

УДК 511.172+512.712

Пащенко З.Д., Одінцева Є.П.¹ кандидат фіз.-мат. н., доцент кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»e-mail: pashchenko_zd@i.ua,

ORCID 0000-0003-4544-9242

² студентка 3 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»e-mail: lizavan2002@gmail.com,

ORCID 0000-0003-2500-5994

ДІЛЕННЯ З ОСТАЧЕЮ В КІЛЬЦІ ГАУСОВИХ ЧИСЕЛ

В статті розглядаються питання, пов'язані з цілими гаусовими числами. Зроблено аналіз визначення цілої та дробової частин комплексного числа з метою досягнення однозначності результату. Представлено два алгоритми ділення з остачею в кільці гаусових чисел, які дають однозначний результат з остачею, мінімальною за нормою: на основі визначення цілої та дробової частин комплексного числа, та на основі використання структури кратних чисел.

Ключові слова: гаусові числа, кратні числа, ціла та дробова частина, ділення з остачею.

Вступ

Всім відомо про ділення з остачею в кільці цілих чисел та кільці многочленів над полем. Однією з важливих характеристик цього ділення є однозначність неповної частки та остачі. За означенням евклідового кільця, в кожному такому кільці виконується умова, яку можна назвати діленням з остачею, але не вимагається однозначність цього ділення і її може не бути.

Близьким до кільця цілих чисел є кільце цілих гаусових чисел. Аналіз останніх досліджень і публікацій свідчить, що сучасні науковці приділяють значну увагу проблемі дослідження різних аспектів, пов'язаних з кільцем гаусових чисел. Робота [1] присвячена представленню цілих гаусових чисел в системі числення Пітті. В роботі [3] розглядається спосіб визначення всіх простих гаусових чисел, обмежених за модулем.

Відомо, що кільце гаусових чисел задовольняє умовам евклідового кільця [4], але ділення з остачею в ньому не однозначне. В кожному евклідовому кільці має місце алгоритм Евкліда, який безпосередньо залежить від алгоритму ділення з остачею. Про один з видів ділення з остачею велася мова в [2].

Метою цієї статті є аналіз структури кратних чисел на комплексній площині в кільці гаусових чисел та дослідження алгоритму ділення з остачею в цьому кільці в різних його проявах.

Основна частина

Кільце $\mathbf{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}, i^2 = -1\}$ цілих гаусових чисел є евклідовим з нормою $\delta(a + bi) = a^2 + b^2 = |a + bi|^2$. а саме:

$$1) \forall z_1, z_2 \in \mathbf{Z}[i], z_1, z_2 \neq 0, \delta(z_1 \cdot z_2) \geq \delta(z_1)$$

$$2) \text{ що } \forall z_1, z_2 \in \mathbf{Z}[i], z_2 \neq 0 \exists q, r \in \mathbf{Z}[i]$$

$$\text{а) } z_1 = z_2 \cdot q + r,$$

$$\text{б) } \delta(r) < \delta(z_2) \text{ або } r = 0. [4]$$

Якщо $r \neq 0$, то q називають неповною часткою, а r – остачею від ділення z_1 на z_2 . Число $z_2 \cdot q$ є кратним до z_2 .

Розглянемо розташування чисел, кратних z , на комплексній площині. Такими числами будуть

$$0, z, zi, z \cdot (1+i), z \cdot 2, z \cdot (2+i), \dots$$

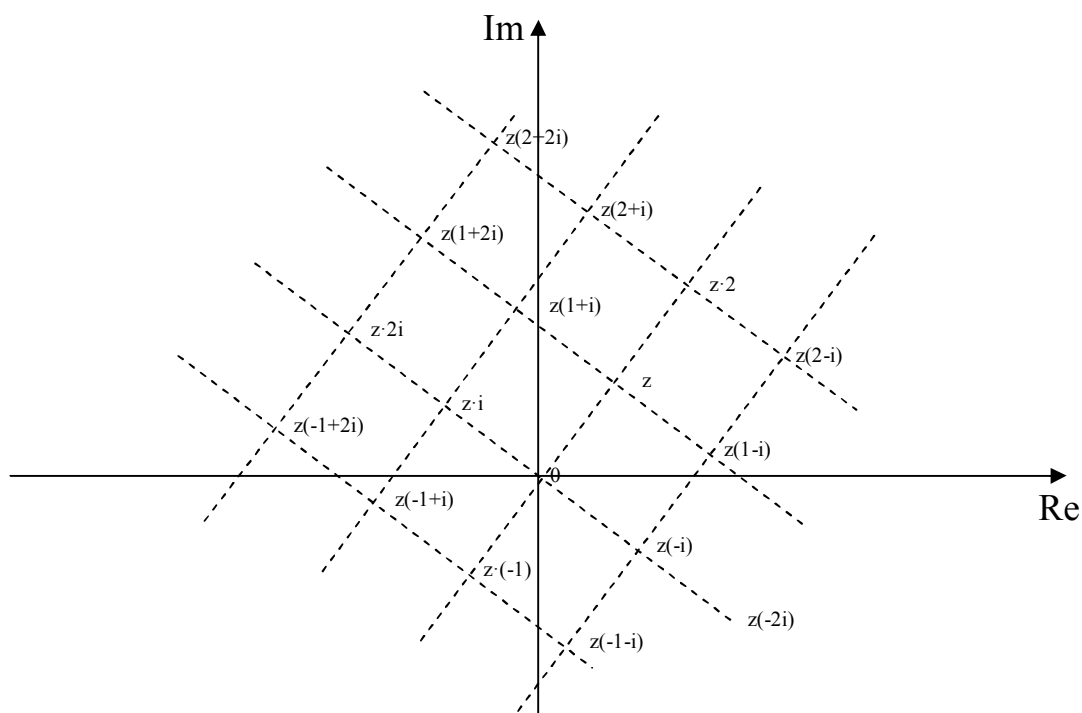


Рис.1

Число zi на комплексній площині має такий же модуль, як число z , а аргумент більший на $\frac{\pi}{2}$. Число $z(i+1) = zi + z$. Так як сумі комплексних чисел відповідає сума відповідних векторів, то число $z(i+1)$ знаходиться у четвертій вершині квадрата з вершинами $0, z, zi$. Числа $z \cdot 2i = 2zi$ та $z \cdot 2$ мають подвоєний модуль по відношенню до $|z|$ та той же аргумент, що і zi та z відповідно. Число $z(2+i) = z(1+i) + z = z^2 + zi$, тому воно знаходиться у четвертій вершині квадрата з вершинами $z, z \cdot 2, z(1+i)$. Аналіз розташування чисел, кратних z , приводить нас до висновку, що вони

розташовані у вершинах решітки, що визначається квадратом $0, z, zi, z(1+i)$, сторона якого дорівнює $|z|$ (рис.1).

Повернемося до питання про можливі неповні частки та остачі від ділення z_1 на z_2 . Умова $\delta(r) < \delta(z_2)$ рівносильна умові $|r| < |z_2|$, а так як $r = z_1 - z_2q$, то це означає, що відстань від z_1 до z_2q , кратного z_2 , менша $|z_2|$. З огляду на дискретність множини чисел, кратних z_2 , знайдеться квадрат, якому буде належати число z_1 (рис.2). У випадку, якщо z_1 ділиться на z_2 , то z_1 буде знаходитись у вершині такого квадрату.

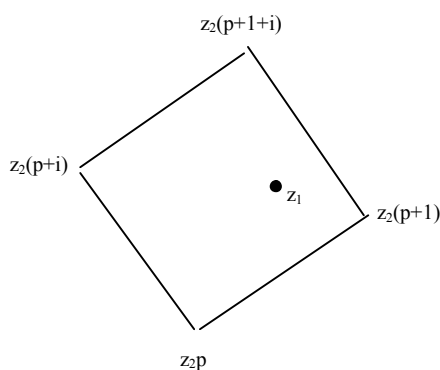


Рис.2.

Розглянемо випадки, коли z_1 не ділиться на z_2 . Якщо вершини такого квадрату з рис. 2 позначити $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (рис.3), то відстань від z_1 до α_i дорівнює $|z_1 - \alpha_i|$. Ця відстань менша $|z_2|$ для деяких вершин в залежності від розташування z_1 .

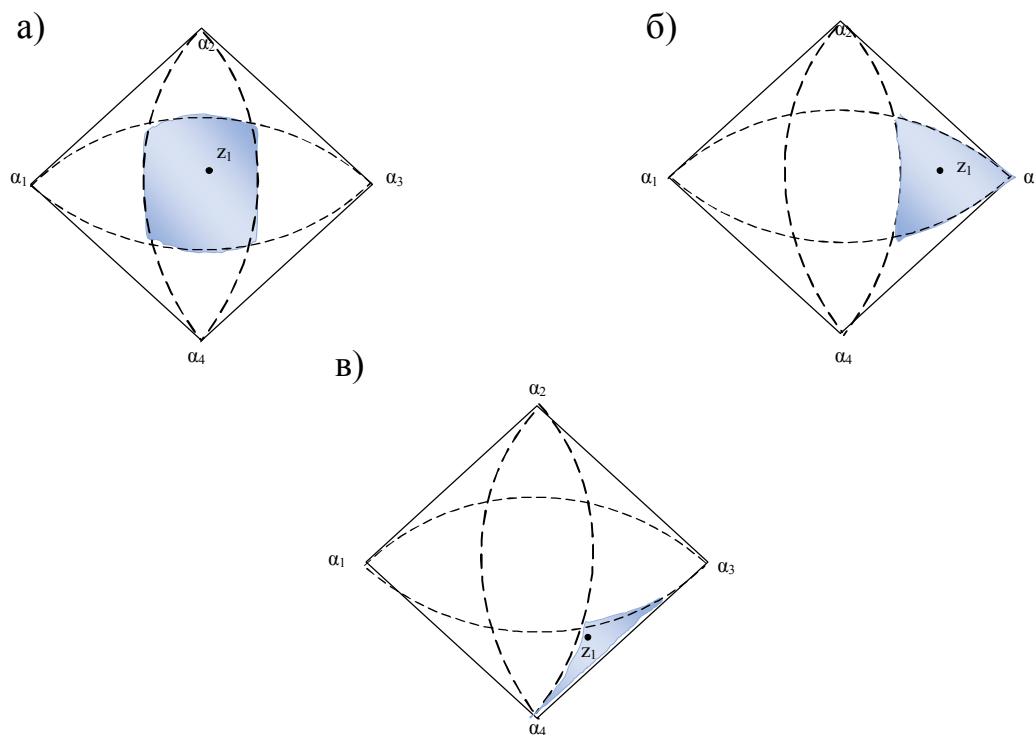


Рис.3

На цих рисунках зображені дуги є частинами кола з центрами в одній з вершин радіусу $|z_2|$. Якщо z_1 знаходиться в зафарбованій області рис.3а), то $|z_1 - \alpha_i| < |z_2|$, $i = 1, 2, 3, 4$, звідки кожне число $p, p+1, p+1+i, p+i$, якщо повернутися до позначень рис.2, може бути шуканою неповною часткою. Якщо z_1 знаходиться в заштрихованій області рис.3б), то $|z_1 - \alpha_i| < |z_2|$ лише для трьох вершин (у цьому випадку $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$), тому неповними частками можуть бути три числа. Якщо z_1 знаходиться в заштрихованій області рис.3в), то $|z_1 - \alpha_i| < |z_2|$ лише для двох вершин (у цьому випадку α_3, α_4), тому неповними частками можуть бути два числа. Інших типів розташувань z_1 по відношенню до вершин немає. Отже, отримуємо наступний результат: *існує не менше двох чисел, що задовольняють умовам неповної частки та остачі від ділення в кільці гаусових чисел.*

Наприклад, $23 + 30i = (16 + 13i) \cdot 1 + 7 + 17i$, причому $7 + 17i$ задовольняє умові остачі від ділення $23 + 30i$ на $16 + 13i$, бо $7^2 + 17^2 = 338 < \delta(16 + 13i) = 425$. Отже $q_1 = 1$, $r_1 = 7 + 17i$.

Але

$$23 + 30i = (16 + 13i) \cdot (1 + i) + (20 + i),$$

$$23 + 30i = (16 + 13i) \cdot (2 + i) + (4 - 12i) \text{ та}$$

$$23 + 30i = (16 + 13i) \cdot 2 + (-9 + 4i),$$

причому $r_2 = 20 + i$, $r_3 = 4 - 12i$ та $r_4 = -9 + 4i$ також задовольняють умові остачі: $\delta(r_2) = 401 < 425$, $\delta(r_3) = 160 < \delta(r_1) < 425$ та $\delta(r_4) = 97 < \delta(r_1) < 425$. Тому $q_2 = 1 + i$, $q_3 = 2 + i$, $q_4 = 2$ – відповідні неповні частки від ділення. Залишається питання про спосіб знаходження таких часток та остач. Один із способів спирається на поняття цілої та дробової частини комплексного числа.

Для комплексних чисел має місце поняття цілої та дробової частини. Числа $[z]$ і $\{z\}$ є відповідно **цілою** і **дробовою** частиною числа z , якщо $z = [z] + \{z\}$ і $\delta(\{z\}) \leq \frac{1}{2}$. За цим означенням ціла та дробова частини не знаходяться однозначно. Наприклад, $z = 5,6 + 2,3i$. Якщо $[z] = 5 + 2i$, то $\delta(\{z\}) = 0,6^2 + 0,3^2 = 0,45 < 0,5$; якщо $[z] = 6 + 2i$, то $\delta(\{z\}) = (-0,4)^2 + 0,3^2 = 0,25 < 0,5$.

Визначимо правило, як знайти такі цілу та дробову частини довільного комплексного числа, щоб дробова частина мала найменшу норму. Нехай $z = s + ti$, $[s]$, $[t]$, $\{s\}$, $\{t\}$ – традиційні позначення цілих та дробових частин s і t відповідно. Тоді $\{s\} = s - [s]$, $\{t\} = t - [t]$, $0 \leq \{s\}, \{t\} < 1$. Зауважимо, що число z загального вигляду буде мати таке розташування серед гаусових чисел, як на рис 4.

Кожна з вершин зображеного квадрату є цілим гаусовим числом і могла би бути $[z]$, якби $\delta(z - [z]) \leq \frac{1}{2}$. Число $z - [z]$ буде мати найменшу норму, якщо відстань від вершини квадрату до z найменша.

Нехай $z = s + ti$.

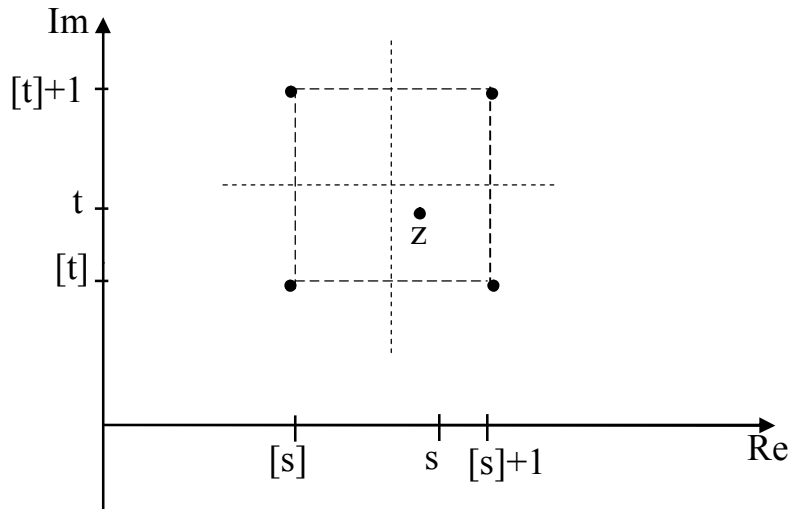


Рис. 4

Серединні перпендикуляри до сторін цього квадрату розділяють весь квадрат на чотири області, які містять по одній вершині квадрату. Причому число z належить лише одній з цих областей і найближче розташоване саме до вершини квадрату з цієї області. Ця ілюстрація допомагає в обґрунтуванні шуканого правила знаходження цілої та дробової частин комплексного числа.

Зауважимо, що для $\{s\}$ є лише два випадки:

$$1) 0 \leq \{s\} \leq \frac{1}{2} \quad \text{або} \quad 2) \frac{1}{2} < \{s\} < 1,$$

в залежності від того, яке з чисел $[s]$ чи $[s]+1$ знаходиться ближче до s . Таким чином маємо, що

$$1) \{s\}^2 \leq \frac{1}{4} \quad \text{і} \quad (\{s\} - 1)^2 > \frac{1}{4} \quad \text{або} \quad 2) (\{s\} - 1)^2 < \frac{1}{4} \quad \text{і} \quad \{s\}^2 > \frac{1}{4}.$$

Це зауваження також стосується і $\{t\}$.

Враховуючи, що кожне комплексне число має наступні чотири представлення через класичні цілу та дробову частини своїх уявної та дійсної частин:

$$\begin{aligned} z = s + ti &= ([s] + [t]i) + (\{s\} + \{t\}i) = \\ &= ([s] + 1 + [t]i) + (\{s\} - 1 + \{t\}i) = \\ &= ([s] + [t]i + 1) + (\{s\} + (\{t\} - 1)i) = \\ &= ([s] + 1 + [t]i + 1) + (\{s\} - 1 + (\{t\} - 1)i), \end{aligned}$$

можемо сформулювати таке **правило обчислення цілої та дробової частин комплексного числа**:

якщо $\{s\} \leq \frac{1}{2}$, $\{t\} \leq \frac{1}{2}$, то

$$[z] = [s] + [t]i, \quad \{z\} = \{s\} + \{t\}i ;$$

якщо $1 - \{s\} < \frac{1}{2}$, $\{t\} \leq \frac{1}{2}$, то

$$[z] = [s] + 1 + [t]i, \quad \{z\} = \{s\} - 1 + \{t\}i ;$$

якщо $\{s\} \leq \frac{1}{2}$, $1 - \{t\} < \frac{1}{2}$, то

$$[z] = [s] + ([t] + 1)i, \quad \{z\} = \{s\} + (\{t\} - 1)i ;$$

якщо $1 - \{s\} < \frac{1}{2}$, $1 - \{t\} < \frac{1}{2}$, то

$$[z] = [s] + 1 + ([t] + 1)i, \quad \{z\} = \{s\} - 1 + (\{t\} - 1)i .$$

В цьому правилі вибір цілої частини z співпадає з вибором найближчої до z вершини на рис.4. Так як ця вершина визначається однозначно, то однозначно визначається і дробова частина z , причому $\delta(\{z\}) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Опишемо алгоритм ділення з остачею в кільці $\mathbf{Z}[i]$, обраний в [2]. Він спирається на описане правило знаходження цілої та дробової частин. Якщо $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}[i]$, то неповна частка і остача від ділення z_1 на z_2 може знаходитися за наступним алгоритмом.

1. Знаходимо звичайну частку $z = \frac{z_1}{z_2} = s + ti$ комплексних чисел z_1 і z_2 .
2. Виділяємо цілу частину $[z] = q_1 + q_2i$ та обчислюємо дробову частину $\{z\} = \frac{z_1}{z_2} - (q_1 + q_2i)$ звичайної частки $z = s + ti$. Зауважимо, що ціла та дробова частини визначаються однозначно, а дробова частина задовольняє умову $\delta(\{z\}) \leq \frac{1}{2}$. Ціла частина $[z] = q_1 + q_2i \in \mathbf{Z}[i]$ буде шуканою неповною часткою від ділення z_1 на z_2 .
3. Остача від ділення знаходиться $r = z_1 - z_2 \cdot (q_1 + q_2i)$. Так як $\{z\} \cdot z_2 = z_1 - z_2 \cdot (q_1 + q_2i) = r$, то остача задовольняє необхідній умові: $\delta(r) = \delta(\{z\}) \cdot \delta(z_2) \leq \frac{1}{2} \delta(z_2) < \delta(z_2)$, причому також визначається однозначно.

Попередній приклад за цим алгоритмом дасть такий результат:

$$1. \frac{23 + 30i}{(16 + 13i)} = \frac{(23 + 30i) \cdot (16 - 13i)}{(16 + 13i)(16 - 13i)} = \frac{758 - 181i}{425},$$

2. Виділяємо цілу частину $q = \left[\frac{758 - 181i}{425} \right] = 2$, бо

$$\frac{758 - 181i}{425} - 2 = \frac{-92}{425} + \frac{-181}{425}i, \quad \left| \frac{-92}{425} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{-181}{425} \right| < \frac{1}{2}. \quad \text{Отже, неповна}$$

частка $q = 2$.

3. $r = 23 + 30i - (16 + 13i) \cdot 2 = -9 + 4i$.

У цьому прикладі за даним алгоритмом норма остачі найменша із можливих. За способом вибору остачі від ділення. Назвемо цей алгоритм **мінімальним алгоритмом ділення з остачею** в кільці $\mathbf{Z}[i]$,

Якщо для знаходження цілої та дробової частин в геометричному вигляді користуватись рис.4, то цілою частиною z буде число, що відповідає найближчій вершині зображеного квадрату, а дробовій частині буде відповідати вектор, що має початок в цій вершині і кінець в точці z . Варто зауважити, що при знаходженні цілої частини для чисел, що розташовані на серединних перпендикулярах до сторін цього квадрату, відповідної описаному правилу, обирається та вершина, що знаходиться лівіше та нижче.

Отже, ми обґрунтували процедуру алгоритму ділення з остачею в кільці гаусових чисел, описану в [2].

Процес знаходження неповної частки від ділення z_1 на z_2 можна організувати по іншому, використовуючи структуру кратних чисел. Цей процес в своїй основі спирається на порівнянні відстаней між z_1 і числами, кратними z_2 .

1. Порівнюємо відстані від z_1 до 0 , від z_1 до z_2 , від z_1 до $2z_2$, від z_1 до $3z_2$ і т.д., тобто розглядаємо $|z_1 - t \cdot z_2|$, $t \in \mathbf{Z}$, які є похилими з вершиною в точці z_1 до прямої, що проходить через 0 і z_2 . Дві похилі, сусідні з перпендикуляром до цієї прямої через точку z_1 , будуть найменшими серед решти, так як їх проекції не перевищують $|z_2|$, а решта проекцій більше $|z_2|$. Отже, з наближенням до перпендикуляру, похилі зменшуються, а після двох сусідніх збільшуються. Причому проекція однієї з цих сусідніх похилих не більша $\frac{1}{2}|z_2|$, а другої – не менша. отже, серед них можна обрати найменшу.

Тому можна стверджувати, що $\exists q_1 \in \mathbf{Z}$ таке, що $|z_1 - (q_1 - 1)z_2| > |z_1 - q_1 \cdot z_2|$, а $|z_1 - q_1 \cdot z_2| \leq |z_1 - (q_1 + 1)z_2|$ (тут похила $|z_1 - q_1 \cdot z_2|$ найменша).

Почати пошук q_1 можна з $t = 1$. Якщо $|z_1| > |z_1 - z_2|$, то розглядаємо порівняння для $t = 1, 2, 3, \dots$

Якщо $|z_1| \leq |z_1 - z_2|$, то розглядаємо порівняння для $t = 0, -1, -2, -3, \dots$

2. Далі аналогічно порівнюємо відстані від z_1 до $z_2q_1 + z_2 \cdot ti$ та знаходимо q_2 , яке задовольняє умовам

$$|z_1 - (z_2q_1 + z_2 \cdot (q_2 - 1)i)| > |z_1 - (z_2q_1 + z_2 \cdot q_2i)|, \text{ а}$$

$$|z_1 - (z_2q_1 + z_2 \cdot q_2i)| \leq |z_1 - (z_2q_1 + z_2 \cdot (q_2 + 1)i)|.$$

Якщо $|z_1 - q_1 \cdot z_2| > |z_1 - (z_2q_1 + z_2 \cdot i)|$, то розглядаємо порівняння для $t = 1, 2, 3, \dots$. Якщо $|z_1 - q_1 \cdot z_2| \leq |z_1 - (z_2q_1 + z_2 \cdot i)|$, то розглядаємо порівняння для $t = 0, -1, -2, -3, \dots$. Врешті решт знайдеться число $z_2q_1 + z_2 \cdot q_2i = z_2(q_1 + q_2i)$, кратне z_2 , найближче до z_1 , при цьому $q_1 + q_2i$ – неповна частка від ділення z_1 на z_2 .

Ілюстрацію цього алгоритму можна розглянути за допомогою рис.5.

Для z_1 та z_2 , які відповідають зображенню на рис.5, маємо, що $|z_1|$ більший $|z_1 - z_2|$, тому розглядаємо $t = 1, 2, 3, \dots$. Маємо $|z_1 - z_2| > |z_1 - 2z_2| > |z_1 - 3 \cdot z_2| > |z_1 - 4 \cdot z_2|$, $|z_1 - 4 \cdot z_2| < |z_1 - 5 \cdot z_2|$. Отже, $q_1 = 4$.

Порівняння описаних модулів у випадку очевидного розташування можна виконувати візуально як відстані від z_1 до z_2 , $A_1 = 2z_2$, $A_2 = 3z_2$, $A_3 = 4z_2$, $A_4 = 5z_2$.

2. Знаходимо q_2 . Так як $|z_1 - 4 \cdot z_2| > |z_1 - (4 \cdot z_2 + z_2i)|$, то розглядаємо $t = 1, 2, 3, \dots$. Маємо $|z_1 - (4 \cdot z_2 + z_2i)| < |z_1 - (4 \cdot z_2 + z_2 \cdot 2i)|$, отже $q_2 = 1$.

На рисунку це відповідає тому, що відстань від z_1 до $A_3 = 4z_2$ більша за відстань від z_1 до $A_5 = 4 \cdot z_2 + z_2i$, а ця відстань, в свою чергу, менша за відстань від z_1 до $A_6 = 4 \cdot z_2 + z_2 \cdot 2i$.

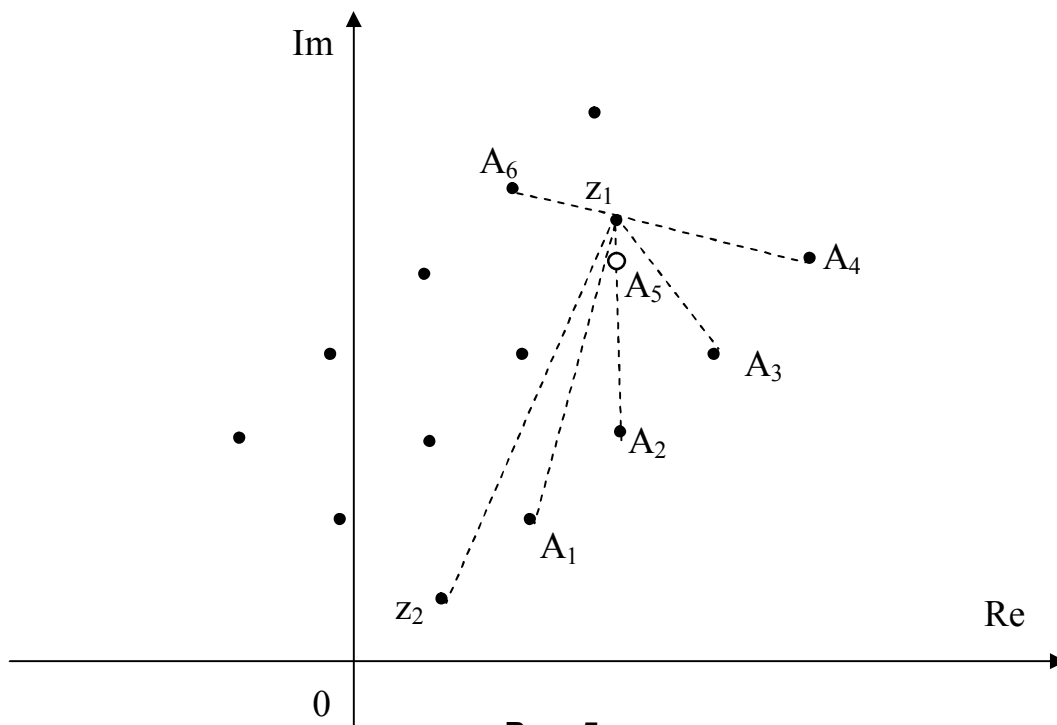


Рис. 5

Отже, $q = 4 + i$ – неповна частка від ділення z_1 на z_2 . Остача від ділення обчислюється як $r = z_1 - z_2 \cdot q$. Модулем цієї остачі на рисунку 5 є відстань від z_1 до $A_5 = z_2(4 + i)$.

Висновки

Дана стаття продовжує досліджувати питання, пов'язані з цілими гаусовими числами. Розглянута структура множини чисел, кратних заданому гаусовому числу z . Визначено, що ця множина утворює вершини решітки, що визначається квадратом $0, z, zi, z(1+i)$.

Розглядалися питання існування та неоднозначності неповної частки та остачі від ділення гаусових чисел та доведено твердження, що існує не менше двох чисел, що задовольняють їх умовам.

Визначено правило однозначного знаходження цілої та дробової частин комплексного числа. Обґрунтовано алгоритм знаходження остачі від ділення в кільці $\mathbf{Z}[i]$, мінімальної за нормою, що використовується в [2]. Створено процес знаходження неповної частки та остачі, мінімальної за нормою, від ділення гаусових чисел, що базується на використанні структури кратних чисел.

Результати цієї статті можуть бути використані при дослідженні алгоритму Евкліда в кільці $\mathbf{Z}[i]$, побудові та дослідженні ланцюгових дробів раціональних гаусових дробів, а також описані алгоритми можуть знайти свою програмну реалізацію.

Література

1. Богданов П.С. О представлении целых гауссовых чисел в системе счисления Питти / П.С. Богданов П.С. – Компьютерная оптика. – 2010. – том 34, №4. – С.561-565.
2. Пашенко З.Д., Вагнер Г.О. Скінченні ланцюгові гаусові дроби. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. – Слов'янськ: ДВНЗ “ДДПУ”, 2016. – № 6 – С. 26 – 30.
3. Пашенко З.Д. Решето Ератосфена для гаусових чисел. / З. Д. Пашенко, О. В. Плахотя // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ (за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції "Актуальні питання науки і освіти"). – Слов'янськ: СДПУ, 2012. – №2. – С. 82-86.
4. Требенко Д.Я., Требенко О.О. Алгебра і теорія чисел. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006. – Ч1. – 400 с.

Z.D. Paschenko, E.P. Odintsova

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

Division with the remainder in the ring of Gaussian numbers

The article deals with issues related to Gaussian integers. An analysis was made of the definition of the integer and fractional parts of a complex number in order to achieve a unique result. Two algorithms for division with a remainder in the ring of Gaussian numbers are presented that give a single-valued result with a remainder that is minimal in norm: based on the determination of the integer and fractional parts of a complex number, and based on the use of the structure of multiples.

Keywords: *Gaussian numbers, multiple numbers, whole and fractional part, division with the remainder.*
