Міністерство освіти і науки України
Слов'янський державний педагогічний університет
Кафедра алгебри

Методичний посібник
до спецкурсу з математики

Симетрична група

Слов'янськ, 2011

Методичний посібник до спецкурсу з математики "Симетрична група"для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / В.Є. Величко, З.Д. Пащенко. - Слов'янськ: СДПУ, 2011 - 44с.

Автори : *В.Є. Величко, кандидат фізико-математичних наук,*
З.Д. Пащенко, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рецензенти : *В.С. Сікора, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри та інформатики факультету прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича,*

О.А. Кадубовський, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри ГМВМ Слов'янського державного педагогічного університету

Вивчаючи розділ загальної алгебри "Групи", для прикладу нечислових груп, з елементами яких неважко виконувати найпростіші операції, є симетрична група. На її прикладі можна спостерігати не тільки те що стосується безпосередньо груп, а й наприклад, теорію представлення.

Для розробки даного матеріалу взято за основу книгу Л.А.Калужніна та В.І.Сущанського "Преобразования и перестановки".— Київ, 1985.

Призначається для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів, а також може використовуватися вчителями старших класів для самостійного опрацювання даної теми та проведення факультативних занять тощо.

Рекомендовано до друку на засіданні Вченої ради СДПУ, протокол №9 від 19.05.2011

1 Поняття симетричної групи

Нехай M – довільна множина, φ та ψ – деякі перетворення цієї множини. *Добутком* (або *композицією*) перетворень φ та ψ є таке перетворення $\omega = \varphi \circ \psi$ множини M, яке на кожний елемент $a \in M$ діє за правилом:

$$(a)\omega = ((a)\varphi)\psi, \tag{1}$$

тобто щоб знайти образ довільного елемента $a \in M$ під дією перетворення ω, треба спочатку знайти образ b елемента a під дією перетворення φ, а потім – образ c елемента b під дією перетворення ψ. Шуканий елемент c і є образом елемента a під дією перетворення ω.

Як приклад табличного запису перетворень деякої множини розглянемо перетворення φ, ψ та їх добуток

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} \\ 1 & 1 & \mathrm{a} & \mathrm{a} & \mathrm{d} \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} \\ \mathrm{a} & 1 & \mathrm{b} & 1 & \mathrm{d} \end{pmatrix}$$

$$\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} \\ 1 & 1 & \mathrm{a} & \mathrm{a} & \mathrm{d} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} \\ \mathrm{a} & 1 & \mathrm{b} & 1 & \mathrm{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} \\ \mathrm{a} & \mathrm{a} & 1 & 1 & \mathrm{d} \end{pmatrix}$$

Зауваження 1.1 *Ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні перетворення, замкнені відносно добутку перетворень, тобто добуток ін'єкцій є ін'єкція, добуток сюр'єкцій – сюр'єкція та добуток бієкцій – бієкція.*

Дійсно, нехай перетворення φ та ψ є ін'єкціями множини M в себе та $\omega = \varphi \circ \psi$. Тоді для кожної пари елементів $a, b \in M, a \neq b$, будемо мати: $(a)\varphi \neq (b)\varphi, (a)\psi \neq (b)\psi$. Подіємо перетворенням ω на елементи a та b. За означенням добутку перетворень маємо :

$$(a)\omega = ((a)\varphi)\psi = (a_1)\psi,\ (b)\omega = ((b)\varphi) = (b_1)\psi,$$

де $a_1 = (a)\varphi, b_1 = (b)\varphi$. Оскільки φ – ін'єкція , то $a_1 \neq b_1$. В свою чергу, якщо ψ – ін'єкція, маємо: $(a_1)\psi \neq (b_1)\psi$. Тобто для кожної пари $a, b \in M, a \neq b$, маємо: $(a)\omega \neq (b)\omega$ звідки ω є ін'єкція.

Нехай тепер перетворення φ і ψ сюр'єктивні. Переконаємось, що для кожного елемента $a \in M$ знайдеться такий елемент $b \in M$, для якого $(b)\omega = a$. Оскільки ψ – сюр'єкція, то знайдеться такий елемент $c \in M$, що $(c)\psi = a$, а із сюр'єктивності φ випливає, що існує такий елемент $b \in M$, для якого $(b)\varphi = c$. Тобто

$$(b)\omega = ((b)\varphi)\psi = (c)\psi = a.$$

Звідси перетворення ω – сюр'єкція. Оскільки сюр'єктивні та ін'єктивні перетворення є замкненими відносно добутку, то замкненим відносно добутку будуть і бієктивні перетворення.

Зауваження 1.2 *Добуток перетворень довільної множини M – асоціативний. Тобто для будь-яких перетворень α, β, γ множини M виконується рівність*

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma). \tag{2}$$

Візьмемо довільний елемент $a \in M$ і нехай $(a)\alpha = b,\ (b)\beta = c,\ (c)\gamma = d$. Тоді з означення (1) маємо:

$$((a)(\alpha \circ \beta))\gamma = (((a)\alpha)\beta)\gamma = ((b)\beta)\gamma = (c)\gamma = d,$$

З іншого боку

$$((a)\alpha)(\beta \circ \gamma) = (b)(\beta \circ \gamma) = ((b)\beta)\gamma = (c)\gamma = d.$$

Таким чином добутки $(\alpha\circ\beta)\circ\gamma$ і $\alpha\circ(\beta\circ\gamma)$ однаково діють на довільний елемент $a \in M$. Тобто виконується рівність (2).

Зауваження 1.3 *Тотожне перетворення ε є нейтральним елементом множини перетворень, тобто для кожного перетворення φ множини M маємо:*

$$\varphi \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \varphi = \varphi. \tag{3}$$

Дійсно, поклавши $(a)\varphi = b$, за означенням добутку (1) для кожного елементу $a \in M$ будемо мати :

$$(a)(\varphi \circ \varepsilon) = ((a)\varphi)\varepsilon = (b)\varepsilon = b,$$

$$(a)(\varepsilon \circ \varphi) = ((a)\varepsilon)\varphi = (a)\varphi = b.$$

Це й означає справедливість рівності (3).

Зауваження 1.4 *Для перетворення скінченої множини M обернене перетворення існує тоді і лише тоді, коли воно є перестановкою.*

Нехай дана перестановка

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

тоді обернена до неї перестановка, як випливає із правила добутку перестворень, наступна:

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб отримати стандартний вигляд φ^{-1} стовбці табличного запису необхідно переставити так, щоб числа верхнього ряду були в порядку зростання. Отримана перестановка і буде оберненою до перестановки φ.

Зауваження 1.5 *Добуток на множині всіх перетворень множини M не комутативний.*

Задача 1.1 *Сукупність S_n усіх перестановок на множині $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ з операцією множення утворюють групу (симетричну групу перестановок) .*

Виконання всіх необхідних умов, для того щоб множина з операцією була групою, випливає із зауважень (1.1-1.4).

Задача 1.2 *Показати, що множина $\mathcal{G} = \{\varepsilon, (12)\circ(34), (13)\circ(24), (14)\circ(23)\}$ утворює групу відносно операції множення.*

Запишемо цю групу за допомогою таблиць. $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a = (12)\circ(34) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $b = (13)\circ(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $c = (14)\circ(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Доведемо виконання необхідних умов для того, щоб множина з заданою на ній операцією була групою.

1. Побудуємо таблицю Келі.

$\circ$	ε	a	b	c
ε	ε	a	b	c
a	a	ε	c	b
b	b	c	ε	a
c	c	b	a	ε

Множина $\mathcal{G}$ відносно операції множення замкнена.

2. Згідно Зауваження 1.2 на множині $\mathcal{G}$ операція множення асоціативна.

3. Існує нейтральний елемент $\varepsilon \in \mathcal{G}$.

4. Для довільного елемента множини $\mathcal{G}$ існує обернений. Оскільки в кожному рядку таблиці Келі присутній нейтральний елемент, то, згідно з означенням оберненого елемента, для кожного елемента множини $\mathcal{G}$ існує обернений ($a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$, $c^{-1} = c$).

Виконання усіх необхідних умов дає змогу стверджувати що $(\mathcal{G}, \circ)$ – група. Більш того, дана група є комутативною.

Задача 1.3 *Чи утворює множина $\mathcal{T}_X$ всіх перетворень на множині X із операцією множення групу?*

Із зауважень (1.1-1.3) можемо отримати, що $\mathcal{T}(X)$ є моноїдом, тобто напівгрупою з одиницею. Виконання ж останньої умови неможливе, бо серед елементів $\mathcal{T}_X$ існує, наприклад, елемент

$$\delta_{i_r} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r & \dots & i_n \\ i_r & i_r & \dots & i_r & \dots & i_r \end{pmatrix}$$

до якого обернена відповідність взагалі не є відображенням.

Задача 1.4 *Довести, що при довільному натуральному $n \geq 3$ симетрична група S_n некомутативна.*

Побудуємо таблицю Келі для групи S_2:

$$\begin{array}{c|cc} \circ & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Оскільки ця таблиця симетрична, то S_2 є комутативною. Візьмемо два елементи із S_3 і перемножимо їх. В результаті маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки закон комутативності не виконується, то S_3 не є комутативною. При $n > 3$ група S_n завжди містить в собі такі елементи групи S_3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & \text{n} \\ i_1 & i_2 & i_3 & 4 & 5 & \dots & \text{n} \end{pmatrix}$, які на підмножині $\{1, 2, 3\}$ діють так, як елементи групи S_3. Отже вона є некомутативною.

Задача 1.5 *Довести, що якщо добуток $\varphi \circ \psi$ перетворень φ, ψ скінченої множини – перестановка, то φ і ψ – перестановки.*

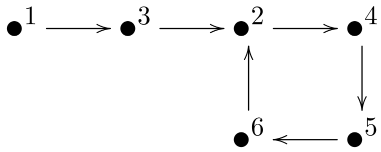
2 Графи перетворень. Циклічна форма запису перестановок

Кожне перетворення $\varphi : X \to X$ може однозначно визначатися за допомогою множини точок і стрілок, де точки – це елементи заданої множини $X = \{a, b, \ldots\}$, а стрілка із точки a в точку b має місце тоді й тільки тоді, коли $a\varphi = b$. Дана множина точок і стрілок називають графом перетворення φ.

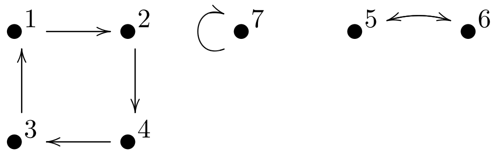
Довільний граф визначає певне перетворення, якщо із кожної точки виходить одна стрілка. Граф ін'єктивного перетворення не має точок, в які входило би більше однієї стрілки; граф сюр'єктивного перетворення не має точок в які не входить жодної стрілки.

Побудуємо графи деяких перетворень.

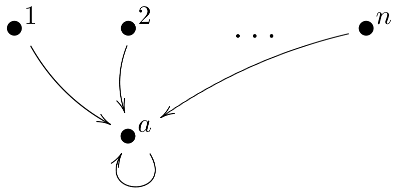
$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$



$$\delta_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a & a & \ldots & a \end{pmatrix}$$



Нерухомими точками перетворення φ називають такі елементи $a, a \in M$, що виконується рівність $(a)\varphi = a$, а *рухомими* такі, що задовольняють умові $(a)\varphi \neq a$. Кількість рухомих точок перетворення називають *степенем* цього перетворення. Графи нерухомих точок називають петлею.

Нехай φ – деяке перетворення множини M, a – довільний елемент із M. Множину елементів із M, що утворює послідовність

$$a_0 = a,\ (a)\varphi = a_1,\ (a_1)\varphi = a_2,\ \ldots,\ (a_n)\varphi = a_{n+1},\ \ldots \qquad (4)$$

називають *орбітою* елемента a для перетворення φ і позначають $O(a, \varphi)$. Кількість різних елементів орбіти називають довжиною орбіти.

Орбіту $O(a, \varphi)$ називають *циклічною,* якщо вона співпадає з орбітою довільного із своїх елементів:

$$\forall a_i \in O(a, \varphi) \Rightarrow O(a_i, \varphi) = O(a, \varphi).$$

Орбіта нерухомої точки a є циклічною, тому її довжина дорівнює 1.

Детальніше розглянемо будову орбіт, для яких M – скінчена множина, $O(a,\varphi) = M$, тобто кількість елементів множини M дорівнює довжині орбіти $O(a,\varphi)$ ($\mid M \mid = m$). Очевидно, що в цьому випадку елементи в послідовності (4), починаючи з деякого місця, будуть повторюватися. Нехай k – найменше число, таке що

$$(a_k)\varphi = a_l, l \leq k \qquad (*)$$

Зрозуміло, що елементи $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ також зустрічаються серед елементів $a_0, a_1, \ldots, a_k$, а саме $a_{k+1} = (a_k)\varphi = a_e$, $a_{k+2} = (a_{k+1})\varphi = (a_e)\varphi = a_{e+1}, \ldots$. Це відбувається за рахунок того, що φ – відображення: для кожного елементу області визначення існує єдиний образ. Звідси $k = m-1$ і легко зрозуміти, що граф перетворення φ буде такий, як на рис.1а, 1б або 1в.

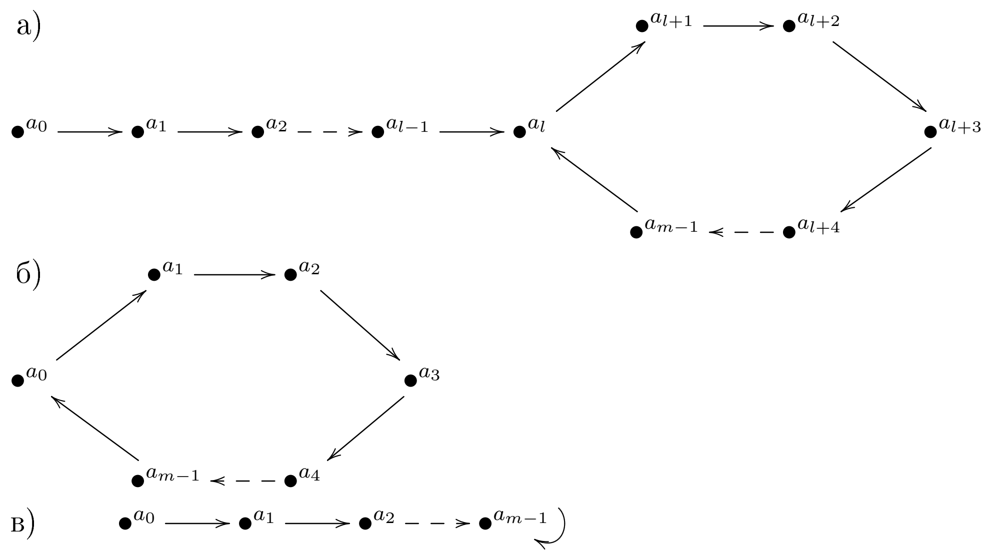


Рис. 1: Орбіти

Якщо $l \neq 0$, то перетворення φ не є перестановкою, тому що в точці a_l закінчуються дві стрілки, тобто відображення не бієктивне. При $l = 0$ перетворення має граф, який називається *циклом* (рис.1б), і в цьому випадку воно буде перестановкою. Ця перестановка діє на елементи із M так:

$$(a_0)\varphi = a_1,\ (a_1)\varphi = a_2,\ \ldots,\ (a_{m-2})\varphi = a_{m-1},\ (a_{m-1})\varphi = a_0.$$

Таку перестановку називають *циклічною* або просто *циклом* , та позначають

$$\varphi = (a_0\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_{m-1}).$$

Орбіти довільних елементів такого циклу співпадають і називаються циклічними орбітами.

Число m називають *довжиною циклу* . Очевидно, що довжина орбіти $O(a_i, \varphi)$, $i = \overline{0, m-1}$ також дорівнює m. Цикли довжини 2 називають *транспозиціями.*

Нехай $\varphi : M \to M$, $a \in M$, $O(a, \varphi) \neq M$. Тоді графи рис.1 не повністю характеризують перетворення φ і треба розглядати орбіти і графи інших елементів, які не ввійшли в $O(a, \varphi)$. Різні орбіти для заданого перетворення можуть мати спільні елементи. Зауважимо, що не можуть мати спільних вершин графи різних циклічних орбіт перетворення.

Від супротивного. Нехай $O_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $O_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ – різні циклічні орбіти перетворення φ. Припустимо, що a_t – останній в порядку зростання номерів елемент орбіти O_1, серед тих, що є спільними з елементами орбіти O_2 і $a_t = b_s$. Тоді $(a_t)\varphi = a_{t+1}$, $(a_t)\varphi = (b_s)\varphi = b_{s+1}$. Оскільки $t + 1 > t$, то $a_{t+1} \neq b_{s+1}$, що суперечить означенню відображення: довільному елементу $a \in M$ відповідає єдиний $(a)\varphi \in M$.

Оскільки, для перестановки графи орбіт можуть бути тільки циклічними (рис. 1б), то враховуючи попереднє зауваження, маємо: граф перестановки – це об'єднання незв'язних циклів.

Очевидно і навпаки, що довільне об'єднання незв'язних циклів визначає перестановку, оскільки область визначення при цьому скінчена множина, а графи задовольняють умовам ін'єктивності і сюр'єктивності.

Задача 2.1 *Перетворення φ множини M буде перестановкою тоді і лише тоді, коли сума довжин різних її орбіт дорівнює $\mid M \mid$. Довести це.*

Оскільки кожен елемент $a \in M$ входить в склад орбіти $O(a, \varphi)$, то, враховуючи попередні висновки про довжину орбіт, можна вважати дане твердження задачі доведеним.

Задача 2.2 *Знайти найбільше та найменше значення сум довжин різних орбіт для перетворення множини із n елементів.*

Оскільки орбіти множини містять у собі всі елементи множини, то найменше значення сум довжин різних орбіт дорівнює кількості елементів множини, тобто n. Такі перетворення є перестановками.

Якщо ж припустити, що існують орбіти, графи яких зображені на малюнку 1а, то сума довжин різних орбіт дорівнює $1+2+3+\ldots+n = \frac{n^2+n}{2}$

Задача 2.3 *Вказати правило для знаходження добутку перетворень, кожне з яких задано своїм графом, не будуючи таблиці перетворень.*

На графі добутку $\varphi \circ \psi$ множини M точки, якими відображені елементи $a, b \in M$, сполучаються стрілкою в напрямку від a до b тоді і лише тоді, коли існує точка c, що на графі перетворення φ точки a, c сполучаються стрілкою в напрямку від a до c, а на графі перетворення ψ точки c, b сполучаються стрілкою в напрямку від c до b.

Задача 2.4 *Описати загальний вид графа довільного перетворення.*

Загальний вид графа довільного перетворення може складатися з декількох незв'язних графів наступної структури. Завжди існує циклічний граф певної довжини $s+k+1$, до кожного вузла якого можуть підходити декілька деревовидних графів (мал. 2).

Наявність циклічної частини графа довільної орбіти $O(a, \varphi)$ зумовлюється тим, що в будь-якому перетворенні скінченої множини існує елемент a_k, що елемент $(a_k)\varphi$ повинен дорівнювати a_s, $s \leq k$. Мінімально це циклічна частина може складатися з петлі.

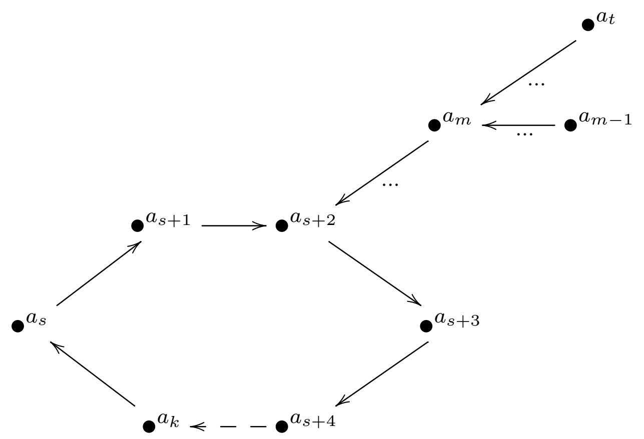


Рис. 2: Малюнок до задачі 2.4

Слід зауважити, що не вся множина образів належить до циклічної частини графу, такі елементи будуть вузлами деревовидних графів, які примикають до вузлів циклічного графу. Довжина та розгалуженість деревовидної частини графу може дорівнювати одиниці, тобто складатися з одного елементу, який переходить сам у себе. Кількість деревовидних частин може дорівнювати нулеві, тобто граф складається тільки із циклічної частини в разі перестановки.

Задача 2.5 *Довести, що для перестановки різні орбіти окреслюють не зв'язні частини її графа.*

Задача 2.6 *Кожна перестановка, граф якої зв'язний – циклічна.*

Задача 2.7 *Дослідити, як зміниться добуток незалежних циклів при множенні їх на деяку транспозицію.*

Якщо елементи транспозиції належать до одного із взаємно-простих циклів, то після множення структура розкладу перестановки не зміниться. Якщо елементи транспозиції належать до різних циклів то ці цикли будуть утворювати один цикл. Всі інші цикли залишаться без змін.

3 Циклічна форма запису перестановок

Дві перестановки на множині M називають *взаємно простими*, якщо їх множини рухомих точок не мають спільних елементів.

Задача 3.1 *Довести, що добуток взаємно простих перестановок не залежить від порядку множників.*

Дійсно, нехай φ та ψ – взаємно прості перестановки і a – довільний елемент множини M. Якщо a – рухома точка для перестановки φ, то припустимо, що $(a)\varphi = b$; елементи a, b – нерухомі точки для ψ, бо $(a)\varphi \neq a$ і $(b)\varphi \neq b$. З цього маємо:

$$(a)(\varphi \circ \psi) = ((a)\varphi)\psi = (b)\psi = b,$$

$$(a)(\psi \circ \varphi) = ((a)\psi)\varphi = (a)\varphi = b,$$

тобто в цьому випадку $(a)(\varphi \circ \psi) = (a)(\psi \circ \varphi)$.

Якщо a – нерухома точка перестановки φ, то припустимо, що $(a)\psi = c$. Якщо a є нерухомою точкою і для перестановки ψ, то $a = c$ і тому: $(a)(\varphi \circ \psi) = (a)(\psi \circ \varphi) = a$. Якщо a – рухома точка перестановки ψ, то $(a)\psi \neq a$, $(c)\psi \neq c$, а значить c рухома точка перестановки ψ і нерухома для φ ($(c)\varphi = c$). Тому

$$(a)(\varphi \circ \psi) = ((a)\varphi)\psi = (a)\psi = c,$$

$$(a)(\psi \circ \varphi) = ((a)\psi)\varphi = (c)\varphi = c,$$

Отже і в цьому випадку перестановки $\varphi \circ \psi$ та $\psi \circ \varphi$ діють на елемент $a \in M$ однаково, а це і означає що

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi.$$

Нехай φ – відображення множини X, $X \subset Y$. Відображення ψ на множині Y називають *розширенням* відображення φ на множину Y, якщо

$$(a)\psi = (a)\varphi \ \forall a \in X \text{ і } (a)\psi = a \ \forall a \in Y \setminus X.$$

Кожну перестановку $\varphi \in S_n$ можна вважати перестановкою із S_m, $m > n$, розглядаючи її як розширення на множину S_m. Тоді довільна перестановка φ на множині M, граф якої складається з об'єднання одного циклу $(a_0\ a_1\ \ldots a_{m-1})$ та одноелементних циклів може бути записана як цикл

$$\varphi = (a_0\ a_1\ \ldots\ a_{m-1})$$

і однозначно сприйматись як на множині M, так і на довільній множині $T \supset M$.

Тоді довільна підстановка, граф якої складається з двох циклів може бути записана як добуток двох взаємно простих циклів φ_1 і φ_2, причому, за результатами Задачі 3.1 $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 = \varphi_2 \cdot \varphi_1$. Цей результат розповсюджується і на випадок декількох незв'язних циклів, і тоді, враховуючи, що граф підстановки - це об'єднання незв'язних циклів, маємо

Зауваження 3.1 *Довільна підстановка φ розкладається в добуток попарно взаємно простих циклів $\varphi = \varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_s$. Причому цей розклад однозначний з точністю до порядку співмножників.*

Говорять, що перестановка має вказаний тип $< n_1, n_2, \ldots, n_k >$ якщо вона розкладається в добуток взаємно простих циклів довжин $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Задача 3.2 *Скільки існує перестановок на множині із m елементів, які мають заданий тип $< n_1, n_2, \ldots, n_k >$ де $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = m)$.*

Вказівка.

Із усіх існуючих перестановок (а їх $m!$), треба відокремити ті, які мають цикли довжини $n_1, n_2, \ldots, n_k$, тобто загальна кількість перестановок на множині із m елементів, які мають заданий тип $< n_1, n_2, \ldots, n_k >$ дорівнює $\frac{A_m^{n_1}}{n_1} \cdot \frac{A_{m-n_1}^{n_2}}{n_2} \cdot \frac{A_{m-n_1-n_2}^{n_3}}{n_3} \cdot \ldots \frac{A_{n_k}^{n_k}}{n_k} = \frac{m!}{(m-n_1)!} \cdot \frac{(m-n_1)!}{(m-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{n_k!}{1!} = \frac{m!}{n_1 \circ n_2 \circ \ldots n_k}$.

Задача 3.3 *Нехай $< k_1, k_2, \ldots, k_s >$ – тип перестановки $\varphi \in S_n$. Різниця $n - s$ називається декрементом цієї перестановки. Довести, що парність перестановки співпадає з парністю її декременту.*

Задача 3.4 *Нехай $u, v, w, z, t \in S_8$, $u = (123)(4568)$, $v = (34)(52618)$, $w = (134)(2357)(1846)$, $z = (82143)(12)(15)$, $t = (874312)(56)$. Знайти $u^3, v^2u, wzt, w^4z^2, tzw$.*

Задача 3.5 *Представити у вигляді добутку незалежних циклів наступні перестановки*

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 12 & 8 & 11 & 6 & 7 & 5 & 3 & 2 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.6 *Нехай*

$$u = (\alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1k_1})(\alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2k_2})\ldots(\alpha_{l1}\alpha_{l2}\ldots\alpha_{lk_l}).$$

Довести, що

$$u^{-1} = (\alpha_{lk_l}\ldots\alpha_{l2}\alpha_{l1})\ldots(\alpha_{2k_2}\ldots\alpha_{22}\alpha_{21})(\alpha_{1k_1}\ldots\alpha_{12}\alpha_{11}).$$

Задача 3.7 *Нехай* $u = (123)(456)(789)$, $v = (147)(258)(369)$, $w = (456)(789)$. *Довести, що* u *комутує з* v *і* w, *та що* u *можна представити у вигляді добутку, множниками якого є* v *і* w.

4 Порядок перестановки

Для кожного перетворення φ можна розглянути його степені; n-м степенем перетворення φ називають добуток

$$\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n},$$

де n-натуральне число. Із означення степеню перетворення випливають наступні властивості :

$$\text{а)} \quad \varphi^n \circ \varphi^m = \varphi^{n+m} \qquad \text{б)} \quad (\varphi^n)^m = \varphi^{nm}.$$

За ради визначення вважають, що для довільного φ : $\quad \varphi^0 = \varepsilon$

Для перестановок поняття степеня можна узагальнити й на випадок цілих від'ємних чисел, припустивши, що

$$\varphi^{-n} = \underbrace{\varphi^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \ldots \circ \varphi^{-1}}_{n} = (\varphi^{-1})^n = (\varphi^n)^{-1}$$

Рівності а) і б) в цьому випадку будуть справедливі для довільних цілих показників.

Нехай для деяких натуральних чисел k, l ($k < l$) виконується рівність $\varphi^k = \varphi^l$. Тоді

$$(\varphi^k)^{-1} = \varphi^{-k}, \quad (\varphi^k)^{-1} \circ \varphi^k = (\varphi^k)^{-1} \circ \varphi^l = \varphi^{l-k} = \varepsilon.$$

Тобто для кожної перестановки $\varphi \in S(M)$, де M - скінчена множина, знайдеться принаймні одне натуральне число $s = l - k$, таке що $\varphi^s = \varepsilon$. Найменше із таких натуральних чисел називають *порядком* перестановки φ.

Степінь циклічної перестановки $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ знаходять за допомогою формули

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^k = (a_k a_{k+1} \ldots a_n a_1 \ldots a_{k-1}). \tag{5}$$

Таким чином для кожного циклу $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ справджується рівність

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^n = \varepsilon.$$

Задача 4.1 *Довести, що степінь перестановки дорівнює добутку степенів взаємно простих циклів, на які вона розкладається.*

Нехай $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_s$ – розклад перетворення в добуток взаємно простих циклів. Для яких завгодно номерів i, j добуток перестановок φ_i, φ_j не залежить від порядку множників (див. зад.2.1). Користуючись цим, n-тий степінь перестановки φ для кожного цілого n можна записати таким чином:

$$\varphi^n = (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_s) \circ \ldots \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_s) =$$

$$= \underbrace{(\varphi_1 \circ \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_1)}_{n} \circ \underbrace{(\varphi_2 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_2)}_{n} \circ \ldots \circ \underbrace{(\varphi_s \circ \varphi_s \circ \ldots \circ \varphi_s)}_{n} =$$

$$= \varphi_1^n \circ \varphi_2^n \circ \ldots \circ \varphi_s^n. \tag{6}$$

Задача 4.2 *Добуток декількох взаємно простих перестановок може дорівнювати тотожній перестановці лише тоді, коли кожна з перестановок одинична.*

Це випливає з того, що добуток φ взаємно простих перестановок $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ діє на кожну свою рухому точку так, як діє на неї та перестановка φ_i, для якої ця точка є рухомою. Тому із рівності (6) отримуємо, що $\varphi^n = \varepsilon$ тоді і тільки тоді, коли одночасно

$$\varphi_1^n = \varepsilon, \varphi_2^n = \varepsilon, \ldots, \varphi_s^n = \varepsilon. \tag{7}$$

Зауваження 4.1 *Якщо перестановки $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ є циклами довжини*
$k_1, k_2, \ldots, k_s$ відповідно, тобто мають порядки $k_1, k_2, \ldots, k_s$, то найменше число n, для якого одночасно виконуються усі рівності (7), дорівнює найменшому спільному кратному чисел $k_1, k_2, \ldots, k_s$. З цього випливає, що порядок перестановки φ, яка розкладається в добуток циклів довжини $k_1, k_2, \ldots, k_s$ є найменше спільне кратне чисел $k_1, k_2, \ldots, k_s$:

$$\text{пор.}\varphi = \text{НСК}(\text{пор.}\varphi_1, \text{пор.}\varphi_2, \ldots, \text{пор.}\varphi_s).$$

Задача 4.3 *Якщо добуток перестановок φ та ψ не залежить від порядку запису множників, то порядок $\varphi \circ \psi$ є дільник найменшого спільного кратного порядків φ та ψ. В загальному випадку неможна стверджувати, що пор.$(\varphi \circ \psi) =$ НСК(пор.φ, пор.ψ). Навести приклад.*

Якщо добуток перестановок не залежить від порядку запису множників, то існує тільки два випадки:

а) перестановки φ та ψ є взаємно оберненими, тобто $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \varepsilon$, і в цьому випадку порядок добутку є дільником найменшого спільного кратного пор. φ та пор.ψ.

б) перестановки φ та ψ є взаємно простими, тобто множини рухомих точок перестановок не перетинаються. В цьому випадку порядок добутку є найменшим спільним кратним порядків φ та ψ (див. заув.3.1)

Розглянемо приклад перестановок, добуток яких залежить від порядку запису множників, тобто

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 \circ \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{пор.}\alpha_1 = 2, \quad \text{пор.}\alpha_2 = 3, \quad \text{пор.}\alpha_1 \circ \alpha_2 = 3, \quad \text{пор.}\alpha_2 \circ \alpha_1 = 3.$$

Тобто $3 = \text{НСК}(2, 3), \quad 3 = 6$, що невірно.

Задача 4.4 *Якщо n – просте число, то для кожного k, $0 < k < n$, перестановка $(a_1 a_2 \ldots a_n)^k$ є циклом довжини n. Якщо число n – складене, то ця перестановка буде циклом для чисел k взаємно простих із n то добутком циклів однакової довжини в іншому випадку. Довести це.*

Нехай n - просте число, тоді в яку б степінь $k,\ 0<k<n$, не підносили перестановку на цикли розкласти її не можна (k не ділить n). Тобто із множини $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не можна виділити циклічну підмножину.

Нехай n - складене число. Тоді для k, які є взаємно прості з n, знову маємо, що виділення циклічної підмножини неможливо (k не ділить n). Якщо ж k не є взаємно простим з n, то можна виділити циклічні підмножини виду

$$\{a_1, a_{k+1}, a_{2k+1}, \ldots, a_{n-k+1}\}, \{a_2, a_{k+2}, \ldots, a_{n-k+2}\}, \ldots,$$
$$\{a_{k-1}, a_{2k-1}, a_{2k-2}, \ldots, a_n\}.$$

Тобто отримуємо k циклів довжини $\frac{n}{k}$.

Задача 4.5 *Довести, що для кожної перестановки φ, яка розкладається в добуток l циклів однакової довжини s, знайдеться цикл ψ довжини ls і натуральне число k, таке що $\varphi=\psi^k$. Чи єдиний такий цикл?*

Нехай

$$\varphi = \underbrace{(a_1a_2\ldots a_s)\circ(b_1b_2\ldots b_s)\circ\ldots\circ(c_1c_2\ldots c_s)}_{l}$$

та $\psi=(m_1m_2\ldots m_{ls})$. Згідно з результатом задачі 4.4 перестановку ψ можна піднести до степеня l і в результаті отримуємо перестановку φ. Тобто перестановка

$$\psi=(a_1b_1\ldots c_1a_2b_2\ldots c_2\ldots a_sb_s\ldots c_s)$$

Задача 4.6 *12 хлопчиків перекидуються різнокольоровими м'ячами. Кожен із них кидає свій м'яч завжди одному й тому ж партнеру, всі м'ячі кидають одночасно і жодні два хлопчика не кидають м'яч одному гравцеві. Через яке найменше число ходів гри (перекидувань) усі м'ячі опиняться в руках тих самих хлопчиків, що й на початку?*

Згідно з умовою задачі схему перекидування м'ячів можна записати за допомогою перестановки

$$\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} \end{pmatrix}$$

Найменша кількість n ходів гри, після яких м'ячі з'являться в руках тих гравців, що й на початку дорівнює порядку перестановки φ, тобто $\varphi^n=\varepsilon$. Найменший порядок дорівнює 2 (жоден з гравців не кидає м'яч собі). Тобто гравці розбиваються на пари і кидають м'ячі один одному.

Задача 4.7 *Довести, що якщо для заданого перетворення φ існує таке число n, що $\varphi^n = \varepsilon$, то φ – бієкція.*

Згідно з умовою маємо, що кожен елемент множини після n перетворень φ переходить сам у себе. Тобто існують орбіти, яким належать всі елементи перетворюваної множини. З цього маємо, що φ – сюрьєктивне перетворення. Ін'єктивність перетворення φ отримуємо згідно того, що утворені орбіти елементів, згідно їх замкнености, не перетинаються. Із цього випливає що φ – бієкція.

Задача 4.8 *Знайти порядки наступних елементів групи S_{12}: $u = (1,3,2,5,4,6,7,8,12,10,9,11)$, $v = (2,1,5,8,4)$*

5 Твірні симетричної групи

Задача 5.1 *На стінах круглого залу картинної галереї висіли картини. Якось вирішили розташувати їх в іншому порядку, міняючи місцями картини, що висять поруч. Чи завжди можливо за допомогою таких переміщень розташувати картини як забажається?*

Занумеруємо місця, на яких висять картини, так, щоб нумерація місць співпадала з нумерацією картин в початковому положенні. Розташування картин, при якому картина з номером i_1 висить на першому місці, картина з номером i_2 на другому і т.д., картина з номером i_n на n-у місці, однозначно визначається перестановкою

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

Якщо в положенні, яке описується перестановкою (8), поміняти місцями картини, які стоять на k-му і $(k+1)$-му місцях $(1 \leq k \leq n)$, то перестановка α_1, яка буде характеризувати це нове положення, буде результатом добутку перестановки α зліва на транспозицію $(k \quad k+1)$:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{k-1} & i_{k+1} & i_k & i_{k+2} & \dots & i_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k+1 & k & k+2 & \dots & n \end{pmatrix} \circ$$

$$\circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{k-1} & i_k & i_{k+1} & i_{k+2} & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Якщо перехід від початкового положення до бажаного, якому відповідає перестановка φ, здійснюється за s кроків, то можно записати, що

$$\delta_1 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \delta_s \circ \varepsilon = \varphi,$$

де $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$ – деякі транспозиції. Тобто задачу можно сформулювати таким чином:

Чи можно розкласти довільну перестановку в добуток транспозицій?

Підмножину T множини усіх перестановок називають *системою твірних* заданої симетричної групи S, якщо кожну перестановку із S можна розкласти в добуток перестановок із T.

Твердження 5.1 *Кожен цикл $(a_1a_2 \ldots a_s)$ можна розкласти в добуток транспозицій.*

$$(a_1a_2 \ldots a_s) = (a_1a_2) \circ (a_1a_3) \circ \ldots \circ (a_1a_s) \tag{9}$$

Дійсно, знайдемо значення добутку правої частини рівності (9):

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{s-1} & a_s \\ a_2 & a_1 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{s-1} & a_s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{s-1} & a_s \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_4 & \ldots & a_{s-1} & a_s \end{pmatrix} \circ$$

$$\circ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{s-1} & a_s \\ a_4 & a_2 & a_3 & a_1 & \ldots & a_{s-1} & a_s \end{pmatrix} \circ \ldots \circ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{s-1} & a_s \\ a_{s-1} & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 & a_s \end{pmatrix} \circ$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{s-1} & a_s \\ a_s & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{s-1} & a_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{s-1} & a_s \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \ldots & a_s & a_1 \end{pmatrix} = (a_1a_2a_3 \ldots a_s).$$

В симетричній групі S_n на множині $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ виділяють системи твірних:

$$I \quad (12), (23), (34), \ldots, (n-1\ n)$$

$$II \quad (12), (13), (14), \ldots, (1n)$$

$$III \quad (12), (123 \ldots n)$$

Всі системи є повними і кожен елемент однієї можна виразити добутком інших.

Рівність

$$(ij) = (1i) \circ (1j) \circ (1i) \tag{10}$$

дає змогу записувати кожен елемент системи I, використовуючи елементи системи II.

Рівність

$$(1k) = (12) \circ (23) \circ \ldots \circ (k-1 \quad k) \circ (k-1 \quad k-2) \circ \ldots \circ (21) \qquad (11)$$

дає змогу виражати кожен елемент системи II, використовуючи елементи системи I.

Рівність

$$(123 \ldots n)^j \circ (12) \circ (123 \ldots n)^{-j} = (j+1 \; j+2) \qquad (12)$$

дає можливість записувати кожен елемент системи I, використовуючи елемент системи III.

Задача 5.2 *Довести, що всі цикли довжини 3 разом з якою-небудь транспозицією утворюють систему твірних симетричної групи S_n.*

Із твердження 5.1 отримуємо $(ijk) = (ij) \circ (ik)$, звідки $(ijk) \circ (ik) = (ij) \circ (ik) \circ (ik)$, тобто $(ij) = (ijk) \circ (ik)$. При фіксованих i і k отримуємо, що транспозиції виду (ij) $\{i$ – фіксований, j – довільний$\}$ можна виразити через вказані перестановки. Переконаємося, що множина таких транспозицій є системою твірних S_n. Порівняємо такі транспозиції із системою II. Оскільки довільний елемент можна записати за допомогою транспозицій виду (ij), де i – фіксований, j – довільний, то можливо замінити усі такі транспозиції на добуток циклів довжини 3 та однієї транспозиції (ij). З цього випливає, що всі цикли довжини 3 та одна транспозиція утворюють систему твірних симетричної групи S_n.

Задача 5.3 *Кожна підмножина із S_n, яка містить більше ніж $\frac{n!}{2}$ елементів, утворює систему твірних S_n. Довести це.*

Нехай $T \subset S_n$ і $\mid T \mid > \frac{n!}{2}$. Нехай на множині T знайдеться принаймні одна транспозиція, а згідно задачі 5.1, домножаючи елементи множини T на транспозицію, отримуємо $\frac{n!}{2} - 1$ різних елементів, які доповнюють множину T до елементів групи S_n. Якщо в множині T немає жодної транспозиції, то її можна отримати перемножаючи елементи із множини T. Оскільки їх число більше ніж $\frac{n!}{2}$, то в цій множині знайдуться принаймні два елементи, які відрізняються на транспозицію, тобто добуток одного елементу на транспозицію дорівнює другому. І знову отримуємо варіант із транспозицією, яку замінюють добутком елементів.

Задача 5.4 *Довести, що кожна з наступних множин є твірною множиною знакозмінної групи n-го степеня:*

1) множина всіх циклів довжини 3;

2) множина циклів виду (123), (124), $\ldots$, $(12n)$.

Задача 5.5 *Довести, що кожна з наступних множин є незвідною, тобто не можна зменшити кількість твірних, твірною множиною групи* S_6*:*

1) $M_1 = \{(12), (34), (56), (23)(45)\}$*;*

2) $M_2 = \{(12), (34), (123)(456)\}$;

3) $M_3 = \{(12), (23), (24)(156)\}$.

6 Підгрупи симетричної групи

Підмножину T множини S_n називають *підгрупою групи* S_n , якщо вона є групою відносно множення перестановок.

Сама множина S_n є своєю підгрупою, яку називають *невласною.* Окрім того, множина, яка складається тільки із одного елемента ε, також є підгрупою. Це випливає із рівностей

$$\varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon, \qquad \varepsilon^{-1} = \varepsilon$$

Її називають *тривіальною підгрупою* групи S_n. Для кожної підгрупи G групи S_n виконується рівність

$$1 <| G |< n! \ .$$

Підмножина T групи S_n яка містить що найменше одну перестановку, є *підгрупою групи* S_n тоді й лише тоді, коли:

1. разом з двома елементами α, β до неї входить і їх добуток $\alpha \circ \beta$;

2. якщо $\alpha \in T$, то $\alpha^{-1} \in T$.

Нехай $\alpha \neq \varepsilon$ - довільна перестановка із S_n, яка має порядок k. Тоді перестановки

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{k-1}, \alpha^k = \varepsilon.$$

відмінні одна від одної. Переконаємося, що множина C цих перестановок є групою. Дійсно, за означенням дії множення, для довільних перестановок $\alpha^i, \alpha^j \in C$ маємо:

$$\alpha^i \circ \alpha^j = \begin{cases} \alpha^{i+j} & , \quad i+j < k, \\ \alpha^{i+j-k} & , \quad i+j \geq k. \end{cases}$$

Оберненою до перестановки $\alpha^i \in C$ є перестановка α^{k-i}, оскільки $\alpha^i \circ \alpha^{k-i} = \alpha^k = \varepsilon$. Таким чином, добуток довільних двох перестановок із множини C знову є елементом цієї множин. Перестановка, обернена до довільної перестановки із C, також належить C. З цього випливає що C - група. Такі групи називають *циклічними.*

Задача 6.1 *Довести, що множина усіх елементів групи S_n, які залишають нерухомими деяке число k, утворює групу.*

Нехай $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & k & \dots & i_n \end{pmatrix}$ і $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & k & \dots & j_n \end{pmatrix}$ – елементи множини G. Тоді $\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ i'_1 & i'_2 & \dots & k & \dots & i'_n \end{pmatrix} \in G$ і $\beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ j'_1 & j'_2 & \dots & k & \dots & j'_n \end{pmatrix} \in G$. Оскільки $G \subset S_n$, то виконується закон асоціативності. Елемент $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \end{pmatrix} \in G$ є нейтральним елементом множини. Якщо $\alpha \in G$ то $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & k & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \end{pmatrix} \in G$ і $\alpha \circ \alpha^{-1} = \varepsilon$. Тобто для довільного елемента множини існує обернений, який теж належить множині G. Виконання цих двох умов і доводить твердження задачі.

Задача 6.2 *Якого найбільшого порядку може бути циклічна підгрупа групи S_9 ?*

Оскільки порядок циклічної групи дорівнює порядку твірного елементу, то найбільший порядок має та підгрупа, яка породжена елементом з найбільшим порядком. Оскільки порядок елемента є найменшим спільним кратним довжин взаємно простих циклів, на які вона розкладається, то порядок буде найбільшим тоді, коли довжини циклів будуть взаємно простими, а їх сума дорівнюватиме 9. Перебравши такі числа, отримуємо НСК(2,7)=14, НСК(4,5)=20. Тобто циклічна підгрупа групи S_9 може мати найбільший порядок, який дорівнює 20.

Задача 6.3 *Скільки підгруп другого порядку має група S_5?*

У довільній такій підгрупі завжди повинен бути нейтральний елемент ε та елемент другого порядку, тобто обернений сам до себе $\alpha \circ \alpha = \varepsilon, \alpha^2 = \varepsilon$. Знайдемо всі елементи, які мають порядок 2. Їх кількість дорівнює $C_5^2 C_3^2 + C_5^2 = \frac{5!}{3!2!}\frac{3!}{2!1!} + \frac{5!}{3!2!} = 40$. Значить симетрична група S_5 має 40 підгруп другого порядку

Задача 6.4 *Скільки підгруп другого порядку має група S_n?*

Задача 6.5 *Довести, що підмножина K множини S_n утворює підгрупу, якщо добуток довільних двох елементів із K належить K.*

Нехай $\alpha \in K$ і $\alpha \circ \alpha \in K$, звідси виконується умова $\underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{m} \in K$.
Для кожної перестановки існує таке натуральне число n, що виконується умова $\alpha^n = \varepsilon$. Припустимо, що існує елемент α^{-1}, тоді $\alpha^n \circ \alpha^{-1} = \varepsilon \circ \alpha^{-1} \Rightarrow \alpha^{n-1} = \alpha^{-1}$ і α^{-1} дійсно існує, причому $\alpha^{n-1} \in K$ то $\alpha^{-1} \in K$. Оскільки обидві умови виконались, то множина K, в якій добуток двох елементів із множини належить цій множині, є підгрупою групи S_n.

Задача 6.6 *Побудувати фактор-групу S_3 по її нормальній підгрупі.*

$S_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \alpha_6\}$, $\alpha_1 = \varepsilon \quad \alpha_2 = (23) \quad \alpha_3 = (13) \quad \alpha_4 = (12) \quad \alpha_5 = (123) \quad \alpha_6 = (132)$. Знайдемо підгрупи групи S_3.

$$1) U_1 = \{\alpha_1\} \quad 2) U_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\} \quad 3) U_3 = \{\alpha_1, \alpha_3\}$$

$$4) U_4 = \{\alpha_1, \alpha_4\} \quad 5) U_5 = \{\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6\} \quad 6) U_6 = S_3.$$

Перевіремо, яка з цих підгруп є нормальною, тобто $aUa^{-1} = U, a \in S_3$. Окрім U_1 та U_6 нормальною підгрупою є і U_5. З цього випливає, що група S_3 розкладається на два класи суміжності U_3 та $\alpha_4 U_3$. Неважко перевірити, що розклад на праві та ліві суміжні класи не відрізняється. З цього маємо $S_3/U_5 = \{U_5, \alpha_4 U_5\}$.

Задача 6.7 *Описати всі підгрупи симетричної групи S_3.*

Порядок групи S_3 дорівнює $3! = 6$. З теореми Лагранжа випливає, що власні підгрупи з S_3 можуть складатися із двох або трьох перестановок. Отже, підмножини S_3, що складаються із чотирьох або п'яти перестановок, підгруп не утворять.

1) Опишемо спочатку підгрупи, які складаються із двох перестановок. Якщо H – така підгрупа, то до неї входить елемент ε і ще деякий інший елемент a, тобто $H = \{\varepsilon, a\}$.

Елемент обернений до a не може збігатися з ε, тому $a^{-1} = a$. Останню рівність можна записати так: $a^{-1} \cdot a = a \cdot a$, тобто $\varepsilon = a^2$. Отже, a – перестановка другого порядку, тобто цикл довжини 2.

Таким чином, існує не більше трьох підгруп другого порядку групи S_3, ці підгрупи неважко знайти за допомогою таблиці Келі. Це будуть такі підмножини: $A = \{\varepsilon, (12)\}$, $B = \{\varepsilon, (23)\}$, $C = \{\varepsilon, (13)\}$. Легко переконатися, що підмножини A, B і C дійсно є підгрупами групи S_3, тому що для кожного з них виконується умова теореми про підгрупи для кінцевих груп.

Для підмножини А:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)$$

$$\varepsilon \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12) = a \in A$$

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \varepsilon.$$

Аналогічно для підмножин B і C.

2) Тепер опишемо підгрупи, які складаються із трьох перестановок. Якщо $G = \{\varepsilon, \varphi, \psi\}$ – така підгрупа, то перестановки φ і ψ повинні мати порядок 3. Дійсно, якщо одна з них, наприклад φ, має порядок 2, то $\varphi = \varphi^{-1}$. Нехай $\psi \neq \psi^{-1}$, тоді $\psi^{-1} = \varphi$ і $\psi^{-1} = \varphi^{-1}$. Тоді $\psi = \psi \cdot \varepsilon = \psi \cdot \varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi \cdot \varepsilon = \varphi$. Отже, одержали протиріччя, оскількм φ і ψ різні. Отже, $\psi = \psi^{-1}$, $\varphi^2 = \varepsilon$, тобто перестановка ψ теж буде мати порядок 2. Але легко перевірити безпосередньо, що добуток будь-яких двох різних перестановок другого порядку є перестановка третього порядку. Наприклад,

$$\varphi \cdot \psi = (12) \cdot (13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) \notin G$$

.

Отже, добуток $\varphi \cdot \psi$ не належить G. І тому G не є підгрупою.

Таким чином, перестановки φ і ψ повинні мати порядок 3, тобто $G = \{\varepsilon, (123), (132)\}$, де $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\varphi \cdot \varepsilon = \varphi \in G, \quad \psi \cdot \varepsilon = \psi \in G$$

$$\varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \psi \in G$$

$$\psi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \varphi \in G$$

$$\varphi \cdot \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \varepsilon \in G$$

$$\psi \cdot \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \varepsilon \in G$$

Як бачимо, добуток кожних двох довільних елементів множини G є елементом із G. Тобто виконується умова теореми про підгрупи для скінчених груп. Отже, підмножина G множини S_3 є підгрупою групи S_3.

Таким чином, група S_3 має шість різних підгруп:

1. $A = \{\varepsilon, (12)\}$
2. $B = \{\varepsilon, (23)\}$

3. $C = \{\varepsilon, (13)\}$
4. $G = \{\varepsilon, (123), (132)\}$
5. $H = \{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\} = S_3$
6. $T = \{\varepsilon\}$

Операцію на множині H називають комутативною, якщо для будь-яких двох елементів h_1 і h_2 з H виконується умова: $h1 \cdot h2 = h2 \cdot h1$.

Комутативною підгрупою називається підгрупа з комутативною операцією.

Задача 6.8 *Довести, що підмножина*

$$H = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

групи S_4 є комутативною підгрупою. Скласти таблицю множення підгрупи H.

Перестановки α і β комутують, якщо $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Нехай $\alpha = (12)(34) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = (13)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\gamma = (14)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Обчислимо всі можливі добутки цих елементів. Як приклад. $\alpha \cdot \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23) = \gamma$. Отже маємо $\beta \cdot \alpha = \gamma$, $\alpha \cdot \gamma = \beta$, $\gamma \cdot \alpha = \beta$, $\beta \cdot \gamma = \alpha$, $\gamma \cdot \beta = \alpha$, $\alpha \cdot \alpha = \varepsilon$, $\beta \cdot \beta = \varepsilon$, $\gamma \cdot \gamma = \varepsilon$.

Отже, добуток будь-яких двох елементів множини H є елементом тієї ж множини, тобто підмножина H групи S_4 є підгрупою групи S_4, причому перестановки комутують. Остаточно, H – комунікативна підгрупа.

Запишемо таблицю множення підгрупи H.

$\cdot$	ε	α	β	γ
ε	ε	α	β	γ
α	α	ε	γ	β
β	β	γ	ε	α
γ	γ	β	α	ε

Задача 6.9 *Доведіть, що група A_4 не має підгруп порядку 6.*

Якщо група A_4 має підгрупу порядку 6, то ця підгрупа повинна бути нормальною, тому що її порядок дорівнює половині порядку групи A_4. Але, тому що будь-яка нормальна підгрупа групи A_4 містить тільки елементи порядку 2, то максимальний можливий порядок підгрупи A_4 дорівнює 4. Отже, група A_4 не має підгруп порядку 6.

Задача 6.10 *Доведіть, що знакозмінна група A_n ($n \geq 3$), породжується всіма циклами $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ довжини 3.*

Група A_n породжується добутками пар транспозиций. Якщо дві транспозиції однакові, їх добуток дорівнює тотожній перестановці. Якщо вони мають одну спільну букву, як, наприклад, (ab) і (ac), то $(ab)\cdot(ac) = (abc)$. Якщо вони не мають спільних букв, то $(ab)\cdot(cd) = (ab)\cdot(ac)\cdot(ca)\cdot(cd) = (abc)\cdot(cad)$. Виходить, знакозмінна група A_n, породжується всіма циклами довжини 3.

Задача 6.11 *Знайти комутант групи S_3.*

Задача 6.12 *Чи розкладається в прямий добуток група S_3?*

Задача 6.13 *Які нормальні підгрупи має група S_3?*

Задача 6.14 *Довести, що в довільній групі підгрупа індексу 2 обов'язково нормальна.*

Задача 6.15 *Довести, що якщо добуток двох довільних лівих суміжних класів групи G за підгрупою H знову буде лівим суміжним класом, то H – нормальна підгрупа в G.*

Задача 6.16 *Довести, що якщо A – циклічна група порядку n і d – дільник n, то A містить тільки одну підгрупу порядку d, причому ця підгрупа циклічна.*

7 Парні та непарні нерестановки. Знакозмінна група.

Розклад перестановок із S_n в добуток транспозицій, взагалі кажучі, не є однозначним. Наприклад,

$$(123) = (13) \circ (23) = (12) \circ (13).$$

Проте певна характеристика, яка залишається однаковою для кожного розкладу, існує.

Перестановку називають *парною*, якщо її можна розкласти в добуток парного числа транспозицій. В іншому випадку перестановку називають *непарною*. Якщо перестановка φ розкладена в добуток транспозицій $\varphi = \delta_1 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \delta_{s-1} \circ \delta_s$, то оберненою до φ буде перестановка $\varphi^{-1} = \delta_s \circ \delta_{s-1} \circ \ldots \circ \delta_2 \delta_1$. Оскільки із рівності $(\delta_1 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \delta_{s-1} \circ \delta_s) \circ (\delta_s \circ \delta_{s-1} \circ \ldots \circ \delta_2 \circ \delta_1) = \varepsilon$ випливає, що $\varphi^{-1} = \delta_s^{-1} \circ \delta_{s-1}^{-1} \circ \ldots \circ \delta_2^{-1} \circ \delta_1^{-1}$, а для транспозицій $\delta_i^{-1} = \delta_i$.

Зауваження 7.1 *Якщо* $\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_s$ *та* $\beta_1 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \beta_t$ *- розклад перестановки в добуток транспозицій, то числа* s *і* t *мають однакову парність.*

Задача 7.1 *Довести, що непарні перестановки із* S_n *мають парну степінь.*

Якщо непарна перестановка розкладається в один цикл, то його довжина є число парне. Тоді згідно формули 5 маємо, що непарна перестановка має парну степінь.

Якщо непарна перестановка розкладається в добуток взаємно простих циклів, то серед них завжди є принаймні один цикл з непарною довжиною. Якщо всі взаємно прості цикли мають непарну довжину, а цикл з непарною довжиною, згідно зауваження 4.2, розкладається в парну кількість транспозицій, то такий елемент буде парним. Згідно з того, що в розкладі непарного елемента є цикл з парною довжиною, то згідно зауваження 3.1 маємо, що порядок є найменшим спільним кратним довжин взаємно простих циклів, тобто число парне.

Позначивши множину парних перестановок через A_n, переконаємося, що вона утворює групу.

Задача 7.2 *Довести, що множина* A_n *утворює групу (знакозмінну групу порядку* n*).*

Нехай $\alpha, \beta \in A_n$ і $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_t, \quad \beta = \beta_1 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \beta_s$ (t, s - парні). Тоді маємо $\alpha \circ \beta = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \ldots \circ \alpha_t \circ \beta_1 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \beta_s$. Оскільки $t + s$ парне число, то $\alpha \circ \beta \in A_n$. Із доведеного вище маємо: $\alpha^{-1} = \alpha_t \circ \alpha_{t-1} \circ \ldots \circ \alpha_2 \alpha_1$ і $\alpha^{-1} \in A_n$, бо t - парне число. Виходячи з цього отримуємо, що A_n - група.

Задача 7.3 *Яка з підгруп симетричної групи* S_3*:* $A = \{\varepsilon, (12)\}$*,* $B = \{\varepsilon, (23)\}$*,* $C = \{\varepsilon, (13)\}$*,* $G = \{\varepsilon, (123), (132)\}$ *буде знакозмінною.*

Знакозмінна група A_n має порядок $\frac{1}{2}n!$, значить знакозмінна група A_3 має порядок $\frac{1}{2} \cdot 3! = 3$. Отже, із представлених в умові задачі підгруп знакозмінною може бути підгрупа G, тому що її порядок дорівнює 3. Перевіримо, чи є перестановки підгрупи G парними. За означенням, перестановку називають парною, якщо вона розкладається в добуток парного числа транспозиції.

$(123) = (12) \cdot (13)$, тобто (123) – парна перестановка;

$(132) = (13) \cdot (12)$, тобто (132) – парна перестановка;

Отже, підгрупа G групи S_3 є знакозмінною.

Задача 7.4 *Довести, що група S_4 має, крім себе і одиничної підгрупи, тільки наступні нормальні підгрупи:*

1) знакозмінна група A_4;

2) "четверна група Клейна" V_4, яка складаєтья з перестановок: e, (12)(34), (13)(24), (14)(23).

Задача 7.5 *Довести, що при довільному натуральному $n \geq 4$ знакозмінна група A_n некомутативна.*

Оскільки A_1 та A_2 складаються тільки із тотожніх перестановок, то вони є комутативними. Побудуємо таблицю Келі для групи A_3:

$\circ$	ε	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
ε	ε	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Оскіьки ця таблиця симетрична, то A_3 є комутативною. Візьмемо два довільних елементи із A_4 і перемножемо їх. В результаті маємо: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ$ $\circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Оскільки закон комутативності невиконується, то A_4 не є комутативною. Більше того, при $n > 4$ група A_n завжди містить в собі елементи групи A_4, і тому вона теж некомутативна.

Задача 7.6 *Довести, що A_n – максимальна підгрупа на S_n, відмінна від S_n, тобто кожна підгрупа, яка містить A_n, співпадає або з A_n, або з S_n.*

Нехай підгрупа $T \supset A_n$ максимальна. Тобто існує $t \in T, t \notin A_n$. Але добуток парного елемента на непарний є непарний, дійсно $a \in A_n \quad a = \underbrace{(..) \circ (..) \circ \ldots \circ (..)}_{n}$, n - парне $t = \underbrace{(..) \circ (..) \circ \ldots \circ (..)}_{k}$, k - непарне. $a \circ t = \underbrace{(..) \circ (..) \circ \ldots \circ (..)}_{n} \circ \underbrace{(..) \circ (..) \circ \ldots \circ (..)}_{k}$. Через те, що $n + k$ - число непарне, то $a \circ t \in T$ і $a \circ t \notin A_n$. Перемноживши t на всі елементи

A_n, а їх $\frac{n!}{2}$, отримуємо $\frac{n!}{2}$ непарних перестановок. Тобто, якщо множина T містить елемент t, то множина повинна містити в собі і всі інші непарні елементи, щоб бути підгрупою. Звідси отримуємо, що підгрупа, яка містить A_n, співпадає або з A_n, або з S_n.

Задача 7.7 *Довести, що підгрупа A_n є нормальним дільником симетричної групи S_n n-го степеню.*

Група S_n складається із $n!$ перестановок, а група A_n із $\frac{1}{2}n!$ перестановок. Як при правому, так і при лівому розкладі групи S_n по підгрупі A_n одним із суміжних класів є сама підгрупа A_n. В цей клас не війдуть всі непарні перестановки, число яких також дорівнює $\frac{1}{2}n!$. Оскільки всякий інший суміжний клас повинен містити стільки ж елементів, скільки їх у першому класі, то з елементів групи S_n, які не увійшли в перший клас, можна скласти лише один лівий або правий суміжний клас, який буде складатися із усіх непарних перестановок групи S_n. Отже обидва розклади групи по підгрупі A_n будуть однакові. Це означає, що A_n – нормальний дільник. Фактор-групою групи S_n по нормальному дільнику A_n буде $S_n/A_n = \{A_n, sA_n\}$, де s - довільна непарна перестановка групи S_n.

Задача 7.8 *Довести, що кожну парну перестановку можно розкласти в добуток циклів довжини три.*

Кожен елемент можна розкласти в добуток транспозицій, причому для парного елементу кількість транспозицій парна. Якщо будемо розкладати за допомогою твірної системи II, і використовуючи зауваження (9), маємо $(a_1a_2a_3) = (a_1a_2) \circ (a_1a_3)$. Використовуючи таку схему запису, можна записати довільний парний елемент використовуючи цикли довжини три.

Задача 7.9 *Чи можна розкласти кожну парну перестановку із S_n, де n - непарне, у добуток циклів $(1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 4 \quad 5), \ldots, (1 \quad n-1 \quad n)$?*

Задача 7.10 *Знакозмінна група A_n $(n > 4)$ проста.*

Задача 7.11 *Знайти парність перестановки*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 7.12 *Нехай $\sigma \in S_n$ – непарна перестановка, N – її порядок в групі S_n. Що можна сказати про парність числа N?*

Задача 7.13 *Довести, що група парного порядку містить елемент порядку 2.*

8 Гомоморфізми та ізоморфізми

Відображення $f : (M, \oplus) \to (N, \odot)$ називають *гомоморфізмом*, якщо виконуються умови:

1. $\forall m_1, m_2 \in M \quad (m_1 \oplus m_2)f = (m_1)f \odot (m_2)f$
2. f - сюр‘єктивне.

Множина усіх гомоморфізмів над групою утворюють групу $\mathtt{Hom}(M, N)$. Якщо множини M і N співпадають, то відображення називають *ендоморфізмом*, а відповідну групу усіх відображень з операцією композиції позначають $\mathtt{End}M$. Якщо відображення f – бієктивне, то говорять про *ізоморфізм* множин M та N і позначають $M \cong N$.

При співпаданні множин M і N ізоморфізм називають *автоморфізмом.* Множина усіх автоморфізмів групи утворює групу $\mathtt{Aut}G$. Якщо a - фіксований елемент групи, то співставлення у відповідність елементу x елемент $\bar{x} = axa^{-1}$ є автоморфізмом, бо: по перше – відображення взаємно-однозначне $x = a^{-1}\bar{x}a$; по друге – $\bar{x}\bar{y} = axa^{-1} \cdot aya^{-1} = a(xy)a^{-1} = \bar{xy}$, тобто воно ізоморфне. Автоморфізми групи, породжені елементами a за правилом $x \to axa^{-1}$, називають *внутрішнім* . Всі інші (якщо вони існують) називають *зовнішніми.*

При внутрішньому автоморфізмі $x \to axa^{-1}$ довільна підгрупа G відображається в підгрупу aGa^{-1}, яку називають *спряженою* з підгрупою G. Якщо підгрупа G співпадає зі всіма своїми спряженими, тобто $aGa^{-1} = G$, для всіх a, це дає змогу говорити про перестановність з усіма елементами a : $aG = Ga$, або що G - *нормальна підгрупа.*

Зауваження 8.1 *Якщо в множині $\bar{G}$ визначена бінарна операція і група G гомоморфно відображається на $\bar{G}$, то і $\bar{G}$ є групою.*

Зауваження 8.2 *Одиничний елемент і обернений елементи при гомоморфізмі переходять знову в одиничний елемент і обернений елемент.*

Зауваження 8.3 *Клас U групи G, який при гомоморфізмі $G \to \bar{G}$ переходить в одиничний елемент $\bar{e}$ групи $\bar{G}$, є нормальною підгрупою в G ; всі інші класи є суміжними класами по цій нормальній підгрупі.*

Задача 8.1 *Абелеві групи не мають внутрішніх автоморфізмів, відмінних від тотожнього*

Дійсно, оскільки внутрішній автоморфізм визначається за правилом

$$x \to axa^{-1},$$

а для елементів абелевих груп справджується рівність $axa^{-1} = aa^{-1}x = x$, то $x \to x$.

Задача 8.2 *Довести, що група Клейна є нормальним дільником симетричної групи S_4.*

Для того, щоб підгрупа була нормальним дільником групи, необхідно, щоб лівосторонній розклад групи G по підгрупі H співпадає з правостороннім, тобто для довільного $a \in G,\ aH = Ha$.

Група Клейна має вигляд $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Знайдемо лівосторонній розклад групи S_4 на класси. Це будуть:
$\Big\{(123), (134), (142), (243)\Big\}$, $\Big\{(132), (143), (124), (234)\Big\}$, $\Big\{(34), (23), (24), (12), (1234), (1342), (1243), (13), (1324), (1432), (14), (1423)\Big\}$.

Беспосередньою перевіркою переконаємося, що і правосторонній розклад на класи співпадає з лівостороннім. Звідки й маємо, що підгрупа Клейна є нормальним дільником симетричної групи S_4.

Задача 8.3 *Знайти у відповідних групах квадратних матриць $GL_n(C)$ підгрупи, ізоморфні групі S_3*

Нехай σ – перестановка степеня n і $A_\sigma =\|\ \delta_{i\sigma(j)}\ \|$ - квадратна матриця степеня n, де $\delta_{i\sigma(j)}$ - символ Кронекера. Тоді відображення $\sigma \to A_\sigma$ буде ізоморфізмом.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Неважко переконатись, що утворена множина матриць $A = \{A_\sigma | \sigma \in S_n\}$ утворює групу ізоморфну групі S_n. Дійсно, нехай $A_{\sigma_1} = ||\delta_{i\sigma_1(i)}||$ та $A_{\sigma_2} = ||\delta_{i\sigma_2(i)}||$ дві матриці множини A. Тоді неважко помітити, що $A_{\sigma_1} \cdot A_{\sigma_2} = ||\delta_{i\sigma_2(\sigma_1(i))}||$. Визначимо відображення $f : A \to S_n : A_\sigma \mapsto \sigma$. Тоді для кожного $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n,\ \sigma = \sigma_1\sigma_2$ маємо

$$(\sigma_1\sigma_2)f = (\sigma)f = A_\sigma = A_{\sigma_1} \cdot A_{\sigma_2} = (\sigma_1)f \cdot (\sigma_2)f$$

Очевидно, що відображення f є бієктивним. Звідси $A \cong S_n$.

Задача 8.4 *Знайти групу автоморфізмів групи S_3.*

Визначимо множину $\mathcal{G} = \{\tau_i : \alpha_1 \to \alpha_i \mid \alpha_j \to \alpha_i \circ \alpha_j, \alpha_j \in S_3\}$ та доведемо, що $\mathcal{G}$ є групою автоморфізмів групи S_3 .

1. Замкненість:$(\alpha)\tau_i \circ \tau_j = ((\alpha)\tau_i)\tau_j = (\alpha \circ \alpha_i)\tau_j = \alpha \circ \alpha_i \circ \alpha_j = \alpha \circ \alpha_k = (\alpha)\tau_k$;

2. Асоціативність: $(\tau_i \circ \tau_j) \circ \tau_k = \tau_i \circ (\tau_j \circ \tau_k)$
   $(\alpha)(\tau_i \circ \tau_j) \circ \tau_k = ((\alpha)(\tau_i \circ \tau_j))\tau_k = (((\alpha)\tau_i)\tau_j)\tau_k$
   $(\alpha)\tau_i \circ (\tau_j \circ \tau_k) = ((\alpha)\tau_i)(\tau_j \circ \tau_k) = (((\alpha)\tau_i)\tau_j)\tau_k$

3. Нейтральний елемент: $\tau_1 : \alpha_1 \to \alpha_1$ - тотожне перетворення.

4. Обернений: За винятком τ_5 і τ_6 всі інші елементи мають порядок 2, тобто вони обернені самі до себе. Тому τ_5 і τ_6 є взаємно-оберненим.

Таким чином отримали групу $\mathtt{Aut} S_3 = \mathcal{G}$.

Задача 8.5 *Довести, що симетрична група S_n при довільному натуральному $n \geq 5$ містить підгрупу ізоморфну знакозмінній групі A_5.*

Задача 8.6 *Довести, що $S_4/V_4 \cong S_3$.*

Задача 8.7 *Довести, що*
1) група діедра D_3 ізоморфна симетричній групі S_3;
2) група тетраедра T ізоморфна знакозмінній групі A_4;
3) група куба C ізоморфна симетричній групі S_4;
4) група ікосаедра I ізоморфна знакозмінній групі A_5.

Задача 8.8 *Довести, що*

1) симетрична група S_3 ізоморфна групі, яка задана твірними s_1 і s_2 та співвідношеннями $s_1^2 = e$, $s_2^2 = e$, $(s_1 s_2)^3 = e$.

2) симетрична група S_4 ізоморфна групі, яка задана твірними s_1, s_2 і s_3 та співвідношеннями $s_1^2 = e$, $s_2^2 = e$, $s_3^2 = e$, $(s_1 s_3)^2 = e$, $(s_2 s_3)^3 = e$.

Задача 8.9 *Чи ізоморфні групи $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{72}$ і $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{48}$?*

9 Орбіти групи перестановок. Лема Бернсайда

Розглядаючи групи перестановок, виникає питання щодо дії перестановок на підмножинах, причому є необхідність описати ці підмножини.

Нехай G – група перестановок на множині $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Підмножину $O \subset M$ називають *орбітою* групи G, якщо:

1. $(a)\alpha \in O$ для довільного $\alpha \in G$ і довільного $a \in O$; тобто для перестановок із G на елементи O не виводить за межі O;

2. довільні два елементи із O можна перевести один в інший деякою перестановкою із G.

Задача 9.1 *Довести, що довільна група перестановок* $G = \{\varepsilon = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$ *має орбіти.*

Виберемо довільний елемент $a \in M$ і розглянемо множину $O(a) = \{a = (a)\alpha_0, (a)\alpha_1, \ldots, (a)\alpha_{k-1}\}$. Вона буде орбітою групи G, бо:

1. якщо $\alpha_i \in G$ і $b = (a)\alpha_j \in O(a)$, то $(b)\alpha_i = (a)(\alpha_j \circ \alpha_i) \in O(a)$, тому, що $\alpha_j \circ \alpha_i \in G$ (бо G - група);

2. якщо $b = (a)\alpha_i$ і $c = (a)\alpha_j$ - довільний елемент із $O(a)$, то $b = (a)\alpha_i = (a)(\varepsilon \circ \alpha_i) = (a)(\alpha_j \circ \alpha_j^{-1} \circ \alpha_i) = (c)\alpha_j^{-1} \circ \alpha_i$; і при цьому $\alpha_j^{-1} \circ \alpha_j \in G$, оскільки G - група.

З'ясовується, що орбітами подібного виду вичерпуються усі типи орбіт. Більш точно, якщо O - орбіта групи G і $a \in O$, то $O = O(a)$. Довільні дві орбіти $O(a)$ і $O(b)$ або співпадають (якщо $b \in O(a)$), або не перетинаються (якщо $b \notin O(a)$). Звідси випливає, що множина M розпадається в об'єднання підмножин, що не перетинаються – орбіт групи G.

Для довільного елемента $a \in M$ розглядають множину G_a усіх перестановок із G, для яких точка a є нерухомою. Ця множина утворює групу, яку називають *стабілізатором точки* a.

Теорема 9.1 *Довжина орбіти* $O(a)$ *дорівнює індексу стабілізатора* G_a *в групі* G*, тобто*

$$| O(a) | = | G | : | G_a |$$

Проілюструємо поняття орбіти групи за допомогою прикладу. Нехай множина $G = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma\}$ є групою симетрії фігури, яка зображена на малюнку.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Група G діє на множину $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Маємо: $(1)\varepsilon = 1, (1)\alpha = 5, (1)\beta = 2, (1)\gamma = 4$, тобто $O(1) = \{1, 2, 4, 5\}$. Вибираючи який-небудь елемент із M, який не належить $O(1)$, скажімо 6, одержимо

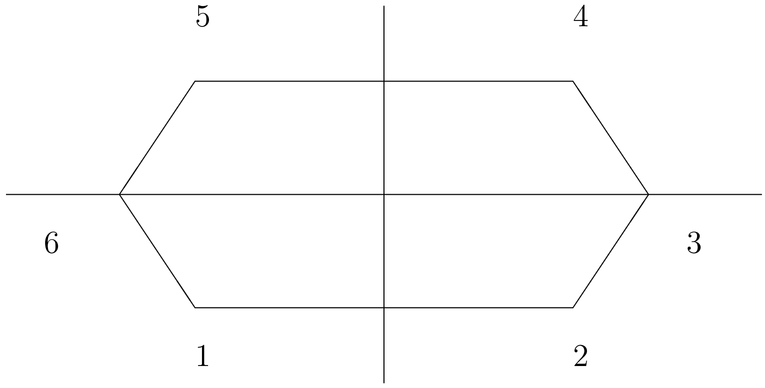


Рис. 3: До прикладу поняття орбіт групи

$(6)\varepsilon = 6, (6)\alpha = 6, (6)\beta = 3, (6)\gamma = 3$, значить $O(6) = \{3, 6\}$. Таким чином, група перестановок G на множині M має дві орбіти

$$O(1) = \{1, 2, 4, 5\}, \quad O(6) = \{3, 6\}.$$

Стабілізатор G_1 точки 1 із $O(1)$ складається із однієї перестановки ε $[G : G_1] = 4 =| O(1) |$. Стабілізатор G_6 точки 6 із перестановок ε та β. Розклад групи G на праві класи суміжності по підгрупі $G_6 = \{\varepsilon, \beta\}$ має вигляд

$$\varepsilon, \alpha, \varepsilon \circ \beta = \beta, \alpha \circ \beta = \gamma.$$

Тобто $[G : G_6] = 2 =| O(6) |$.

Нехай $\chi(\alpha)$ – число нерухомих точок перестановки $\alpha, t(G)$ – число орбіт групи перестановок $G = \{\alpha_0 = \varepsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$, що діє на множині $M = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Лема 9.2 *(Бернсайда). Для довільної групи перестановок має місце рівність*

$$t(G) = \frac{1}{| G |} \sum_{\alpha \in G} \chi(\alpha)$$

Покажемо на попередньому прикладі застосування леми Бернсайда. $\chi(\varepsilon) = 6, \chi(\alpha) = 0, \chi(\beta) = 2, \chi(\gamma) = 0, \quad t(G) = \frac{6+0+2+0}{4} = 2.$

Задача 9.2 *Нехай G - група симетрій куба. Знайти порядок стабілізатора деякої вершини в цій групі. Які перестановки в ньому містяться?*

Занумеруємо вершини куба так, як позначено на рис 4. Симетрія відносно центру куба не може належати будь-якому стабілізатору, бо при

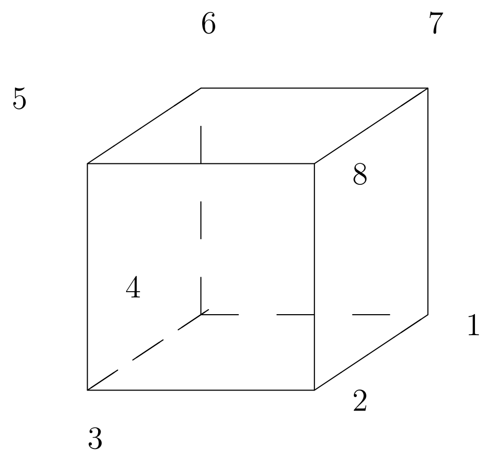


Рис. 4: Симетрія куба

центральній симетрії всі вершини (окрім центра) рухаються. Що стосується симетрій відносно прямої, то жодна з осей симетрії куба не проходять через вершини. Тобто і в цьому випадку нерухомих елементів не існує. Тобто елементи групи G, які є симетріями відносно прямої, не належать до стабілізаторів. Розглянемо тепер площини симетрії: ті площини, які проходять через вершини (наприклад, $2, 6, 8, 4$) належать до стабілізаторів цих вершин. Отже для будь-якої вершини куба стабілізатор складається з тотожньої симетрії ε та трьох симетрій відносно площини, що проходять через цю вершину. Звідси порядок стабілізатора $\mid G_A \mid= 4$ (A - будь-яка вершина куба).

Задача 9.3 *Кожен поворот куба переставляє його грані місцями, тобто група поворотів куба утворює групу перестановок на множині його граней. Довести, що ця група має одну орбіту. Знайти стабілізатор однієї із точок (граней куба) в цій групі.*

Знайдемо усі ті елементи групи поворотів куба, що залишають без змін грань куба. Тобто знайдемо всі значення функції $\chi(\alpha)$. По перше $\chi(\alpha) = 6$. Всі ті повороти, які здійснюються відносно прямої, що проходить через вершини, не мають нерухомих граней (тобто тих граней, які залишаються на місці, хоча й змінюється розташування вершин, які містяться на ній). Теж саме стосується й поворотів, які здійснюються відносно прямої, що проходить через середини протилежних ребер. Останній тип повороту відносно прямої, що проходить через центри протилежних граней залишають на місці ці грані. Тобто такий поворот має дві нерухомі грані. Кількість цих поворотів 3 (без тотожнього), а кількість таких осей 3. Тому число нерухомих точок при усіх поворотах такого виду дорівнює $2 \cdot 3 \cdot 3$. Кількість елементів групи поворотів куба дорівнює 24. Отже маємо: $t(G) = \frac{6+2\cdot3\cdot3}{24} = \frac{24}{24} = 1$. Використовуючи ці міркування отримуємо,

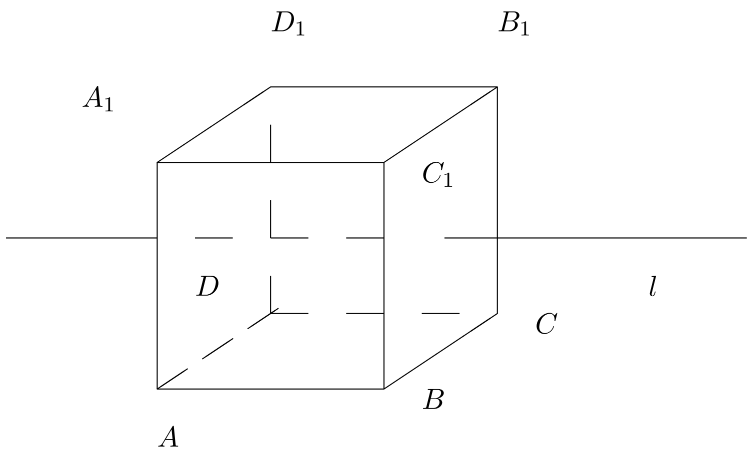
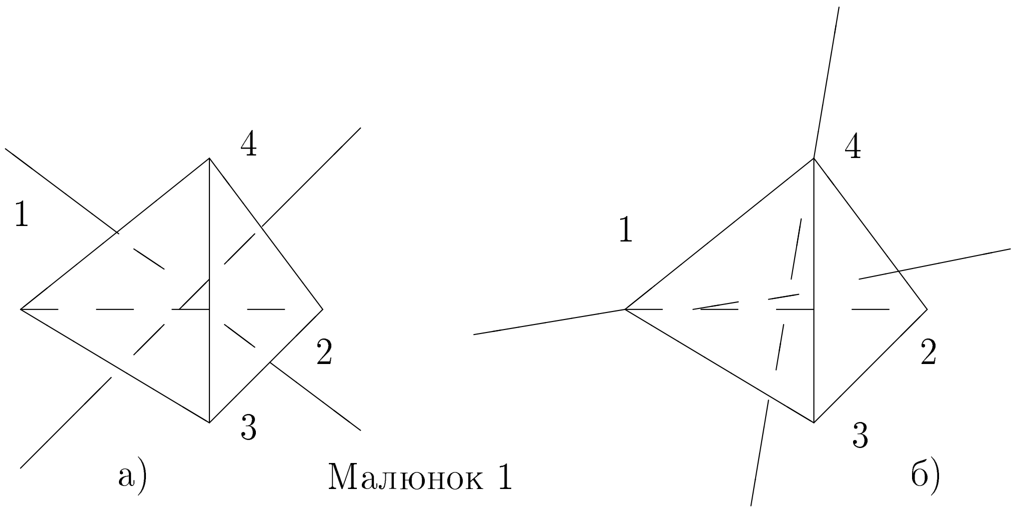


Рис. 5: Повороти куба

що стабілізатор грані BCB_1C_1 (довільної) складається з поворотів навколо осі, що проходить через центр цієї грані і центр протилежної грані. $G_{BCC_1B_1} = \{R_l^{90^o}, R_l^{180^o}, R_l^{270^o}\}$.

Задача 9.4 *Скількома геометрично різними способами можно розфарбувати вершини тетраедра у два кольори?*

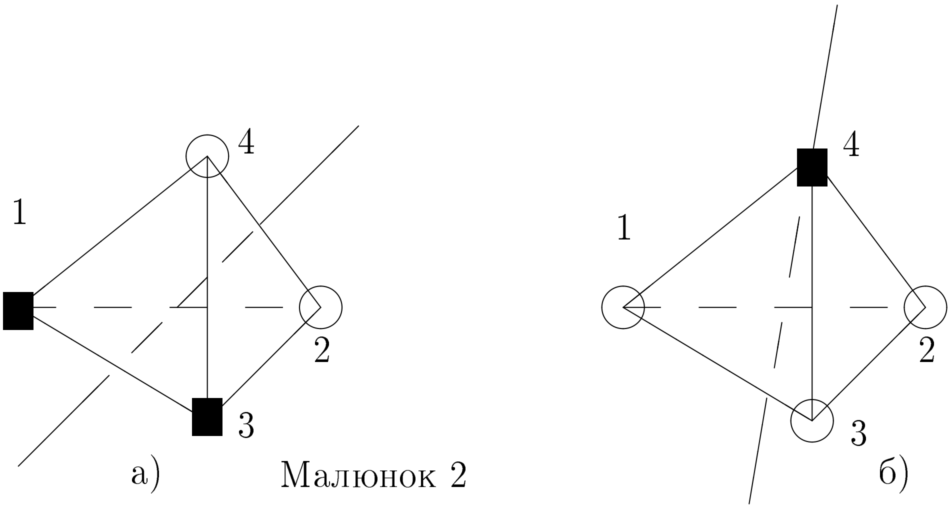
Занумеруємо вершини правильного тетраедра (усі грані – рівносторонні трикутники) і побудуємо групу його поворотів.



а) Малюнок 1 б)

Оскільки кожну з чотирьох вершин тетраедра (з фіксованою нумерацією вершин) можна розфарбувати у два способи, то загальне число різних розфарбувань становить $2^4 = 16$. Розглянемо 16 рівних тетраедрів (з фіксованою нумерацією вершин), кожен з яких розфарбований та відповідає одному з 16 способів розфарбування. Тоді множина, на яку діє група поворотів, складається із 16 тетраедрів з розфарбованими вершинами. Число орбіт, на які група поворотів розіб'є множину на класи, в яких будуть геометрично однакові розфарбовування вершин тетраедра. Для цього підрахуємо значення функції $\chi(\alpha)$. $\chi(\alpha_1) = 16$, тобто на 16 тетраедрів подіяли перетворенням $\alpha_1 = \varepsilon$ і отримали 16 тетраедрів, які не змінили розфарбовування, тобто вони є нерухомими точками.

$\chi(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 4$. Якщо ми розфарбуємо тетраедр за правилом, як на малюнку 2а, то після перетворення, наприклад α_3, отримуємо, що ці тетраедри є нерухомими. Кількість всіх таких розфарбувань дорівнює $2 \cdot 2 = 4$. Всі інші 12 тетраедрів рухаються, тобто змінюють своє розфарбування.



Малюнок 2

$\chi(\alpha_5 - \alpha_{12}) = 4$. Якщо фігури розфарбувати за правилом, як на малюнку 2б, то для перетворень α_{11} та α_{12} такі тетрайдери будуть нерухомими. Підрахуємо кількість орбіт використовуючи Лему Бернсайда

$$t(G) = \frac{16 + 3 \cdot 4 + 8 \cdot 4}{12} = \frac{60}{12} = 5.$$

Отже, існує 5 різних розфарбовуваннь вершин тетраедравідносно дії групи його поворотів.

Задача 9.5 *Скількома геометрично різними способами три абсолютно однакові мухи можуть сісти в вершинах правильного п‘ятикутника?*

Нехай у нас існують нерухомі п‘ятикутники. Тоді кількість способів розташування дорівнює $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$. Але якщо ми будемо повертати п‘ятикутники, то деякі з них будуть співпадати. Розглянемо як на множину п‘ятикутників, на яких знаходяться по три комахи, діє група симетрій правильного п‘ятикутника.

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 6: Поворот п’ятикутника

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \alpha_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \alpha_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Підрахуємо значення функції $\chi(\alpha).\chi(\alpha_1) = 10$, на всі елементи множини подіяли перетворенням ε і отримали, що вони є незмінними після цього перетворення. $\chi(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 0$, бо при поворотах навколо центру усі п‘ять вершин рухаються і жодна комбінація розташувань комах не буде нерухомою точкою множини. $\chi(\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}) = 2$. Якщо, наприклад, розсадити комах на вершинах $1, 2, 5$ то для перетворення α_6 такий п‘ятикутник є нерухомою точкою. Для цього ж перетворення існує ще один варіант, це $1, 3, 4$. Отже маємо:

$$t(G) = \frac{10 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

З цього маємо, що існує тільки два варіанти розташування в вершинах правильного п‘ятикутника трьох однакових мух.

Задача 9.6 *Скільки існує різних намист з 6 бусин червоного, синього та жовтого кольорів?*

Література.

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру.- М.: Наука, 1977.-496 с.

2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- М.: Наука,1971.- 432 с.

3. Нечаев В.А. Задачник-практикум по алгебре.- М.: Просвещение, 1983.- 120 с.

4. Окунев Л.Я. Высшая алгебра.- М.: Просвещение, 1966.-336 с.

5. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре.- М.: Просвещение, 1964.- 185 с.

6. Практические занятия по алгебре и теории чисел / Лельчук М.П. и др.- Минск: Вышэйш. школа, 1986.- 302 с.

7. Сборник задач по алгебре / Под редакцией Кострикина А.И.- М.: Наука, 1987.- 352 с.

8. Скорняков Л.А. Элементы алгебры.- М.: Наука, 1980.- 240 с.

9. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре.- М.: Наука, 1984.- 416с.

10. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре.- М.: Наука, 1977.- 288 с.

11. Л.А.Калужнин, В.И.Сущанський "Преобразования и перестановки".— Киев, 1985.

Зміст.