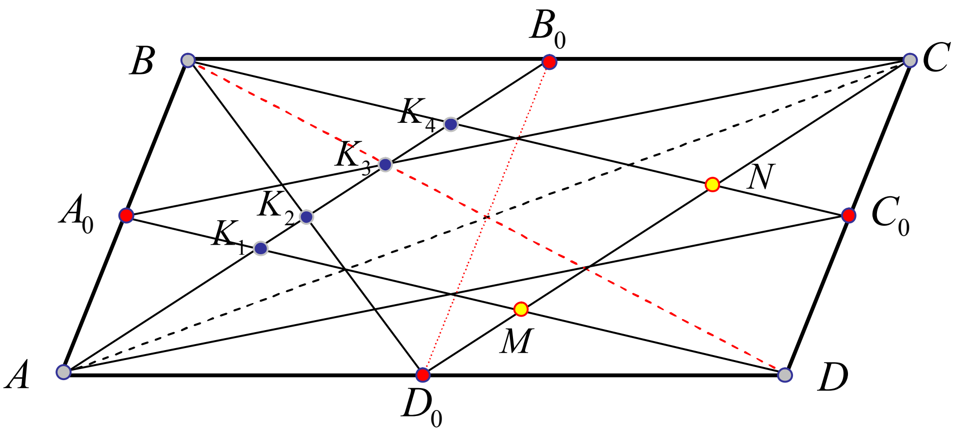
*Під **медіаною паралелограма** будемо розуміти відрізок, який сполучає його вершину із серединою несуміжної сторони.*

Твердження.

Нехай $ABCD$ – довільний паралелограм, а точки A_0, B_0, C_0, D_0 є серединами сторін AB, BC, CD і DA відповідно. Нехай далі, K_1, K_2, K_3, K_4 – точки перетину «медіани» AB_0 з «медіанами» DA_0, BD_0, CA_0 і BC_0 відповідно.

?! Доведіть, що має місце відношення[6]

$$AK_1 : K_1K_2 : K_2K_3 : K_3K_4 : K_4B_0 = 12:3:5:4:6.$$



Теорема [«Чудова властивість медіан паралелограма»].

Кожна з восьми медіан паралелограма перетинає точно чотири інших його медіан. Кожна з восьми із зазначених четвірок точок (перетину медіан) ділить відповідну медіану (рухаючись від вершини паралелограма) у сталому відношенні $12:3:5:4:6$.

---

[5] Кадубовський О.А. Про одну чудову властивість паралелограма // Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції «Математика у технічному університеті XXI сторіччя», 15 – 16 травня, 2017 р., Донбаська державна машинобудівна академія, м. Краматорськ. – Краматорськ : ДДМА, 2017. – С. 229–231. – 350 с.

[6] Кадубовський О.А. Систематизація та узагальнення фактів геометрії паралелограмів / В.М. Кадубовська, О.А. Кадубовський // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. – 2017. – Випуск 7. – С. 136–170.

Задача 5

Іван брав участь у вікторині з історії. За кожну правильну відповідь учаснику нараховується 8 балів, за кожну неправильну – списується 8 балів, за відсутність відповіді списується 3 бали. За результатами вікторини Іван набрав 35 балів. На скільки питань Іван відповів правильно, якщо у вікторині було 33 питання?

Розв'язання.

1) Нехай під час вікторини Іван надав x **правильних** відповідей, y **неправильних** відповідей та на z питань **не навів відповідей** зовсім. Оскільки за результатами вікторини Іван набрав 35 балів, то:

1.1) $x \in N$, $y \in N \bigcup \{0\}$, $z \in N \bigcup \{0\}$;

1.2) $x > y$.

Відповідно до правил вікторини за кожну правильну відповідь **нараховується 8 балів**, за кожну неправильну – **списується 8 балів**, а за відсутність відповіді – **списується 3 бали**. Тому, з урахуванням введених позначень, справджується рівність

$$8x - 8y - 3z = 35. \qquad (8.5.1)$$

Оскільки у вікторині було **33 питання**, то справджується рівність

$$x + y + z = 33. \qquad (8.5.2)$$

1 спосіб

2) Оскільки $x > y$, то

$$x = y + k, \text{ де } k \in N. \qquad (8.5.3)$$

З урахуванням (8.5.3), рівності (8.5.1) та (8.5.2) можна подати у вигляді наступної системи

$$\begin{cases} 8(y+k) - 8y - 3z = 35 \\ y + k + y + z = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8k = 35 + 3z \\ y = \dfrac{33 - (z+k)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 4 + \dfrac{3 \cdot (z+1)}{8} & (*) \\ y = \dfrac{33 - (z+k)}{2} & (**) \end{cases}$$

3) Оскільки $k \in N$, то, з урахуванням (*), вираз $4 + \dfrac{3 \cdot (z+1)}{8}$ також є натуральним числом, що можливо лише за умов, коли дріб $\dfrac{z+1}{8}$ є натуральним числом. Цей дріб є натуральним числом тоді і лише тоді, коли $z \in \{7;15;23;31;...\}$, тобто коли $z = 7 + 8l$, де $l \in N \bigcup \{0\}$.

3.1) Якщо $z = 7$, то, з урахуванням (*), маємо що $k = 7$. Звідки, з урахуванням (**), маємо що

$$y = \frac{33 - 14}{2} = \frac{19}{2},$$

чого не може бути, бо $y \in N \bigcup \{0\}$.

3.2) Якщо $z=15$, то, з урахуванням (*), маємо що $k=10$. Звідки, з урахуванням (**), маємо що:

$$y=\frac{33-25}{2}=\frac{8}{2}=4\in N,\ x=4+10=14. \qquad (8.5.4)$$

3.3) якщо $z\geq 23$, то, з урахуванням (*), маємо що $k\geq 13$. Звідки $z+k\geq 36$, а, з урахуванням (**), маємо що $y<0$, чого бути не може, бо $y\in N\bigcup\{0\}$.

Таким чином Іван відповів правильно на 14 питань вікторини.

2 спосіб

2*) З урахуванням рівностей (8.5.1) та (8.5.2) маємо наступну систему

$$\begin{cases}8x-8y-3z=35\\ x+y+z=33\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x-8y=35+3z\\ x+y=33-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=\dfrac{35+3z}{8}\\ x+y=33-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=\dfrac{299-5z}{8}\\ 2y=\dfrac{229-11z}{8}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{299-5z}{16}\\ y=\dfrac{229-11z}{16}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=19-\dfrac{5\cdot(1+z)}{16}\\ y=15-\dfrac{11\cdot(1+z)}{16}\end{cases} \qquad (8.5.5)$$

3*) Оскільки $x\in N$, $y\in N\bigcup\{0\}$, $z\in N\bigcup\{0\}$, то, з урахуванням системи (8.5.5), дріб $\dfrac{(1+z)}{16}$ має бути натуральним числом, що можливо лише коли

$$z=15+16l,\text{ де } l\in N\bigcup\{0\}. \qquad (8.5.6)$$

3.1) Якщо $l=0$, то, з урахуванням (8.5.6), маємо що $z=15$. Тому, з урахуванням (8.5.5), маємо що $x=14$, а $y=4$.

3.2) Якщо $l\geq 1$, $l\in N$ то, з урахуванням (8.5.6), маємо що $z\geq 31$. Тоді, з урахуванням (8.5.5), маємо, що $y<0$, чого бути не може, бо $y\in N\bigcup\{0\}$.

Відповідь: 14.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 5

?! На скільки питань Іван не надав відповідей (зовсім), якщо б у вікторині було 30 питань?

?! На скільки питань Іван навів неправильну відповідь, якщо б у вікторині було 35 питань?

?! На скільки питань Іван відповів правильно, якщо б у вікторині було 24 питання?

?! На скільки питань Іван не надав відповідей (зовсім), якщо б у вікторині було 25 питань?

?! На скільки питань Іван навів неправильну відповідь, якщо б у вікторині було 37 питань?

9 клас

Задача 1

Обчислити

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2+101^2.$$

Розв'язання.

1 спосіб.

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2+101^2=$$

$$=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+\ldots+(99-100)(99+100)+101^2=$$

$$=-(1+2)-(3+4)-(5+6)-\ldots-(97+98)-(99+100)+101^2=$$

$$=-\left(\underbrace{1+2+3+\ldots+99+100}_{100\ \text{доданків}}\right)+101^2=$$

$$=-\left(\underbrace{(1+100)+(2+99)+\ldots+(49+52)+(50+51)}_{50\ \text{доданків, кожен з яких становить}\ 101}\right)+101^2=$$

$$=-(101\cdot 50)+101^2=-101\cdot 50+101^2=101\cdot(101-50)=101\cdot 51=5151.$$

2 спосіб.

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2+101^2=$$

$$=\left(1^2-100^2\right)-\left(2^2-99^2\right)+\left(3^2-98^2\right)-\left(4^2-97^2\right)+\ldots+\left(49^2-52^2\right)-\left(50^2-51^2\right)+101^2=$$

$$=-99\cdot 101+97\cdot 101-95\cdot 101+93\cdot 101-\ldots-3\cdot 101+1\cdot 101+101^2=$$

$$=101\cdot\left(\underbrace{-99+97-95+93-\ldots-3+1}_{50\ \text{доданків}}\right)+101^2=$$

$$=101\cdot\left(\underbrace{-2-2-\ldots-2}_{25\ \text{доданків}}\right)+101^2=101\cdot(-2\cdot 25)+101^2=101\cdot(-50+101)=101\cdot 51=5151.$$

3 спосіб
(«на виріст» – за допомогою арифметичної прогресії).

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2+101^2=$$

$$=\left(101^2-100^2\right)+\left(99^2-98^2\right)+\ldots+\left(5^2-4^2\right)+\left(3^2-2^2\right)+1=$$

$$=(101-100)(101+100)+(99-98)(99+98)+\ldots+(5-4)(5+4)+(3-2)(3+2)+1=$$

$$=(101+100)+(99+98)+\ldots+(5+4)+(3+2)+1=$$

$$=201+197+\ldots+9+5+1=\frac{201+1}{2}\cdot 51=101\cdot 51=5151.$$

Відповідь: 5151.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 1

Для довільного натурального $n \ge 2$ обчислити

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (2n-1)^2 - (2n)^2 + (2n+1)^2.$$

! А чи знали Ви що?

$$1^1 + 2^1 + 3^1 + ... + (n-1)^1 + n^1 = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2;$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-3)^2 + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3};$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3};$$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n-2)^2 + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3};$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (2n-1)^2 - (2n)^2 = -n(2n+1);$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (2n-1)^2 - (2n)^2 + (2n+1)^2 = (n+1)(2n+1).$$

Задача 2

Про квадратичну функцію $y = f(x)$ відомо, що існує рівно три значення аргументу, при яких модуль значення функції дорівнює 2. Скільки коренів має рівняння $f(x) = 1{,}1$?

Розв'язання.
1 спосіб.

1) Нехай дана квадратична функція має вид

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ де } a,b,c \in R,\ a \ne 0.$$

Оскільки існує рівно три значення аргументу, при яких модуль значення функції дорівнює 2, то рівняння $|f(x)| = 2 \Leftrightarrow |ax^2 + bx + c| = 2$ має точно три корені.

2) На підставі графічного методу відомо, що рівняння $|ax^2 + bx + c| = 2$ має три (різні) корені тоді і лише тоді, коли графік функції $y = |ax^2 + bx + c|$ має з прямою $y = 2$ три (різні) спільні точки.

3) Відомо, що існує лише **шість** суттєво різних випадків розташування графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c = f(x)$ відносно осі OX – рис. 9.2 1), 2); 4, 5); 7), 8).

4) На рис. 9.2. 3), 6) і 9) зображено ескізи графіків функцій $y = |f(x)|$ для відповідних випадків, вигляд яких визначається умовами $D < 0$, $D = 0$ та $D > 0$ відповідно.

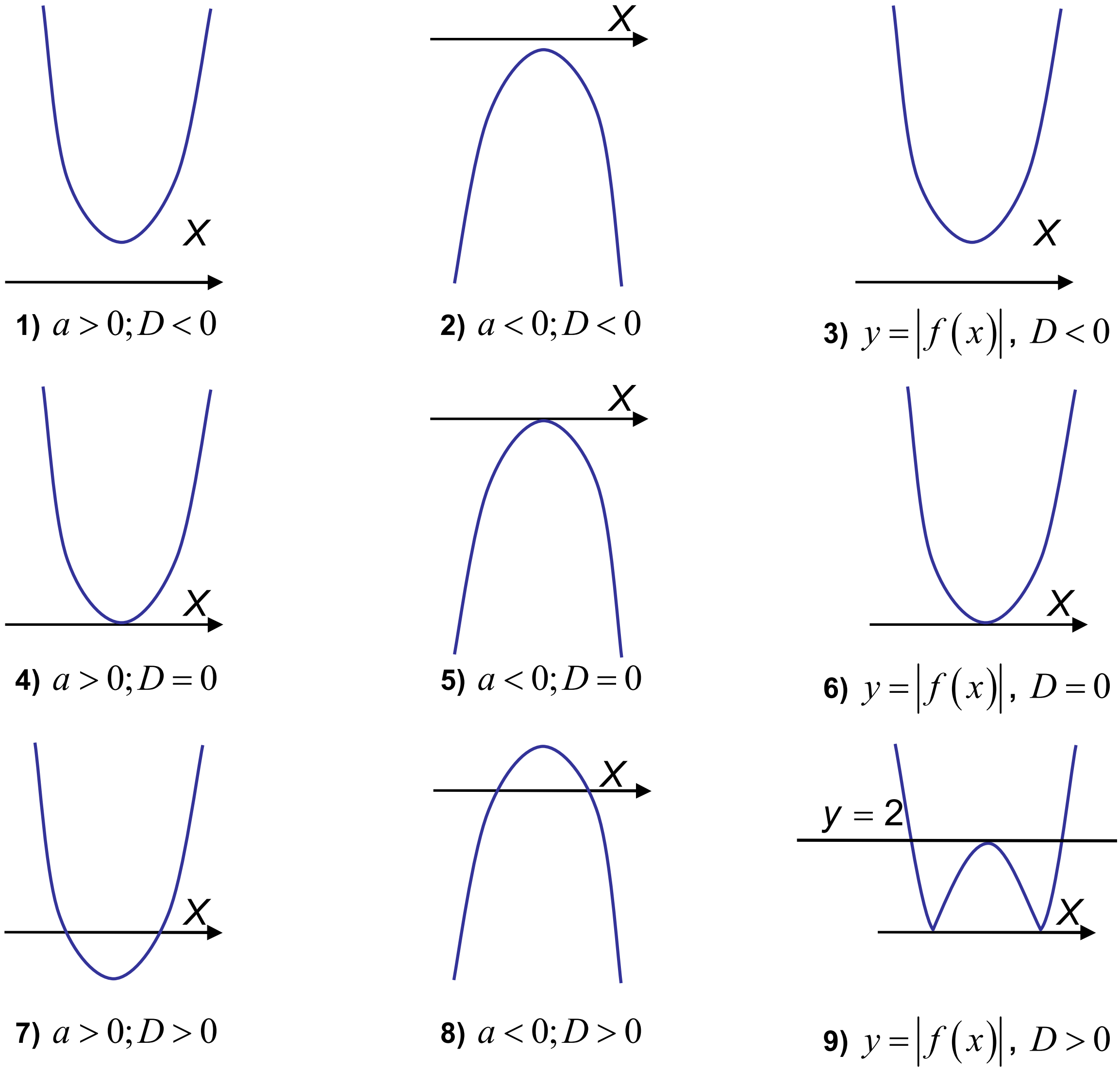


Рис. 9.2: *до задачі 2.*

4) З урахуванням ескізів графіків функцій $y = |f(x)|$ для трьох можливих випадків, не важко бачити, що графік функції $y = |ax^2 + bx + c|$ має з прямою $y = 2$ три (різні) спільні точки лише у випадку $D > 0$. Причому:
у випадку $a > 0$ – друга координата вершини параболи має дорівнювати -2,
у випадку $a < 0$ – друга координата вершини параболи має дорівнювати +2.

Звідки й випливає, що у цих випадках графіки функцій $y = f(x)$ мають з прямою $y = 1{,}1$ по дві спільні точки. А тому квадратне рівняння $f(x) = 1{,}1$ обов’язково має два (різних) корені.

2 спосіб.

1) Нехай дана квадратична функція має вид

$$f(x)=ax^2+bx+c,\ \text{де}\ a,b,c\in R,\ a\neq 0.$$

Оскільки існує рівно три значення аргументу, при яких модуль значення функції дорівнює 2, то рівняння $|f(x)|=2 \Leftrightarrow |ax^2+bx+c|=2$ має точно три корені. Звідки сукупність

$$\left[\begin{array}{l} ax^2+bx+c=2 \\ ax^2+bx+c=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax^2+bx+c-2=0 \\ ax^2+bx+c+2=0 \end{array}\right. \tag{9.2.1}$$

має три різні розв'язки.

2) Якщо припустити, що рівняння сукупності (9.2.1) мають спільний корінь x_0, то матиме місце система

$$\begin{cases} ax_0^2+bx_0+c-2=0 \\ ax_0^2+bx_0+c+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0^2+bx_0+c=+2 \\ ax_0^2+bx_0+c=-2, \end{cases},$$

звідки мали би, що $-2=2$. Отже, припущення про те що рівняння сукупності (9.2.1) мають спільний корінь є неправильним. Тому сукупність (9.2.1) буде мати три різні розв'язки лише у двох випадках:

або 1-ше рівняння має два різні корені а 2-ге – один (два рівних) корінь,

або ж 2-ге рівняння має два різні корені а 1-ше – один (два рівних) корінь.

3) Нехай далі

$$D_1=b^2-4a(c-2)=b^2-4ac+8a \ \text{та}\ D_2=b^2-4a(c+2)=b^2-4ac-8a$$

– дискримінанти 1-го і 2-го рівнянь сукупності (9.2.1) відповідно. Тому дане рівняння має три різні корені тоді і лише тоді, коли

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D_1>0 \\ D_2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} D_1=0 \\ D_2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b^2-4ac+8a>0 \\ b^2-4ac-8a=0 \end{cases} \\ \begin{cases} b^2-4ac+8a=0 \\ b^2-4ac-8a>0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} a>0 \\ b^2-4ac=+8a \end{cases} & (*) \\ \begin{cases} b^2-4ac=-8a \\ a<0 \end{cases} & (**) \end{array}\right.$$

4) Для з'ясування питання щодо кількості коренів квадратного рівняння

$$ax^2+bx+c=1{,}1 \Leftrightarrow ax^2+bx+c-1{,}1=0$$

досить порівняти з нулем його дискримінант

$$D=b^2-4a(c-1{,}1)=b^2-4ac+4{,}4a$$

у кожному з двох можливих випадків, які визначаються системами (*) та (**) відповідно.

4.1) Якщо виконуються умови системи (*), то

$$D=b^2-4ac+4{,}4a=8a+4{,}4a=12{,}4a>0.$$

4.2) Якщо виконуються умови системи (**), то

$$D=b^2-4ac+4{,}4a=-8a+4{,}4a=-3{,}6a>0.$$

Тому квадратне рівняння $f(x)=1{,}1$ має два (різних) корені.

Відповідь: 2.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 2

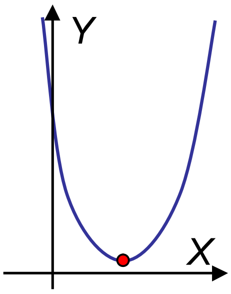
А чи звертали Ви увагу? Що:

існує лише 26 суттєво різних випадків розташування параболи відносно координатних осей прямокутної системи координат.

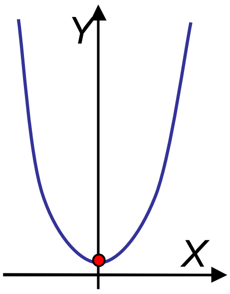
Нижче наведено всі 26 суттєво різних розташувань параболи відносно координатних осей прямокутної декартової системи координат (ПДСК) та відповідні аналітичні умови.

?! Для кожного з наведених випадків обґрунтуйте виконання відповідних умов.

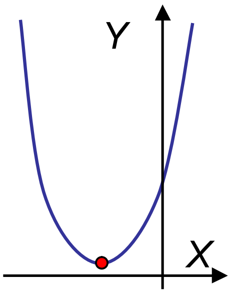
?! Для яких випадків наявність умови для дискримінанту є надлишковою?



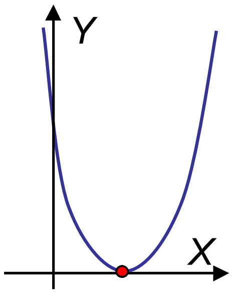
1)
$a>0; D<0;$
$c>0; b<0$



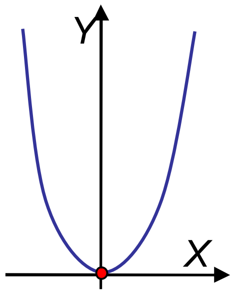
2)
$a>0; D<0;$
$c>0; b=0$



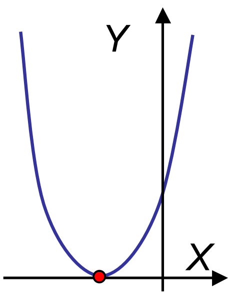
3)
$a>0; D<0;$
$c>0; b>0$



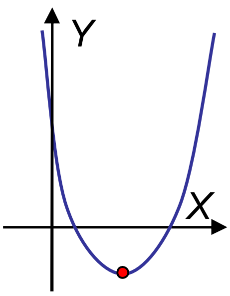
4)
$a>0; D=0;$
$c>0; b<0$



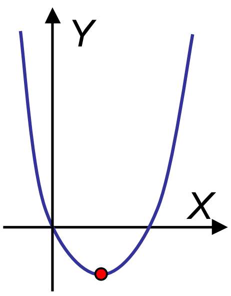
5)
$a>0; D=0;$
$c=0; b=0$



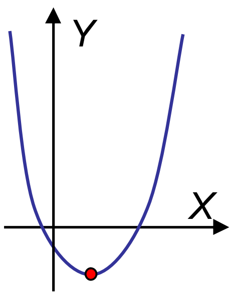
6)
$a>0; D=0;$
$c>0; b>0$



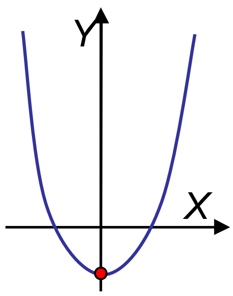
7)
$a>0; D>0;$
$c>0; b<0$



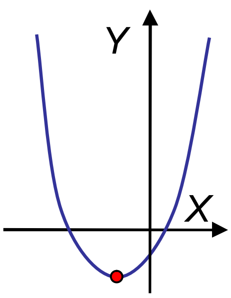
8)
$a>0; D>0;$
$c=0; b<0$



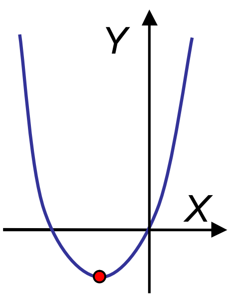
9)
$a>0; D>0;$
$c<0; b<0$



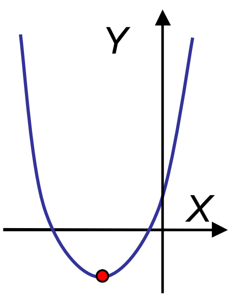
10)
$a>0; D>0;$
$c<0; b=0$



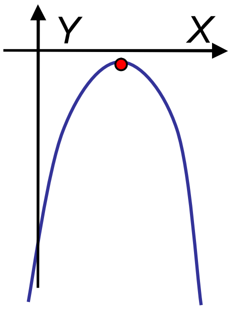
11)
$a>0; D>0;$
$c<0; b>0$



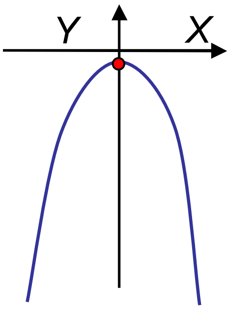
12)
$a>0; D>0;$
$c=0; b>0$



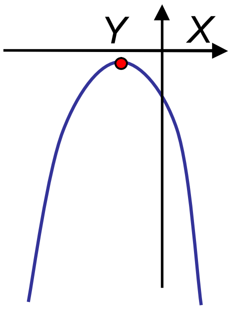
13)
$a>0; D>0;$
$c>0; b>0$



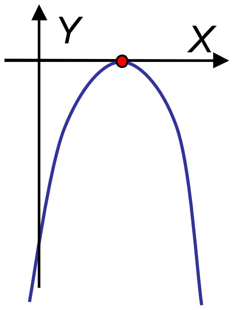
14)
$a<0; D<0;$
$c<0; b>0$



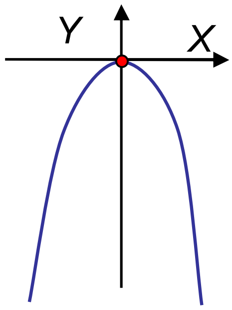
15)
$a<0; D<0;$
$c<0; b=0$



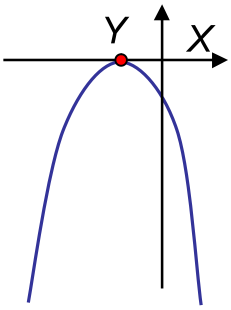
16)
$a<0; D<0;$
$c<0; b<0$



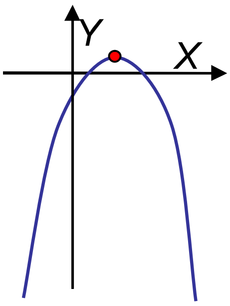
17)
$a<0; D=0;$
$c<0; b>0$



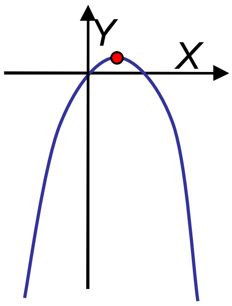
18)
$a<0; D=0;$
$c=0; b=0$



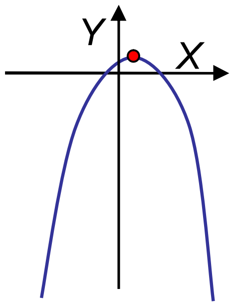
19)
$a<0; D=0;$
$c<0; b<0$



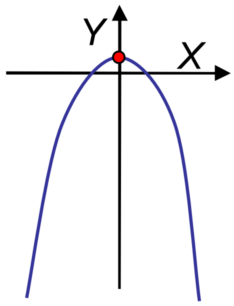
20)
$a<0; D>0;$
$c<0; b>0$



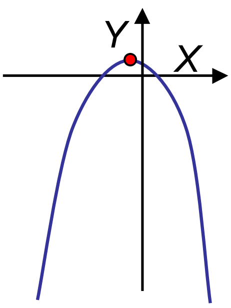
21)
$a<0; D>0;$
$c=0; b>0$



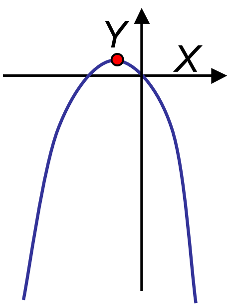
22)
$a<0; D>0;$
$c>0; b>0$



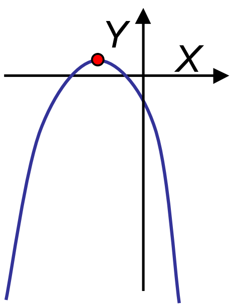
23)
$a<0; D>0;$
$c>0; b=0$



24)
$a<0; D>0;$
$c>0; b<0$



25)
$a<0; D>0;$
$c=0; b<0$



26)
$a<0; D>0;$
$c<0; b<0$

Задача 3

Розв'язати рівняння $(x+1)|x-1|=a$ в залежності від значень параметра a.

Розв'язання.

1 спосіб.

$$(x+1)|x-1|=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x-1\geq 0 \\ (x+1)(x-1)=a \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x-1<0 \\ -(x+1)(x-1)=a \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x^2-1=a \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ -x^2+1=a \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x^2=a+1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ x^2=1-a \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\geq 1 \\ \left\{\begin{array}{l} x^2=a+1 \\ \left[\begin{array}{l} a+1>0 \\ a+1=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ \left\{\begin{array}{l} x^2=1-a \\ \left[\begin{array}{l} 1-a>0 \\ 1-a=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a+1>0 \\ x=\pm\sqrt{a+1} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a+1=0 \\ x=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 1-a>0 \\ x=\pm\sqrt{1-a} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 1-a=0 \\ x=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a>-1 \\ x=\pm\sqrt{a+1} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ x=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a<1 \\ x=\pm\sqrt{1-a} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ x=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a>-1 \\ x=\pm\sqrt{a+1} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ x=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a<1 \\ x=\pm\sqrt{1-a} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ x=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\geq 1 \\ a>-1 \\ x=\pm\sqrt{a+1} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x\geq 1 \\ a=-1 \\ x=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ a=1 \\ x=0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ a<1 \\ x=\pm\sqrt{1-a} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\geq 1 \\ a>-1 \\ x=+\sqrt{a+1} \end{array}\right. \\ \varnothing \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ x=0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ a<1 \\ x=\pm\sqrt{1-a} \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\geq 1 \\ a>-1 \\ x=+\sqrt{a+1} \\ \sqrt{a+1}\geq 1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ x=0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a<1 \\ x=-\sqrt{1-a} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ a<1 \\ x=+\sqrt{1-a} \\ \sqrt{1-a}<1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\geq 1 \\ a>-1 \\ x=+\sqrt{a+1} \\ a\geq 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ x=0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a<1 \\ x=-\sqrt{1-a} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ a<1 \\ x=+\sqrt{1-a} \\ a>0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a\geq 0 \\ x=+\sqrt{a+1} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ x=0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a<1 \\ x=-\sqrt{1-a} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0<a<1 \\ x=+\sqrt{1-a} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

З останньої сукупності, одержуємо наступний результат:
якщо $a \in (-\infty;0)$, то $x = -\sqrt{1-a}$; якщо $a = 0$, то $x = \pm 1$; якщо $a \in (0;1)$, то $x = \pm\sqrt{1-a}$, $x = \sqrt{a+1}$; якщо $a = 1$, то $x = 0$, $x = \sqrt{2}$; якщо $a \in (1;+\infty)$, то $x = \sqrt{a+1}$.

2 спосіб («на виріст»).

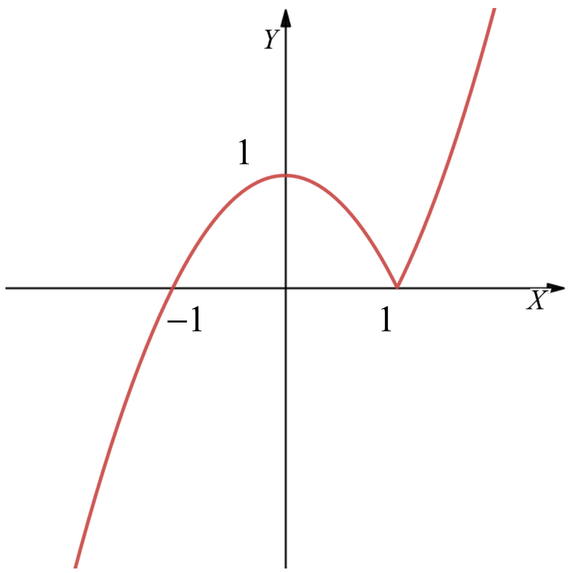
1) З'ясуємо спочатку у графічний спосіб питання щодо кількості розв'язків рівняння $(x+1)|x-1| = a$.

1.1) Розглянемо функцію $y = (x+1)|x-1| = f(x)$.

За властивостями модуля цю функцію можна подати у вигляді

$$y = (x+1)|x-1| = \begin{cases} x^2 - 1, & x \ge 1 \\ 1 - x^2, & x < 1. \end{cases} \tag{9.3.1}$$

1.2) Побудуємо графік функції (9.3.1).



1.3) Оскільки при кожному значенні параметра a графіком функції $y = a = g(x)$ є пряма, що паралельна до осі OX (або ж сама вона при $a = 0$), то мають місце лише наступні суттєво різні випадки розташування.

1.3.1) Якщо $a < 0$, то графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$ мають лише одну спільну точку, перша координата якої є меншою за -1. А тому рівняння $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x+1)|x-1| = a$ в цьому випадку буде мати один корінь, менший за -1;

1.3.2) Якщо $a = 0$, то графіки зазначених функцій мають дві різні спільні точки, першими координатами яких є числа -1 та 1. І тому рівняння в цьому випадку буде мати два корені: -1 та 1;

1.3.3) Якщо $0 < a < 1$, то графіки функцій мають три різні спільні точки, першими координатами яких є числа з проміжків $(-1;0)$, $(0;1)$ та $(1;+\infty)$. І тому рівняння в цьому випадку буде мати три корені – числа із зазначених проміжків;

1.3.4) Якщо $a=1$, то графіки функцій мають дві різні спільні точки, першими координатами яких є числа 0 та число з проміжку $(1;+\infty)$. І тому рівняння в цьому випадку буде мати два корені – 0 («нуль») та число з проміжку $(1;+\infty)$;

1.3.5) Якщо $a>1$, то графіки функцій мають одну спільну точку, першою координатою якої є число з проміжку $(1;+\infty)$. І тому рівняння в цьому випадку буде мати один корінь – число з проміжку із $(1;+\infty)$.

2) На підставі аналізу зазначених вище випадків 1.3.1) – 1.3.5), виразимо корені рівняння в залежності від значень (через) параметра a.

2.1) Нехай $a<0$. Тоді шуканий корінь менший за -1. Тому рівняння набуває вид $1-x^2=a \Leftrightarrow x^2=1-a$. Звідки й випливає, що при $a<0$ коренем рівняння є число $x=-\sqrt{1-a}<-1$.

2.2) Нехай $a=0$. Тоді, як вже було з'ясовано, коренями рівняння є числа -1 та 1.

2.3) Нехай $a>1$. Тоді шуканий корінь більший за 1. Тому рівняння набуває вид $x^2-1=a \Leftrightarrow x^2=a+1$. Звідки й випливає, що при $a>1$ коренем рівняння є число $x=\sqrt{a+1}>1$.

2.4) Нехай $a=1$. Тоді перший з коренів є нулем, а другий (шуканий корінь) – з проміжку $(1;+\infty)$. Тому рівняння для шуканого кореня набуває вид $x^2-1=1 \Leftrightarrow x^2=2$. Звідки й випливає, що при $a=1$ другим коренем рівняння є число $x=\sqrt{2}>1$.

2.5) Нехай $0<a<1$. Тоді рівняння має три корені: перший з проміжку $(-1;0)$, другий – з проміжку $(0;1)$ та третій – з проміжку $(1;+\infty)$.

Для визначення першого і другого коренів розв'яжемо рівняння

$$1-x^2=a \Leftrightarrow x^2=1-a,$$

звідки

$$x_1=-\sqrt{1-a}\in(-1;0),\ x_2=\sqrt{1-a}\in(0;1).$$

Для визначення третього кореня слід розв'язати рівняння

$$x^2-1=a \Leftrightarrow x^2=a+1,$$

звідки

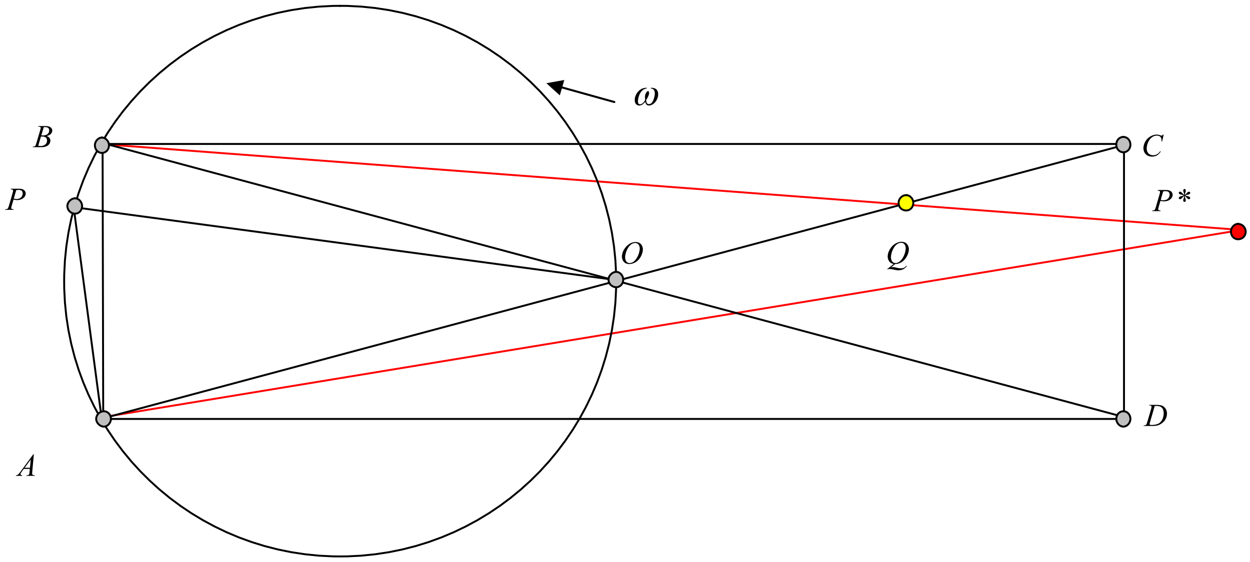
$$x_3=\sqrt{a+1}\in(1;+\infty).$$

Відповідь: якщо $a\in(-\infty;0)$, то $x=-\sqrt{1-a}$;
якщо $a=0$, то $x=\pm 1$;
якщо $a\in(0;1)$, то $x=\pm\sqrt{1-a}$, $x=\sqrt{a+1}$;
якщо $a=1$, то $x=0$, $x=\sqrt{2}$;
якщо $a\in(1;+\infty)$, то $x=\sqrt{a+1}$.

Задача 4

У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, а кут BDC становить 75^0. Точка P лежить зовні прямокутника, а кут APB становить 150^0. Доведіть, що кути BAP та POB є рівними.

Розв'язання.



1) Нехай $ABCD$ – даний прямокутник, діагоналі якого перетинаються в точці O.

Оскільки діагоналі прямокутника точкою перетину O діляться навпіл та є рівними, то $OC = OD$ (як половини довжин рівних відрізків). Звідки трикутник COD є рівнобедреним з основою CD.

За умовою $\angle BDC = 75^0$, звідки $\angle ODC = 75^0$ а $\angle BDA = 15^0$. Тоді за властивістю рівнобедреного трикутника $\angle OCD = 75^0$. І тому $\angle DOC = 30^0$.

Оскільки кути AOB і COD є вертикальними, то (за властивістю вертикальних кутів) маємо, що $\angle AOB = 30^0$.

2) З'ясуємо положення точки P (на площині) відносно прямокутника $ABCD$ та його елементів.

Покажемо, що точки O і P можуть знаходитися лише у різних півплощинах відносно прямої AB.

2.1) Оскільки за умовою точка P повинна лежати зовні прямокутника $ABCD$, то P не може належати відрізкам AB, BC, CD та AD. Крім того, точка P не може належати частині площини, обмеженій сторонами прямокутника, тобто внутрішній його частині.

2.2) Якщо припустити, що точка P розташована «вище» прямої BC а кут APB (за умовою) становить 150^0, то за аксіомою вимірювання кутів одержимо, що $\angle PBA > 90^0$. Чого бути не може, бо сума кутів трикутника повинна становити 180^0.

2.3) Якщо припустити, що точка P розташована «нижче» прямої AD а кут APB (за умовою) становить 150^0, то одержимо, що $\angle PBA > 90^0$. Чого також бути не може.

2.4) Припустимо тепер, що існує така точка P^*, яка розташована «праворуч» відносно прямої CD та кут AP^*B (за умовою) становить 150^0. Тоді, з урахуванням пунктів 2.2) і 2.3), досить розглянути випадок, коли P^* розташована вище прямої AD та «нижче» прямої BC (тобто, тій частині смуги, обмеженої прямими AD і BC, що розташована «праворуч» відносно прямої CD).

Оскільки $\angle CBD = \angle BDA = 15^0$, а промінь BP^* проходить між сторонами $\angle CBD$, то, як наслідок з аксіоми вимірювання кутів, кут $\angle CBP^* = \gamma$ є гострим та меншим за 15^0.

Нехай Q – точка перетину прямих AC і BP^*. Тоді з $\triangle BQC$ матимемо, що $\angle BQC = 180^0 - 15^0 - \gamma$ є тупим. Оскільки кути AQB^* та BQC є вертикальними, то кут AQB^* також є тупим, чого бути не може, бо в $\triangle AQP^*$ (з $\angle QP^*A = 150^0$) не може бути двох тупих кутів.

Отже, наше припущення про те, що точка P може належати тій частині смуги, обмеженої прямими AD і BC, що розташована «праворуч» відносно прямої CD, є неправильним.

Таким чином, з урахуванням пп. 2.1)–2.4), точка P може належати лише тій частині смуги, обмеженій прямими AD і BC, яка розташована «ліворуч» відносно прямої CD.

3) Оскільки точки O і P знаходяться в різних півплощинах відносно прямої AB, то діагоналі чотирикутника $APBO$ перетинаються. А тому він є опуклим. Крім того, оскільки $\angle APB + \angle BOA = 180^0$, то (за відповідною ознакою) навколо чотирикутника $APBO$ можна описати коло ω. Більше того, оскільки кути BAP та BOP спираються на одну дугу кола ω, то

$$\angle BAP = \angle POB.$$

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 4

?! Нехай пряма PO перетинає сторону CD у точці F. Знайдіть CF, якщо $AP = 6\sqrt{3}$, $BP = 4$ см.

?! На площині дано відрізок AB. Де може бути розташована точка C, щоб трикутник ABC був:

– прямокутним?
– гострокутним?
– тупокутним?

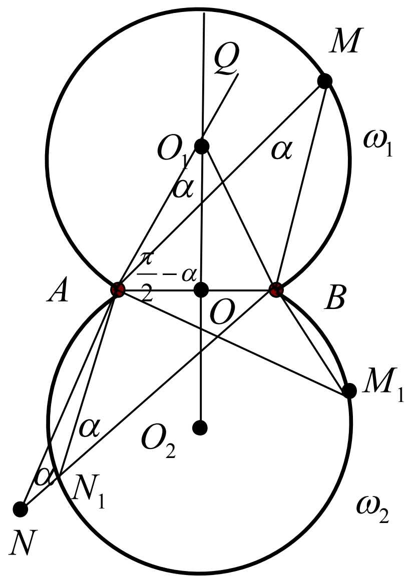
А чи звертали Ви увагу? Що:

! Якщо сума кутів APB та AOB становить 180^0, то точки A, B, O, P не зобов’язані належати одному колу.

! Наведіть приклад розташування таких чотирьох точок A, B, O, P.

А чи знали Ви? Що:

Геометричним місцем точок площини (*коротко – ГМТП*), з яких даний відрізок (AB) видно під даним кутом ($0^0 < \alpha < 180^0$) є дві дуги, що симетричні відносно даного відрізка, одна з яких вміщує кут, рівний даному.



Покажемо справедливість цього твердження.

1) Нехай $\overset{\frown}{BMA}$ – дуга кола ω_1, яке вміщує кут $\angle AMB = \alpha$.

Відомо, що всі вписані кути кола ω_1, вершини яких лежать в одній півплощині відносно прямої (AB) і спираються на відрізок AB, рівні між собою. Тому $\angle ARB = \alpha$ для довільної точки R (орієнтованої) дуги BMA.

Нехай O_1 – центр кола ω_1, а точка O – середина відрізка AB. Тоді $\angle AO_1B = 2\alpha$ (як центральний кут, що спирається на дугу AB). Звідки $\angle O_1AB = 90^\circ - \alpha$. Таким чином, центр O_1 кола ω_1:

з одного боку – є рівновіддаленим від точок A і B;

з іншого боку – належить променю AQ кута $\angle QAB = 90^\circ - \alpha$.

Отже, кожна точка дуги BMA (без кінцевих точок A і B) кола $\omega_1 = \omega(O_1, O_1A)$ задовольняє умовам задачі. Проте, вказаним умовам задовольняють і всі точки відкритої дуги $\overset{\frown}{AM_1B}$, симетричної дузі BMA відносно AB.

Таким чином, кожна точка фігури $F = \overset{\frown}{BMA} \cup \overset{\frown}{AM_1B}$ («вісімки») належить шуканому ГМТП.

2) Покажемо, що довільна (але фіксована) точка N шуканого ГМТП належить фігурі $F = \overset{\frown}{BMA} \cup \overset{\frown}{AM_1B}$. Оскільки $\alpha \neq 0^0$, то без втрати загальності можна вважати, що точка N належить тій півплощині відносно прямої (AB), якій належить точка M_1.

Припустимо, що $N \notin \overset{\frown}{AM_1B} \subset \omega_2$. Тоді N належить або внутрішній, або зовнішній частині площини відносно кола ω_2. Нехай, заради визначеності, є точкою зовнішньою відносно ω_2, а $N_1 = [BN) \cap \omega_2$.

Тоді $\angle ANB = \alpha$ (за припущенням), $\angle AN_1B = \alpha$ (за доведеним вище). Тому $\angle NAN_1 = 0^0$, звідки $N_1 \in AN$. Оскільки $N_1 \in BN$, то $N_1 = AN \cap BN = N$. Звідки маємо, що точка N співпадає з точкою N_1 і тому належить колу ω_2. Прийшли до протиріччя з припущенням.

Отже, довільна точка N шуканого ГМТП належить фігурі $F = \overset{\frown}{BMA} \cup \overset{\frown}{AM_1B}$.

Задача 5

У липні взято кредит у банку терміном на 15 років. Умови його повернення є наступними:

– кожного січня борг зростає на $x\%$ у порівнянні з кінцем попереднього (календарного) року;

– з лютого по червень кожного року необхідно сплатити («погасити») нарахований у січні банком відсоток;

– у липні кожного року (крім першого) борг повинен бути меншим на сталу величину у порівнянні з боргом на липень минулого року.

Знайдіть x, якщо відомо, що за весь термін сплатили на 15% більше, ніж було взято у кредит.

Розв'язання.

1) Нехай у липні певного року було взято кредит на суму A умовних грошових одиниць (надалі – у.г.о.) терміном на 15 років.

2) За весь термін повернення (15 років) вкладник сплатив на 15% більше, ніж було взято у кредит. Тому вкладник повернув до банку

$$A+\frac{A}{100}\cdot 15=A\cdot\left(\frac{100+15}{100}\right)=A\cdot\frac{115}{100}\ \text{(у.г.о.)},$$

а «переплата» становила

$$\frac{A}{100}\cdot 15=A\cdot\frac{15}{100}\ \text{(у.г.о.)}.$$

3) За умовами погашення кредиту:

3.1. У липні кожного року (крім першого липня) борг повинен бути меншим на сталу величину у порівнянні з боргом на липень минулого року. Тому вкладник повинен щороку (протягом 15 років) сплачувати сталу частину від, так званого тіла кредиту, а саме – $\frac{A}{15}$ (у.г.о.).

3.2. Кожного січня борг зростає на $x\%$ у порівнянні з кінцем попереднього календарного року.

Оскільки взявши у кредит в липні A (у.г.о.) борг станом на кінець календарного року (на грудень) також складав A (у.г.о.), то у січні першого фінансового року (з липня по кінець червня) борг зріс на $x\%$, тобто збільшився на $A\cdot\frac{x}{100}$ (у.г.о.). А через те, що з лютого по червень кожного фінансового/календарного року вкладних обов'язково сплачує нарахований у січні банком відсоток, то на кінець червня першого фінансового року борг вкладника банку становив $A-\frac{A}{15}=\frac{14}{15}A$ (у.г.о.).

Причому переплата, здійснена вкладником протягом 1-го фінансового року, становила точно

$$A \cdot \frac{x}{100} = \frac{15}{15} A \cdot \frac{x}{100} \text{ (у.г.о.).}$$

Переплата протягом 2-го фінансового року становила точно

$$\frac{14}{15} A \cdot \frac{x}{100} \text{ (у.г.о.);}$$

протягом 3-го фінансового року –

$$\frac{13}{15} A \cdot \frac{x}{100} \text{ (у.г.о.);}$$

і так далі,

а протягом 15-го фінансового року –

$$\frac{1}{15} A \cdot \frac{x}{100} \text{ (у.г.о.).}$$

Таким чином, загальна переплата за 15 років становить

$$A \cdot \frac{x}{100} + \frac{14}{15} A \cdot \frac{x}{100} + \frac{13}{15} A \cdot \frac{x}{100} + \ldots + \frac{1}{15} A \cdot \frac{x}{100} \text{ (у.г.о.)}$$

4) Оскільки, з урахуванням 2), загальна «переплата» становила

$$\frac{A}{100} \cdot 15 = A \cdot \frac{15}{100} \text{ (у.г.о.),}$$

то має місце рівняння

$$A \cdot \frac{x}{100} + \frac{14}{15} A \cdot \frac{x}{100} + \frac{13}{15} A \cdot \frac{x}{100} + \ldots + \frac{1}{15} A \cdot \frac{x}{100} = A \cdot \frac{15}{100},$$

звідки

$$x\left(\frac{15}{15} + \frac{14}{15} + \frac{13}{15} + \ldots + \frac{1}{15}\right) = 15; \qquad x\left(15 + 14 + 13 + \ldots + 1\right) = 15 \cdot 15;$$

$$x \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 15; \qquad x \cdot 8 = 15; \qquad x = \frac{15}{8} = \frac{15 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{1875}{1000} = 1{,}875.$$

Відповідь: 1,875.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 5

?! У липні 2022 року планується взяти кредит в банку на суму 928 200 гривень. Умови його повернення є наступними

– кожного січня борг збільшується на 10 % у порівнянні з кінцем попереднього (календарного) року;

– з лютого по червень кожного року необхідно сплатити одним платежем частину боргу.

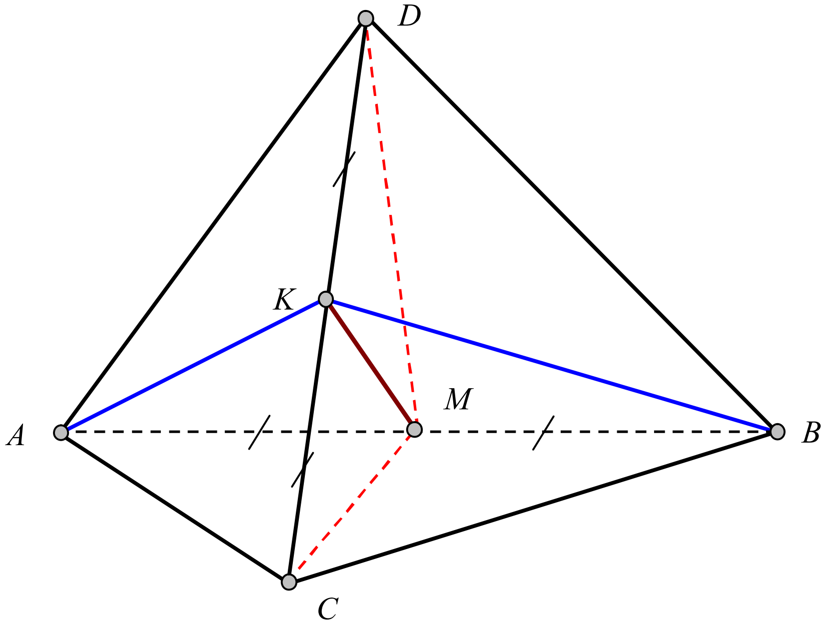
Скільки гривень буде сплачено банку, якщо відомо, що кредит буде повністю погашено чотирма рівними платежами (тобто за чотири роки)?

10 клас

Задача 2

Кожне ребро тетраедра $DABC$ дорівнює a, точки M і K – середини ребер AB та CD відповідно. Доведіть, що MK – спільний перпендикуляр до прямих AB і CD та знайдіть довжину MK.

Розв'язання.



Розв'язання.

1) Оскільки кожне ребро тетраедра $DABC$ дорівнює a, то за III ознакою (за трьома сторонами) $\triangle ADB = \triangle ACB$ і $\triangle CAD = \triangle CBD$.

2) Оскільки M – середина AB і $\triangle ADB = \triangle ACB$, то $DM = CM$, як відповідні лінійні елементи (як медіани) рівних трикутників.

Оскільки K – середина CD і $\triangle CAD = \triangle CBD$, то $AK = BK$, як відповідні лінійні елементи (як медіани) рівних трикутників.

3) Оскільки $MD = MC$, то $\triangle CMD$ є рівнобедреним. А тому медіана MK є висотою цього трикутника. Звідки $MK \perp CD$.

Оскільки $KA = KB$, то $\triangle AKB$ є рівнобедреним. І тому медіана KM є висотою цього трикутника. Звідки $KM \perp AB$.

Таким чином, MK – спільний перпендикуляр до прямих AB і CD

4) Оскільки в правильному $\triangle ADB$ медіана DM є висотою, то $\triangle DMB$ є прямокутним з гіпотенузою $DB = a$ та катетом $MB = \frac{a}{2}$. Тому за теоремою Піфагора маємо, що $DM = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Оскільки за 2)-им пунктом $CM = DM$, то, з урахуванням пункту 4), маємо що

$$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

5) Оскільки $\triangle CMD$ є рівнобедреним з основою $CD = a$ та медіана MK є висотою цього трикутника, то $\triangle MKD$ є прямокутним з гіпотенузою $DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ і катетом $DK = \frac{a}{2}$. Тому за теоремою Піфагора маємо, що

$$MK = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$**.**

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 2

Нагадаємо, що:

середньою лінією тетраедра *називають відрізок, який сполучає середини мимобіжних його ребер;*

медіаною тетраедра *називають відрізок, який сполучає його вершину з точкою перетину медіан протилежної грані;*

якщо прямі, які містять висоти тетраедра, перетинаються в одній точці, то такий тетраедр називають ***ортоцентричним****.*

Та чи знали Ви? Що[7]:

! Середні лінії тетраедра перетинаються в одній точці та точкою перетину діляться навпіл.

! Медіани тетраедра перетинаються в одній точці та точкою перетину діляться у відношенні 3:1, рахуючи від вершини.

! Якщо тетраедр має дві пари перпендикулярних мимобіжних ребер, то решта два ребра також перпендикулярні.

! Якщо тетраедр має пару перпендикулярних мимобіжних ребер, то прямі, що містять висоти тетраедра, проведені з кінців одного із цих ребер, перетинаються.

! Якщо тетраедр має дві пари перпендикулярних мимобіжних ребер, то він є ортоцентричним.

---

[7] Мерзляк А. Г. Геометрія : початок вивч. на поглибленому рівні з 8 кл., проф. рівень : підручник для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В.Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 240 с.

Задача 3

Висота BH трикутника ABC вдруге перетинає коло, описане навколо $\triangle ABC$ в точці K, BN – діаметр. Доведіть, що $AN = KC$. Знайдіть NK, якщо довжина радіуса описаного кола становить 20 см, $\angle BAC = 25^0$, $\angle BCA = 85^0$.

Розв'язання.

1 спосіб.

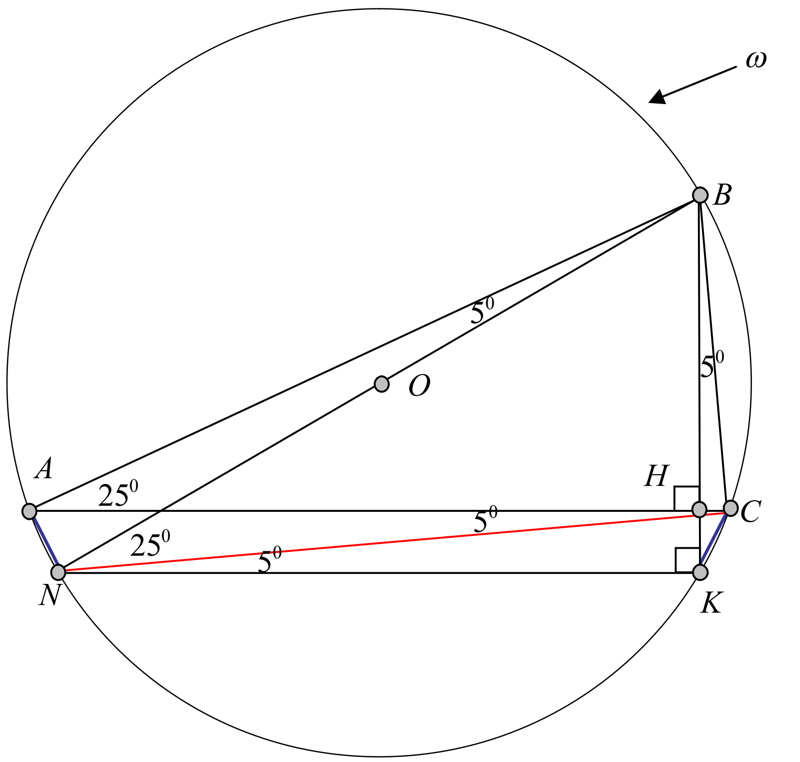


Рис. 10.3: *до задачі 3*

1) За умовою $\angle BAC = 25^0$, $\angle BCA = 85^0$, тому (за властивістю кутів трикутника) $\angle ABC = 70^0$. Звідки маємо, що $\triangle ABC$ є гострокутним.

Добре відомо, що якщо трикутник є гострокутним, то:

1.1. *Центр O кола ω, описаного навколо нього належить внутрішній частині трикутника*. Звідки випливає, що промінь BO проходить між сторонами $\angle ABC$. Оскільки BN – діаметр кола ω, то точка N (в якій промінь BO вдруге перетинає коло ω) належить дузі $\overset{\frown}{AC}$.

1.2 *Основа H висоти BH є внутрішньою точкою відрізка AC*. Звідки випливає, що промінь BH проходить між сторонами $\angle ABC$, а точка K (в якій промінь BH вдруге перетинає коло ω) належить дузі $\overset{\frown}{AC}$.

2) Оскільки $\angle BCA = 85^0$, то з прямокутного $\triangle BHC$ (за властивістю гострих кутів прямокутного трикутника) маємо, що $\angle CBH = 5^0$. За умовою $\angle BAC = 25^0$, тому з прямокутного $\triangle AHB$ (за властивістю гострих кутів прямокутного трикутника) маємо, що $\angle ABH = 65^0$.

3) Оскільки BN – діаметр кола ω, то за властивістю кутів, які вписано у коло та спираються на діаметр, $\angle BCN = 90^0$, $\angle BKN = 90^0$ та $\angle NAB = 90^0$.

3.1. За умовою $\angle BCA = 85^0$, тому промінь CA проходить між сторонами $\angle BCN$. Звідки

$$\angle ACN = \angle BCN - \angle BCA = 90^0 - 85^0 = 5^0.$$

3.2. Оскільки $\angle BHA = 90^0$, то (за ознакою паралельних) маємо, що $AC \parallel NK$. Тому за властивістю паралельних і січної маємо, що

$$\angle CNK = \angle ACN = 5^0.$$

3.3. За умовою $\angle BAC = 25^0$, тому промінь AC проходить між сторонами $\angle BAN$. Звідки

$$\angle CAN = \angle BAN - \angle BAC = 90^0 - 25^0 = 65^0.$$

Оскільки точки A і B знаходяться в одній півплощині відносно NC, то вписані кути $\angle CAN$ та $\angle CBN$ спираються на одну дугу, а тому є рівними. Звідки $\angle CBN = 65^0$.

Оскільки $\angle CBK = \angle CBH = 5^0$, $\angle CBN = 65^0$, то промінь BK проходить між сторонами $\angle CBN$, а $\angle KBN = 60^0$. Звідки

$$\angle ABN = \angle ABK - \angle NBK = 65^0 - 60^0 = 5^0.$$

Оскільки $\angle ABN = \angle CBK = 5^0$, то хорди AN і CK є рівними.

4) Для знаходження NK розглянемо прямокутний $\triangle NKB$. Оскільки довжина радіуса описаного кола становить 20 см, а BN – діаметр, то $BN = 40$ см. Оскільки $\angle KBN = 60^0$, то за визначенням синуса гострого кута прямокутного трикутника маємо, що

$$\sin\angle KBN = \frac{KN}{BN},$$

звідки $NK = BN \cdot \sin\angle KBN = 40 \cdot \sin 60^0 = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$.

Відповідь: $20\sqrt{3}$ **.**

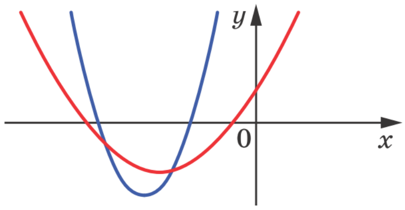
ДОПОВНЕННЯ
до задачі 2

! Висота BH трикутника ABC вдруге перетинає коло, описане навколо $\triangle ABC$ в точці K, BN – діаметр. Доведіть, що $AN = KC$.

?! Чи обов'язково чотирикутник $ANKC$ буде рівнобедреною трапецією.

Задача 4

Чи можуть графіки квадратичних функцій $y=ax^2+bx+c$ та $y=bx^2+cx+a$ бути розміщені так, як показано на рисунку нижче?



Розв'язання.

1 спосіб.

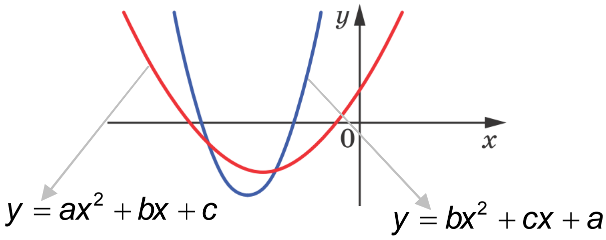
Нехай $y=ax^2+bx+c=f(x)$, $y=bx^2+cx+a=g(x)$.

Оскільки $f(1)=a+b+c=b+c+a=g(1)$, то графіки даних функцій повинні перетинатися у точці, перша координата якої дорівнює 1.

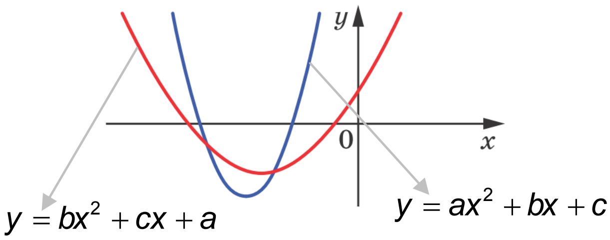
З урахуванням взаємного розташування графіків даних функцій відносно осей координат, не важко бачити, що перші координати точок їх перетину є від'ємними.

Тому графіки функцій не можуть бути розміщені так, як показано на рисунку.

2 спосіб



$a)$ **1 випадок**



$b)$ **2 випадок**

Рис. 10.4: *до задачі 4.*

1) Розглянемо 1 випадок.

1.1) Оскільки квадратична функція $y=ax^2+bx+c$ має два нулі (перетинає вісь абсцис у двох точках), то

$$b^2-4ac>0. \tag{4.1.1}$$

1.2) Гілки парабол розташовано догори, тому

$$a>0,\ b>0. \tag{4.1.2}$$

1.3) Оскільки параболи перетинають **додатну піввісь** OY, то

$$c>0,\ a>0. \tag{4.1.3}$$

1.4) Вершина «синьої» параболи $y=bx^2+cx+a$ розташована ліворуч від вершини «червоної» параболи $y=ax^2+bx+c$, тому справджується нерівність

$$-\frac{c}{2b}<-\frac{b}{2a}, \tag{4.1.4}$$

яка, з урахуванням нерівностей (4.1.2) і (4.1.3), є рівносильною нерівності $ac>b^2$, звідки $4ac-b^2>0$, або ж

$$b^2 - 4ac < 0. \qquad (4.1.5)$$

Очевидно, що умови (4.1.1) та (4.1.2) є несумісними. Тому графіки функцій не можуть бути розміщені так, як показано на рисунку 10.4 $a)$.

2) Розглянемо 2 випадок.

2.1) Оскільки гілки парабол розташовано догори та перетинають додатну піввісь OY, то $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$ (4.2.1)

2.2) «Синя» парабола $y = ax^2 + bx + c$ перетинає вісь OY у точці, яка знаходиться вище за точку, в якій «червона» парабола $y = bx^2 + cx + a$ перетинає вісь OY, тому $c > a$ (4.2.2)

2.4) Оскільки вершина «синьої» параболи розташована ліворуч від вершини «червоної» параболи, то

$$-\frac{b}{2a} < -\frac{c}{2b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} > \frac{c}{b}. \qquad (4.2.3)$$

З урахуванням нерівностей (4.2.1), (4.2.3) маємо що $b^2 > ac$. А, з урахуванням (4.2.2), для додатних a і b одержуємо нерівність $b^2 > a^2$, звідки

$$b > a \qquad (4.2.4)$$

2.5) Оскільки квадратичні функції мають по два нулі (перетинає вісь абсцис у двох точках), то

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ c^2 - 4ab > 0 \end{cases}. \qquad (4.2.5)$$

2.6) Відстань між нулями (коренями) «синьої» параболи менша за відстань між нулями «червоної» параболи, тому справджується нерівність

$$\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} < \frac{\sqrt{c^2 - 4ab}}{b},$$

звідки, з урахуванням (4.2.1) та (4.2.5), маємо що

$$\frac{b^2 - 4ac}{c^2 - 4ab} < \frac{a^2}{b^2}. \qquad (4.2.6)$$

2.7) Оскільки вершина «синьої» параболи розташована нижче від вершини «червоної» параболи, то справджується нерівність

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} < -\frac{c^2 - 4ab}{4b} \Leftrightarrow \frac{b^2 - 4ac}{4a} > \frac{c^2 - 4ab}{4b},$$

яка, з урахуванням нерівностей (4.2.1) та (4.2.5), є рівносильною нерівності

$$\frac{a}{b} < \frac{b^2 - 4ac}{c^2 - 4ab}. \qquad (4.2.7)$$

2.8) З (4.2.6) та (4.2.7) маємо, що $\frac{a}{b} < \frac{a^2}{b^2}$. Тому, з урахуванням (4.2.1), одержуємо що $\frac{a}{b} > 1$, звідки одержуємо нерівність $a > b$, яка є несумісною з умовою (4.2.4). Отже, графіки функцій не можуть бути розміщені так, як показано на рисунку 10.4 $b)$.

3 спосіб.

1) Параболи $y = ax^2 + bx + c = f(x)$ та $y = bx^2 + cx + a = g(x)$ перетинаються у двох різних точках, абсциси яких є від'ємними. Тому рівняння

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (a-b)x^2 + (b-c)x + c - a = 0 \qquad (*)$$

повинно бути саме квадратним ($a \neq b$) та мати **два різні від'ємні корені**.

Зауваження. *Якщо припустити, що* $a = b$, *то рівняння* (*) *набуде виду* $(a-c)x = a - c$ *та буде мати єдиний розв'язок (корінь)* $x = 1$ *у випадку* $a \neq c$ *(це означало би, що параболи мають єдину спільну точку – вершину) або ж безліч розв'язків (коренів) у випадку* $a = c$ *(це означало би що параболи співпадають). Чого бути не може, оскільки графіки даних функцій (параболи) мають точно дві (різні) спільні точки.*

2) Оскільки рівняння (*) має два від'ємні (дійсні) корені, то за теоремою Вієта повинна справджуватися система нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{c-a}{a-b} > 0 \\ \dfrac{b-c}{a-b} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(c-a) > 0 \\ (a-b)(b-c) > 0. \end{cases} \qquad (**)$$

2.1) Якщо припустити, що $a - b > 0$, то $\begin{cases} c-a>0 \\ b-c>0 \end{cases}$. Звідки $\begin{cases} a>b \\ c>a \\ b>c \end{cases}$

$\Rightarrow b > c > a > b \Rightarrow b > b$, чого бути не може.

І тому система (**) є несумісною.

2.2) Якщо припустити, що $a - b < 0$, то $\begin{cases} c-a<0 \\ b-c<0 \end{cases}$. Звідки $\begin{cases} a<b \\ c<a \\ b<c \end{cases}$

$\Rightarrow b < c < a < b \Rightarrow b < b$, чого також бути не може.

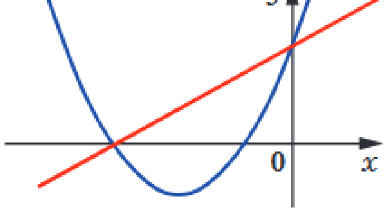
А система (**) є знов несумісною.

Таким чином графіки даних функцій не можуть бути розміщені так, як показано на рисунку.

Відповідь: ні.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 4

?! Чи можуть графіки квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ та лінійної функції $y = cx + a$ бути розміщені так, як показано на рисунку нижче?



Задача 1

Обчислити

$$70\cdot\left(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+71\right)+71.$$

Розв'язання.

1 спосіб.

$$70\cdot\left(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+71\right)+71=$$

$$=70\cdot\left(\frac{71\left(71^9-1\right)}{71-1}\right)+71=70\cdot\frac{71\left(71^9-1\right)}{70}+71=71\left(71^9-1\right)+71=$$

$$=71^{10}-71+71=71^{10}.$$

2 спосіб.

$$70\cdot\left(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+71\right)+71=$$

$$=70\cdot\left(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+71\right)+70+1=$$

$$=70\cdot\left(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+71+1\right)+1=$$

$$=70\cdot\left(\frac{1\cdot\left(71^{10}-1\right)}{71-1}\right)+1=70\cdot\frac{\left(71^{10}-1\right)}{70}+1=71^{10}-1+1=71^{10}.$$

3 спосіб.

$$70\cdot\left(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+71\right)+71=$$

$$=70\cdot71\cdot\left(71^8+71^7+71^6+\ldots+71^1+1\right)+71=$$

$$=70\cdot71\cdot\left(\frac{1\cdot\left(71^9-1\right)}{71-1}\right)+71=70\cdot71\cdot\frac{\left(71^9-1\right)}{70}+71=71\left(71^9-1\right)+71=$$

$$=71^{10}-71+71=71^{10}.$$

4 спосіб.

$$70\cdot\left(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+71\right)+71=$$

$$=\left(71-1\right)\cdot\left(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+71\right)+71=$$

$$=71\cdot\left(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+71\right)-1\cdot\left(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+71\right)+71=$$

$$=\left(71^{10}+71^9+71^8+\ldots+71^3+71^2\right)-\left(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+71\right)+71=$$

$$=71^{10}+71^9+71^8+\ldots+71^3+71^2-71^9-71^8-71^7-\ldots-71^2-71+71=71^{10}$$

Відповідь: 71^{10}.

Задача 5

На столі лежить 40 карток, серед яких є червоні та сині. Кожного кольору є принаймні одна картка. Натуральні числа на всіх синіх картках є різними, а натуральні числа на червоних картках є меншими за будь-яке число на синіх картках. Середнє арифметичне чисел на всіх картках становить 19. Якщо збільшити кожне з чисел на синіх картках утричі, то середнє арифметичне становитиме 39.

1) Чи може на столі бути точно 10 синіх карток?
2) Чи може на столі бути точно 10 червоних карток?

Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання.

1) Нехай A – сума чисел на червоних картках, а B – сума чисел на синіх картках.

2) Оскільки середнє арифметичне чисел на всіх картках становить 19, то має місце рівність $\frac{A+B}{40}=19$, звідки

$$A+B=19\cdot 40. \qquad (10.5.1)$$

3) За умовою, якщо збільшити кожне з чисел на синіх картках утричі, то середнє арифметичне на всіх картках становитиме 39. Тому має місце рівність $\frac{A+3B}{40}=39$, звідки

$$A+3B=39\cdot 40 \quad . \qquad (10.5.2)$$

4) З урахуванням (10.5.1) та (10.5.2) маємо систему $\begin{cases} A+B=19\cdot 40 \\ A+3B=39\cdot 40, \end{cases}$ звідки

$$\begin{cases} A=360 \\ B=400 \end{cases}. \qquad (10.5.3)$$

5) З'ясуємо питання – «**Чи може на столі бути точно 10 синіх карток?**»

Для цього побудуємо один з можливих прикладів реалізації такого набору карток (*10 синіх та 30 червоних карток*). А саме, покладемо, що кожне з чисел на 30 червоних картках є рівним числу 12. Очевидно, що їх сума становить 360.

Оскільки натуральні числа на всіх 10 синіх картках повинні бути різними, а натуральні числа на червоних картках – меншими за будь-яке число на синіх картках, то спочатку розглянемо наступні числа на десяти синіх картках:

13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22.

Неважко перевірити, що їх сума становить 175, а повинна бути рівною 400. Збільшивши найбільше з чисел на синіх картках на 225, одержимо числа

13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 247,

сума яких становитиме 400.

Таким чином, існують такі набори натуральних чисел (на 30 червоних та на 10 синіх картках), які задовольняють всім вимогам умови задачі.

6) З’ясуємо питання – «**Чи може на столі бути точно 10 червоних карток?**»

Очевидно, що цю задачу можна переформулювати наступним чином – «**Чи може на столі бути точно 30 синіх карток?**»

Оскільки натуральні числа на всіх 30 синіх картках повинні бути різними, то розглянемо такий набір натуральних чисел, сума яких буде найменшою. Очевидно, що таким набором чисел є перші 30 натуральних чисел, а саме:

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30.

Неважко переконатися, що

$$1+2+3+...+28+29+30=\frac{30\cdot 31}{2}=15\cdot 31=465,$$

що значно більше за «необхідну» суму **400**.

Тобто для довільного набору 30 різних натуральних чисел (на синіх картках) їх сума буде становити щонайменше 465. А тому не існує таких наборів натуральних чисел (на 30 синіх та на 10 червоних картках), які задовольняли би всім вимогам умови задачі.

Відповідь: 1) – так; 2) – ні.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 5

?! Чи може на столі бути точно 11 синіх карток?

?! Чи може на столі бути точно 11 червоних карток?

?! Чи може на столі бути точно 12 синіх карток?

?! Чи може на столі бути точно 12 червоних карток?

?! Яка максимальна кількість синіх карток може бути на столі?

?! На дошці написано декілька натуральних чисел, серед яких немає однакових. Їх розбили на три групи, в кожній з яких опинилося хоча б одно число. До кожного числу з першої групи приписали праворуч цифру 1, до кожного числа з другої групи приписали праворуч цифру 8, а числа третьої групи залишили без змін.

1) Чи може сума одержаних чисел бути у 4 рази більшою за суму початкових чисел?

2) Чи може сума одержаних чисел бути у 16 разів більшою за суму початкових чисел?

3) Яка найбільша кількість чисел може бути написаною на дошці, щоб сума одержаних чисел була в 11 разів більшою за суму початкових чисел?

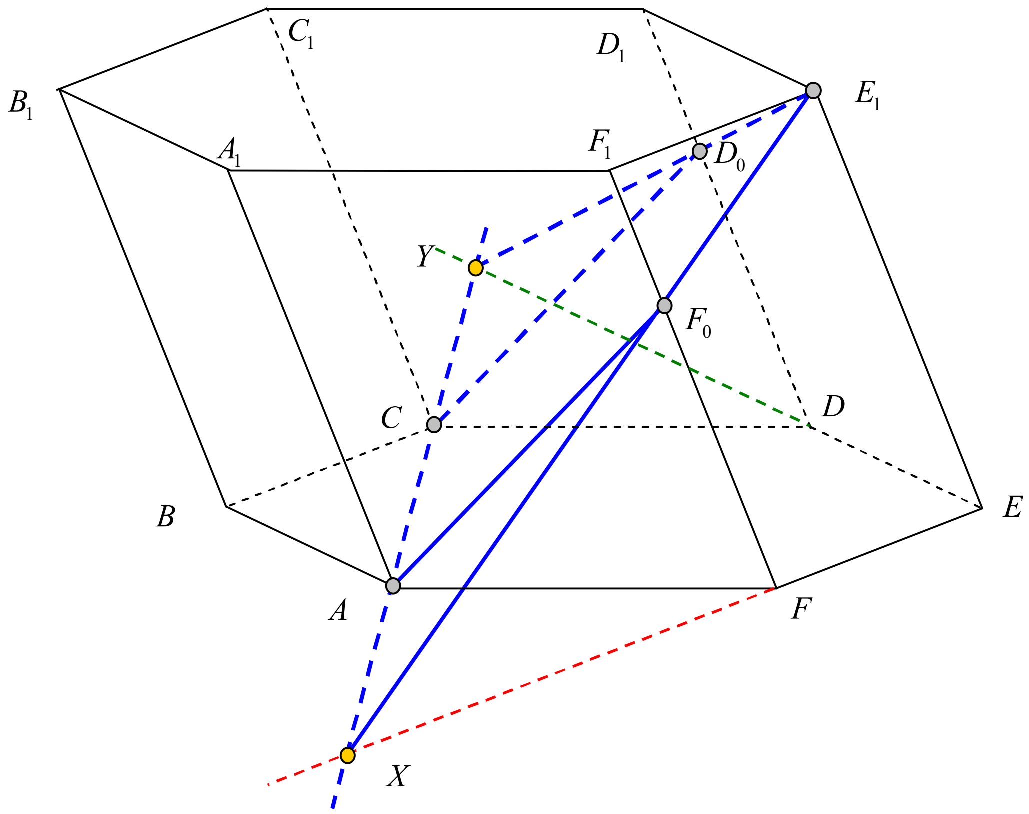
11 клас

Задача 3

Дано похилу шестикутну призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Побудувати переріз площиною, яка визначається точками A, C та E_1. Всі виконані побудови під час встановлення виду перерізу обґрунтуйте.

Розв'язання.

1 спосіб.



1) Нехай γ – січна площина, яка за умовою задачі (визначається трьома точками A, C та E_1) співпадає з площиною (ACE_1).

2) За умовою точки A і C одночасно належать площині α нижньої основи та січній площині γ. Тому (за аксіомою / теоремою) площина γ перетинає площину α по прямій AC.

А з того що точки A і C належать ребрам грані $[ABCDEF]$ маємо, що січна площина перетинає грань $[ABCDEF]$ по відрізку $[AC]$.

3) Оскільки $E, F \in \alpha$, то (за аксіомою / теоремою) пряма $EF \subset \alpha$.

4) Нехай X – точка перетину прямих AC та EF, які належать площині α.
Оскільки $X \in AC$ а $AC \subset \gamma$, то $X \in \gamma$.
Оскільки $X \in EF$ а $EF \subset (FF_1E_1E)$, то $X \in (FF_1E_1E)$.

Точки X та E_1 одночасно належать площині γ та площині (FF_1E_1E). І тому січна площина γ перетинає площину (FF_1E_1E) по прямій XE_1.

Оскільки в площині (FF_1E_1E) пряма XE_1 перетинає пряму EE_1, а $FF_1 \parallel EE_1$ (бо кожна бічна грань призми є паралелограмом) то (за властивістю паралельних прямих площини) пряма XE_1 перетинає пряму FF_1 у певній т. F_0.

А з того що точки F_0 і E_1 належать ребрам грані $[FF_1E_1E]$ маємо, що січна площина γ перетинає грань $[FF_1E_1E]$ по відрізку $[F_0E_1]$.

5) Точки A та F_0 одночасно належать площині γ та площині (AA_1F_1F). Тому січна площина γ перетинає площину (AA_1F_1F) по прямій AF_0.

А з того що точки A і F_0 належать ребрам грані $[AA_1F_1F]$ маємо, що січна площина γ перетинає грань $[AA_1F_1F]$ по відрізку $[AF_0]$.

6) Нехай Y – точка перетину прямих AC та ED, які належать площині α.
Оскільки $Y \in AC$ а $AC \subset \gamma$, то $Y \in \gamma$.
Оскільки $Y \in ED$ а $ED \subset (DD_1E_1E)$, то $Y \in (DD_1E_1E)$.

Точки Y та E_1 одночасно належать площині γ та площині (DD_1E_1E). І тому січна площина γ перетинає площину (DD_1E_1E) по прямій YE_1.

Оскільки в площині (DD_1E_1E) пряма YE_1 перетинає пряму EE_1, а $DD_1 \parallel EE_1$ (бо кожна бічна грань призми є паралелограмом) то (за властивістю паралельних прямих площини) пряма YE_1 перетинає пряму DD_1 у певній т. D_0.

А з того що точки D_0 і E_1 належать ребрам грані $[DD_1E_1E]$ маємо, що січна площина γ перетинає грань $[DD_1E_1E]$ по відрізку $[D_0E_1]$.

7) Точки C та D_0 одночасно належать площині γ та площині (CC_1D_1D). Тому січна площина γ перетинає площину (CC_1D_1D) по прямій CD_0.

А з того що точки C і D_0 належать ребрам грані $[CC_1D_1D]$ маємо, що січна площина γ перетинає грань $[CC_1D_1D]$ по відрізку $[CD_0]$.

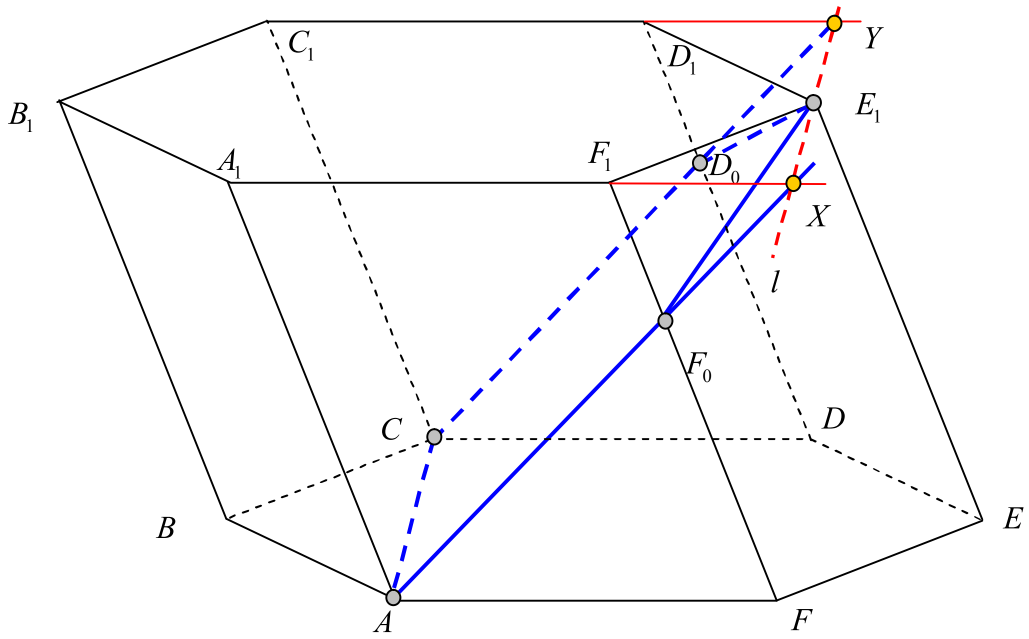
Таким чином, шуканим перерізом є п'ятикутник $ACD_0E_1F_0$.

ДОПОВНЕННЯ
до 1 способу розв'язання задачі 3

?! Як зміниться вид перерізу, якщо сторона DE шестикутника $ABCDEF$ виявиться паралельною до діагоналі AC?

?! Як зміниться вид перерізу, якщо сторона EF шестикутника $ABCDEF$ виявиться паралельною до діагоналі AC?

2 спосіб.



1) Нехай γ – січна площина, яка за умовою задачі (визначається трьома точками A, C та E_1) співпадає з площиною $\left(ACE_1\right)$.

2) За умовою точки A і C одночасно належать площині α нижньої основи та січній площині γ. Тому (за аксіомою / теоремою) площина γ перетинає площину α по прямій AC.

А з того що точки A і C належать ребрам грані $\left[ABCDEF\right]$ маємо, що січна площина перетинає грань $\left[ABCDEF\right]$ по відрізку $\left[AC\right]$.

3) За умовою точка E_1 одночасно належить площині β верхньої основи та січній площині γ. Тому (за аксіомою / теоремою) площина γ перетинає площину β по певній прямій l, яка містить точку E_1.

Іншими словами, пряма l належить січній площині γ та площині β.

4) Оскільки площини α і β (як площини нижньої та верхньої основи призми) є паралельними, то (за властивістю паралельних площин) прямі AC і l є паралельними.

5) Оскільки $A_1, F_1 \in \beta$, то (за аксіомою / теоремою) пряма $A_1F_1 \subset \beta$.

6) Нехай X – точка перетину прямих A_1F_1 та l, які належать площині β.

Оскільки $X \in l$ а $l \subset \gamma$, то $X \in \gamma$. Тому пряма $AX \subset \gamma$.

Оскільки точки A_1, F_1 належать площині $\left(AA_1F_1F\right)$, то (за аксіомою) пряма $A_1F_1 \subset \left(AA_1F_1F\right)$. Звідки $X \in \left(AA_1F_1F\right)$. Очевидно також, що точка $A \in \left(AA_1F_1F\right)$. І тому пряма $AX \subset \left(AA_1F_1F\right)$.

Отже, січна площина γ перетинає площину $\left(AA_1F_1F\right)$ по прямій AX.

7) Оскільки в площині (AA_1F_1F) пряма AX перетинає пряму AA_1, а $FF_1 \| AA_1$ (бо кожна бічна грань призми є паралелограмом) то (за властивістю паралельних прямих площини) пряма AX перетинає пряму FF_1 у певній т. F_0.

А з того що точки A і F_0 належать ребрам грані $[AA_1F_1F]$ маємо, що січна площина перетинає грань $[AA_1F_1F]$ по відрізку $[AF_0]$.

8) Оскільки $F_0 \in (FF_1) \subset (FF_1E_1E)$ та $E_1 \in (EE_1) \subset (FF_1E_1E)$, то пряма (F_0E_1) належить площині (FF_1E_1E). З іншого боку, оскільки $F_0 \in (AX) \subset \gamma$ та $E_1 \in \gamma$, то пряма (F_0E_1) належить січній площині γ. Звідки й випливає, що січна площина γ перетинає площину (FF_1E_1E) по прямій (F_0E_1).

А з того що точки F_0 і E_1 належать ребрам грані $[FF_1E_1E]$ маємо, що січна площина перетинає грань $[FF_1E_1E]$ по відрізку $[F_0E_1]$.

9) Оскільки $C_1, D_1 \in \beta$, то (за аксіомою / теоремою) пряма $C_1D_1 \subset \beta$.

10) Нехай Y – точка перетину прямих C_1D_1 та l, які належать площині β.

Оскільки $Y \in l$ а $l \subset \gamma$, то $Y \in \gamma$. Тому пряма $AY \subset \gamma$.

Оскільки точки C_1, D_1 належать площині (CC_1D_1D), то (за аксіомою) пряма $C_1D_1 \subset (CC_1D_1D)$. Звідки $Y \in (CC_1D_1D)$. Очевидно також, що точка $C \in (CC_1D_1D)$. І тому пряма $CY \subset (CC_1D_1D)$.

Отже, січна площина γ перетинає площину (CC_1D_1D) по прямій CY.

11) Оскільки в площині (CC_1D_1D) пряма CY перетинає пряму CC_1, а $DD_1 \| CC_1$ (бо кожна бічна грань призми є паралелограмом) то (за властивістю паралельних прямих площини) пряма CY перетинає пряму DD_1 у певній т. D_0.

А з того що точки C і D_0 належать ребрам грані $[CC_1D_1D]$ маємо, що січна площина перетинає грань $[CC_1D_1D]$ по відрізку $[CD_0]$.

12) Оскільки $D_0 \in (DD_1) \subset (DD_1E_1E)$ та $E_1 \in (EE_1) \subset (DD_1E_1E)$, то пряма (D_0E_1) належить площині (DD_1E_1E). З іншого боку, оскільки $D_0 \in (CY) \subset \gamma$ та $E_1 \in \gamma$, то пряма (D_0E_1) належить січній площині γ. Звідки й випливає, що січна площина γ перетинає площину (DD_1E_1E) по прямій (D_0E_1).

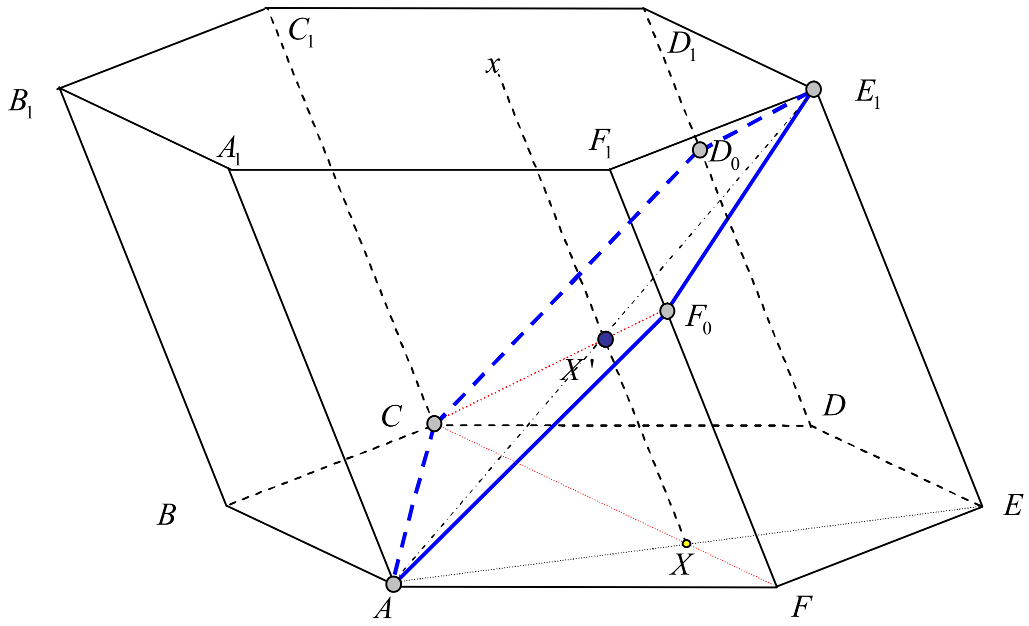
А з того що точки D_0 і E_1 належать ребрам грані $[DD_1E_1E]$ маємо, що січна площина перетинає грань $[DD_1E_1E]$ по відрізку $[D_0E_1]$.

Таким чином, шуканим перерізом є п'ятикутник $ACD_0E_1F_0$.

ДОПОВНЕННЯ
до 2 способу розв'язання задачі 3

?! Обґрунтуйте чому **завжди** існують точки перетину прямої l з прямими A_1F_1 та C_1D_1?

3 спосіб.



Нехай γ – площина перерізу, який/яка визначається точками A, C, E_1. Тоді $A, C, E_1 \in \gamma$ та (за аксіомою) будь-яка точка кожної з прямих AC, AE_1 та CE_1 також належить γ.

Крім того січна площина перетинає грань $[ABCDEF]$ по відрізку $[AC]$.

1) Нехай $X = CF \cap AE$; через X проведемо пряму $x \parallel EE_1$.

1.1) Тоді існує єдина площина α, яка містить паралельні прямі x, EE_1.

Оскільки $A \in (XE) \subset \alpha$, $E_1 \in (EE_1) \subset \alpha$, то (за аксіомою) $(AE_1) \subset \alpha$.

Оскільки $(EE_1) \cap (AE_1) = E_1$ то пряма x $(x \parallel EE_1)$ перетинає пряму (AE_1) у точці X'.

Оскільки $X' \in (AE_1) \subset \gamma$, то $X' \in \gamma$, $(CX') \subset \gamma$.

1.2) Оскільки $x \parallel EE_1$, $EE_1 \parallel FF_1$, то (за ознакою паралельних прямих) $x \parallel FF_1$. І тому існує єдина площина β, яка містить паралельні прямі x, FF_1.

Оскільки $C \in (XF) \subset \beta$, $X' \in x \subset \beta$, то (за аксіомою) $(CX') \subset \beta$.

Оскільки $(CX') \cap x = X'$, $x \parallel FF_1$, то пряма (CX') перетинає і пряму (FF_1) у точці F_0.

Оскільки $F_0 \in (CX') \subset \gamma$, то $F_0 \in \gamma$. Звідки:

$$\gamma \cap [FF_1E_1E] = [F_0E_1]; \quad \gamma \cap [AA_1F_1F] = [F_0A].$$

2) (За аксіомою) січна площина γ, яка містить точку C, перетинає площину грані $[CC_1D_1D]$, по прямій, що містить точку C.

2.1) Оскільки грані $[AA_1F_1F]$ та $[CC_1D_1D]$ є паралельними, то (за властивістю паралельних площин) січна площина γ перетинає площину грані $[CC_1D_1D]$ по прямій, яка є паралельною до прямої AF_0.

2.2) У площині грані $[CC_1D_1D]$ через точку C проведемо пряму $l \parallel AF_0$. Оскільки CC_1D_1D та AA_1F_1F є рівними паралелограмами, то пряма l перетинає ребро DD_1 у певній точці D_0. Звідки:

$$\gamma \cap [CC_1D_1D] = [CD_0]; \quad \gamma \cap [DD_1E_1E] = [D_0E_1].$$

Таким чином, шуканим перерізом є п'ятикутник $ACD_0E_1F_0$**.**

Зауваження. 1-ий та 2-ий із запропонованих способів побудови заданого перерізу шестикутної призми є варіаціями застосування «Методу слідів», а 3-ій спосіб – прикладом застосування «Методу внутрішнього проектування», більш детально з якими можна ознайомитися, наприклад, в [1][8] (С. 84 – 86).

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3

! В якості безпосередніх наслідків з аксіом та відповідних теорем доцільно виділити наступні **правила** для побудови перерізів опуклих многогранників

Правило 1. Якщо дві точки січної площини належать прямій, яка містить певне ребро многогранника, то це ребро («цілком») належить перерізу многогранника.

Правило 2. Якщо дві точки січної площини належать прямій, яка перетинає два ребра певної грані многогранника у точках X та Y, то січна площина перетинає цю грань по відрізку $[XY]$.

Правило 3. Якщо січна площина перетинає грані двогранного кута (з ребром c) по прямим a і b, причому $a \parallel c$, то $b \parallel c$.

Правило 4. Якщо січна площина перетинає грані (що містять відповідні грані многогранника) двогранного кута (з ребром c) по прямим a і b, причому $a \nparallel c$, то $b \nparallel c$, а точки $a \cap c$ і $b \cap c$ співпадають, тобто $(a \cap b) \in c$.

Правило 5. Якщо січна площина паралельна до певної грані многогранника, то вона перетинає площини, які містять суміжні (прилеглі) до неї грані, по прямим, що паралельні до відповідних ребер зазначеної грані.

Зауваження 1. *Спосіб задання двох точок (січної площини), які належать певному ребру многогранника, можна ототожнювати із заданням відповідних вершин многогранника – кінців зазначеного ребра.*

Зауваження 2. *Спосіб задання двох точок (січної площини), які належать певній грані многогранника, можна ототожнювати із заданням (відповідних) точок на відповідних ребрах цієї грані.*

---

[8] Нелін Є.П. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. – Харків : Вид-во «Ранок», 2018. –240 с.

Задача 4

Знайти геометричне місце точок площини, через які можна провести по дві дотичні до графіка функції $y = x^2 - 4x + 3$.

Розв'язання.

1 спосіб.

1) Нехай x_0 – точка дотику (перша її координата) до графіка функції $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (через яку можна провести точно дотичну). Тоді координати такої точки M можна подати у вигляді $(x_0; x_0^2 - 4x_0 + 3)$.

2) Запишемо рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 4x + 3$ в точці $M(x_0; x_0^2 - 4x_0 + 3)$. Оскільки $f'(x) = 2x - 4$ а $f'(x_0) = 2x_0 - 4$, то рівняння зазначеної дотичної ($y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$) можна подати у вигляді

$$y = (2x_0 - 4)(x - x_0) + x_0^2 - 4x_0 + 3,$$

або ж

$$y = (2x_0 - 4)x - x_0^2 + 3. \qquad (1.1)$$

3) Нехай $(a; b)$ – точка площини, через яку можна провести дотичну до графіка функції $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Оскільки рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 4x + 3$ у будь-якій точці має вид (1.1), то для зазначеної точки повинна справджуватися рівність

$$b = (2x_0 - 4)a - x_0^2 + 3. \qquad (1.2)$$

Зауважимо, що:

– через кожну точку графіка функції можна провести не більше однієї дотичної;

– через кожну точку графіка квадратичної функції, зокрема $f(x) = x^2 - 4x + 3$, завжди можна провести дотичну.

Тобто, при довільному x_0 існує єдина дотична, яка дотикається до графіка квадратичної функції $f(x) = x^2 - 4x + 3$ в точці $(x_0; x_0^2 - 4x_0 + 3)$.

4) З'ясуємо питання: при яких a і b квадратне рівняння

$$b = (2x - 4)a - x^2 + 3, \qquad (1.3)$$

«породжене» умовою (2), має два різних розв'язки (корені).

$$b = (2x - 4)a - x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + 4a + b - 3 = 0.$$

$$D = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4a + b - 3) = 4a^2 - 16a - 4b + 12.$$

Добре відомо, що квадратне рівняння, зокрема (1.3), має два дійсні різні корені тоді і лише тоді, коли виконується умова $D > 0$, яка в нашому випадку набуває вид $4a^2 - 16a - 4b + 12 > 0$, або, що теж саме, – вид

$$a^2 - 4a - b + 3 > 0 \Leftrightarrow b < a^2 - 4a + 3. \qquad (1.4)$$

Таким чином через точку $(a;b)$ площини можна провести дві різні дотичні до графіка функції $f(x)=x^2-4x+3$ тоді і лише тоді, коли справджується умова (1.4). Оскільки a і b – перша та відповідно друга координати кожної з таких точок, то координати тих і лише тих точок площини, через кожну з яких можна провести дві дотичні до графіка функції $f(x)=x^2-4x+3$ задовольняють умову

$$y<x^2-4x+3, \qquad (5)$$

тобто, нерівність (1.5) і визначає на площині шукану множину точок.

Добре відомо, що рівняння $y=x^2-4x+3$ визначає на площині параболу, а нерівність $y<x^2-4x+3$ – множину точок площини (виділено сірим кольором), які знаходяться поза параболою – рис. 11.4

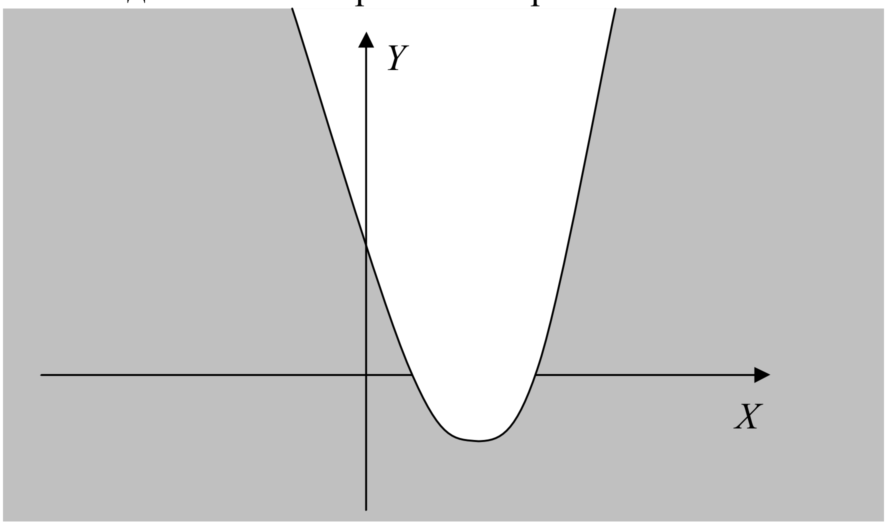


Рис. 11.4

2 спосіб.

1) Нехай $(a;b)$ – координати довільної, але фіксованої точки шуканого геометричного місця точок (ГМТ.) площини.

2) Оскільки у графіка квадратичної функції $y=x^2-4x+3$ відсутні вертикальні дотичні, а єдина горизонтальна дотична дотикається параболи у її вершині, то рівняння відповідних шуканих дотичних будемо шукати у вигляді

$$y=k(x-a)+b, \qquad (2.1)$$

де $k\neq 0$ – кутовий коефіцієнт.

Пряма $y=k(x-a)+b=g(x)$ буде дотичною до графіка функції $y=x^2-4x+3=f(x)$ тоді і лише тоді, коли ця пряма буде мати з параболою лише одну спільну точку, тобто коли дискримінант D квадратного рівняння

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-4x+3=k(x-a)+b\Leftrightarrow x^2-x(4+k)+3+ak-b=0$$

буде дорівнювати нулеві («дотична – як граничне положення січної, коли дві точки перетину співпадають»). Отже

$D=(4+k)^2-4(3+ak-b)=k^2+8k+16-12-4ak+4b=$

$$= k^2 - 4k(a-2) + 4 + 4b,$$

Звідки має місце рівність

$$k^2 - 4k(a-2) + 4 + 4b = 0. \qquad (2.2)$$

3) Оскільки через кожну точку $(a;b)$ шуканого ГМТ повинно проходити дві різні дотичні, то рівняння (2.2) повинно мати два різних (дійсних) корені, тобто його дискримінант D^* повинен бути додатним. Оскільки

$$D^* = 16(a-2)^2 - 4(4+4b) = 16(a^2 - 4a + 4 - 1 - b) = 16(a^2 - 4a + 3 - b),$$

то повинна справджуватися нерівність

$$16(a^2 - 4a + 3 - b) > 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 - b > 0,$$

звідки

$$b < a^2 - 4a + 3. \qquad (2.3)$$

Оскільки a і b – перша та відповідно друга координати точок шуканого ГМТ площини, то з останнього випливає, що координати точок шуканого ГМТ задовольняють умову

$$y < x^2 - 4x + 3. \qquad (2.4)$$

І тому визначають ту частину площини, точки якої знаходяться «нижче» параболи $y = x^2 - 4x + 3$ – рис. 11.4.

Зауваження. Якщо точка належить шуканому ГМТ, то її координати задовольняють умову (2.4) (– «виконується необхідна умова»). Проте слід **обов'язково** переконатися («що виконується й достатня умова») ще й в тому, що довільна точка площини, координати якої задовольняють умову (2.4), є такою, що через неї можна провести дві різні дотичні до графіка функції $y = x^2 - 4x + 3$. Отже, нехай координати певної точки $(a;b)$ задовольняють умову (2.4). Тоді виконується умова (2.3), яка гарантує два дійсні різні розв'язки рівняння (2.2), або що теж саме, існування двох різних дотичних до графіка функції $y = x^2 - 4x + 3$, кожна з яких проходить через точку $(a;b)$ та має вид $y = k(x-a) + b$.

Відповідь: $y < x^2 - 4x + 3$ – множина тих і лише тих точок (координатної) площини, які розташовано нижче точок параболи $y = x^2 - 4x + 3$.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 4

?! Знайти геометричне місце точок площини, через які можна провести по дві дотичні до графіка рівняння

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0.$$

?! Знайти геометричне місце точок площини, через які можна провести по дві дотичні до графіка рівняння

$$x = y^2.$$

Задача 1

Порівняйте між собою числа $a=\left(-3\right)^{3^3}$, $b=3^{(-3)^3}$ та $c=3^{3^{-3}}$.

Розв'язання.

1) $a=\left(-3\right)^{3^3}=\left(-3\right)^{27}=-\left(3^{27}\right)<0$;

2) $b=3^{(-3)^3}=3^{-27}=\frac{1}{3^{27}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{27}=\sqrt[27]{\frac{1}{3}}\Rightarrow 0<\sqrt[27]{\frac{1}{3}}<\sqrt[27]{1}=1$;

3) $c=3^{3^{-3}}=3^{\frac{1}{27}}=\sqrt[27]{3}>\sqrt[27]{1}=1$.

Оскільки $a<0$, $0<b<1$ і $c>1$, то $a<b<c$.

Відповідь: $a<b<c$.

Задача 2

Розв'яжіть рівняння $\left[2020x+2021\right]=1$, де $\left[x\right]$ – ціла частина числа.

(*Цілою частиною дійсного числа* x *(або функцією Антьє) називають найбільше ціле число* $\left[x\right]$*, що не перевищує* x. *Наприклад*: $\left[-2,5\right]=-3$; $\left[-2\right]=-2$; $\left[-0,2\right]=-1$; $\left[0,2\right]=0$; $\left[2\right]=2$; $\left[2,3\right]=2$)

Розв'язання.

Оскільки

$$\left[2020x+2021\right]=1,$$

то

$$1\le 2020x+2021<2,$$

звідки

$$-2020\le 2020x<-2019,$$

$$-1\le x<-\frac{2019}{2020}.$$

Відповідь: $x\in\left[-1;-\frac{2019}{2020}\right)$.

Задача 5

На столі лежить 40 карток, серед яких є червоні та сині. Кожного кольору є принаймні одна картка. Натуральні числа на всіх синіх картках є різними, а натуральні числа на червоних картках є меншими за будь-яке число на синіх картках. Середнє арифметичне чисел на всіх картках становить 19. Якщо збільшити кожне з чисел на синіх картках утричі, то середнє арифметичне становитиме 39.

1) Чи може на столі бути точно 11 синіх карток?
2) Чи може на столі бути точно 11 червоних карток?

Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання.

1) Нехай A – сума чисел на червоних картках, а B – сума чисел на синіх картках.

2) Оскільки середнє арифметичне чисел на всіх картках становить 19, то має місце рівність $\frac{A+B}{40}=19$, звідки

$$A+B=19\cdot 40. \tag{11.5.1}$$

3) За умовою, якщо збільшити кожне з чисел на синіх картках утричі, то середнє арифметичне на всіх картках становитиме 39. Тому має місце рівність $\frac{A+3B}{40}=39$, звідки

$$A+3B=39\cdot 40 \quad . \tag{11.5.2}$$

4) З урахуванням (10.5.1) та (10.5.2) маємо систему $\begin{cases} A+B=19\cdot 40 \\ A+3B=39\cdot 40, \end{cases}$ звідки

$$\begin{cases} A=360 \\ B=400 \end{cases}. \tag{11.5.3}$$

5) З'ясуємо питання – «**Чи може на столі бути точно 11 синіх карток?**»

Для цього побудуємо один з можливих прикладів реалізації такого набору карток (*11 синіх та 29 червоних карток*).

Покладемо, що 17 чисел на червоних картках є рівним 12, а 12 чисел (на червоних картках) – рівними 13. Тоді їх сума становить

17*12+12*13=360.

Оскільки натуральні числа на всіх 11 синіх картках повинні бути різними, а натуральні числа на червоних картках – меншими за будь-яке число на синіх картках, то спочатку розглянемо наступні числа на одинадцяти синіх картках:

14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24.

Неважко перевірити, що їх сума становить 209, а повинна бути рівною 400. Збільшивши найбільше з чисел на синіх картках на 191, одержимо числа

14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 215.

сума яких становитиме 400.

Таким чином, існують такі набори натуральних чисел (на 29 червоних та на 11 синіх картках), які задовольняють всім вимогам умови задачі.

6) З'ясуємо питання – «**Чи може на столі бути точно 11 червоних карток?**»

Очевидно, що цю задачу можна переформулювати наступним чином – «**Чи може на столі бути точно 29 синіх карток?**»

Оскільки натуральні числа на всіх 29 синіх картках повинні бути різними, то розглянемо такий набір натуральних чисел, сума яких буде найменшою. Очевидно, що таким набором чисел є перші 30 натуральних чисел, а саме:

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29.

Неважко переконатися, що

$$1+2+3+...+28+29=\frac{29\cdot 30}{2}=29\cdot 15=435,$$

що значно більше за «необхідну» суму **400**.

Тобто для довільного набору 29 різних натуральних чисел (на синіх картках) їх сума буде становити щонайменше 435. А тому не існує таких наборів натуральних чисел (на 29 синіх та на 11 червоних картках), які задовольняли би всім вимогам умови задачі.

Відповідь: 1) – так; 2) – ні**.**

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 5

?! Чи може на столі бути точно 10 синіх карток?

?! Чи може на столі бути точно 10 червоних карток?

?! Чи може на столі бути точно 12 синіх карток?

?! Чи може на столі бути точно 12 червоних карток?

?! Яка максимальна кількість синіх карток може бути на столі?

?! На дошці написано декілька натуральних чисел, серед яких немає однакових. Їх розбили на три групи, в кожній з яких опинилося хоча б одно число. До кожного числу з першої групи приписали праворуч цифру 1, до кожного числа з другої групи приписали праворуч цифру 8, а числа третьої групи залишили без змін.

1) Чи може сума одержаних чисел бути у 4 рази більшою за суму початкових чисел?

2) Чи може сума одержаних чисел бути у 16 разів більшою за суму початкових чисел?

3) Яка найбільша кількість чисел може бути написаною на дошці, щоб сума одержаних чисел була в 11 разів більшою за суму початкових чисел?

ДОДАТКИ

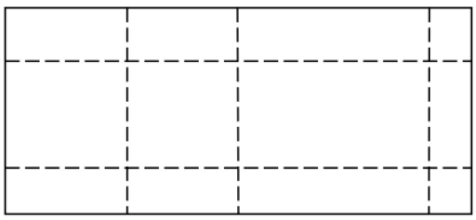
Умови завдань III (обласного) етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2020 / 2021 н.р. (Донецька область)

(середній рівень)[9]

7 клас

1. Мама принесла Андрієві та Олесі 4 кульки, на яких були написані числа 1, 2, 3 та 4 (по одному на кожній кульці). Вона тримала в кожній руці по 2 кульки і не знала, які саме числа написані на цих кульках у кожній руці. Мама попросила Андрія взяти собі з кожної руки кульку з більшим числом, а далі з двох кульок, що він взяв, залишити кульку з меншим числом. Після цього попросила Олесю взяти дві інші кульки, і з цих двох залишити кульку з більшим числом. Чи зможе мама гарантовано сказати в кого з дітей лишилася кулька з більшим числом? Відповідь обґрунтуйте.

2. Андрій та Олеся по черзі (починає Андрій) у прямокутнику 2×1 проводять горизонтальні відрізки довжиною 2 чи вертикальні довжиною 1, як це показано на рисунку.



Після кожного ходу рахується величина P – сумарний периметр усіх малих прямокутників, що при цьому утворилися (тобто таких, всередині яких не проходить жодний інший відрізок). Перемагає той з них, після ходу якого P ділиться націло на 2021. Хто переможе в цій грі, якщо кожний прагне перемогти? Відповідь обґрунтуйте.

3. Петрик зробив розклад числа $10^6=1000000$ на 7 попарно різних натуральних множників. Серед всіх таких розкладів знайдіть той, у якого найбільший з цих 7 множників є найменшим із можливих. Відповідь обґрунтуйте.

4. Петрик поставив на стандартну шахівницю 8×8 декілька королів так, що вони не атакують один одного і не можна більше додати жодного нового короля без порушення цього правила.

а) Яку найбільшу кількість королів він міг розмістити на дошці таким чином?

б) Яку найменшу кількість королів він міг розмістити на дошці таким чином? Відповіді обґрунтуйте

Зауваження. Шаховий король атакує усі клітини, які мають спільну сторону або вершину з клітиною, де він стоїть.

[9] Київський національний університет імені Тараса Шевченка

8 клас

1. Знайдіть усі натуральні числа n, які можна відняти від чисельника та знаменника дробу $\frac{1234}{6789}$, щоб отримати, можливо після скорочення, правильний дріб $\frac{a}{b}$, де a,b – одноцифрові числа.

2. Олексій пише на дошці всі цифри від 0 до 9, після чого Влада витирає одну з них. Далі він записує на дошці 10 дев'ятицифрових чисел, кожне з яких складається з усіх дев'яти цифр, записаних на дошці (деякі з цих чисел можуть збігатися). Виявилося, що сума цих 10 чисел є десятицифровим числом, усі цифри якого різні. Яку цифру могла витерти Влада?

3. Клітинки 1×1, що розташовані по периметру квадрата 3×3, заповнені числами 1, 2, …, 8 таким чином, що суми уздовж кожної з чотирьох сторін рівні. У лівій верхній кутовій клітині стоїть число 8, а правій верхній – число 6 (рисунок). Скільки існує різних заповнень числами решти комірок за таких умов?

8		**6**

4. Нехай BM – медіана трикутника ABC, в якому $AB > BC$. Точка P вибрана так, що $AB \parallel PC$ та $PM \perp BM$. Доведіть, що $\angle ABM = \angle MBP$.

5. Знайдіть цілі числа a, b, c, що задовольняють умові

$$\frac{a+1}{3} = \frac{b+2}{4} = \frac{5}{c+3}$$

9 клас

1. Перед олімпіадою з математики Дмитро почув діалог Оленки та Миколи про їхні дні народження.

О: «Число та номер місяця мого дня народження вдвічі менші за відповідні число та номер місяця дня народження Миколи.»

М: «Також число, коли народилась Оленка, і номер місяця мого народження є послідовними натуральними числами.»

О: «А сума всіх цих чотирьох чисел кратна 17.»

Чи зможе Дмитро знайти число та місяць народження Оленки?

2. Рома написав на дошці 100 разів кожне з чисел 2018, 2019, 2020. Позначимо через $S(n)$ суму цифр натурального числа n. За одну дію Рома може обрати довільне натуральне число k і замість будь-яких трьох чисел a,b,c, що написані на дошці, написати числа $2S(a+b)+k$, $2S(b+c)+k$ та $2S(c+a)+k$. Чи може Рома за декілька таких дій досягти того, щоб 299 чисел на дошці були рівними, а останнє відрізнялось від них на 1?

3. Нехай $a_n = 1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}$. Для якого найменшого натурального значення n добуток $P_n = a_2a_3a_4...a_n$ більший 100?

4. Задані натуральне число k та не обов'язково різні натуральні числа a_1, a_2, a_3, …, a_k. Виявилося, що при будь-якому розфарбуванні усіх натуральних чисел від 1 до 2021 в один із k кольорів так, щоб було рівно a_1 чисел першого кольору, a_2 чисел другого кольору, …, a_k чисел k-го кольору, завжди знайдеться таке число $x \in \{1,2,...,2021\}$, що усього чисел, які пофарбовані у колір, що співпадає з кольором числа x, є рівно x. Чому може дорівнювати число k за таких умов?

5. Два кола ω_1 та ω_2 перетинаються у точках A та B. Пряма, що проходить через точку B, перетинає ω_1 у точці C та ω_2 у точці D. Пряма AC вдруге перетинає коло ω_2 у точці F, а пряма AD вдруге перетинає коло ω_1 у точці E. Нехай точка O – центр кола, описаного навколо $\triangle AEF$. Доведіть, що $OB \perp CD$.

10 клас

1. Доведіть, що справджується нерівність:

$$\sin 1 + \sin 3 + \sin 5 + ... + \sin 2021 > \frac{2\sin^2 1011}{\sqrt{3}}.$$

Зауваження. Усі кути розглядаються в радіанах.

2. Клітинки 1×1, що розташовані по периметру квадрата 4×4, заповнені числами 1, 2, … , 12 таким чином, що суми уздовж кожної з чотирьох сторін рівні. У лівій верхній кутовій клітині стоїть число 1, у правій верхній – число 5, а у правій нижній стоїть число 11 (рисунок). Яке число за таких умов може бути розташованим в останній кутовій клітинці?

1			**5**
?			**11**

3. Кола ω_1 та ω_2 з центрами у точках O_1 та O_2 перетинаються в точках A та B. Побудовано таку точку C, що AO_2CO_1 – паралелограм. Через точку A проведено довільну пряму, що вдруге перетинає кола ω_1 та ω_2 в точках X та Y відповідно. Доведіть, що $CX = CY$.

4. Додатні числа a, b, c задовольняють умову $a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c = 6$. Доведіть, що справджується нерівність:

$$2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

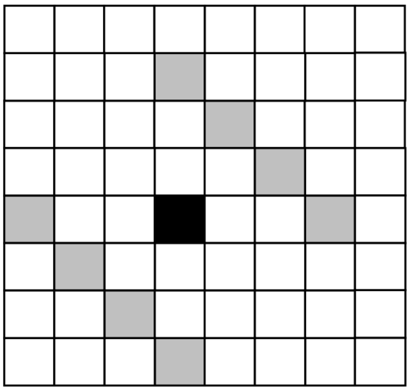
5. Натуральні числа n, m, k задовольняють такі умови: $[m,k] \vdots n$ та $[n,k] \vdots m$. Доведіть, що $n \cdot (m,k) = m \cdot (n,k)$/

Тут через $[a,b]$ та (a,b) відповідно позначене найменше спільне кратне (НСК) та найбільший спільний дільник (НСД) натуральних чисел a, b.
Запис $a \vdots b$ означає, що ціле число a ділиться націло на ціле число b.

11 клас

1. N козаків розподілилися на 3 групи, щоб обговорити з друзями різні питання. Козак Тарас перейшов від першої групи до другої, козак Андрій перейшов від другої до третьої, козак Остап – з третьої групи до першої. Виявилося, що середній зріст козаків у першій групі зменшився на 8 см, а у другій та третій групах – збільшився відповідно на 5 см та 8 см. Чому дорівнює N, якщо відомо, що в першій групі було 9 козаків?

2 Фігура *косий кінь*, що розташована на шахівниці 8×8 (чорне поле на рисунку), атакує усі сірі клітини. Яку найбільшу кількість таких косих коней можна виставити на шахівницю, щоб вони не атакували один одного?



3. Кола ω_1 та ω_2 з центрами у точках O_1 та O_2 перетинаються в точках A та B. Побудовано таку точку C, що AO_2CO_1 – паралелограм. Через точку A проведено довільну пряму, що вдруге перетинає кола ω_1 та ω_2 в точках X та Y відповідно. Доведіть, що $CX = CY$.

4. Для додатних чисел a,b,c, сума яких дорівнює $\frac{3}{2}$, знайдіть найменше можливе значення виразу

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + \frac{1}{abc}.$$

5. Розв'яжіть в цілих числах рівняння $x^2 = y^3 + 7$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Математичні олімпіади і турніри в Україні

1. Басанько А.М. За лаштунками підручника з математики : [збірник розвиваючих задач для учнів 5 – 7 класів] / А.М. Басанько, А.О. Романенко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. – 213 с.
2. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 1]. – Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 5(65). – 128 с.
3. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 2]. – Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 6(66). – 141 с.
4. Готуємось до олімпіади з математики / упорядн. А.Б. Веліховська, О.В. Гримайло. // Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2007. –Вип. 2 (50) – 160 с.
5. Змагання юних математиків України. 2003 рік / В.М. Лейфура. – Х. : Основа, 2004. – 80 с.
6. Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. : [збірник задач] / В.А. Вишенський, М. В. Карташов. – К. : Либідь, 1993. – 144 с.
7. Київські міські математичні олімпіади 2003–2011 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2011. – 192 с.
8. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад. 8-11 класи / Т. В. Коваль. – Тернопіль : Мандрівець, 2004. – 80 с.
9. Лось В.М. Математика : навчаємо міркувати. Розв’язування нестандартних задач / В.М. Лось, В.П. Тихієнко. – К. : Кондор, 2005 – 312 с.
10. Математичні олімпіади школярів України. 1991-2000 / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман. – К. : Техніка, 2003. – 541 с.
11. Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000 рр. / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. – Київ: Техніка, 2003. — 541 с.
12. Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр. / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. – Львів: Каменяр, 2008. — 348 с.
13. Математичні олімпіадні змагання школярів : 2006–2007 рр. / А.В. Анікушин, А.Р. Арман та ін. – К.: Літера, 2008 – 224 с.
14. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007–2008 та 2008–2009 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). – Л.: Каменяр, 2010. – 549 с.
15. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2009–2010 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2011. – 320 с.
16. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2010–2011 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2013. – 368 с.

17. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2011–2012 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2013. – 416 с.
18. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2012–2013 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2014. – 401 с.
19. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2013–2014 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2015. – 465 с.
20. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2014–2015 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2016. – 464 с.
21. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2015–2016 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2017. – 464 с.
22. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2016–2017 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2018. – 464 с.
23. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2017–2018 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2019. – 464 с.
24. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2018–2019 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2020. – 464 с.
25. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч : [навчальний посібник] – К. : А.С.К., 2005. – 344 с.
26. Сборник задач киевских математических олимпиад / В.А. Вышенский, Н.В. Карташев, В.И. Михайловский, М.И. Ядренко. – К. : Вища школа, 1984. – 240 с.
27. Українські математичні олімпіади : [довідник] / В.А. Вишенський, О.Г. Ганюшкін та ін. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с.
28. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики : [посібник для ЗНЗ]. – Чернівці, 2003. – 360 с.
29. Федак І.В. Олімпіади з математики: 1987–2016 роки. Завдання, відповіді. – Х. : Видавнича група «Основа», 2016. – 239 с.
30. Ясінський В.А. Олімпіадні задачі [випуск 1: навчальний посібник]. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 40 с.
31. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язання. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.
32. Ясінський В.А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад. Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2006. – 128 с.

II і III тури Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики в Донецькій області

1. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / [Р. И. Довбыш, Л. Л. Потемкина, Н. Л. Трегуб и др.] – Донецк: ООО ПКФ «БАО», **2005**. – 336 с.

2. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2007 / Б.Б. Беседін, Г.М. Бірюкова, Г.О. Ганзера, В.М. Кадубовська, О.А. Кадубовський, Л.Г. Плесканьова, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2008**. – 40 с.
3. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2008 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, Л.Г. Плесканьова, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 2, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2009**. – 44 с.
4. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2009 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, Г.О. Ганзера, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 5, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2010**. – 44 с.
5. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2010 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 8, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2011**. – 80 с.
6. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2011 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко, М.М. Рубан // Випуск 10, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2012**. – 84 с.
7. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2012 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, М.М. Рубан, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 11, СЕРІЯ: Викладачі ДДП – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2013**. – 64 с.
8. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв’язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2013 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. – Слов’янськ : видавничий центр «Маторін», **2014**. – 60 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 12).
9. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв’язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2014 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. – Слов’янськ : видавничий центр «Маторін», **2015**. – 64 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 13).
10. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв’язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2015 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін,

О.В. Чуйко, С.І. Воробйова. – Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», **2016**. – 100 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 14).
11. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2016 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, О.В. Чуйко. – Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», **2017**. – 100 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 15).
12. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2018 : навчальний посібник / О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін, В. С. Сьомкін. – Слов'янськ : вид. центр «Маторін», **2019**. – 100 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 21).
13. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2019 : навчальний посібник / О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін. – Слов'янськ : вид. центр «Маторін», **2020**. – 88 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 24).

Серія «Шкільні математичні гуртки»

1. Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. – М.: МЦНМО, 2011. – 104 с.
2. Блинков А.Д., Блинков Ю.А. Геометрические задачи на построение. – 2-е изд., стереот. – М.: МЦНМО, 2012. – 152 с.
3. Мерзон Г.А., Ященко И.В. Длина, площадь, объём. – М.: МЦНМО, 2012. – 48 с.
4. Блинков А.Д. Классические средние в арифметике и в геометрии. – 2-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2013. – 168 с.
5. Заславский А.А, Френкин Б.Р., Шаповалов А.В. Задачи о турнирах. – М.: МЦНМО, 2013. – 104 с.
6. Медников Л.Э. Чётность. – М.: МЦНМО, 2013. – 60 с.
7. Сгибнев А.И. Делимость и простые числа. – 2-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2013. – 112 с.
8. Шаповалов А. В. Как построить пример? – М.: МЦНМО, 2013. – 80 с.
9. Гуровиц В.М., Ховрина В.В. Графы. – 4-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2014. – 32 с.
10. Раскина И.В, Шноль Д.Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014. – 120 с.
11. Чулков П.В. Арифметические задачи. – изд. 4-е, стер. – М.: МЦНМО, 2014. – 64 с.
12. Блинков А.Д, Гуровиц В.М. Непрерывность. – М.: МЦНМО, 2015. – 160 с.

13. Шаповалов А.В. Математические конструкции: от хижин к дворцам. – М.: МЦНМО, 2015. – 176 с.
14. Блинков А.Д. Геометрия в негеометрических задачах. Электронное издание. – М.: МЦНМО, 2016. – 155 с.
15. Раскина И.В. Логика для всех: от пиратов до мудрецов. – М.: МЦНМО, 2016. – 208 с.
16. Блинков Ю.А., Горская Е.С. Вписанные углы – М.: МЦНМО, 2017. – 168 с.
17. Кноп К.А. Азы теории чисел. – М.: МЦНМО, 2017. – 80 с.
18. Блинков А.Д. Последовательности. – М.: МЦНМО, 2018. –160 с.
19. Сгибнев А.И. Геометрия на подвижных чертежах. – М.: МЦНМО, 2019. –184 с.
20. Лук'янова С. Розв'язування текстових задач арифметичними способами : 5–6 кл. – К. : Вид. дім «Шкіл. світ» : Вид. Л. Галіцина, 2006. – 128 с. – (Б-ка «Шкіл. світу»). – Бібліогр.: с. 127.
21. Методические рекомендации по решению задач повышенной трудности в курсе математики IV-V классов : для физико-математичес-ких специальностей педагогических институтов / [сост. : Б. А. Викол, Л. В. Викол., Н. И. Труш]. – Славянск : СГПИ, 1987. – 50 с.
22. Методические рекомендации по решению задач повышенной трудности в курсе математики VI-VIII классов (арифметика и алгебра) : для физико-математических специальностей педагогических институтов / [сост. : Б. А. Викол, Л. В. Викол., Н. И. Труш]. – Славянск : СГПИ, 1987. – 68 с.
23. Методические рекомендации по решению задач повышенной трудности в курсе математики VI-VIII классов (геометрия) : для физико-математических специальностей педагогических институтов / [сост. : Б. А. Викол, Е. В. Величко, Л. В. Викол., Н. И. Труш]. – Славянск : СГПИ, 1987. – 50 с.

Internet ресурси

1. Київські олімпіади з математики.
[Електронний ресурс]. – Режим доступу:
http://matholymp.org.ua/
2. Сайт міжнародних олімпіад з математики
[Електронний ресурс]. – Режим доступу:
http://www.imo-official.org/
3. Українська сторінка міжнародного конкурсу «Кенгуру».
[Електронний ресурс]. – Режим доступу:
http://www.kangaroo.com.ua/index.php

Підписано до друку 30.08.2021 р.
Формат 60×84 1/16. Ум. др. арк. 5,875
Тираж 100 прим. Зам. № 1221.
Підприємець Маторін Б.І.

84116, м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.
Тел./факс +38 06262 3-20-99. Email:
matorinb@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №3141, видане Державним комітетом телебачення та радіомовлення України від 24.03.2008 р.
