Кадубовський О.А.,
Беседін Б.Б.,
Сілін Є.С.

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ:

розв’язання задач
ІІ етапу
Всеукраїнської учнівської олімпіади
з математики – 2023

Випуск 28

навчальний посібник

умови

відповіді

розв’язання

#СЕРІЯ : ВИКЛАДАЧІ ДДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ – 2023
6 – 11 класи

Рекомендовано вченою радою
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»
як навчальний посібник
для факультативних занять з математики

Слов'янськ / Дніпро – 2024

УДК 51 (075.3)

О-543

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2023 : навчальний посібник / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, Є.С. Сілін. – Слов'янськ : вид. центр «Маторін», 2024. – 104 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 28).

Адресовано вчителям та викладачам математики як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням закладів загальної середньої освіти та студентам педагогічних закладів вищої освіти.

РЕКОМЕНДОВАНО
вченою радою Державного вищого навчального закладу
«Донбаський державний педагогічний університет»,
Протокол №1 від 03.09.2024 р.

Рецензенти:

С.О. ЧАЙЧЕНКО – доктор фізико-математичних наук, проректор з науково-педагогічної роботи, професор кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»;

О.С. ЧАШЕЧНИКОВА – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики, фізики та методик їх навчання, Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка.

Відповідальний за випуск:

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики О.А. Кадубовський.

Зміст

ВІД АВТОРІВ

«Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!»

Д. Пойа

Даний посібник є 28-им випуском серії «Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям», заснованої у 2008 році. Посібник містить розв'язання задач II етапу (районного, міського) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, який проводився 25 листопада 2023 року відповідно до наказу МОН України від 31.10.2023 за №1330 «Про проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад з навчальних предметів і турнірів у 2023/2024 навчальному році» та наказу Департаменту освіти і науки Донецької облдержадміністрації за №99/163-23-ОД від 08.11.2023 «Про проведення II етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з навчальних предметів у 2023/2024 навчальному році».

Як і в попередніх випусках для більшості задач олімпіади пропонується кілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого із запропонованих методів. Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в певному розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головна мета авторів посібника – «донести» до вчителів і учнів якомога більше корисних математичних ідей і принципів та показати їх застосування.

Нагадаємо, що принципами в математиці називають деякі положення або методи, які використовуються в доведеннях математичних тверджень та під час розв’язання різноманітних задач. Дуже часто учні зустрічаються з ними при розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Перш за все учні, які беруть участь в олімпіадах, повинні володіти значною кількістю принципів. Нажаль шкільна програма не передбачає знайомства з більшістю із них.

З основними математичними принципами можна ознайомитись у наведеній літературі, зокрема в [13][1].

У представленому посібнику до окремих задач наводяться «доповнення», сенс яких полягає:

– у формулюванні двоїстої або схожої задачі,

– в узагальненні запропонованої задачі.

На думку авторів такі доповнення повинні активізувати і зацікавити учнів при підготовці до майбутніх олімпіад.

Автори посібника та керівництво фізико-математичного факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» висловлюють щиру подяку всім вчителям м. Слов'янськ, які беруть участь в організації та проведенні учнівських олімпіад з математики й семінарів, присвячених аналізу їх результатів.

Маємо надію, що представлений посібник буде корисним керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням, стане для багатьох з них поштовхом до більш змістовних міркувань і буде спонукати до систематичного ознайомлення з тим чи іншим розділом математики.

Вчіться творчому пошуку в процесі розв'язування задач!

Із найщирішими побажаннями, викладачі фізико-математичного факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет».

24.08.2024

[1] Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. К.: А.С.К., 2005. 344с.

«Математика вчить мислити й разом з тим вселяє віру в безмежні сили людського розуму. Вона виховує волю, характер.»

В.О. Сухомлинський

«Якщо не висловлено різні думки, немає з чого вибирати краще. Знання збираються по краплині, як вода в долині. Живи своїм розумом, але звіряйся з чужим. Не досить оволодіти премудрістю, потрібно також вміти користуватися нею. Не кажи чому учився, а кажи чого пізнав. Теорія без практики мертва і безплідна, практика без теорії неможлива.»

Рене Декарт

Звернення до самих юних та вже досвідчених учасників олімпіад з математики

Юний друже! Для повного та бездоганного (в сенсі дотримання належного рівня математичної строгості) розв'язання задач вкрай необхідно навчитись ретельно аналізувати умову самої задачі. І якщо умовою задачі (ненавмисно або ж навпаки – навмисно) закладена «певна неоднозначність / недовизначеність», це зовсім не означає, що «задача не є коректною». Навпаки – саме такі задачі є прикладом так званих задач на дослідження, при розв'язуванні яких важливо розуміти, що розв'язати задачу на дослідження, зокрема математичну, це дати категоричну відповідь в кожному з можливих випадків (- обмежень) шляхом ретельного аналізу / дослідження повної системи всіх можливих додаткових умов-обмежень, кожна з яких:

по-перше – дозволяє повною мірою конкретизувати поставлене питання-завдання;

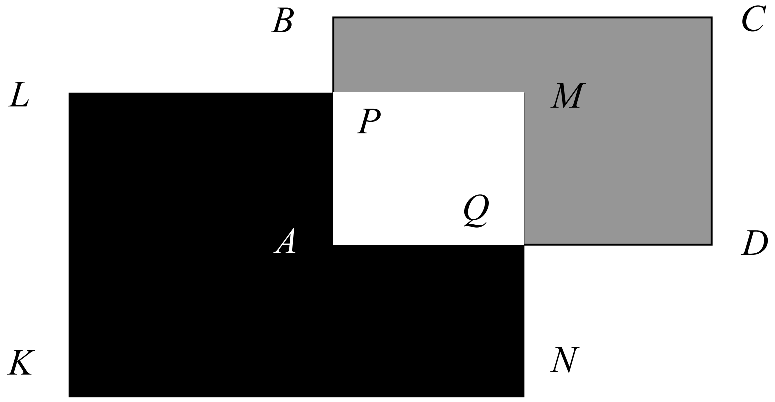
по-друге – не наділяє умову надлишковими даними (які можна одержати з певної частини вихідної інформації);

по-третє – не суперечить даним або наслідкам з них.

ЧАСТИНА І.
УМОВИ ЗАДАЧ

6 клас

1. Дано два прямокутні трикутники $ABCD$ (довжини сторін AB і BC якого становлять 3 см і 5 см відповідно) та $KLMN$ (довжини сторін KL і LM якого становлять 4 см і 6 см відповідно) так, як це показано на рисунку нижче. Відомо, що площа сірої частини прямокутника $ABCD$ становить 10 см^2. Знайти площу чорної частини прямокутника $KLMN$.



2. Знайти значення числового виразу

$$S = 4 + 8 + 12 + ... + 2020 + 2024 - 2 - 6 - 10 - ... - 2018 - 2022.$$

3. Щоб потрапити до сейфу, необхідно набрати шифр, який складається з 10 перших простих чисел, записаних послідовно за зростанням. В одержаному складеному числі, не змінюючи порядок його цифр, викресліть половину цифр так, щоб одержане в результаті число було:

а) найменшим з можливих (3 бали);

б) найбільшим з можливих (4 бали).

4. Дано відрізок AB. Знайдіть усі такі точки X прямої AB, для яких виконується умова $AX > AB$.

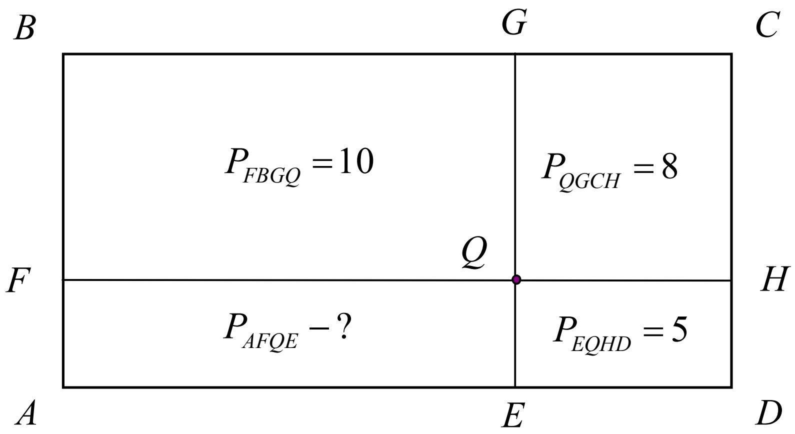
5. На дошці було написано декілька різних натуральних чисел. Ці числа розбили на три групи так, що в кожній з них опинилося принаймні одне число. До кожного числа з першої групи приписали у кінці його запису цифру 1, до кожного числа з другої групи – цифру 8, а числа з третьої групи залишили без змін.

а) Чи могла сума всіх цих чисел збільшитися у 4 рази? (3 бали);

б) Чи могла сума всіх цих чисел збільшитися у 18 разів? (4 бали).

7 клас

1. Прямокутник $ABCD$ поділили на чотири прямокутники так, як показано на рисунку нижче. Знайти периметри прямокутників $ABCD$ та $AFQE$, якщо периметри прямокутників $FBGQ$, $QGCH$ і $EQHD$ становлять 10, 8 та 5 лін. од. відповідно.



2. Дано відрізок AB. Знайдіть усі такі точки X на прямій AB, що $AX > BX$.

3. Деяке додатне число A збільшили на 25%. На скільки відсотків треба зменшити одержане число B, щоб отримати початкове число A?

4. Два однакових поля необхідно зорати трьома тракторами. Перший трактор може зорати одне поле за 16 годин, другий трактор – за 48 годин, а третій трактор – за 18 годин. Знайти найменший час, за який можна зорати обидва поля за умов, що всі трактори починають роботу одночасно, а для переїзду з одного поля на інше трактору необхідно 40 хвилин.

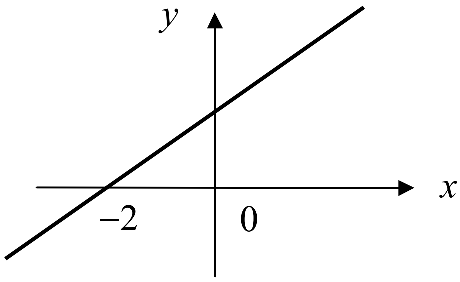
5. Представники видавництва на виставку привезли декілька книг для продажу (кожну книгу в одному екземплярі). Вартість кожної книги виражається натуральними числом гривень. Якщо вартість книги є меншою за 100 гривень, то на неї приклеюють наліпку «вигідно». Проте до відкриття виставки вартість кожної книги збільшили на 10 гривень, в наслідок чого кількість книг з наліпками «вигідно» зменшилась.

а) Чи могла зменшитися середня вартість книг з наліпкою «вигідно» після відкриття виставки у порівнянні із середньою вартістю книг з наліпкою «вигідно» до відкриття виставки? (3 бали);

б) Чи могла зменшитися середня вартість книг без наліпки «вигідно» після відкриття виставки у порівнянні із середньою вартістю книг без наліпки «вигідно» до відкриття виставки? (4 бали).

8 клас

1. На рисунку нижче зображено графік функції $f\left(x\right)=\left(a+b\right)x+3b$. Знайдіть значення виразу $b-2a$.



2. Дано трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Яку фігуру утворюють середини (усіх можливих) відрізків з кінцями на різних основах трапеції? Відповідь обґрунтуйте.

3. Задані три попарно різних натуральних чисел. Чи може їхнє середнє арифметичне бути:

а) у 2 рази більшим за найбільший спільний дільник заданих трьох чисел? (*3 бали*)

б) у $\dfrac{5}{3}$ рази більшим за найбільший спільний дільник заданих трьох чисел? (*4 балів*)

4. Медіана BM трикутника ABC є діаметром кола, яке перетинає сторону BC в її середині. Знайти довжину сторони AC, якщо радіус описаного кола трикутника ABC становить a см.

5. На дошці було записано декілька натуральних чисел. Ці числа розбили на три групи так, що в кожній з них опинилося принаймні одне число. До кожного числа з першої групи приписали у кінці його запису цифру 3, до кожного числа з другої групи – цифру 7, а числа з третьої групи залишили без змін.

а) Чи могла сума всіх цих чисел збільшитися у 8 разів? (3 бали);

б) Чи могла сума всіх цих чисел збільшитися у 17 разів? (4 бали).

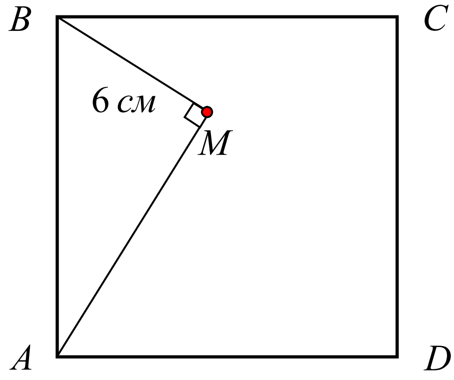
9 клас

1. Чи існує функція $y=ax^2+bx+c$ з цілими непарними коефіцієнтами a,b,c, яка має одним із нулів число $\dfrac{1}{2024}$?

2. Дано відрізок AB. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що трикутник AXB є прямокутним.

3. Визначте суму всіх цілих значень параметра a, за яких один з коренів рівняння $2x^2 - (4a+9)x + 6a + 9 = 0$ належить проміжку $(-8;0)$, а другий з коренів – проміжку $(1;5)$.

4. Дано квадрат $ABCD$, довжина сторони якого є більшою за 6 см. У середині квадрату обрано таку точку M, що $\angle AMB = 90^0$, а довжина відрізка BM становить 6 см. Знайдіть площу $\triangle BMC$.



5. У ящику лежать 76 фруктів, маса кожного з яких виражається натуральним числом. У ящику є принаймні два фрукти різної маси, а середня маса всіх фруктів становить 100 грамів. Середня маса фруктів, маса кожного із яких є меншою за 100 грамів, становить 85. Середня маса фруктів, маса кожного із яких є більшою за 100 грамів, становить 124.

а) Чи могло у ящику виявитися порівну фруктів масою меншою за 100 грамів та фруктів масою більшою за 100 грамів? (3 бали);

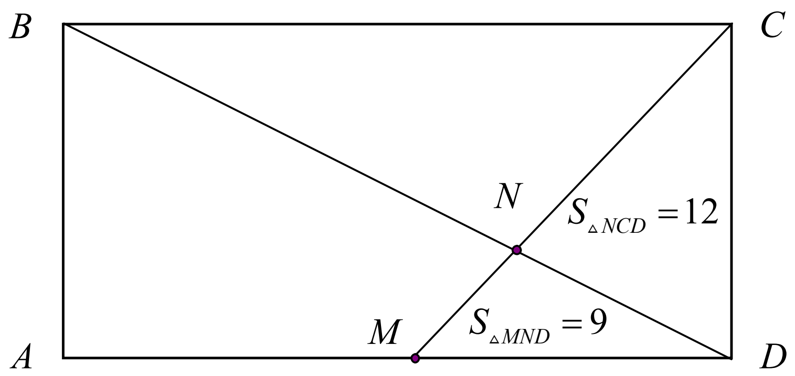
б) Чи могло у ящику опинитися менше 8 фруктів, маса кожного з яких дорівнює 100 грамів? (4 бали).

10 клас

1. Спростити функцію $y = x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^2} + \frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^3} + \ldots$ та знайти її значення при $x = 3$.

2. Усі бічні грані трикутної піраміди $DABC$ є прямокутними трикутниками з прямими кутами при вершині D (*таку піраміду називають прямокутним тетраедром* $DABC$ *з основою* ABC). Доведіть, що основа (трикутник ABC) такої піраміди є гострокутним трикутником.

3. Обчислити площу прямокутника $ABCD$ (зображеного на рисунку нижче), для якого M – така точка на стороні AD, що площі трикутників MND та NCD становлять 9 та 12 кв. од. відповідно, а N – точка перетину відрізків BD і CM.



4. Відомо, що у Софії в кишені було n монет, кожна з яких могла бути лише номіналом 2, 5 або 10 гривень. Софія здійснила всі свої покупки та сплатила за кожен товар окремо (на різних касах) без решти (від касирів) тільки цими монетами, витративши при цьому всі свої монети.

а) Чи могли всі її покупки складатися із блокноту за 56 гривень та ручки за 29 гривень, якщо $n = 14$? (3 бали);

б) Чи могли всі її покупки складатися із чашки чаю за 10 гривень, тістечка за 15 гривень та піріжка за 20 гривень, якщо $n = 19$? (4 бали).

5. При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $\sqrt{1-(x+2a)^2} \ge \frac{4}{3}x$ є проміжок завдовжки $\frac{9}{5}$?

11 клас

1. В трикутнику ABC довжина медіани BM дорівнює половині довжини сторони BC. Доведіть, що $\angle ABM = \angle BCA + \angle BAC$.

2. Визначити, за яких значень x три числа $\lg 2$, $\lg\left(3^x - 3\right)$ та $\lg\left(3^x + 9\right)$, узяті в заданій послідовності, є послідовними членами арифметичної прогресії.

3. Дано трикутник ABC. Знайдіть геометричне місце точок простору, що є рівновіддаленими від сторін $\triangle ABC$.

4. На дошці написано дванадцять різних натуральних чисел. Середнє арифметичне семи найменших із них становить 8, а середнє арифметичне семи найбільших із них дорівнює 16.

а) Чи може найбільше з цих дванадцяти чисел дорівнювати 18? (3 бали);

б) Чи може середнє арифметичне всіх дванадцяти чисел становити 11? (4 бали).

5. Знайдіть значення параметра a, при якому корінь рівняння $\lg\left(\sin\left(5\pi x\right)\right) = \sqrt{16 + a - x}$ належить проміжку $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

ЧАСТИНА II.
ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

6 клас

Задача №1 *19 см*^{2}.

Задача №2 *1012.*

Задача №3 а) *11111229;* б) *77192329.*

Задача №4 *шукані точки* X *утворюють фігуру, одержану шляхом видалення з прямої* AB *усіх точок відрізка* CB *(разом із його кінцями), де* C *– така точка прямої* AB*, що точка* A *є серединою відрізка* CB*.*

Задача №5 а) *ТАК;* б) *НІ.*

7 клас

Задача №1 *15 (лін. од.); 7 (лін. од.).*

Задача №2 *шукані точки* X *утворюють фігуру, одержану шляхом видалення з прямої* AB *усіх точок променя* OA *(разом із його початком), де* O *– середина відрізка* AB*.*

Задача №3 *20 %.*

Задача №4 *14 годин 46 хвилин.*

Задача №5 а) *ТАК;* б) *ТАК.*

8 клас

Задача №1 *0.*

Задача №2 *середня лінія трапеції.*

Задача №3 а) *ТАК;* б) *НІ.*

Задача №4 $2a$.

Задача №5 а) *ТАК;* б) *НІ.*

9 клас

Задача №1 *НІ.*

Задача №2 *фігура, яка складається з кола, для якого відрізок AB є діаметром, та двох прямих, які проходять через кінці відрізка AB перпендикулярно до нього за винятком кінців відрізка AB.*

Задача №3 *-14.*

Задача №4 *18 кв. од.*

Задача №5 а) *НІ;* б) *НІ.*

10 клас

Задача №1 $y = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^4 + 1, & x \neq 0 \end{cases}$; *82.*

Задача №2 *на доведення.*

Задача №3 *56 кв. од.*

Задача №4 а) *ТАК;* б) *НІ.*

Задача №5 $a = \dfrac{7}{40}$.

11 клас

Задача №1 *на доведення.*

Задача №2 $x = 2$.

Задача №3 *пряма, що проходить через центр вписаного у $\triangle ABC$ кола та є перпендикулярною до площини ABC.*

Задача №4 а) *НІ;* б) *НІ.*

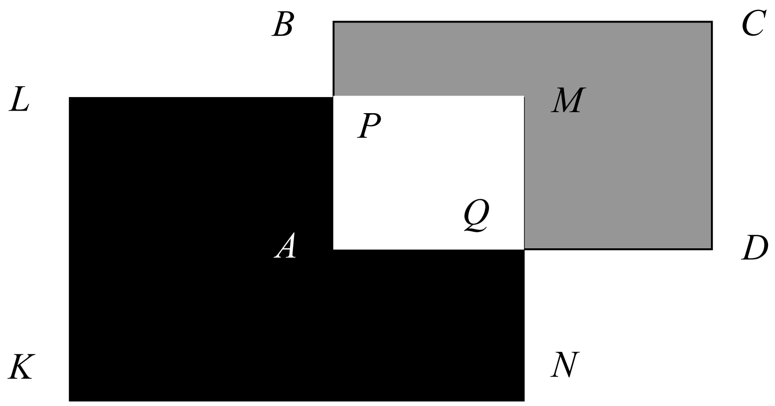
Задача №5 $a = -14,3$.

ЧАСТИНА ІІІ.
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

6 клас

Задача 1

Дано два прямокутні трикутники $ABCD$ (довжини сторін AB і BC якого становлять 3 см і 5 см відповідно) та $KLMN$ (довжини сторін KL і LM якого становлять 4 см і 6 см відповідно) так, як це показано на рисунку нижче. Відомо, що площа сірої частини прямокутника $ABCD$ становить 10 $см^2$. Знайти площу чорної частини прямокутника $KLMN$.



Розв'язання.

1. Оскільки довжини сторін AB і BC прямокутника $ABCD$ дорівнюють 3 см і 5 см відповідно, то його площа становить $S_{ABCD} = 3 \cdot 5 = 15$ $см^2$.
2. Оскільки довжини сторін KL і LM прямокутника $KLMN$ дорівнюють 4 см і 6 см відповідно, то його площа становить $S_{KLMN} = 4 \cdot 6 = 24$ $см^2$.
3. З урахуванням взаємного розташування прямокутників $ABCD$ і $KLMN$, чотирикутник $APMQ$ також є прямокутником та спільною їх частиною. Тому площа прямокутника $APMQ$ становить $S_{APMQ} = AP \cdot PM$ $см^2$.
4. Оскільки площа сірої частини прямокутника $ABCD$ становить 10 $см^2$, то має місце рівність $S_{ABCD} = S_{APMQ} + 10$, звідки $S_{APMQ} = 15 - 10 = 5$ $см^2$.
5. Якщо через x позначити невідому площу чорної частини прямокутника $KLMN$, то буде мати місце рівність $x + S_{APMQ} = S_{KLMN}$. Звідки маємо рівняння $x + 5 = 24$. І тому $x = 24 - 5 = 19$ $см^2$.

Відповідь: 19 кв. см.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1

?! Чи звернули увагу на те, що має місце рівність

$$S_{KLMN} - \widetilde{S}_{KLMN} = S_{ABCD} - \widetilde{S}_{ABCD},$$

де $\widetilde{S}_{KLMN}$, $\widetilde{S}_{ABCD}$ – площі чорної і сірої частин прямокутників $KLMN$ та $ABCD$ відповідно.

Задача 2

Знайти значення числового виразу

$$S = 4+8+12+...+2020+2024-2-6-10-...-2018-2022.$$

Розв'язання.

1 спосіб.

$$S = 4+8+12+...+2020+2024-2-6-10-...-2018-2022 =$$

$$= \underbrace{4-2+8-6+12-10+...+2020-2018+2024-2022}_{1012=2024:2 \text{ доданків}} =$$

$$= \underbrace{(4-2)+(8-6)+(12-10)+...+(2020-2018)+(2024-2022)}_{506 \text{ доданків}} =$$

$$= \underbrace{2+2+2+...+2+2}_{506 \text{ доданків}} = 506\cdot 2 = 1012.$$

2 спосіб.

$$S = \underbrace{4+8+12+...+2020+2024-2-6-10-...-2018-2022}_{1012=2024:2 \text{ доданків}} =$$

$$= \underbrace{(4+8+12+...+2020+2024)}_{506 \text{ доданків}} - \underbrace{(2+6+10+...+2018+2022)}_{506 \text{ доданків}} =$$

$$= \underbrace{((4+2024)+(8+2020)+...+(1012+1016))}_{253 \text{ доданки}} -$$

$$- \underbrace{((2+2022)+(6+2018)+...+(1010+1014))}_{253 \text{ доданки}} =$$

$$= \underbrace{(2028+2028+...+2028)}_{253 \text{ доданки}} - \underbrace{(2024+2024+...+2024)}_{253 \text{ доданки}} =$$

$$= 2028\cdot 253 - 2024\cdot 253 = 253\cdot(2028-2024) = 253\cdot 4 = 1012.$$

Відповідь: 1012**.**

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 2

?! Знайти суму $S = 2+4+6+...+2020+2022+2024.$

?! Знайти суму $S = 1+3+5+...+2021+2023+2025.$

Задача 3

Щоб потрапити до сейфу, необхідно набрати шифр, який складається з 10 перших простих чисел, записаних послідовно за зростанням. В одержаному складеному числі, не змінюючи порядок його цифр, викресліть половину цифр так, щоб одержане в результаті число було:

а) найменшим з можливих (3 бали); б) найбільшим з можливих (4 бали).

Розв'язання.

1. Не важко перевірити, що першими 10-ма простими числами (*натуральні числа, які мають точно два дільника – число 1 та саме це число*), записаними послідовно за зростанням, є наступні числа: $2,3,5,7,11,13,17,19,23,29$.

Тому одержане (за умовою задачі) складене 16-значне число A має вид

$$A = 2357111317192329.$$

2. Викреслимо у числі A **вісім** цифр так (не змінюючи порядок його цифр), щоб одержане в результаті число B було найменшим з можливих.

Серед цифр числа A першою з найменших є цифра 1, яка стоїть на 5 його позиції; тому викреслимо перші 4 його цифри 2, 3, 5 і 7. Після чого залишиться викреслити ще 4 цифри в одержаному числі $B_1 = 111317192329$.

Серед цифр числа B_1 на 1, 2 та 3 його позиціях стоять найменші з можливих цифр. Тому їх слід залишити як найменші з можливих цифр для одиниць відповідних розрядів шуканого числа B, а викреслення 4 цифр здійснити у числі $B_2 = 317192329$. Серед цифр числа B_2 першою з найменших є цифра 1, яка стоїть на 2 його позиції; тому викреслимо першу його цифру 3. Після чого залишиться викреслити ще 3 цифри в одержаному числі $B_3 = 17192329$.

Серед цифр числа B_3 на 1 його позиції стоїть найменша з можливих цифр. Тому її слід залишити як найменшу з можливих цифр для одиниці відповідного розряду шуканого числа B, а викреслення 3 цифр здійснити у числі $B_4 = 7192329$. Серед цифр числа B_4 першою з найменших є цифра 1, яка стоїть на 2 його позиції; тому викреслимо першу його цифру 7. Після чого залишиться викреслити ще 2 цифри в одержаному числі $B_5 = 192329$.

Серед цифр числа B_5 на 1 його позиції стоїть найменша з можливих цифр; тому її слід залишити як найменшу з можливих цифр для одиниці відповідного розряду шуканого числа B, а викреслення 2 цифр здійснити у числі $B_6 = 92329$. Серед цифр числа B_6 першою з найменших є цифра 2, яка стоїть на 2 його позиції; тому викреслимо першу його цифру 9. Після чого залишиться викреслити ще 1 цифру в одержаному числі $B_7 = 12329$.

На 1-ій та 2-ій позиції числа B_7 стоять найменші з можливих його цифр; тому їх слід залишити як найменші з можливих цифр для одиниць відповідних розрядів шуканого числа B, а викреслення 1 цифри здійснити у числі $B_8 = 329$. Серед цифр числа B_8 першою з найменших є цифра 2, яка стоїть на 2 його позиції; тому викреслимо першу його цифру 3. *І тоді останніми цифрами шуканого числа В будуть відповідні цифри числа* $B_9 = 29$.

Застосовуючи наведений вище спосіб викреслення й одержимо шукане число

$$B = \left[\underbrace{\cancel{2}\,\cancel{3}\,\cancel{5}\,\cancel{7}}_{1\,крок}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\;\underbrace{\cancel{3}}_{2\,крок}\;\boxed{1}\;\underbrace{\cancel{7}}_{3\,крок}\;\boxed{1}\;\underbrace{\cancel{9}}_{4\,крок}\;\boxed{2}\;\underbrace{\cancel{3}}_{5\,крок}\;\boxed{2}\boxed{9} \right] = 11111229,$$

яке є найменшим з можливих.

3. Викреслимо у числі A **вісім** цифр так (не змінюючи порядок його цифр), щоб одержане в результаті число було найбільшим з можливих

Серед цифр числа A першою з найбільших є цифра 7, яка стоїть на 4 його позиції; тому викреслимо перші 3 його цифри 2, 3 і 5. Після чого залишиться викреслити ще 5 цифр в одержаному числі $C_1 = 7111317192329$.

Серед цифр числа C_1 на 1-ій його позиції стоїть найбільша з можливих цифр. Тому її слід залишити як найбільшу з можливих цифр для одиниць відповідних розрядів шуканого числа C, а викреслення 5 цифр здійснити у числі $C_2 = 111317192329$. Серед цифр числа C_2 першою з найбільших є цифра 3, яка стоїть на 4 його позиції; тому викреслимо перші три його цифри 1, 1 та 1. Після чого залишиться викреслити ще 2 цифри в одержаному числі $C_3 = 317192329$.

Серед цифр числа C_3 першою з найбільших є цифра 7, яка стоїть на 3 його позиції; тому викреслимо перші 2 його цифри 3 та 1.

І тоді останніми цифрами шуканого числа C будуть відповідні цифри числа $C_4 = 7192329$.

Застосовуючи наведений вище спосіб викреслення й одержимо шукане число

$$C = \left[\underbrace{\cancel{2}\,\cancel{3}\,\cancel{5}}_{1\,крок}\,\boxed{7}\,\underbrace{\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{3}\,\cancel{1}}_{2\,крок}\,\boxed{7}\boxed{1}\boxed{9}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{9} \right] = 77192329,$$

яке є найбільшим з можливих.

Відповідь: а) 11111229; б) 77192329.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 3

?! У числі $A = 2357111317192329$, не змінюючи порядок його цифр, викресліть 10 цифр так, щоб одержане в результаті число було найменшим.

?! У числі $A = 2357111317192329$, не змінюючи порядок його цифр, викресліть 10 цифр так, щоб одержане в результаті парне число було найменшим.

?! У числі $A = 2357111317192329$, не змінюючи порядок його цифр, викресліть 10 цифр так, щоб одержане в результаті непарне число було найменшим.

?! У числі $A = 2357101317192329$, не змінюючи порядок його цифр, викресліть 10 цифр так, щоб одержане в результаті число було найменшим.

?! У числі $A = 2387161317192329$, не змінюючи порядок його цифр, викресліть 10 цифр так, щоб одержане в результаті число було найбільшим.

Задача 4

Дано відрізок AB. Знайдіть усі такі точки X прямої AB, для яких виконується умова $AX > AB$.

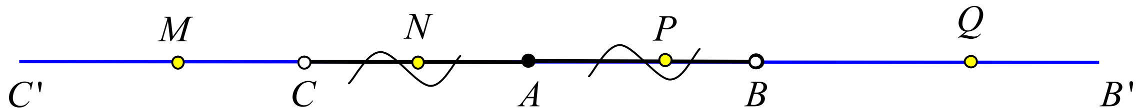
Розв'язання.

1. Нехай Ω – шукана множина точок на прямій AB. Тоді, з урахуванням умови, точка X прямої AB належить множині Ω тоді і лише тоді, коли виконується умова $XA > AB$, де (суть) XA, AB – відстані між точками X, A та A, B відповідно. Крім того, слід розуміти, що відстань від певної точки W до самої себе становить 0, тобто $WW = 0$ (лін. од.).

І навпаки:

якщо для точки Y прямої AB виконується умова $YA < AB$, то $Y \notin \Omega$;

якщо для точки Y прямої AB виконується умова $YA = AB$, то $Y \notin \Omega$.



2. Розглянемо на прямій AB таку точку C, щоб точка A була серединою відрізка CB. Нехай далі: C' – довільна точка променя AC, яка відстоїть від точки A на відстані, більшій ніж точка C; B' – довільна точка променя AB, яка відстоїть від точки A на відстані, значно більшій ніж точка B. Тоді зазначені точки розбивають пряму AB на чотири частини: промінь CC', відрізки CA, AB та промінь BB'.

3. Порівняємо відстані від (довільних але фіксованих) точок (кожної із зазначених вище частин прямої AB) до точки A із довжиною відрізка AB.

якщо точка M належить променю CC' (за винятком точки C), то

$$MA = MC + CA \Rightarrow MA > CA = AB \Rightarrow MA > AB \Rightarrow M \in \Omega;$$

оскільки $CA = AB$, то $C \notin \Omega$;

якщо точка N є внутрішньою точкою відрізка CA, то

$$CA = CN + NA \Rightarrow NA < CA = AB \Rightarrow NA < AB \Rightarrow N \notin \Omega;$$

оскільки $AA = 0 < AB$, то $A \notin \Omega$;

якщо точка P є внутрішньою точкою відрізка AB, то

$$AB = AP + PB \Rightarrow PA < AB \Rightarrow P \notin \Omega;$$

оскільки $BA = AB$, то $B \notin \Omega$;

якщо точка Q належить променю BB' (за винятком точки B), то

$$AQ = AB + BQ \Rightarrow QA > AB \Rightarrow Q \in \Omega.$$

Отже, множині Ω належать ті і лише ті точки прямої AB, які належать променю CC' (за винятком т. C) або променю BB' (за винятком т. B).

Відповідь: шукані точки X утворюють фігуру, одержану шляхом видалення з прямої AB усіх точок відрізка CB (разом із його кінцями), де C – така точка прямої AB, що точка A є серединою відрізка CB.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4

?! Дано відрізок AB. Знайдіть усі такі точки X на прямій AB, що $XA > XB$.

Задача 5

На дошці було написано декілька різних натуральних чисел. Ці числа розбили на три групи так, що в кожній з них опинилося принаймні одне число. До кожного числа з першої групи приписали у кінці його запису цифру 1, до кожного числа з другої групи – цифру 8, а числа з третьої групи залишили без змін.

а) Чи могла сума всіх цих чисел збільшитися у 4 рази? (3 бали);

б) Чи могла сума всіх цих чисел збільшитися у 18 разів? (4 бали).

Розв'язання.

Нехай:

до першої групи потрапило k натуральних чисел, сума яких становить A,
до другої групи потрапило m натуральних чисел, сума яких становить B,
а сума чисел, які потрапили до третьої групи, становить C.

Тоді:

після приписувань у кінці запису кожного з чисел першої групи цифри 1, їх нова сума становить $A' = 10A + k$;
після приписувань у кінці запису кожного з чисел другої групи цифри 8, їх нова сума становить $B' = 10B + 8m$.

а) Припустимо, що сума змінених чисел збільшилася у 4 рази у порівнянні із сумою початкових чисел. Тоді має виконуватися рівність

$$A' + B' + C = 4\left(A + B + C\right),$$

звідки

$$10A + k + 10B + 8m + C = 4A + 4B + 4C,$$

$$6A + k + 6B + 8m = 3C,$$

$$6\left(A + B\right) + k + 8m = 3C. \qquad (6.5.1)$$

Дослідимо випадок, коли до кожної із трьох груп потрапило точно по одному натуральному числу: до першої групи – число a, до другої – число b, а до третьої – число c. Тоді, очевидно, що:

$k = m = 1$; $A = a$, $B = b$, $C = c$.

А, з урахуванням співвідношення (6.5.1), виконується рівність

$$6\left(a + b\right) + 9 = 3c,$$

звідки $2\left(a + b\right) + 3 = c$.

Оскільки натуральні числа є різними, то покладемо, наприклад, що $a = 1$, $b = 2$. Тоді з останньої рівності маємо, що

$$c = 2\left(1 + 2\right) + 3 = 9.$$

Очевидно, що $a + b + c = 1 + 2 + 9 = 12$, що в 4 рази менше за суму змінених чисел $a' + b' + c' = 11 + 28 + 9 = 48$.

Таким чином, сума всіх чисел могла збільшитися у 4 рази, наприклад у випадку, коли: до першої групи потрапило одне число 1; до другої групи – одне число 2, а до третьої групи – одне число 9.

б) Припустимо тепер, що сума змінених чисел збільшилася у 18 разів у порівнянні із сумою початкових чисел. Тоді має виконуватися рівність

$$A' + B' + C = 18\left(A + B + C\right),$$

звідки

$$10A + k + 10B + 8m + C = 18A + 18B + 18C,$$
$$8A - k + 8B - 8m + 17C = 0,$$
$$\left(A - k\right) + 8\left(B - m\right) + 7A + 17C = 0. \qquad (6.5.2)$$

Очевидно, що **3-ій і 4-ий доданки** ($7A$ та $17C$) в лівій частині рівності (6.5.2) є **натуральними числами**, бо A і C є сумами натуральних чисел з відповідних груп.

Також очевидно, що кожне натуральне число t, яке є більшим за одиницю, можна подати у вигляді $t = 1 + \left(t - 1\right)$ (суми числа 1 та числа, яке на 1 менше за вихідне). Тому сума A різних k натуральних чисел не може бути меншою за їх кількість k. Виняток становить випадок, коли до першої групи потрапляє точно одне число (тобто, коли $k = 1$), яке дорівнює ОДНОМУ. Але в цьому випадку $k = 1, A = 1$, і тому $\left(A - k\right) = 0$. Отже, **1-ий доданок** $\left(A - k\right)$ в лівій частині рівності (6.5.2) може бути **або натуральним числом**, **або числом НУЛЬ**.

Аналогічно, **2-ий доданок** $8\left(B - m\right)$ в лівій частині рівності (6.5.2) може бути або натуральним число, або числом НУЛЬ.

Таким чином сума чотирьох доданків в лівій частині рівності (6.5.2) гарантовано є натуральним числом та не може дорівнювати нулеві. Прийшли до протиріччя. Звідки й випливає, що сума всіх цих чисел не могла збільшитися у 18 разів.

Відповідь: а) ТАК; б) НІ.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5

?! Переконайтеся, що сума всіх таких чисел могла збільшитися в 11 разів.

?! Сума всіх таких чисел збільшилася в 11 разів. Яка найбільша кількість чисел могла бути записана на дошці? (**Відповідь: 10**)

?! На дошці було написано декілька різних натуральних чисел. Ці числа розбили на три групи так, що в кожній з них опинилося принаймні одне число. До кожного числа з першої групи приписали у кінці його запису цифру 3, до кожного числа з другої групи – цифру 7, а числа з третьої групи залишили без змін.

а) Чи могла сума всіх цих чисел збільшитися у 8 разів?

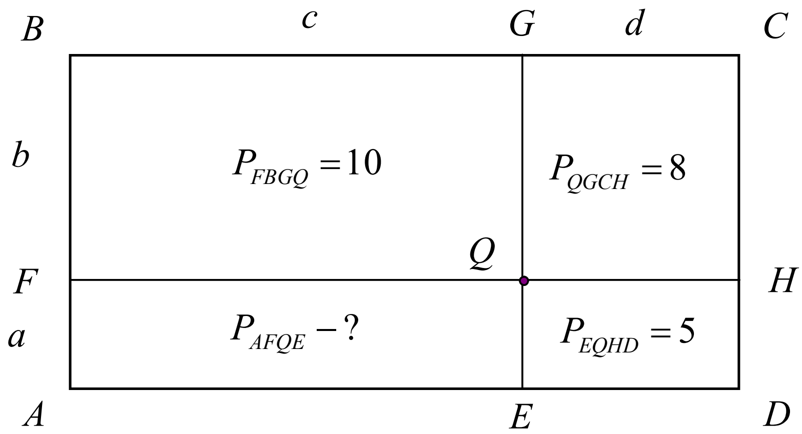
б) Чи могла сума всіх цих чисел збільшитися у 17 разів?

в) У яке найбільше число разів могла збільшитися сума всіх таких чисел?

7 клас

Задача 1

Прямокутник $ABCD$ поділили на чотири прямокутники так, як показано на рисунку нижче. Знайти периметри прямокутників $ABCD$ та $AFQE$, якщо периметри прямокутників $FBGQ$, $QGCH$ і $EQHD$ становлять 10, 8 та 5 лін. од. відповідно



Розв'язання.

Нехай довжини відрізків AF, FB, BG і GC становлять a,b,c та d (лін. од.) відповідно. Оскільки чотирикутники $AFQE$, $FBGQ$, $QGCH$ та $EQHD$ є прямокутниками, то маємо такі рівності:

$$EQ = DH = AF = a;\ QG = HC = FB = b;\ FQ = AE = BG = c;\ QH = ED = GC = d.$$

Тому (з урахуванням введених позначень) справджуються рівності:

$$P_{FBGQ} = 2b + 2c = 10, \qquad P_{QGCH} = 2b + 2d = 8, \qquad P_{EQHD} = 2a + 2d = 5.$$

Оскільки мають місце рівності:

$$P_{ABCD} = 2a + 2b + 2c + 2d = (2a + 2c) + (2b + 2d) = P_{AFQE} + P_{QGCH} = P_{AFQE} + 8;$$

$$P_{ABCD} = 2a + 2b + 2c + 2d = (2b + 2c) + (2a + 2d) = P_{FBGQ} + P_{EQHD} = 10 + 5 = 15.$$

то справджується рівність

$$P_{ABCD} = P_{FBGQ} + P_{EQHD} = P_{AFQE} + P_{QGCH},$$

звідки

$$P_{AFQE} = (P_{FBGQ} + P_{EQHD}) - P_{QGCH} = 15 - 8 = 7.$$

Відповідь: 15 (лін. од.), 7 (лін. од.).

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1

?! Покажіть, що значення $a = 1{,}5$; $b = 3$; $c = 2$; $d = 1$ задовольняють умову задачі. Чи є інший набір значень a, b, c, d, який задовольняє умову задачі?

?! Знайдіть P_{ABCD}, P_{AFQE}, a, b, c і d, якщо в умові задачі покласти $P_{FBGQ} = m$, $P_{QGCH} = n$, $P_{EQHD} = q$ (лін. од).

Задача 2

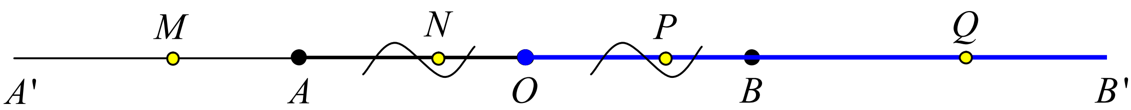
Дано відрізок AB. Знайдіть усі такі точки X на прямій AB, що $AX > BX$.

Розв'язання.

1. Нехай Ω – шукана множина точок на прямій AB. Тоді, з урахуванням умови, точка X прямої AB належить множині Ω тоді і лише тоді, коли виконується умова $XA > XB$, де (суть) XA, XB – відстані між точками X, A та X, B відповідно. Крім того, слід розуміти, що відстань від певної точки W до самої себе становить 0, тобто $WW = 0$ (лін. од.). І навпаки:

якщо для певної т. Y прямої AB виконується умова $YA < YB$, то $Y \notin \Omega$;

якщо для певної т. Y прямої AB виконується умова $YA = YB$, то $Y \notin \Omega$.



2. Розглянемо на прямій AB таку точку O, яка є серединою відрізка AB. Нехай далі: A' – довільна точка променя OA, яка відстоїть від точки O на відстані, більшій ніж точка A; B' – довільна точка променя OB, яка відстоїть від точки O на відстані, більшій ніж точка B. Тоді зазначені точки розбивають пряму AB на чотири частини: промінь AA', відрізки AO, OB та промінь BB'.

3. Порівняємо відстані від (довільних але фіксованих) точок (кожної із зазначених вище частин прямої AB) до точок A і B відповідно.

якщо точка M належить променю AA' (за винятком точки A), то

$$MB = MA + AB \Rightarrow MA < MB \Rightarrow M \notin \Omega;$$

оскільки $AA = 0 < AB$, то $A \notin \Omega$;

якщо точка N є внутрішньою точкою відрізка AO, то

$$AO = AN + NO \Rightarrow NA < AO = OB < NB \Rightarrow N \notin \Omega;$$

оскільки $OA = OB$, то $O \notin \Omega$;

якщо точка P є внутрішньою точкою відрізка OB, то

$$AB = OP + PB \Rightarrow PB < OB = AO < PA \Rightarrow P \in \Omega;$$

оскільки $BA > 0 = BB$, то $B \in \Omega$;

якщо точка Q належить променю BB' (за винятком точки B), то

$$AQ = AB + BQ \Rightarrow QA > QB \Rightarrow Q \in \Omega.$$

Отже, шуканій множині Ω належать ті і лише ті точки прямої AB, які належать променю OB' за винятком точки O.

Відповідь: шукані точки X утворюють фігуру, одержану шляхом видалення з прямої AB усіх точок променя OA (разом із його початком), де O – середина відрізка AB.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2

?! Дано відрізок AB. Знайдіть усі такі точки X прямої AB, для яких виконується умова $AX > AB$.

?! Дано відрізок AB. Знайдіть усі такі точки X на площині, що $AX > BX$.

?! Дано відрізок AB. Знайдіть усі такі точки X на площині, для яких виконується умова $AX > AB$.

Задача 3

Деяке додатне число A збільшили на 25%. На скільки відсотків треба зменшити одержане число B, щоб отримати початкове число A?

Розв'язання.

1. Нехай A – дане додатне число. Після його збільшення на 25% одержали число B, яке становить

$$B = A + \frac{A}{100} \cdot 25 = A + 0,25A = 1,25 \cdot A.$$

2. Нехай x – %, на який треба зменшити число B, щоб отримати початкове число A. Тоді має справджуватися рівність:

$$B - \frac{B}{100} \cdot x = A, \quad \text{звідки} \quad 1,25 \cdot A - \frac{1,25 \cdot A}{100} \cdot x = A, \quad \text{або ж} \quad 1,25 - \frac{1,25}{100} \cdot x = 1.$$

Тобто маємо рівняння відносно невідомого x

$$1,25 - \frac{1,25}{100} \cdot x = 1,$$

звідки $125 - 1,25 \cdot x = 100$; $1,25 \cdot x = 25$; $125 \cdot x = 2500$; $x = \frac{2500}{125} = 20$.

Таким чином, одержане число B, щоб отримати початкове число A, необхідно зменшити на 20%.

Відповідь: 20%.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3

?! За A% загальної кількості товару одержали P% прибутку. З яким відсотком прибутку треба продавати решту товару, щоб загальний прибуток становив R%?

А чи звертали Ви увагу? Що:

! Збільшення величини A на p% є рівносильним множенню величини A на відповідний числовий коефіцієнт, а саме

$$A \nearrow p\% \quad \sim \quad A \cdot \frac{100 + p}{100}.$$

! Зменшення величини B на q% є рівносильним множенню величини B на відповідний числовий коефіцієнт, а саме

$$B \searrow q\% \quad \sim \quad B \cdot \frac{100 - q}{100}.$$

Задача 4

Два однакових поля необхідно зорати трьома тракторами. Перший трактор може зорати одне поле за 16 годин, другий трактор – за 48 годин, а третій трактор – за 18 годин. Знайти найменший час, за який можна зорати обидва поля за умов, що всі трактори починають роботу одночасно, а для переїзду з одного поля на інше трактору необхідно 40 хвилин.

Розв’язання.

1. За умовою задачі два поля є однаковими, тому об’єм роботи (яка полягає в оранні одного поля) можна прийняти за 1 («умовну одиницю»).

Оскільки перший трактор може зорати одне поле за 16 годин, другий трактор – за 48 годин, а третій трактор – за 18 годин, то їх продуктивність становлять $p_1 = 1/16$, $p_2 = 1/48$ та $p_3 = 1/18$ відповідно. Звідки: сумарна продуктивність (при роботі на одному полі) всіх трьох тракторів становить $p_{123} = 1/16 + 1/48 + 1/18 = 5/36$; 1-го та 2-го – $p_{12} = 1/16 + 1/48 = 1/12$; 1-го та 3-го – $p_{13} = 1/16 + 1/18 = 17/144$; 2-го та 3-го тракторів – $p_{23} = 1/48 + 1/18 = 11/144$.

За 40 хвилин ($2/3$ години): перший трактор може зорати $(2/3)\cdot(1/16) = 1/24$ (частину) одного поля; другий трактор – $(2/3)\cdot(1/48) = 1/72$ одного поля; а третій трактор – $(2/3)\cdot(1/18) = 1/27$ (частину) поля.

2. Розглянемо всі можливі моделі роботи тракторів, пов’язані із оранням обох полів, за умов, що всі трактори починають роботу одночасно, а для переїзду з одного поля на інше кожному трактору необхідно $2/3$ години. У кожній з таких моделей визначимо час, необхідний, щоб зорати обидва поля.

2.1) Якщо всі три трактори почнуть працювати разом на одному полі, то їм (щоб зорати обидва поля) знадобиться такий час:

$$\frac{1}{p_{123}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{p_{123}} = 2\cdot\frac{36}{5} + \frac{2}{3} = \frac{72}{5} + \frac{2}{3} = \frac{226}{15} = 15\frac{1}{15} = 15\frac{4}{60} \text{ год.}$$

або (що теж саме) – **15 годин 4 хвилини.**

2.2) Якщо 1-ий та 2-ий трактори починають працювати на першому полі (сумарна продуктивність яких становить $p_{12} = 1/12$), а 3-ій на другому полі (продуктивність якого $p_3 = 1/18$), то перше поле буде зорано за $1:(1/12) = 12$ годин, тоді як за цей час третій трактор зоре лише $12\cdot(1/18) = 2/3$ другого поля. За час ($2/3$ години), поки 1-ий і 2-ий трактор будуть переїжджати на друге поле, третій трактор зоре ще $1/27$ частини другого поля. А на момент початку одночасної роботи всіх трьох тракторів залишиться зорати $1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27}$ частини другого поля. Тому загальний час роботи в цій моделі становить:

$$12 + \frac{2}{3} + \frac{8}{27} : \frac{5}{36} = 12 + \frac{2}{3} + \frac{8}{27}\cdot\frac{36}{5} = 12 + \frac{2}{3} + \frac{32}{15} = 12 + \frac{14}{5} = 14\frac{4}{5} = 14\frac{48}{60} \text{ год.}$$

або (що теж саме) – **14 годин 48 хвилин.**

2.3) Якщо 1-ий та 3-ій трактори починають працювати на першому полі (сумарна продуктивність яких становить $p_{13} = 17/144$), а 2-ий на другому полі (продуктивність якого $p_2 = 1/48$), то перше поле буде зорано за $1:(17/144) = 144/17$ години, тоді як за цей час другий трактор зоре лише $(144/17)\cdot(1/48) = 3/17$ другого поля. За час ($2/3$ години), поки 1-ий і 3-ій трактор будуть переїжджати на друге поле, другий трактор зоре ще $1/72$ частини другого поля. А на момент початку одночасної роботи всіх трьох тракторів залишиться зорати $1-(3/17)-(1/72) = 991/1224$ частини другого поля. Тому загальний час роботи в цій моделі становить:

$$\frac{144}{17}+\frac{2}{3}+\frac{991}{1224}:\frac{5}{36}=8+\frac{8}{17}+\frac{2}{3}+\frac{991}{34}\cdot\frac{1}{5}=9+\frac{7}{51}+5+\frac{141}{170}=14\frac{58}{60}\text{ год.}$$

або (що теж саме) – **14 годин 58 хвилин.**

2.4) Якщо 2-ий та 3-ій трактори починають працювати на першому полі (сумарна продуктивність яких становить $p_{23} = 11/144$), а 1-ий на другому полі (продуктивність якого $p_1 = 1/16$), то перше поле буде зорано за $1:(11/144) = 144/11$ години, тоді як за цей час перший трактор зоре лише $(144/11)\cdot(1/16) = 9/11$ другого поля. За час ($2/3$ години), поки 2-ий і 3-ій трактор будуть переїжджати на друге поле, перший трактор зоре ще $1/24$ частини другого поля. А на момент початку одночасної роботи всіх трьох тракторів залишиться зорати $1-(9/11)-(1/24) = 37/264$ частини другого поля. Тому загальний час роботи в цій моделі становить:

$$\frac{144}{11}+\frac{2}{3}+\frac{37}{264}:\frac{5}{36}=13\frac{1}{11}+\frac{2}{3}+\frac{37}{264}\cdot\frac{36}{5}=13+\frac{25}{33}+\frac{111}{110}=14+\frac{25}{33}+\frac{1}{110}=14\frac{46}{60}\text{ год.}$$

або (що теж саме) – **14 годин 46 хвилин.**

Відповідь: 14 годин 46 хвилин.

Задача 5

Представники видавництва на виставку привезли декілька книг для продажу (кожну книгу в одному екземплярі). Вартість кожної книги виражається натуральними числом гривень. Якщо вартість книги є меншою за 100 гривень, то на неї приклеюють наліпку «вигідно». Проте до відкриття виставки вартість кожної книги збільшили на 10 гривень, в наслідок чого кількість книг з наліпками «вигідно» зменшилась.

а) Чи могла зменшитися середня вартість книг з наліпкою «вигідно» після відкриття виставки у порівнянні із середньою вартістю книг з наліпкою «вигідно» до відкриття виставки? (3 бали);

б) Чи могла зменшитися середня вартість книг без наліпки «вигідно» після відкриття виставки у порівнянні із середньою вартістю книг без наліпки «вигідно» до відкриття виставки? (4 бали).

Розв'язання.

а) **ТАК,** ***наприклад*:**

на виставку привезли три книги, вартістю 120, 94 та 20 гривень; тоді середня вартість книг з наліпкою «вигідно»:

до відкриття складала $(94+20):2=57$ гривень, а

після відкриття – 30 гривень.

б) **ТАК,** ***наприклад*:**

на виставку привезли три книги, вартістю 120, 94 та 20 гривень; тоді середня вартість книг без наліпки «вигідно»

до відкриття складала 120 гривень, а

після відкриття – $(130+104):2=117$ гривень.

Відповідь: а) ТАК; б) ТАК.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 5

?! Відомо, що (початкова) середня вартість усіх книжок становила 110 гривень, середня вартість книг із наліпкою «вигідно» складала 81 гривню, а середня вартість книжок без наліпки «вигідно» – 226 гривень. Після подорожчання середня вартість книг із наліпкою «вигідно» стала становити 90 гривень, а середня вартість книжок без наліпки «вигідно» – 210 гривень. При якій найменшій кількості книжок таке є можливим? (**Відповідь: 20**)

?! Представники видавництва на виставку привезли декілька книг для продажу (кожну книгу в одному екземплярі). Вартість кожної книги виражається натуральними числом гривень. Якщо вартість книги є меншою за 80 гривень, то на неї приклеюють наліпку «вигідно». Проте до відкриття виставки вартість кожної книги збільшили на 5 гривень, в наслідок чого кількість книг з наліпками «вигідно» зменшилась.

а) Чи могла зменшитися середня вартість книг з наліпкою «вигідно» після відкриття виставки у порівнянні із середньою вартістю книг з наліпкою «вигідно» до відкриття виставки?

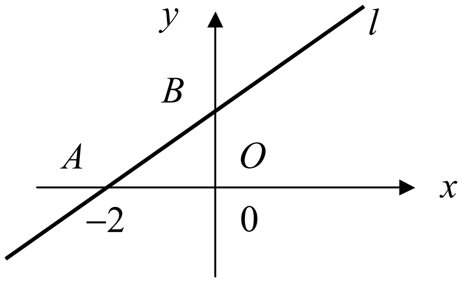
б) Чи могла зменшитися середня вартість книг без наліпки «вигідно» після відкриття виставки у порівнянні із середньою вартістю книг без наліпки «вигідно» до відкриття виставки?

в) Відомо, що (початкова) середня вартість усіх книжок становила 103 гривні, середня вартість книг із наліпкою «вигідно» складала 67 гривню, а середня вартість книжок без наліпки «вигідно» – 157 гривень. Після подорожчання середня вартість книг із наліпкою «вигідно» стала становити 70 гривень, а середня вартість книжок без наліпки «вигідно» – 146 гривень. При якій найменшій кількості книжок таке є можливим? (**Відповідь: 10**)

8 клас

Задача 1

На рисунку нижче зображено графік функції $f\left(x\right)=\left(a+b\right)x+3b$. Знайдіть значення виразу $b-2a$.



Розв'язання.

1 спосіб.

Аналізуючи графік лінійної функції $y=\left(a+b\right)x+3b=f\left(x\right)$, зображений на даному рисунку, не важко встановити, що пряма перетинає вісь абсцис у точці $A\left(-2;0\right)$, тобто при $x=-2$ значення функції $f\left(-2\right)=0$. Тому має місце рівність $\left(a+b\right)\cdot\left(-2\right)+3b=0$, звідки й маємо, що $b-2a=0$.

2 спосіб («на виріст» – за допомогою геометричного змісту коефіцієнтів лінійної функції).

0. Добре відомо, що графіком лінійної функції $y=k\cdot x+h$ (де $k,h\in R$) є певна пряма l. Більше того, геометричний зміст коефіцієнтів k і h полягає в тому, що:

пряма l перетинає вісь OY у точці $B\left(0;h\right)$;

пряма l утворює з додатнім напрямом осі OX такий кут φ, тангенс якого дорівнює кутовому коефіцієнту k; іншими словами: $k=\mathrm{tg}\varphi$, де φ – кут, який пряма l утворює з додатнім напрямом осі OX.

1. В нашому випадку (для лінійної функції $y=\left(a+b\right)x+3b$)

$$k=a+b=\mathrm{tg}\varphi,\ h=3b.$$

2. З іншого боку, оскільки пряма $l: y=\left(a+b\right)x+3b$ перетинає вісь OX у точці $A\left(-2;0\right)$, вісь OY у точці $B\left(0;3b\right)$, то довжини відрізків AO і OB становлять 2 та $3b$ (лін. од.) відповідно. Тому з прямокутного $\triangle AOB$ (за визначенням тангенса гострого кута прямокутного трикутника) маємо, що

$$\mathrm{tg}\angle BAO=\frac{OB}{AO}=\frac{3b}{2}=\mathrm{tg}\varphi=k.$$

Тому має місце рівність $k=a+b=\dfrac{3b}{2}$, звідки $2a+2b=3b\Rightarrow b-2a=0$.

Відповідь: 0.

А чи знали Ви? Що:

Якщо пряма перетинає вісь абсцис у точці $M(m;0)$, а вісь ординат – у точці $N(0;n)$, то рівняння такої прямої можна подати у вигляді $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$.
І навпаки, якщо рівняння прямої можна подати у вигляді $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, то така пряма перетинає вісь абсцис у точці $M(m;0)$, а вісь ординат – у точці $N(0;n)$.

Задача 2

Дано трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Яку фігуру утворюють середини (усіх можливих) відрізків з кінцями на різних основах трапеції?

Розв'язання.

1. Нехай Ω – шукана множина точок площини. З урахуванням умови, точка X площини належить множині Ω тоді і лише тоді, коли X є серединою відрізка X_1X_2, кінці якого (з точністю до перепозначення / заміни індексів) належать відрізкам BC та AD відповідно.

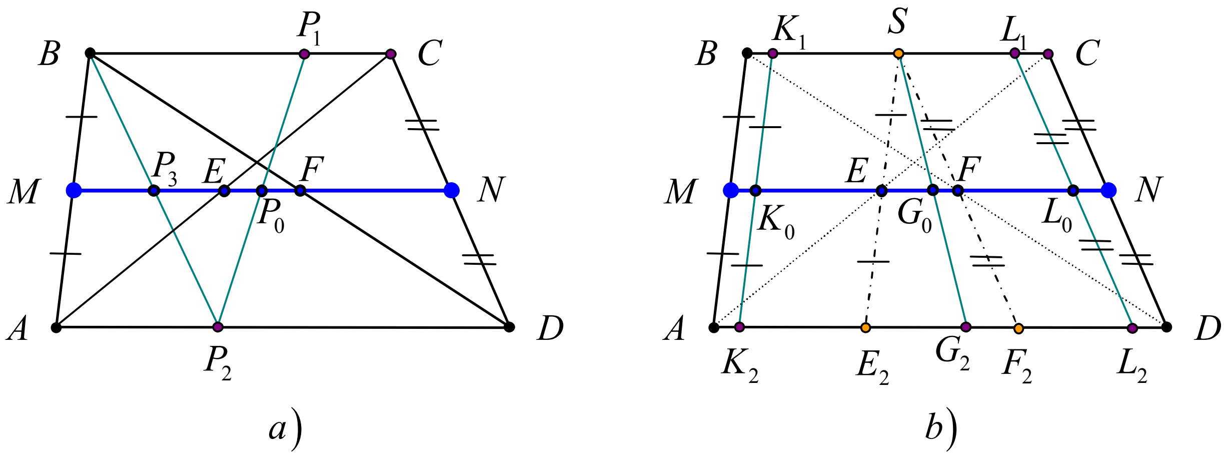


Рис. 8.2: *до задачі 8.2*

2. Нехай M і N – середини бічних сторін AB та CD (відповідно) даної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Тоді (за визначенням) MN є середньою лінією трапеції $ABCD$. І тому (за властивістю середньої лінії трапеції) маємо, що $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$ – рис. 8.2 $a)$.

Оскільки $BM = MA$, точка B належить відрізку BC, а точка A – відрізку AD, то $M \in \Omega$. Аналогічно, оскільки $CN = ND$, точка C належить відрізку BC, а точка D – відрізку AD, то $N \in \Omega$.

3. Нехай далі E і F – точки перетину середньої лінії MN з діагоналями AC та DB відповідно. Оскільки $AM = MB$ і $BC \parallel ME$, то (за теоремою Фалеса) $AE = EC$, звідки $E \in \Omega$. Аналогічно, оскільки $DN = NC$ і $BC \parallel FN$, то (за теоремою Фалеса) $DF = FB$, звідки $F \in \Omega$.

4. Нехай P_1 – довільна але фіксована внутрішня точка відрізка BC, P_2 – довільна але фіксована внутрішня точка відрізка AD, а P_0 – точка перетину відрізка P_1P_2 із середньою лінією MN. **Покажемо, що P_0 є серединою відрізка P_1P_2.**

Позначимо через P_3 точку перетину відрізка P_2B із середньою лінією MN. Оскільки $BM = MA$ і $MP_3 \| AP_2$, то (за теоремою Фалеса) $BP_3 = P_3P_2$. З іншого боку – оскільки $P_2P_3 = P_3B$ і $P_3P_0 \| BP_1$, то (за теоремою Фалеса) $P_1P_0 = P_0P_2$, звідки $P_0 \in \Omega$. Тим самим показано, що середина довільного відрізка з кінцями на різних основах трапеції (кожна точка множини Ω) належить середній лінії MN трапеції $ABCD$ ($BC \| AD$). Тобто, якщо $X \in \Omega$, то $X \in MN$. Більше того, доведено важливу властивість середньої лінії трапеції – «*середня лінія трапеції ділить навпіл будь-який відрізок з кінцями на різних її основах»*.

5. Тепер необхідно довести, що довільна але фіксована точка Y середньої лінії MN належить множині Ω. Для цього досить показати, що існує принаймні один відрізок Y_1Y_2 з кінцями на основах BC та AD відповідно, для якого точка Y є серединою. З урахуванням 2 пункту, для точок M і N, які належать множині Ω, це очевидно, бо для них в якості таких відрізків можна обрати бічні сторони (відрізки) AB та DC відповідно (та тільки їх!) – рис. 8.2 b).

Нехай S – середина (меншої) основи BC. З урахуванням 3 пункту, точки $E = AC \cap MN$ і $F = DB \cap MN$ є серединами діагоналей AC та BD відповідно. Тому для точок E і F в якості зазначених відрізків (з кінцями на різних основах трапеції) можна обрати, наприклад, діагоналі AC та BD відповідно. Більше того, (за визначенням) відрізки SE і SF є середніми лініями трикутників ABC та DCB відповідно. І тому (за властивістю середньої лінії трикутника) маємо, що $SE \| BA$, $SF \| CD$. Нехай далі, промені SE і SF перетинають (більшу) основу AD у точках E_2 та F_2 відповідно. Тоді E_2 і F_2 є внутрішніми точками відрізків AF_2 та DE_2 відповідно (*поясніть, чому*?). А за 4 пунктом точки E і F є серединами відрізків SE_2 та SF_2 відповідно. Отже:

– для довільної внутрішньої точки G_0 відрізка EF в якості шуканого відрізка можна обрати відрізок SG_2, де $G_2 = SG_0 \cap AD$;

– для довільної внутрішньої точки K_0 відрізка ME в якості шуканого відрізка можна обрати відрізок K_1K_2, який проходить через K_0 паралельно до AB;

– для довільної внутрішньої точки L_0 відрізка FN в якості шуканого відрізка можна обрати відрізок L_1L_2, який проходить через L_0 паралельно до CD.

Оскільки кожна точка шуканої множини Ω належить середній лінії MN, а кожна точка середньої лінії MN належить множині Ω, то шукана множина Ω співпадає із відрізком MN.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2

?! Для довільної точки Y середньої лінії трапеції (яка не співпадає із серединами жодної з бічних сторін) знайдіть множину кінців на меншій (більшій) основі усіх відрізків Y_1Y_2 з кінцями на різних основах, які точкою Y діляться навпіл.

?! Яку фігуру утворюють середини (усіх можливих) відрізків з кінцями на прямих, що містять основи трапеції? Відповідь обґрунтуйте.

Задача 3

Задані три попарно різних натуральних чисел. Чи може їхнє середнє арифметичне бути:

а) у 2 рази більшим за найбільший спільний дільник заданих трьох чисел? (*3 бали*)

б) у $5/3$ рази більшим за найбільший спільний дільник заданих трьох чисел? (*4 балів*)

Розв'язання.

а) ТАК. Розглянемо, наприклад, три числа 1, 2 і 3. Тоді:

1) вони є попарно простими, звідки найбільший спільний дільник таких трьох чисел становить 1;

2) середнє арифметичне цих чисел становить $\frac{1+2+3}{3}=\frac{6}{3}=2$, що у 2 рази більше за їх найбільший спільний дільник.

б) НІ. Доведення проведемо методом від супротивного.

Нехай $d = НСД(a;b;c)$ – найбільший спільний дільник даних трьох попарно різних натуральних чисел a, b і c; тоді ці числа можна подати у вигляді $a = dk$, $b = dl$ і $c = dm$, де k, l і m – деякі натуральні числа.

Тому середнє арифметичне даних чисел становить

$$\frac{a+b+c}{3}=\frac{dk+dl+dm}{3}=d\cdot\frac{k+l+m}{3}.$$

Припустимо, що середнє арифметичне чисел a, b і c у $5/3$ рази більше за їх найбільший спільний дільник. Тоді має виконуватися рівність

$$d\cdot\frac{k+l+m}{3}=\frac{5}{3}d, \text{ звідки } k+l+m=5.$$

Оскільки k, l і m – натуральні числа, то рівність $k+l+m=5$ виконується лише у наступних випадках:

або два з трьох доданків є рівними і дорівнюють 1 (перший випадок),

або два з трьох доданків є рівними і дорівнюють 2 (другий випадок).

Але такого бути не може, бо в обох випадках це призводить до рівності двох із трьох даних чисел, які за умовою є попарно різними. Прийшли до протиріччя. І тому наше припущення про те, що середнє арифметичне даних чисел у $5/3$ рази є більшим за найбільший їх спільний дільник, є неправильним. Тому, ні, не може.

Відповідь: а) ТАК; б) НІ.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3

?! Задані 5 попарно різних натуральних чисел. Чи може їхнє середнє арифметичне бути:

а) у 3 рази більшим за найбільший спільний дільник?

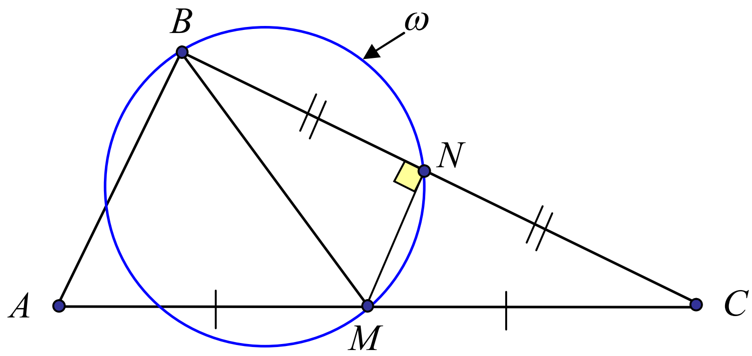
б) у 2 рази більшим за найбільший спільний дільник?

Задача 4

Медіана BM трикутника ABC є діаметром кола, яке перетинає сторону BC в її середині. Знайти довжину сторони AC, якщо радіус описаного кола трикутника ABC становить a см.

Розв'язання.

1 спосіб



Нехай ω – коло, для якого медіана BM даного $\triangle ABC$ є діаметром. Нехай далі N – середина сторони BC. Тоді за умовою точка $N \in \omega$.

За умовою BM – діаметр кола ω, а $\angle BNM$ є вписаним у коло ω кутом, який спирається на діаметр BM. Звідки (за властивістю вписаного кута, що спирається на діаметр) $\angle BNM = 90^\circ$. Тобто $MN \perp BC$.

Отже, в $\triangle BMC$ медіана MN є висотою. І тому (за ознакою рівнобедреного трикутника) $\triangle BMC$ є рівнобедреним з основою BC. Звідки $MB = MC$. Оскільки BM є медіаною $\triangle ABC$, то точка M є рівновіддаленою від вершин $\triangle ABC$. Тобто, M – центр кола, описаного навколо $\triangle ABC$, в якому $MA = MB = MC = a$ як радіуси. Звідки (за аксіомою вимірювання відрізків) й випливає, що $AC = AM + MC = a + a = 2a$ см.

2 спосіб

1) Нехай ω – коло, для якого медіана BM даного $\triangle ABC$ є діаметром. Нехай далі N – середина сторони BC. Тоді за умовою точка $N \in \omega$.

2) Оскільки M, N – середини сторін AC та BC відповідно, то за визначенням відрізок MN є середньою лінією $\triangle ABC$. І тому (за властивістю середньої лінії трикутника) $MN \parallel AB$.

3) За умовою BM – діаметр кола ω, а $\angle BNM$ є вписаним у коло ω кутом, який спирається на діаметр BM. Звідки (за властивістю вписаного кута, що спирається на діаметр) $\angle BNM = 90^\circ$. Тобто $MN \perp BC$. Оскільки $MN \parallel AB$, то (за властивістю паралельних прямих) маємо, що $AB \perp BC$.

Отже, $\triangle ABC$, який задовольняє умову задачі, є прямокутним трикутником із прямим кутом при вершині A. І тому центр кола, описаного навколо нього співпадає із серединою гіпотенузи (точкою M), довжина якої вдвічі більша за довжину радіуса описаного кола. Звідки $AC = 2a$ см.

Відповідь: $2a$ см.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 4

?! Чи перетинає коло ω сторону AB (такого трикутника) в її середині?

?! Чи обов'язково трикутник, для якого існує коло, що містить вершину цього трикутника та середини двох його сторін, є прямокутним?

?! Сформулюйте відповідну ознаку прямокутного трикутника.

?! Сформулюйте відповідну властивість прямокутного трикутника.

Задача 5

На дошці було записано декілька натуральних чисел. Ці числа розбили на три групи так, що в кожній з них опинилося принаймні одне число. До кожного числа з першої групи приписали у кінці його запису цифру 3, до кожного числа з другої групи – цифру 7, а числа з третьої групи залишили без змін.

а) Чи могла сума всіх цих чисел збільшитися у 8 разів? (3 бали);

б) Чи могла сума всіх цих чисел збільшитися у 17 разів? (4 бали).

Розв'язання.

а) ТАК, наприклад:
це були три числа 2, 7 і 4, які потрапили до першої, другої та третьої групи відповідно.

б) НІ. Доведення – методом від супротивного, а саме.
нехай:
– до першої групи потрапило k натуральних чисел, сума яких становить A,
– до другої групи потрапило m натуральних чисел, сума яких становить B, а
– сума чисел, які потрапили до третьої групи, становить C.

Тоді:
– після приписувань цифри 3 у кінці запису кожного з чисел першої групи, їх нова сума становить

$$A' = 10A + 3k, \tag{8.5.1}$$

– після приписувань цифри 8 у кінці запису кожного з чисел другої групи, їх нова сума становить

$$B' = 10B + 7m. \tag{8.5.2}$$

Припустимо, що сума змінених чисел збільшилася у 17 разів у порівнянні із сумою початкових чисел. Тоді має виконуватися рівність

$$A' + B' + C = 17\left(A + B + C\right),$$

звідки, з урахуванням рівностей (8.5.1) та (8.5.2), маємо що

$$10A + 3k + 10B + 7m + C = 17A + 17B + 17C,$$

$$7A - 3k + 7B - 7m + 16C = 0, \text{ або ж}$$

$$3\left(A - k\right) + 7\left(B - m\right) + 4A + 16C = 0. \tag{8.5.3}$$

Очевидно, що **3-ій і 4-ий доданки** ($4A$ та $16C$) в лівій частині рівності (8.5.3) є **натуральними числами**, бо A і C є сумами натуральних чисел з відповідних груп.

Також очевидно, що кожне натуральне число t, яке є більшим за одиницю, можна подати у вигляді $t=1+(t-1)$. Тому сума A різних k натуральних чисел не може бути меншою за їх кількість k. Виняток становить єдиний випадок, коли до першої групи потрапляє одне число (тобто, коли $k=1$), яке дорівнює ОДНОМУ. Але в цьому випадку $k=1$, $A=1$, і тому $(A-k)=0$. Отже, **1-ий доданок** $3(A-k)$ в лівій частині рівності (8.5.3) може бути **або натуральним числом**, **або числом НУЛЬ**.

Аналогічно, **2-ий доданок** $7(B-m)$ в лівій частині рівності (8.5.3) може бути або натуральним числом, або числом НУЛЬ.

Таким чином сума чотирьох доданків в лівій частині рівності (8.5.3) гарантовано є натуральним числом та не може дорівнювати нулеві. Прийшли до протиріччя. А тому наше припущення про те, що «*сума змінених чисел збільшилася у 17 разів у порівнянні із сумою початкових чисел»,* **є неправильним**. Звідки й випливає, що сума всіх таких чисел не могла збільшитися у 17 разів.

Відповідь: а) ТАК; б) НІ.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 5

?! Наведіть свій приклад, коли сума всіх цих чисел збільшилася у 8 разів.

?! У яке найбільше число разів могла збільшитися сума всіх таких чисел?

(**Відповідь: у** $\frac{232}{21}$ **разів**)

?! На дошці було написано декілька різних натуральних чисел. Ці числа розбили на три групи так, що в кожній з них опинилося принаймні одне число. До кожного числа з першої групи приписали у кінці його запису цифру 1, до кожного числа з другої групи – цифру 8, а числа з третьої групи залишили без змін.

а) Чи могла сума всіх цих чисел збільшитися у 4 рази?

б) Чи могла сума всіх цих чисел збільшитися у 18 разів?

в) Сума всіх таких чисел збільшилася в 11 разів. Яка найбільша кількість чисел могла бути записана на дошці?

9 клас

Задача 1

Чи існує функція $y = ax^2 + bx + c$ з цілими непарними коефіцієнтами a, b, c, яка має одним із нулів число $1/2024$?

Розв'язання.

Нагадаємо, що нулем функції $y = f(x)$ називають таке значення (незалежної) змінної x_0, при якому $f(x_0) = 0$.

Припустимо, що одним із нулів даної функції $y = ax^2 + bx + c = f(x)$ (з цілими непарними коефіцієнтами a, b, c) є число $1/2024$. Тоді має місце рівність

$$a \cdot \left(\frac{1}{2024}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{2024} + c = 0 \Leftrightarrow a + b \cdot 2024 + c \cdot 2024^2 = 0 \Leftrightarrow a = -2024(b + 2024c).$$

Оскільки a, b, c є непарними цілими числами, то права частина останньої рівності є парним цілим числом, а ліва її частина – непарним цілим числом. Чого бути не може. Отже наше припущення про те, що число $1/2024$ є одним із нулів даної функції $y = f(x)$ (з цілими непарними коефіцієнтами a, b, c) є неправильним. Звідки й випливає, що число $1/2024$ не є нулем даної функції.

Відповідь: НІ.

Задача 2

Дано відрізок AB. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що трикутник AXB є прямокутним.

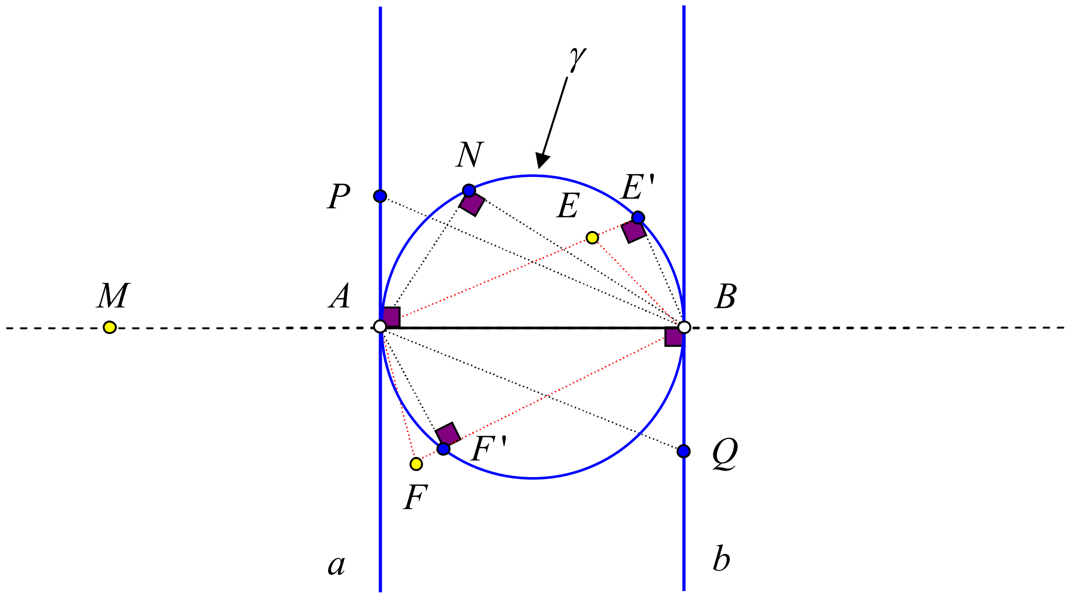
Розв'язання.

1. Нехай Ω – шукана множина точок площини. З урахуванням умови, точка X площини належить множині Ω тоді і лише тоді, коли $\triangle AXB$ є прямокутним; тобто, тоді і лише тоді, коли $\angle XAB = 90^0$ або $\angle XBA = 90^0$, або ж $\angle AXB = 90^0$. І навпаки: якщо для певної точки Y площини $\triangle AYB$ не є прямокутним, то $Y \notin \Omega$. Крім того, якщо для певної точки Y площини $\triangle AXB$ не існує, то $Y \notin \Omega$.

З урахуванням останнього, множині Ω не може належати жодна з точок M прямої AB.

2. Через дані точки A і B проведемо перпендикулярно до прямої AB прямі a та b відповідно. Розглянемо також коло γ, для якого даний відрізок AB є діаметром (рис. нижче). Зауважимо, що для даного відрізка AB на площині прямі a, b та коло γ визначаються однозначно (поясніть чому?)

3. Якщо P – довільна, але фіксована точка прямої a (яка не співпадає із точкою A), то, очевидно, що $\angle PAB = 90^0$, бо (за побудовою) $a \perp AB$; тому множині Ω належить кожна точка $X \in a \setminus \{A\}$. Методом від супротивного не важко показати що і навпаки: якщо Z така точка площини, для якої $\angle ZAB = 90^0$, то $Z \in a \setminus \{A\}$ (*покажіть справедливість останньої тези*!).



4. Якщо Q – довільна, але фіксована точка прямої b (яка не співпадає із точкою B), то $\angle QBA = 90^0$, бо (за побудовою) $b \perp AB$; тому множині Ω належить кожна точка $X \in b \setminus \{B\}$. Методом від супротивного не важко показати що і навпаки: якщо Z така точка площини, для якої $\angle ZBA = 90^0$, то $Z \in b \setminus \{B\}$ (*покажіть справедливість останньої тези*!).

5. Якщо N – довільна, але фіксована точка кола γ (яка не співпадає із жодною з точок A, B), то $\angle ANB = 90^0$, бо (за відомою властивістю) кожен вписаний у коло кут, який спирається на діаметр, є прямим; тому множині Ω належить кожна точка $X \in \gamma \setminus \{A; B\}$. **Більше того:**

5.1) якщо E – довільна, але фіксована точка, що є внутрішньою відносно кола γ та яка не співпадає із жодною з точок діаметра AB, то $\angle BEA$ – тупий; *справедливість останнього можна показати таким чином*: нехай E' – точка перетину променя AE з колом γ; тоді $\angle AE'B = 90^0$ (бо спирається на діаметр), а $\angle BEA$ є зовнішнім кутом $\triangle BE'E$ при вершині E; тому $\angle BEA = 90^0 + \angle E'BE$; оскільки $\angle E'BE \neq 0$ (бо за припущенням $E \notin \gamma$), то $\angle BEA$ є тупим;

5.2) якщо F – довільна, але фіксована точка, що є зовнішньою відносно кола γ та яка не співпадає із жодною з точок прямої AB, то $\angle AFB$ – гострий; *справедливість останнього можна показати таким чином*: нехай F' – точка перетину променя BF з колом γ; тоді $\angle BF'A = 90^0$ (бо спирається на діаметр), а $\angle BF'A$ є зовнішнім кутом $\triangle AF'F$ при вершині F'; тому $\angle AFB = 90^0 - \angle FAF'$; оскільки $\angle FAF' \neq 0$ (бо за припущенням $F \notin \gamma$), то $\angle AFB$ є гострим.

Тим самим доведено наступне: якщо Z така точка площини, для якої $\angle AZB = 90^0$, то $Z \in \gamma \setminus \{A; B\}$. Отже, шукана множина $\Omega = a \cup b \cup \gamma \setminus \{A; B\}$.

Відповідь: фігура, яка складається з кола, для якого відрізок AB є діаметром, та двох прямих, які проходять через кінці відрізка AB перпендикулярно до нього за винятком кінців відрізка AB.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2

?! На площині дано відрізок AB. Де може бути розташована точка C, щоб трикутник ABC був: а) гострокутним? б) тупокутним?

Задача 3

Визначте суму всіх цілих значень параметра a, за яких один з коренів рівняння $2x^2-(4a+9)x+6a+9=0$ належить проміжку $(-8;0)$, а другий з коренів – проміжку $(1;5)$

Розв'язання.

1 спосіб.

1. Знайдемо дискримінант D даного квадратного рівняння $2x^2-(4a+9)x+6a+9=0$.

$$D=(4a+9)^2-4\cdot2\cdot(6a+9)=16a^2+72a+81-48a-72=16a^2+24a+9=$$
$$=(4a)^2+2\cdot4a\cdot3+3^2=(4a+3)^2.$$

Оскільки при довільному дійсному a дискримінант квадратного рівняння $D=(4a+3)^2\ge0$, то $\sqrt{D}=\sqrt{(4a+3)^2}=|4a+3|$. І тому у випадку коли $4a+3\ne0$ ($a\ne-3/4$) наше рівняння має два різних дійсних коренів

$$x_1=\frac{4a+9-(4a+3)}{2\cdot2}=\frac{3}{2},\qquad x_2=\frac{4a+9+(4a+3)}{2\cdot2}=2a+3.$$

2. Очевидно, що перший корінь $x_1=1{,}5$ належить проміжку $(1;5)$.

3. Другий корінь $x_2=2a+3$ буде належати проміжку $(-8;0)$ тоді і лише тоді, коли виконується подвійна нерівність

$$-8<2a+3<0\text{, звідки }\ -11<2a<-3,\ -\frac{11}{2}<a<-\frac{3}{2}.$$

Таким чином, корені даного рівняння належать (зазначеним в умові задачі) проміжкам тоді і лише тоді, коли значення параметра $a\in\left(-5\frac{1}{2};-1\frac{1}{2}\right)$.

4. Не важко перевірити, що проміжку $\left(-5\frac{1}{2};-1\frac{1}{2}\right)$ належать тільки наступні цілі числа: $-5;-4;-3;-2$. І тому сума шуканих значень параметра a становить

$$(-5)+(-4)+(-3)+(-2)=-14.$$

2 спосіб («на виріст»).

Розглянемо квадратичну функцію $y=2x^2-(4a+9)x+6a+9=f(x)$.

Оскільки коефіцієнт (число 2) при старшому її члені є додатним, то гілки параболи спрямовано догори.

Дискримінант D відповідного квадратного рівняння становить

$$D=(4a+9)^2-4\cdot2\cdot(6a+9)=(4a+3)^2$$

та є невід'ємним при довільному дійсному a.

Квадратне рівняння $2x^2-(4a+9)x+6a+9=0$ має два різних дійсних корені x_1 та x_2 тоді і лише тоді, коли $a\neq -3/4$.

Нехай x_1 – той з коренів цього рівняння, який належить проміжку $(-8;0)$, а x_2 – другий корінь рівняння, який належить проміжку $(1;5)$. Тоді графік квадратичної функції (парабола) відносно осі абсцис має наступне розташування

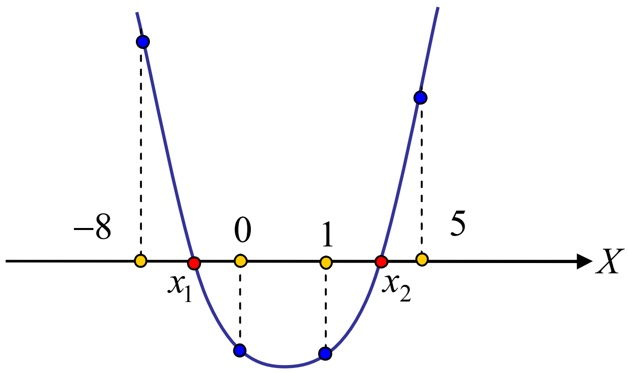


Рис. 9.3: *до задачі 3.*

Звідки бачимо, що одночасно мають виконуватися наступні чотири строгі нерівності: $f(-8)>0$, $f(0)<0$, $f(1)<0$, $f(5)>0$.

Тому для знаходження шуканих значень параметра розв'яжемо систему відповідних чотирьох нерівностей

$$\begin{cases} 2(-8)^2-(4a+9)\cdot(-8)+6a+9>0 \\ 2\cdot 0^2-(4a+9)\cdot 0+6a+9<0 \\ 2(1)^2-(4a+9)\cdot 1+6a+9<0 \\ 2\cdot 5^2-(4a+9)\cdot 5+6a+9>0 \end{cases},$$

звідки

$$\begin{cases} 128+(4a+9)\cdot 8+6a+9>0 \\ 6a+9<0 \\ 2-(4a+9)+6a+9<0 \\ 50-5(4a+9)+6a+9>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 38a>-209 \\ a<-\dfrac{3}{2} \\ 2a<-2 \\ 14-14a>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>-\dfrac{209}{38} \\ a<-\dfrac{3}{2} \\ a<-1 \\ a<1 \end{cases} \Rightarrow -5{,}5<a<-1{,}5.$$

Не важко перевірити, що проміжку $(-5{,}5;-1{,}5)$ належать тільки наступні цілі числа: $-5;-4;-3;-2$. І тому сума шуканих значень параметра a становить $(-5)+(-4)+(-3)+(-2)=-14$.

Відповідь: -14.

А чи знали Ви, що?:

Нехай дано квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a,b,c \in R,\ a \neq 0, \qquad (9.3.1)$$

$D = b^2 - 4ac$ – його дискримінант, а $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тоді мають місце наступні твердження щодо розташування коренів квадратного рівняння (9.3.1).

Теорема 1. Обидва корені квадратного рівняння (9.3.1) більші за число λ тоді і лише тоді, коли (одночасно) виконуються умови

$$a \cdot f(\lambda) > 0, \quad -\frac{b}{2a} > \lambda, \quad D \geq 0.$$

Теорема 2. Обидва корені квадратного рівняння (9.3.1) менші за число λ тоді і лише тоді, коли (одночасно) виконуються умови

$$a \cdot f(\lambda) > 0, \quad -\frac{b}{2a} < \lambda, \quad D \geq 0.$$

Наслідок 1. Корені квадратного рівняння (9.3.1) мають однакові знаки тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$a \cdot f(0) = a \cdot c > 0, \quad D \geq 0.$$

Теорема 3. Корені квадратного рівняння (9.3.1) належать проміжку $(\lambda_1; \lambda_2)$ тоді і лише тоді, коли (одночасно) виконуються умови

$$a \cdot f(\lambda_1) > 0, \quad a \cdot f(\lambda_2) > 0, \quad \lambda_1 < -\frac{b}{2a} < \lambda_2, \quad D \geq 0.$$

Теорема 4. Число λ знаходиться між коренями квадратного рівняння (9.3.1) тоді і лише тоді, коли (одночасно) виконується умова

$$a \cdot f(\lambda) < 0.$$

Наслідок 2. Корені квадратного рівняння (9.3.1) мають різні знаки тоді і лише тоді, коли

$$a \cdot c < 0.$$

Теорема 5. Тільки більший корінь квадратного рівняння (9.3.1) належить проміжку $(\lambda_1; \lambda_2)$ тоді і лише тоді, коли (одночасно) виконуються умови

$$a \cdot f(\lambda_1) < 0, \quad a \cdot f(\lambda_2) > 0.$$

Теорема 6. Тільки менший корінь квадратного рівняння (9.3.1) належить проміжку $(\lambda_1; \lambda_2)$ тоді і лише тоді, коли (одночасно) виконуються умови

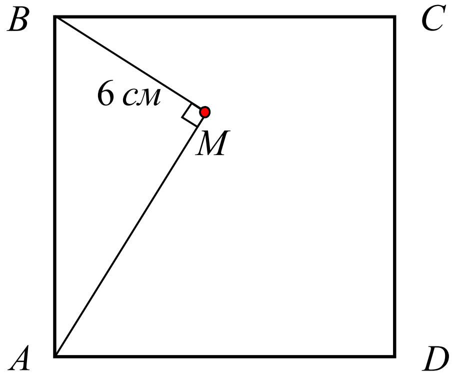
$$a \cdot f(\lambda_1) > 0, \quad a \cdot f(\lambda_2) < 0.$$

Теорема 7. Відрізок $[\lambda_1; \lambda_2]$ знаходиться всередині проміжку між коренями квадратного рівняння (9.3.1) тоді і лише тоді, коли (одночасно) виконуються умови

$$a \cdot f(\lambda_1) < 0, \quad a \cdot f(\lambda_2) < 0.$$

Задача 4

Дано квадрат $ABCD$, довжина сторони якого є більшою за 6 см. У середині квадрату обрано таку точку M, що $\angle AMB = 90^0$, а довжина відрізка BM становить 6 см. Знайдіть площу $\triangle BMC$.



Розв'язання.

1 спосіб

(за допомогою метричного співвідношення в прямокутному трикутнику).

1. Нехай a $(a > 6)$ – довжина сторони даного квадрата $ABCD$.

Опустимо з точки M перпендикуляри MH і MN на сторони AB та BC відповідно. Нехай далі $BH = x$.

Оскільки в чотирикутнику $BNMH$ три кути є прямими, то він є прямокутником. І тому $MN = BH = x$. Звідки площу $S_{\triangle BMC}$ трикутника BMC можна знайти за допомогою співвідношення

$$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot a \cdot x. \qquad (9.4.1)$$

2. Розглянемо прямокутний трикутник AMB (за умовою $\angle AMB = 90^0$). В ньому (з урахуванням умови та введених позначень):

$$BA = a, \qquad BH = x, \qquad BM = 6. \qquad (9.4.2)$$

Оскільки для прямокутного трикутника (справджується добре відоме метричне співвідношення) *квадрат довжини катета дорівнює добутку довжини його проекції (на гіпотенузу) та довжини гіпотенузи*, то, з урахуванням (9.4.2), справджується рівність

$$6^2 = x \cdot a \Leftrightarrow ax = 36. \qquad (9.4.3)$$

3. Зі співвідношень (9.4.1) та (9.4.3) маємо, що

$$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18 \text{ (од. кв.)}.$$

2 спосіб

(за допомогою формули зведення).

1. Нехай a $(a > 6)$ – довжина сторони даного квадрата $ABCD$, а $\angle CBM = \varphi$.

Тоді $\angle ABM = 90^\circ - \varphi$, а площу $S_{\triangle BMC}$ трикутника $\triangle BMC$ можна знайти за допомогою співвідношення

$$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot BC \cdot \sin\varphi = 3 \cdot a \cdot \sin\varphi. \qquad (9.4.4)$$

2. З прямокутного трикутника AMB (за умовою $\angle AMB = 90^0$) за визначенням косинуса гострого кута та, з урахуванням введених позначень маємо, що

$$\cos\angle ABM = \cos\left(90^\circ - \varphi\right) = \frac{BM}{BA} = \frac{6}{a}. \qquad (9.4.5)$$

3. З урахуванням співвідношення (9.4.5) та (добре відомою) формули зведення $\cos\left(90^\circ - \varphi\right) = \sin\varphi$ маємо, що

$$\sin\varphi = \cos\left(90^\circ - \varphi\right) = \frac{6}{a}. \qquad (9.4.6)$$

Таким чином, з урахуванням співвідношень (9.4.4) та (9.4.6), маємо що

$$S_{\vartriangle BMC} = 3 \cdot a \cdot \sin\varphi = 3 \cdot a \cdot \frac{6}{a} = 18 \text{ (од. кв.).}$$

3 спосіб
(«без формули зведення»).

1. Нехай a ($a > 6$) – довжина сторони даного квадрата $ABCD$, а $\angle CBM = \varphi$.

Тоді $\angle ABM = 90^\circ - \varphi$, $\angle BAM = \varphi$, а площу $S_{\vartriangle BMC}$ трикутника $\vartriangle BMC$ можна знайти за допомогою співвідношення

$$S_{\vartriangle BMC} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot BC \cdot \sin\varphi = 3 \cdot a \cdot \sin\varphi. \qquad (9.4.7)$$

2. З прямокутного трикутника AMB (за умовою $\angle AMB = 90^0$) за визначенням синуса гострого кута та, з урахуванням введених позначень маємо, що

$$\sin\angle BAM = \frac{BM}{BA} = \frac{6}{a} = \sin\varphi. \qquad (9.4.8)$$

Таким чином, з урахуванням співвідношень (9.4.7) та (9.4.8), маємо що

$$S_{\vartriangle BMC} = 3 \cdot a \cdot \sin\varphi = 3 \cdot a \cdot \frac{6}{a} = 18 \text{ (од. кв.).}$$

Відповідь: 18 кв. од.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 4

?! Якою буде відповідь до цієї задачі, якщо довжина відрізка BM становить m лін. од., а довжина сторони квадрата $ABCD$ є більшою за m лін. од.?

?! Дано квадрат $ABCD$, довжина сторони якого становить a (лін. од.). У середині квадрату обрано таку точку M, що $MA^2 + MC^2 = \delta$. Чому дорівнює $MB^2 + MD^2$?

?! Дано квадрат $ABCD$ та точку M у середині нього. Відомо, що $MA = m$, $MB = n$ та $MC = p$ (лін. од.). Чому дорівнює довжина відрізка MD?

Задача 5

Розв'язання.

Нехай A – маса усіх m фруктів, маса кожного з яких є меншою за 100 грамів, B – маса усіх n фруктів, маса кожного з яких є більшою за 100 грамів, а C – маса усіх $k=(76-m-n)$ фруктів, маса кожного з яких дорівнює 100 грамів. Тоді, з урахуванням умови, одночасно мають виконуватися рівності:

$$A+B+C=76\cdot 100,\ A=m\cdot 85,\ B=n\cdot 124.$$

Звідки: з одного боку $A+B=85m+124n$;

з іншого боку – $A+B=76\cdot 100-C=$

$$=76\cdot 100-(76-m-n)\cdot 100=(m+n)\cdot 100.$$

Тому маємо рівність $85m+124n=(m+n)\cdot 100$, $24n=15m$, звідки

$$8n=5m. \qquad (9.5.1)$$

а) НІ. Доведення – методом від супротивного, а саме: припустимо, що $m=n=\lambda$. Тоді, з урахуванням (9.5.1), маємо рівність $8\lambda=5\lambda \Leftrightarrow 3\lambda=0$, яка виконується тоді і лише тоді, коли $\lambda=0$; звідки $m=n=0$, чого бути не може, бо за умовою мають бути принаймні два фрукти різної маси (а не всі по 100 грамів, як виходить). Отже, прийшли до протиріччя з умовою. І тому наше припущення щодо $m=n$ є неправильним. Звідки й випливає, що у ящику не могло виявитися порівну фруктів масою меншою та більшою за 100 грамів.

б) **НІ. Доведення – методом від супротивного, а саме:** припустимо, що $k=(76-m-n)<8$, тоді має місце нерівність $0\le 76-m-n\le 7$, звідки

$$m+n\ge 69. \qquad (9.5.2)$$

З іншого боку, зі співвідношення (9.5.1) маємо, що $n=5\cdot\frac{m}{8}\in N$. І тому з рівності $m+n=m+\frac{5}{8}m=13\cdot\frac{m}{8}$ випливає, що сума $(m+n)$ цілих невід'ємних чисел обов'язково має ділитися на 13, тобто бути рівною або **13**, або **26**, або **39**, або **52**, або **65 <u>і все</u>**, бо загальна кількість фруктів – 76. Тобто $(m+n)\le 65$. Прийшли до протиріччя з нерівністю (9.5.2). І тому наше припущення щодо $k<8$ є неправильним. Звідки й випливає, що у ящику не могло бути менше 8 фруктів масою 100 грамів.

Відповідь: а) НІ; б) НІ.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5

?! Яку найбільшу масу може мати фрукт у ящику? (**Відповідь: 676 грамів**)

?! У ящику лежать 58 овочів, маса кожного з яких виражається натуральним числом грамів. У ящику є принаймні два овочі різної маси, а середня маса всіх овочів становить 1000 грамів. Середня маса тих овочів, маса кожного із яких є меншою за 1000 грамів, становить 976 грамів. Середня маса тих овочів, маса кожного із яких є більшою за 1000 грамів, становить 1036 грамів.

а) Чи могло у ящику виявитися порівну овочів масою меншою за 1000 грамів та овочів масою більшою за 1000 грамів? б) Чи могло у ящику опинитися точно 12 овочів, маса кожного з яких дорівнює 1000 грамів? в) Яку найменшу масу може мати овоч у такому ящику? (**Відповідь: 240 грамів**)

10 клас

Задача 1

Спростити функцію $y = x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^2} + \frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^3} + \ldots$ та знайти її значення при $x = 3$.

Розв'язання.

Позначимо дану функцію $y = x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^2} + \frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^3} + \ldots = f\left(x\right)$.

1) Не важко переконатися в тому, що:

1.1) $f\left(0\right) = 0$;

1.2) $f\left(x\right) = x^4\left(1 + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{\left(1+x^4\right)^2} + \frac{1}{\left(1+x^4\right)^3} + \ldots\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2) Спростимо функцію $y = f\left(x\right)$ для довільного але фіксованого $x \neq 0$.

2.1) Не важко перевірити, що областю визначення функції $q\left(x\right) = \frac{1}{1+x^4}$ є всі дійсні значення x, тобто $x \in R$. Крім того, для довільного $x \in R$ функція $q\left(x\right) = \frac{1}{1+x^4} \leq 1$, тобто $y = q\left(x\right)$ є обмеженою. Причому $q\left(x\right) = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Звідки маємо, що $0 < \frac{1}{1+x^4} < 1 \;\; \forall x \neq 0$.

2.2) Розглянемо тепер геометричну прогресію, для якої $b_1 = x^4$, а $q = \frac{1}{1+x^4}$. Тоді очевидно, що при довільному але фіксованому $x \neq 0$:

2.2.1) $f\left(x\right) = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$

2.2.2) $b_1 > 0$ та $0 < q < 1$; і тому (за визначенням) для довільного але фіксованого $x \neq 0$ така геометрична прогресія є нескінченно геометричною, у якої $\left|q\right| < 1$. Звідки суму всіх її членів можна знайти наступним чином

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{x^4}{1 - \frac{1}{1+x^4}} = \frac{x^4 \cdot \left(1+x^4\right)}{1 \cdot 1 + x^4 - 1} = \frac{x^4 \cdot \left(1+x^4\right)}{x^4}.$$

Оскільки $x \neq 0$, то $S = \frac{x^4 \cdot \left(1+x^4\right)}{x^4} = 1 + x^4 = S\left(x\right)$.

Таким чином, для довільного але фіксованого $x \neq 0$ значення функції $y = f(x)$ співпадають зі значеннями функції $y = S(x)$. Тобто $\forall x \neq 0$ $f(x) \equiv S(x)$. І тому

$$y = x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^2} + \frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^3} + ... = f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ S(x), & x \neq 0 \end{cases}$$

3) З урахуванням останнього маємо, що $f(3) = S(3) = 1 + 3^4 = 82$.

Відповідь: $y = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^4 + 1, & x \neq 0 \end{cases}$; 82.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 1

?! Спростити функцію $y = x^6 + \frac{x^6}{1+x^4} + \frac{x^6}{\left(1+x^4\right)^2} + \frac{x^6}{\left(1+x^4\right)^3} + ...$ та знайти її значення при $x = 0$.

?! Спростити функцію $y = x^2 + \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^2}{\left(1+x^4\right)^2} + \frac{x^2}{\left(1+x^4\right)^3} + ...$ та знайти її значення при $x = 1$; $x = 0$.

?! Спростити функцію $y = 1 + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{\left(1+x^4\right)^2} + \frac{1}{\left(1+x^4\right)^3} + ...$ та знайти її значення при $x = 0$???

Задача 2

Усі бічні грані трикутної піраміди $DABC$ є прямокутними трикутниками з прямими кутами при вершині D (*таку піраміду називають прямокутним тетраедром* $DABC$ *з основою* ABC). Доведіть, що основа (трикутник ABC) такої піраміди є гострокутним трикутником.

Розв'язання.

1. Нехай a, b і c – довжини бічних ребер DA, DB та DC відповідно. Тоді з прямокутних трикутників ADB, ADC та BDC за теоремою Піфагора маємо наступні рівності

$$\begin{cases} AB^2 = a^2 + b^2 \\ AC^2 = a^2 + c^2 \\ BC^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{a^2 + b^2} \\ AC = \sqrt{a^2 + c^2} \\ BC = \sqrt{b^2 + c^2} \end{cases}. \qquad (10.2.1)$$

2. В трикутнику ABC за теоремою косинусів мають місце рівності:

$$\begin{cases} AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C \\ AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B \\ BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A \end{cases}$$, звідки, з урахуванням (10.2.1), маємо, що

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a^2 + c^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \cos\angle C \\ a^2 + c^2 = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \cos\angle B \\ b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - 2\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \cos\angle A \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\angle C = \dfrac{c^2}{\sqrt{c^2 + a^2} \cdot \sqrt{c^2 + b^2}} > 0 \\ \cos\angle B = \dfrac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2}} > 0 \\ \cos\angle A = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}} > 0 \end{cases}.$$

Оскільки косинуси внутрішніх кутів $\triangle ABC$ є додатними, то ці кути є гострими. І тому (за визначенням) $\triangle ABC$ є гострокутним.

Та чи знали Ви, що?[2]:

! [**Теорема Де-Гюа** – *просторовий аналог теореми Піфагора*]. У прямокутному тетраедрі $DABC$ з основою ABC квадрат площі основи дорівнює сумі квадратів площ бічних граней, тобто: $S_{ABC}^2 = S_{ADB}^2 + S_{BDC}^2 + S_{CDA}^2$.

! У прямокутному тетраедрі $DABC$ з основою ABC квадрат площі (кожної) бічної грані дорівнює добутку площі її проекції (на площину основи) та площі його основи, тобто:

$$S_{BDC}^2 = S_{BHC} \cdot S_{ABC}, \quad S_{CDA}^2 = S_{CHA} \cdot S_{ABC}, \quad S_{ADB}^2 = S_{AHB} \cdot S_{ABC},$$

де H – ортоцентр $\triangle ABC$.

! У прямокутному тетраедрі сума квадратів площ перерізів, проведених через бічні ребра та його центроїд, дорівнює половині квадрата площі його основи (грані-гіпотенузи).

! У прямокутному тетраедрі сума квадратів площ перерізів, проведених через ребра основи (грані-гіпотенузи) та його центроїд, дорівнює квадрату площі його основи (грані-гіпотенузи).

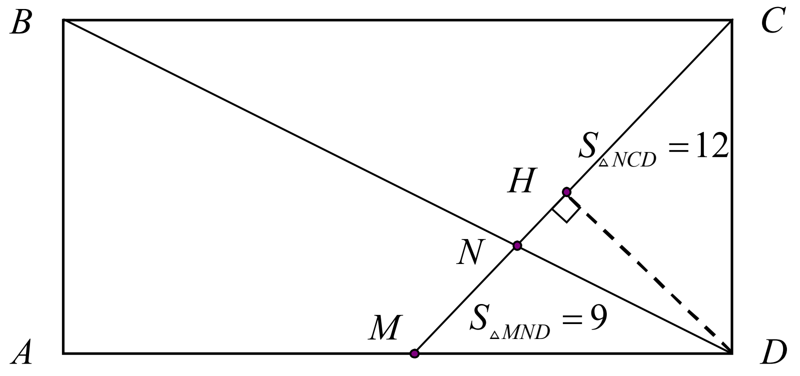
Якщо прямі, які містять висоти тетраедра, перетинаються в одній точці, то такий тетраедр називають ортоцентричним.

! Прямокутний тетраедр є ортоцентричним і тому має всі властивості ортоцентричного тетраедра.

[2] Бондар Д.Ю., Кадубовський О.А. Про метричні співвідношення в прямокутному тетраедрі та суміжні питання. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2024. Вип. 14. С. 24 – 50.

Задача 3

Обчислити площу прямокутника $ABCD$ (зображеного на рис. нижче), для якого M – така точка на стороні AD, що площі трикутників MND та NCD становлять 9 та 12 кв. од. відповідно, а N – точка перетину відрізків BD і CM.



Розв'язання.

1 спосіб.

1. З точки D опустимо перпендикуляр DH на пряму CM. Тоді очевидно, що DH є спільною висотою $\triangle MND$ та $\triangle NCD$. Тому $S_{\triangle MND}=\frac{1}{2}\cdot MN\cdot DH$, $S_{\triangle NCD}=\frac{1}{2}\cdot NC\cdot DH$. Звідки $\frac{S_{\triangle MND}}{S_{\triangle NCD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot MN\cdot DH}{\frac{1}{2}\cdot NC\cdot DH}=\frac{MN}{NC}$. І тому

$$\frac{MN}{NC}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}. \qquad (10.3.1)$$

2. Оскільки $ABCD$ – прямокутник, то $BC\parallel AD$. І тому (за властивістю паралельних та січної) маємо, що $\angle CBN=\angle MDN$, $\angle BCN=\angle DMN$ (як внутрішні різносторонні при паралельних BC, AD та січних BD і CM відповідно). Тоді трикутники $\triangle BNC$ та $\triangle DNM$ є подібними (за двома кутами). Звідки, з урахуванням (10.3.1) маємо, що $\frac{BC}{DM}=\frac{CN}{MN}=\frac{4}{3}$. І тому

$$BC=\frac{4}{3}DM. \qquad (10.3.2)$$

3. Оскільки $ABCD$ є прямокутником, то $\triangle MDC$ є прямокутним трикутником з прямим кутом при вершині B. Тому його площу можна подати у вигляді $S_{\triangle MDC}=\frac{1}{2}DM\cdot DC$. З іншого боку – $S_{\triangle MDC}=S_{\triangle MND}+S_{\triangle NCD}=9+12=21$. Тому

$$\frac{1}{2}\cdot DM\cdot DC=21\Rightarrow DM\cdot DC=42\Rightarrow\left(\frac{4}{3}\cdot DM\right)\cdot DC=\frac{4}{3}\cdot 42=56. \qquad (10.3.3)$$

З урахуванням співвідношення (10.3.2), маємо, що $BC\cdot DC=S_{ABCD}=56$ (кв.од.).

2 спосіб.

1.–2. Повторюємо міркування 1-го та 2-го пунктів 1 способу.

3. Оскільки $\triangle BNC$ та $\triangle DNM$ є подібними, то (за властивістю відношення площ подібних фігур) маємо, що

$$\frac{S_{\triangle BNC}}{S_{\triangle DNM}} = \left(\frac{BC}{DM}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{S_{\triangle BNC}}{9} = \frac{16}{9} \Rightarrow S_{\triangle BNC} = 16.$$

Тому $S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BNC} + S_{\triangle NCD} = 16 + 12 = 28$. Добре відомо, що діагональ прямокутника ділить його на два (рівних) трикутники рівних площ. Звідки й випливає, що $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle BCD} = 2 \cdot 28 = 56$ (кв. од.).

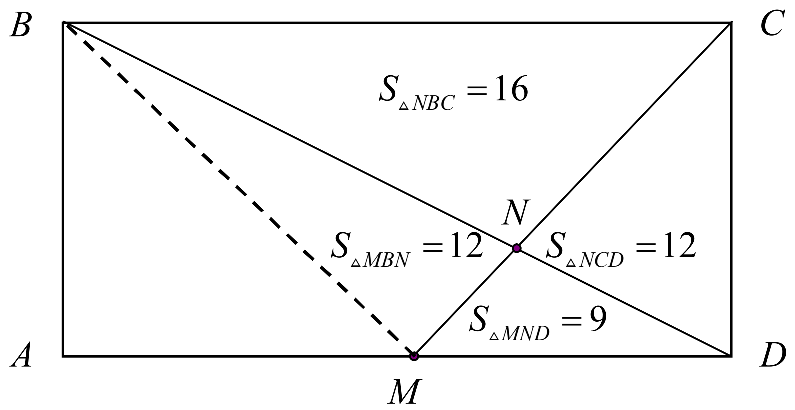
ДОПОВНЕННЯ до задачі 3

(*) O – точка перетину діагоналей опуклого чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що має місце рівність $S_{\triangle AOB} \cdot S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOC} \cdot S_{\triangle DOA}$.

Чи пам'ятаєте Ви, що?:

(**) Якщо в трапеції провести діагоналі, то площі трикутників зі спільною вершиною (у точці перетину діагоналей), які містять бічні її сторони, є рівними.

3 спосіб.



1. Розглянемо чотирикутник $MBCD$. Оскільки $MD \parallel BC$ (бо $ABCD$ за умовою є прямокутником) та $MD \neq BC$ (бо за умовою M точка на стороні AD, звідки $MD < AD = BC$), то (за ознакою трапеції) чотирикутник $MBCD$ є трапецією. І тому (за властивістю трапеції (*), наведеної вище)

$$S_{\triangle BNM} = S_{\triangle CND} = 12. \tag{10.3.4}$$

2. Оскільки трапеція $MBCD$ є опуклим чотирикутником, то (за властивістю опуклого чотирикутника (**), наведеної вище), з урахуванням (10.3.4), має місце рівність $S_{\triangle BNM} \cdot S_{\triangle CND} = S_{\triangle BNC} \cdot S_{\triangle MND}$, звідки $12 \cdot 12 = S_{\triangle BNC} \cdot 9$. І тому

$$S_{\triangle BNC} = 16. \tag{10.3.5}$$

3. Оскільки діагональ BD прямокутника $ABCD$ ділить його на два (рівних) трикутники рівних площ, то, з урахуванням (10.3.5), маємо що $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle BCD} = 2\left(S_{\triangle BNC} + S_{\triangle NCD}\right) = 2\left(16 + 12\right) = 2 \cdot 28 = 56$ (кв. од.).

Відповідь: 56 кв. од.

Задача 4

Відомо, що у Софії в кишені було n монет, кожна з яких могла бути лише номіналом 2, 5 або 10 гривень. Софія здійснила всі свої покупки та сплатила за кожен товар окремо (на різних касах) без решти (від касирів) тільки цими монетами, витративши при цьому всі свої монети.

а) Чи могли всі її покупки складатися із блокноту за 56 гривень та ручки за 29 гривень, якщо $n=14$? (3 бали);

б) Чи могли всі її покупки складатися із чашки чаю за 10 гривень, тістечка за 15 гривень та пиріжка за 20 гривень, якщо $n=19$? (4 бали).

Розв'язання.

а) ТАК, наприклад: Софія сплатила за блокнот *5 монет* номіналом десять гривень і *3 монети* номіналом 2 гривні (*разом вісім монет*), а за ручку – *1 монету* номіналом 10 гривень, *3 монети* номіналом 5 гривень та *2 монети* номіналом 2 гривні (*разом шість монет), а* **всього – 14 монет**.

Зауважимо, що наведений приклад є одним з 2-х можливих розв'язків системи

$$\begin{cases} 2x_1+5y_1+10z_1=56 \\ 2x_2+5y_2+10z_2=29 \\ x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2=14 \end{cases}, \text{ де } x_i, y_i, z_i \in N\bigcup\{0\} \equiv Z_+ . \qquad (10.4.1)$$

Для розв'язання системи (10.4.1) спочатку доцільно розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x+5y+10z=85 \\ x+y+z=14 \end{cases}, \qquad (10.4.2)$$

де $x=x_1+x_2$; $y=y_1+y_2$; $z=z_1+z_2$; $x,y,z\in Z_+$. Розв'язками системи (10.4.2) (де $x,y,z\in Z_+$) є лише наступні трійки чисел $(0;11;3)$ та $(5;3;6)$.

$\begin{cases} x=x_1+x_2=0 \\ x_1,x_2\in Z_+ \end{cases} \Leftrightarrow x_1=x_2=0$. Проте $x_1=x_2=0$ не є (поясніть чому?) компонентами розв'язку ($x_i,y_i,z_i\in Z_+$) системи (10.4.1). Тому цілі розв'язки (10.4.1) слід шукати серед випадків: $x_1+x_2=5$, $y_1+y_2=3$, $z_1+z_2=6$.

$$\begin{cases} y_1+y_2=3 \\ y_1,y_2\in Z_+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} y_1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array};$$

$$\begin{cases} y_1=0 \\ y_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+10z_1=56 \\ 2x_2+10z_2=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+5z_1=28 \\ x_2+5z_2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3; y_1=0; z_1=5 \\ x_2=2; y_2=3; z_2=1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y_1=3 \\ y_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+10z_1=41 \\ 2x_2+10z_2=29 \end{cases} \text{ – немає цілих розв'язків;}$$

$$\begin{cases} y_1=1 \\ y_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+10z_1=51 \\ 2x_2+10z_2=19 \end{cases} \text{ – немає цілих розв'язків;}$$

$$\begin{cases} y_1=2 \\ y_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+10z_1=46 \\ 2x_2+10z_2=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+5z_1=23 \\ x_2+5z_2=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3; y_1=2; z_1=4 \\ x_2=2; y_2=1; z_2=2 \end{cases}.$$

Тобто, Софія могла сплатити за блокнот 3 *монети* номіналом дві гривні, *2 монети* номіналом 5 гривень і *4 монети* номіналом 10 гривень (*разом дев'ять монет*), а за ручку – *2 монети* номіналом 2 гривні, *1 монету* номіналом 5 гривень та *2 монети* номіналом 10 гривень (*разом п'ять монет), а* **всього – 14 монет**.

б) НІ. Доведення – методом від супротивного.

1 спосіб.

1) Нехай у Софії було: «2-гривневих» монет – k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, «5-гривневих» монет – m, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; тоді «10-гривневих» монет у неї було $(19 - k - m)$.

2) На всю покупку Софія витратила $45 = 10 + 15 + 20$ гривень, вичерпавши при цьому всі свої монети. Тому має місце рівність

$$2k + 5m + (19 - k - m) \cdot 10 = 45, \text{ звідки } 8k = 5(29 - m).$$

Очевидно, що $k = 0 \Leftrightarrow m = 29$, чого бути не може бо $n = 19$. Тому $k \neq 0$. Значення m також не може дорівнювати нулеві, бо тоді k мало би бути кратним до числа $5 \cdot 29 = 145$, чого бути не може, бо $n = 19$.

Більше того, оскільки $8k = 5(29 - m)$, то $k = 5l$, де $l \in \mathbb{N}$. Тому маємо, що $8l = 29 - m$, звідки $l = 3 + \dfrac{5 - m}{8}$. Оскільки $l, m \in \mathbb{N}$ та $m < 19$, то $m \in \{5; 13\}$.

Якщо $m = 5$, то $l = 3$, $k = 15$, $m + k = 20$, чого бути не може, бо $n = 19$.
Якщо $m = 13$, то $l = 2$, $k = 10$, $m + k = 23$, чого також бути не може, бо $n = 19$.

Одержані протиріччя (у двох можливих випадках) свідчать про те, що Софія не могла здійснити покупку у спосіб, зазначений в умові задачі б).

2 спосіб.

Припустимо, що Софія здійснила покупку у зазначений спосіб. Тоді за чашку чаю вона сплатила:

або **1** «10-гривневу» монету, або **2** «5-гривневих», або **5** «2-гривневих» монет.

За тістечко Софія мала би сплатити принаймні **1** «5-гривневу» монету та набрати ще 10 гривень в один із трьох зазначених вище способів. Тобто, за тістечко вона мала би сплатити: або **2**, або **3**, або **6** монет.

Тобто, за чай і тістечко вона сплатила би:

або 11 монет (*перший випадок*), або не більше 8 монет (*другий випадок*).

В першому випадку вона сплатила би за пиріжок 8 монет. Вони не могли бути всі «2-гривневими» монетами (поясніть чому?). І тому серед них мала би бути або «10-гривнева» монета, або принаймні дві «5-гривневі» монети. Інші 10 гривень не можна набрати 6-ма або 7-ма зазначеними монетами. Отже, прийшли до протиріччя.

У другому випадку Софія сплатила би за пиріжок не менше 11 монет. Це також неможливо, бо тоді вартість пиріжка була би не меншою за 22 гривні.

Одержані протиріччя (у двох можливих випадках) й свідчать про те, що Софія не могла здійснити покупку у спосіб, зазначений в умові задачі б).

Відповідь: а) ТАК; б) НІ.

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 4

?! Яка найменша кількість монет номіналом 5 гривень могла бути у Софії, якщо вона купила лише альбом за 85 гривень та $n = 24$? (**Відповідь: 7**)

Нехай серед $n = 24$ монет, всі з яких Софія витратила при купівлі альбому за 85 гривень було *x монет* номіналом дві гривні, *y монет* номіналом 5 гривень та *z монет* номіналом 10 гривень. Тоді, з урахуванням введених позначень, має місце система відповідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 5y + 10z = 85 \\ x + y + z = 24 \end{cases}, \quad \text{де } x, y, z \in N \cup \{0\} \equiv Z_+. \qquad (10.4.3)$$

Оскільки перше рівняння системи є рівносильним до рівняння $2x = 85 - 5y - 10z$, права частина якого гарантовано ділиться на 5, то рівняння $2x + 5y + 10z = 85$ в цілих числах може справджуватися тоді і лише тоді, коли x є цілим (невід'ємним) числом, яке ділиться на 5, тобто тоді і лише тоді, коли $x = 5k$, де $k \in Z_+$. Тому (на множині цілих чисел) маємо наступні системи, що є рівносильними до системи (10.4.3)

$$\begin{cases} 2x + 5y + 10z = 85 \\ x + y + z = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10k + 5y + 10z = 85 \\ 5k + y + z = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + y + 2z = 17 \\ 5k + y + z = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + y + 2z = 17 \\ 3k - z = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k + y + 2(3k - 7) = 17 \\ z = 3k - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8k + y = 31 \\ z = 3k - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 31 - 8k \\ z = 3k - 7. \end{cases}$$

Єдиним розв'язком останньої системи в цілих невід'ємних числах є трійка чисел $\begin{cases} k = 3 \\ y = 7 \\ z = 2 \end{cases}$, звідки й випливає, що $\begin{cases} x = 15 \\ y = 7 \\ z = 2 \end{cases}$ – єдиний розв'язок системи (10.4.3) в цілих невід'ємних числах. Отже, $y = 7$ – єдина можлива (*а тому і найменша*) кількість монет номіналом 5 гривень, яка могла бути у Софії за умов, що вона купила альбом за 85 гривень та витратила всі $n = 24$ монети.

?! Відомо, що у Марії в кишені було n монет, кожна з яких могла бути лише номіналом 2, 5 або 10 гривень. Марія здійснила всі свої покупки та сплатила за кожен товар окремо (на різних касах) без решти (від касирів) тільки цими монетами, витративши при цьому всі свої монети.

а) Чи могли всі покупки Марії складатися із блокноту за 64 гривні та ручки за 31 гривню, якщо $n = 16$?;

б) Чи могли всі покупки Марії складатися із кави за 15 гривень, тістечка за 20 гривень та пиріжка за 25 гривень, якщо $n = 26$?

в) Яка найменша кількість монет номіналом 5 гривень могла бути у Марії, якщо вона купила лише альбом за 96 гривень та $n = 19$? (**Відповідь: 6**)

Задача 5

При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $\sqrt{1-(x+2a)^2} \geq \frac{4}{3}x$ є проміжок завдовжки $\frac{9}{5}=1{,}8$?

Розв'язання.

1 спосіб («графічний із заміною»).

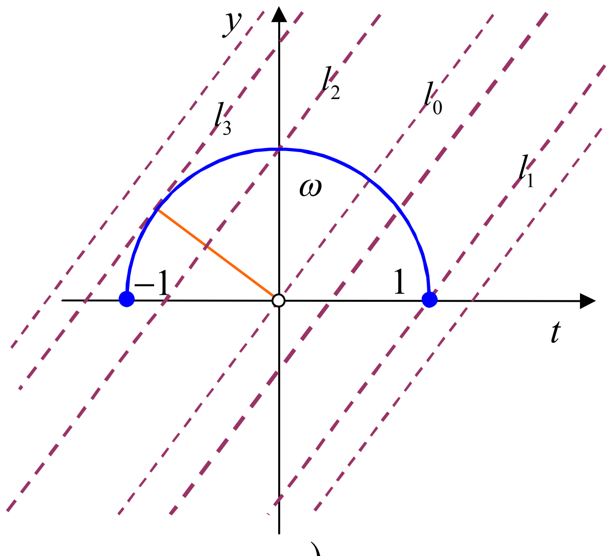
Нехай $x+2a=t$, тоді $x=t-2a$, а дану нерівність можна подати у вигляді

$$\sqrt{1-t^2} \geq \tfrac{4}{3}(t-2a) \Leftrightarrow \sqrt{1-t^2} \geq \tfrac{4}{3}t-\tfrac{8}{3}a. \qquad (10.5.1)$$

Розглянемо функції $y=\sqrt{1-t^2}=f(t)$ та $y=\frac{4}{3}t-\frac{8}{3}a=g(t)$, які визначаються лівою та відповідно правою частинами нерівності (10.5.1).

При довільному значенні параметра a графіком функції $y=\frac{4}{3}t-\frac{8}{3}a$ є пряма l_a, яка перетинає вісь Oy у точці $B\left(0;-\frac{8}{3}a\right)$ та утворює з віссю Ot сталий кут $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ (є паралельною до прямої $l_0: y=\frac{4}{3}t$) – рис. 10.5.1 a).

Оскільки $y=\sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1-t^2 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+y^2=1 \\ y\geq 0 \end{cases}$, то графіком функції $y=\sqrt{1-t^2}$ є півколо ω, положення якого відносно системи координат tOy не залежить від параметра a, а саме – та частина кола з центром у точці $O(0;0)$ та радіусом $r=1$ (діаметрально протилежні точки $(-1;0)$ та $(1;0)$ якого належать осі Ot), яка розташована не нижче осі Ot – рис. 10.5.1 a).



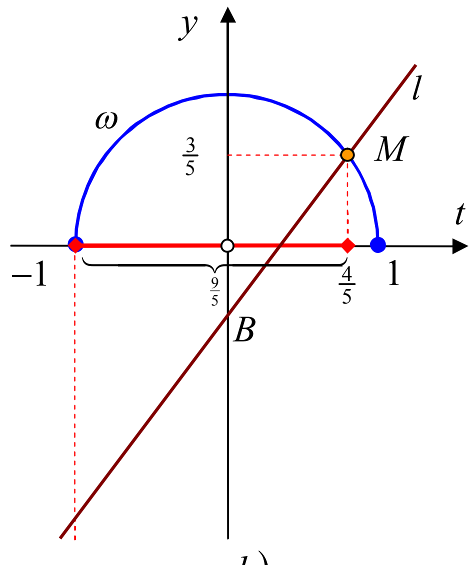


Рис. 10.5.1: до 1 способу розв'язання задачі 5

Зауважимо наступне:

– якщо проміжок $[m;n]$ є розв'язком нерівності (10.5.1), довжина якого становить $\delta_t=n-m$, то $m\leq t\leq n$; тому (з урахуванням заміни $x+2a=t$) справджується й нерівність $m\leq x+2a\leq n \Leftrightarrow m-2a\leq x\leq n-2a$, звідки довжина відповідного проміжку, який є розв'язком вихідної нерівності, становить $\delta_x = n - 2a - (m - 2a) = n - m = \delta_t$; *і навпаки*:

– якщо проміжок $[\alpha;\beta]$ є розв'язком вихідної нерівності, довжина якого становить $\delta_x = \beta - \alpha$, то $\alpha \le x \le \beta$; тому (з урахуванням заміни $x = t - 2a$) справджується й нерівність $\alpha \le t - 2a \le \beta \Leftrightarrow \alpha + 2a \le t \le \beta + 2a$, звідки довжина відповідного проміжку, який є розв'язком нерівності (10.5.1), становить $\delta_t = \beta + 2a - (\alpha + 2a) = \beta - \alpha = \delta_x$.

З урахуванням зазначеного вище, дану задачу можна переформулювати наступним чином: *при яких значеннях параметра* a *множиною розв'язків нерівності (10.5.1) є проміжок завдовжки* $\frac{9}{5} = 1{,}8$?

Нагадаємо, що розв'язками нерівності $f(t) \ge g(t)$ *є перші координати тих і лише тих точок графіка функції* $y = f(t)$, *які розташовані не нижче (відповідних) точок графіка функції* $y = g(t)$ (графіки функцій розглядаються побудованими відносно однієї системи координат tOy).

Якщо пряма l_a займає положення прямої l_1 ($\Leftrightarrow a = 1/2$ – *поясніть чому*?), то розв'язком нерівності (10.5.1) буде відрізок $[-1;1]$;

якщо пряма l_a розташована нижче прямої l_1 ($\Leftrightarrow a > 1/2$ – *поясніть чому*?), то розв'язком нерівності також буде відрізок $[-1;1]$;

якщо пряма l_a займає положення прямої l_3 ($\Leftrightarrow a = -5/8$ – *поясніть чому*?), тобто дотичної до півкола ω, то розв'язком нерівності (10.5.1) буде одне число (перша координата точки дотику);

якщо пряма l_a розташована вище прямої l_3 ($\Leftrightarrow a < -5/8$– *поясніть чому*?), то нерівність розв'язків не матиме;

якщо пряма l_a займає положення прямої l_0 ($\Leftrightarrow a = 0$), то розв'язком нерівності (10.5.1) буде відрізок $\left[-1;\frac{3}{5}\right]$ (*поясніть чому*?), довжина якого $\frac{8}{5} \ne \frac{9}{5}$;

якщо пряма l_a належить смузі, що обмежена прямими l_0 та l_3 ($\Leftrightarrow -5/8 < a < 0$ – *поясніть чому*?), то розв'язком нерівності (10.5.1) буде проміжок, довжина δ якого задовольняє нерівність $0 < \delta < \frac{8}{5}$; так, наприклад, якщо пряма l_a займає положення прямої l_2 ($\Leftrightarrow a = -3/8$– *поясніть чому*?) з цієї смуги, то розв'язком нерівності (10.5.1) буде відрізок $[-1;0]$.

Якщо пряма l_a належить смузі, що обмежена прямими l_1 та l_0 ($\Leftrightarrow 0 < a < 1/2$ – *поясніть чому*?), то розв'язком нерівності (10.5.1) буде проміжок, довжина δ якого задовольняє нерівність $\frac{8}{5} < \delta < 2$ – рис. 10.5.1 b). Більше того, для прямої l_a із зазначеної смуги, множиною розв'язків нерівності (10.5.1) є проміжок завдовжки $\frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5}$ тоді і лише тоді, коли графіки функцій $y = \sqrt{1 - t^2}$ та $y = \frac{4}{3}t - \frac{8}{3}a$ перетинаються у точці M, першою координатою якої є число $\frac{4}{5}$.

Оскільки точка M належить графіку функції $y=\sqrt{1-t^2}=f(t)$, то $y_M=f\left(\frac{4}{5}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$. Тобто, точка M має координати $\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$. Оскільки точка $M\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$ належить графіку функції $y=\frac{4}{3}t-\frac{8}{3}a=g(t)$, то $\frac{3}{5}=g\left(\frac{4}{5}\right)$. Звідки

$$\frac{3}{5}=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}-\frac{8}{3}a \Leftrightarrow \frac{8}{3}a=\frac{16}{15}-\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{8}{3}a=\frac{7}{15} \Leftrightarrow a=\frac{7}{40}.$$

Відповідь: $a=7/40$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5

?! При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $\sqrt{1-(x+2a)^2}\ge\frac{4}{3}x$ є проміжок: завдовжки 2; завдовжки 1?

?! При яких значеннях параметра a нерівність $\sqrt{1-(x+2a)^2}\ge\frac{4}{3}x$ має єдиний розв'язок; не має розв'язків?

2 спосіб («графічний без заміни»).

Розглянемо функції $y=\sqrt{1-(x+2a)^2}=f(x)$ та $y=\frac{4}{3}x=g(x)$, які визначаються лівою та відповідно правою частинами даної нерівності.

При довільному значенні параметра a графіком функції $y=\frac{4}{3}x$ є пряма l, яка проходить через початок координат та утворює з віссю Ox сталий кут $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ (розташована у I та III координатних чвертях) – рис. 10.5.2 $a)$.

Графіком функції $y=\sqrt{1-(x+2a)^2}$ є півколо ω – та частина кола (з центром в т. $L(-2a;0)$ та радіусом $r=1$), яка розташована не нижче осі Ox рис. 10.5.2.

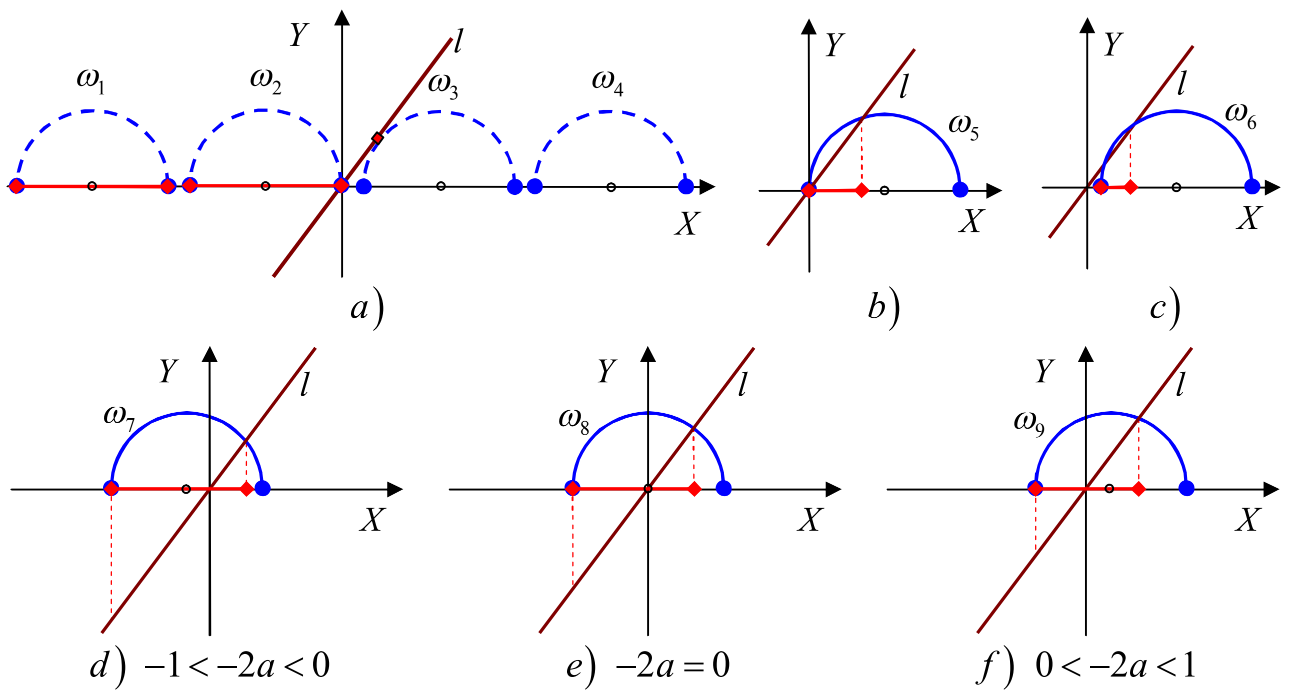


Рис. 10.5.2: до 2 способу розв'язання задачі 5

Якщо півколо ω займає положення півкола ω_2 ($\Leftrightarrow -2a=-1$ – *поясніть чому*?), то розв'язком нерівності є відрізок $\left[-1;1\right]$, довжина якого становить 2;

якщо півколо ω займає положення «лівіше» півкола ω_2 ($\Leftrightarrow -2a<-1$ – *поясніть чому*?), то розв'язком нерівності також буде відрізок $\left[-1;1\right]$;

якщо півколо ω займає положення півкола ω_3 ($\Leftrightarrow -2a=5/4$ – *поясніть чому*?), тобто дотикається прямої l, то розв'язком нерівності буде одне число (перша координата точки дотику);

якщо півколо ω займає положення «правіше» півкола ω_3 ($\Leftrightarrow -2a>5/4$ – *поясніть чому*?), то нерівність розв'язків не матиме;

якщо півколо ω займає положення півкола ω_5 ($\Leftrightarrow -2a=1$ – *поясніть чому*?), то розв'язком нерівності буде проміжок, довжина δ якого задовольняє нерівність $0<\delta<1$ – рис. 10.5.2 $b)$;

якщо півколо ω займає положення «правіше» півкола ω_5 але «лівіше» півкола ω_3 ($\Leftrightarrow 1<-2a<5/4$ – *поясніть чому*?), то розв'язком нерівності буде проміжок, довжина δ якого також задовольняє нерівність $0<\delta<1$ – рис. 10.5.2 $c)$.

Таким чином, залишилося дослідити значення параметра $a\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ та розглянути 3 принципово різних випадки – рис. 10.5.2 $d)$, $e)$, $f)$. В кожному з цих випадків розв'язком нерівності буде проміжок $\left[-2a-1;x_0\right]$, довжина δ якого становить $\delta=x_0+2a+1$, де x_0 – перша (додатна) координата єдиної точки перетину півкола із прямою l. Більше того, в кожному з цих випадків довжина δ задовольняє умову $1<\delta<2$, бо довжина проміжку більша за радіус півкола але менша за його діаметр.

Отже, нехай $\delta=x_0+2a+1=\frac{9}{5}$. Тоді $x_0=\frac{4}{5}-2a$. Оскільки x_0 – перша координата спільної точки графіків функцій $y=\sqrt{1-\left(x+2a\right)^2}=f\left(x\right)$ та $y=\frac{4}{3}x=g\left(x\right)$, то має місце рівність

$$f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)\Leftrightarrow f\left(\tfrac{4}{5}-2a\right)=g\left(\tfrac{4}{5}-2a\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}-2a+2a\right)^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{4}{5}-2a\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{16}{15}-\frac{8}{3}a\Leftrightarrow\frac{3}{5}=\frac{16}{15}-\frac{8}{3}a\Leftrightarrow\frac{8}{3}a=\frac{7}{15}\Leftrightarrow a=\frac{7}{40}.$$

Таким чином, множиною розв'язків даної нерівності є проміжок завдовжки $\frac{9}{5}$ тоді і лише тоді, коли півколо ω займає положення півкола ω_7 (рис. 10.5.2 $d)$) та $a=7/40$.

Відповідь: $a=7/40$.

3 спосіб (суто аналітичний – «тренуємо математичну наполегливість»).

1. $$\sqrt{1-(x+2a)^2} \geq \frac{4}{3}x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{4}{3}x < 0 \\ 1-(x+2a)^2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-(x+2a)^2 \geq \frac{16}{9}x^2 \\ \frac{4}{3}x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ (x+2a)^2 \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 9-9(x+2a)^2 \geq 16x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ -1 \leq x+2a \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 9 \geq 16x^2 + 9(x+2a)^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (I)\begin{cases} x < 0 \\ -1-2a \leq x \leq 1-2a \end{cases} \\ (II)\begin{cases} 25x^2 + 36ax + 36a^2 - 9 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. (*)$$

2. Для розв'язання системи (II) розв'яжемо нерівність

$$25x^2 + 36ax + 36a^2 - 9 \leq 0 \qquad (**).$$

Дискримінант D квадратного рівняння $25x^2 + 36ax + 36a^2 - 9 = 0$ становить $D = (36a)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (36a^2 - 9) = 36 \cdot (25 - 64a^2)$.

2.1. Якщо $D < 0$, то нерівність (**) та система (II) розв'язків не матиме, а розв'язки сукупності (*) будуть співпадати із розв'язками системи (I).

$$D < 0 \Leftrightarrow 25 - 64a^2 < 0 \Leftrightarrow a^2 > \frac{25}{64} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{5}{8}\right) \cup \left(\frac{5}{8}; +\infty\right).$$

При $a > \frac{5}{8}$ маємо, що: $2a > \frac{5}{4} \Rightarrow -2a < -\frac{5}{4} \Rightarrow -1-2a < -\frac{9}{4}$, $1-2a < -\frac{1}{4}$. Очевидно також, що $1-2a > -1-2a$. Звідки при $a > \frac{5}{8}$ розв'язками системи (I) є проміжок $[-1-2a; 1-2a]$, довжина якого становить $\delta = 1-2a-(-1-2a) = 2 \neq \frac{9}{5}$.

При $a < -\frac{5}{8}$ маємо, що: $2a < -\frac{5}{4} \Rightarrow -2a > \frac{5}{4} \Rightarrow -1-2a > \frac{1}{4}$, $1-2a > \frac{9}{4}$. Очевидно також, що $1-2a > -1-2a$. Звідки при $a < -\frac{5}{8}$ система (I) та сукупність (*) не матимуть розв'язків взагалі.

2.2. Якщо $D = 0$, то $a = \pm\frac{5}{8}$.

При $a = -\frac{5}{8}$ єдиним розв'язком системи (II) буде $x = 0,9$; система (I) набуває вид $\begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{9}{4} \end{cases}$ та не має розв'язків. Тому при $a = -\frac{5}{8}$ єдиним розв'язком сукупності (*) буде $x = 0,9$.

При $a=\frac{5}{8}$ єдиним розв'язком першої нерівності системи (II) буде $x=-0,9$, а сама система (II) розв'язків не матиме; система (I) набуває вид $\begin{cases} x<0 \\ -\frac{9}{4}\le x\le -\frac{1}{4} \end{cases}$ та її розв'язками є проміжок $\left[-\frac{9}{4};-\frac{1}{4}\right]$. Отже, при $a=\frac{5}{8}$ розв'язком сукупності (*) є проміжок $\left[-\frac{9}{4};-\frac{1}{4}\right]$, довжина якого становить $\delta=-\frac{1}{4}-\left(-\frac{9}{4}\right)=2\ne\frac{9}{5}$.

2.3. Якщо $D>0$, то відповідне квадратне рівняння має два різні корені

$$x_1=\frac{-18a-3\sqrt{25-64a^2}}{25} \quad \text{та} \quad x_2=\frac{-18a+3\sqrt{25-64a^2}}{25}.$$

$D>0\Leftrightarrow 25-64a^2>0\Leftrightarrow a^2<\frac{25}{64}\Leftrightarrow a\in\left(-\frac{5}{8};\frac{5}{8}\right)$.

2.3.1) Якщо $x_2<0$, то розв'язком системи (II) буде проміжок $[x_1;x_2]$;

$$x_2<0\Leftrightarrow\sqrt{25-64a^2}<6a\Leftrightarrow\begin{cases}25-64a^2<36a^2\\6a>0\\25-64a^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2>1/4\\a>0\\-5/8<a<5/8\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<a<\frac{5}{8};$$

тобто, при $a\in\left(\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right)$ розв'язком системи (II) є проміжок $[x_1;x_2]$.

При $a\in\left(\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right)$ маємо, що: $1<2a<\frac{5}{4}\Rightarrow -1>-2a>-\frac{5}{4}\Rightarrow -\frac{9}{4}<-1-2a<-2$, $-\frac{1}{4}<1-2a<0$. І тому розв'язком системи (I) буде проміжок $[-1-2a;1-2a]$, довжина якого становить $2\ne\frac{9}{5}$. Звідки розв'язком сукупності (*) є проміжок / об'єднання проміжків, довжина / сума довжин яких становить не менше 2.

2.3.2) Якщо $x_2=0$, то розв'язком системи (II) буде проміжок $[x_1;x_2)$;

$$x_2=0\Leftrightarrow\sqrt{25-64a^2}=6a\Leftrightarrow\begin{cases}25-64a^2=36a^2\\6a>0\\25-64a^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1/4\\a>0\\-5/8<a<5/8\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2};$$

при $a=\frac{1}{2}$: система (I) набуває вид $\begin{cases}x<0\\-2\le x\le 0\end{cases}$ та її розв'язками є проміжок $[-2;0)$; розв'язком системи (II) є проміжок $\left[-\frac{18}{25};0\right)$. Тому при $a=\frac{1}{2}$ розв'язком сукупності (*) є проміжок $[-2;0)$, довжина якого становить $2\ne\frac{9}{5}$.

2.3.3) Якщо $x_1 < 0 < x_2$, то розв'язком системи (II) буде проміжок $\left[0; x_2\right]$;

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -18a - 3\sqrt{25-64a^2} < 0 \\ -18a + 3\sqrt{25-64a^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{25-64a^2} > -6a \\ \sqrt{25-64a^2} > 6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{25-64a^2} > 0 \\ \sqrt{25-64a^2} > 6a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 25-64a^2 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 25-64a^2 > 0 \\ 6a < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 25-64a^2 > 36a^2 \\ 6a \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5/8 < a < 5/8 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{8} < a < 0 \\ \begin{cases} -\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{1}{2} \\ a \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{8} < a < \dfrac{5}{8} \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{8} < a < 0 \\ 0 \le a < \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{8} < a < \dfrac{5}{8} \\ -\dfrac{5}{8} < a < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{8} < a < \frac{1}{2}$$

Тобто, при $a \in \left(-5/8; 1/2\right)$ розв'язком системи (II) буде проміжок $\left[0; x_2\right]$, довжина якого становить $\delta_1 = \left(-18a + 3\sqrt{25-64a^2}\right)\Big/25$. Причому $\delta_1 \ne 9/5$ при жодному a.

При $a \in \left(-\dfrac{5}{8}; \dfrac{1}{2}\right)$ маємо, що: $-\dfrac{5}{4} < 2a < 1 \Rightarrow \dfrac{5}{4} > -2a > -1 \Rightarrow$ $-2 < -1-2a < \dfrac{1}{4}$, $0 < 1-2a < 9/4$. Система (I) буде мати розв'язок лише у випадку, коли $-2 < -1-2a < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-0{,}5; 0{,}5\right)$. Розв'язком системи (I) буде проміжок $\left[-1-2a; 0\right)$. Таким чином, при $a \in \left(-0{,}5; 0{,}5\right)$ розв'язком сукупності (*) є проміжок $\left[-1-2a; x_2\right] = \left[-1-2a; 0\right) \cup \left[0; x_2\right]$, довжина якого становить $\delta = \delta_1 + 2a + 1$. Причому

$$\delta = \frac{9}{5} \Leftrightarrow \frac{-18a + 3\sqrt{25-64a^2}}{25} + 2a + 1 = \frac{9}{5} \Leftrightarrow 3\sqrt{(5-8a)(5+8a)} = 4(5-8a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(5-8a)(5+8a) = 16(5-8a)^2 \Rightarrow (5-8a)\left(45 + 72a - 16(5-8a)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (5-8a)(200a - 35) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5/8 \notin \left(-0{,}5; 0{,}5\right) \\ a = 7/40 \in \left(-0{,}5; 0{,}5\right) \end{array}\right..$$

2.3.4) Якщо ж $x_1 \ge 0$, то система (II) не буде мати розв'язків.

$$x_1 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{25-64a^2} \le -6a \Leftrightarrow \begin{cases} 25-64a^2 \le 36a^2 \\ -6a > 0 \\ 25-64a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \ge 1/4 \\ a < 0 \\ -5/8 < a < 5/8 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{8} < a \le -\frac{1}{2}.$$

При $a \in \left(-\dfrac{5}{8}; -\dfrac{1}{2}\right]$ маємо, що: $-\dfrac{5}{4} < 2a \le -1 \Rightarrow \dfrac{5}{4} > -2a \ge 1 \Rightarrow$ $0 \le -1-2a < \dfrac{1}{4}$, $2 \le 1-2a < \dfrac{9}{4}$. Очевидно також, що $1-2a > -1-2a$. Тому при $a \in \left(-\dfrac{5}{8}; -\dfrac{1}{2}\right]$ система (I) та сукупність (*) не будуть мати розв'язків взагалі.

Відповідь: $a = 7/40$.

11 клас

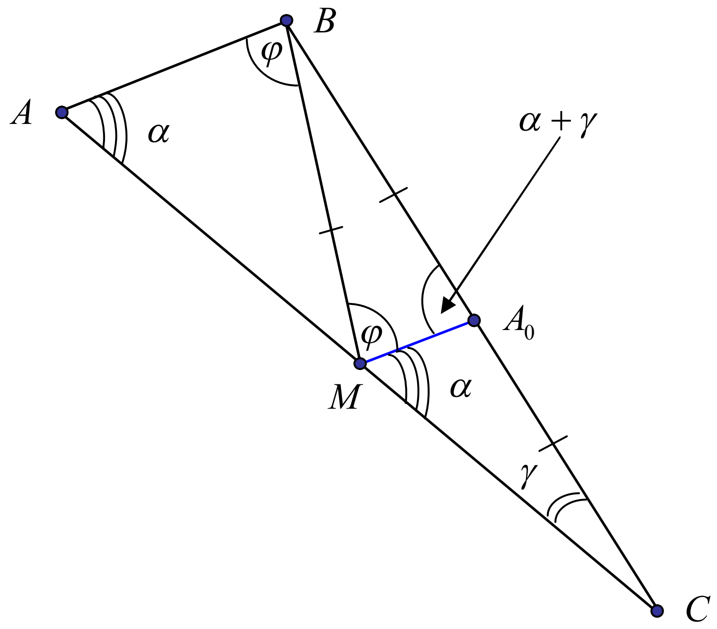
Задача 1

В трикутнику ABC довжина медіани BM дорівнює половині довжини сторони BC. Доведіть, що $\angle ABM = \angle BCA + \angle BAC$.

Розв'язання.

Нехай ABC – даний трикутник, в якому довжина медіани BM дорівнює половині довжини сторони BC. Через α, φ, γ позначимо міри кутів $\angle BAC$, $\angle ABM$ і $\angle BCA$ відповідно, та доведемо, що справджується рівність $\varphi = \alpha + \gamma$.

1 спосіб.



1. Нехай A_0 – середина сторони BC. Тоді (за визначенням) MA_0 є середньою лінією $\triangle ABC$. Звідки (за властивістю середньої лінії трикутника) $MA_0 \parallel AB$. Тому:

за властивістю паралельних прямих і січної маємо, що

$$\angle BMA = \angle MBA = \varphi; \qquad (11.1.1)$$

$$\angle A_0MC = \angle BAC = \alpha; \qquad (11.1.2)$$

2. Розглянемо $\triangle MA_0C$. В ньому: $\angle A_0MC = \alpha$, $\angle A_0CM = \angle BCA = \gamma$. Тому (за властивістю зовнішнього кута трикутника) маємо, що

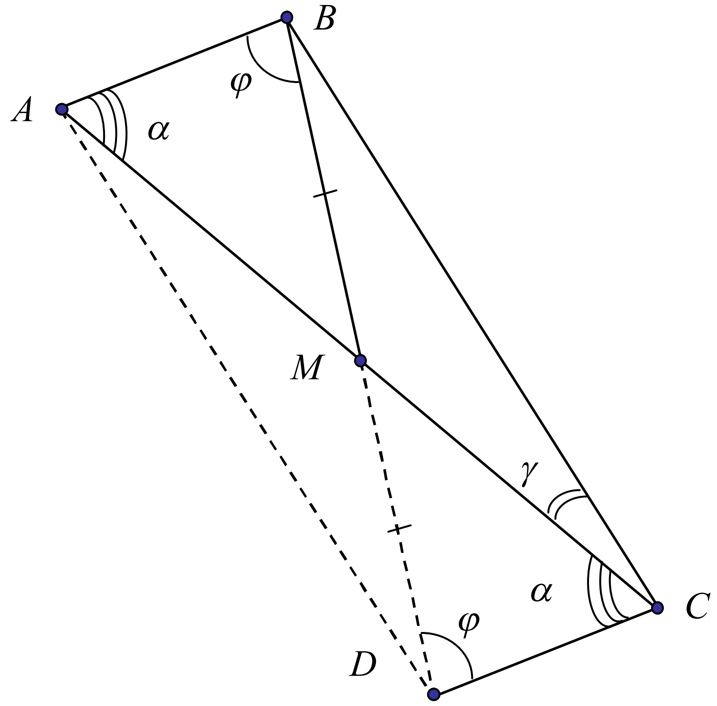
$$\angle BA_0M = \alpha + \gamma. \qquad (11.1.3)$$

3. Оскільки A_0 – середина сторони BC, то $BA_0 = A_0C = \frac{1}{2}BC$. За умовою задачі $BM = \frac{1}{2}BC$. Звідки $\triangle BMA_0$ є рівнобедреним з основою MA_0. І тому

$$\varphi = \angle BMA_0 = \angle BA_0M = \alpha + \gamma.$$

Звідки й випливає справедливість доводжуваної рівності $\varphi = \alpha + \gamma$.

2 спосіб.



1. На промені, доповняльному до променя MB, відкладемо відрізок $MD = BM$. Оскільки за умовою BM є медіаною трикутника ABC, то M – середина сторони AC. Отже, в чотирикутнику $ABCD$ діагоналі точкою перетину (M) діляться навпіл. І тому (за ознакою паралелограма) чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.

Звідки (за властивостями кутів паралелограма) маємо, що:

$$\angle BDC = \angle DBA = \varphi, \tag{11.1.4}$$

$$\angle ACD = \angle CAB = \alpha, \tag{11.1.5}$$

Тому за основною властивістю величини кута маємо, що

$$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = \gamma + \alpha. \tag{11.1.6}$$

2. Оскільки (за побудовою) $MD = BM$ та (за умовою задачі) $BM = \frac{1}{2}BC$, то за основною властивістю довжини відрізка маємо, що

$$BD = BM + MD = 2 \cdot BM = 2 \cdot \frac{1}{2}BC = BC. \tag{11.1.7}$$

Звідки $\triangle DBC$ є рівнобедреним з основою DC. І тому, з урахуванням співвідношень (11.1.4), (11.1.6), (11.1.7), одержуємо справедливість рівності

$$\varphi = \angle BDC = \angle BCD = \alpha + \gamma.$$

ДОПОВНЕННЯ
до задачі 1

?! Чи може такий трикутник бути гострокутним? Відповідь обґрунтуйте.

?! Чи може такий трикутник бути прямокутним? Відповідь обґрунтуйте.

?! За яких умов такий трикутник є тупокутним?

Задача 2

Визначити, за яких значень x три числа $\lg 2$, $\lg\left(3^x-3\right)$ та $\lg\left(3^x+9\right)$, узяті в заданій послідовності, є послідовними членами арифметичної прогресії.

Розв'язання.

Добре відомо, що для довільної трійки a_{k-1}, a_k, a_{k+1} $(k \in N,\ k \geq 2)$ послідовних членів арифметичної прогресії має місце рівність (характеристична властивість)

$$a_{k-1}+a_{k+1}=2a_k . \tag{11.2.1}$$

Введемо наступні позначення для трьох даних чисел $a_{k-1}=\lg 2$, $a_k=\lg\left(3^x-3\right)$, $a_{k+1}=\lg\left(3^x+9\right)$, де $k \in N$, $k \geq 2$. Тоді, з урахуванням рівності (11.2.1), маємо рівняння

$$\lg 2+\lg\left(3^x+9\right)=2\lg\left(3^x-3\right) \Leftrightarrow \tag{11.2.2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg 2+\lg\left(3^x+9\right)=\lg\left(3^x-3\right)^2 \\ 3^x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg 2\left(3^x+9\right)=\lg\left(3^x-3\right)^2 \\ 3^x>3^1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(3^x+9\right)=\left(3^x-3\right)^2 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot 3^x+18=\left(3^x\right)^2-6\cdot 3^x+9 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(3^x\right)^2-8\cdot 3^x-9=0 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3^x=t \\ t^2-8\cdot t-9=0 \\ t>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x=t \\ \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=9 \end{array}\right. \\ t>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x=t \\ t=9 \end{cases} \Rightarrow 3^x=9 \Rightarrow x=2 .$$

Таким чином, три числа $\lg 2$, $\lg\left(3^x-3\right)$ та $\lg\left(3^x+9\right)$, узяті в заданій послідовності, є послідовними членами арифметичної прогресії тоді і лише тоді, коли $x=2$.

Відповідь: $x=2$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2

?! Відомо, що для кожної трійки c_{k-1}, c_k, c_{k+1} $(k \in N,\ k \geq 2)$ послідовних членів числової послідовності $\left(c_n\right)$ виконується рівність $c_{k-1}+c_{k+1}=2c_k$. Чи обов'язково послідовність $\left(c_n\right)$ буде арифметичною? Відповідь обґрунтуйте.

?! Відомо, що для кожної трійки d_{k-1}, d_k, d_{k+1} $(k \in N,\ k \geq 2)$ послідовних членів числової послідовності $\left(d_n\right)$ виконується рівність $d_{k-1}\cdot d_{k+1}=d_k^2$. Чи обов'язково послідовність $\left(d_n\right)$ буде геометричною? Відповідь обґрунтуйте.

Задача 3

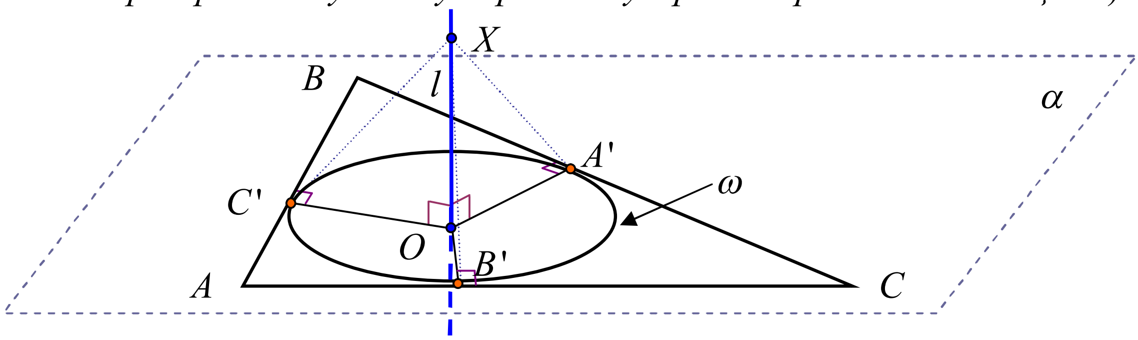
Дано трикутник ABC. Знайдіть геометричне місце точок простору, що є рівновіддаленими від сторін $\triangle ABC$.

Розв’язання.

0. Нагадаємо, що у просторі та на площині під відстанню $d\left(M;n\right)$ від точки M до прямої n розуміють довжину перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму n. Тобто $d\left(M;n\right)=MM'$, де M' – така точка на прямій n, що $MM'\perp n$. Проте слід розуміти, що відстань $d\left(M;[AB]\right)$ від точки M до відрізка $[AB]$ це не теж саме, що відстань $d\left(M;AB\right)$ від точки M до прямої AB, бо в загальному випадку основа M' перпендикуляра MM' може і не бути точкою відрізка $[AB]$. В загальному випадку – $d\left(M;[AB]\right)=\min\limits_{Y\in[AB]}\left\{MY\right\}\geq d\left(M;AB\right)$.

1. Нехай Ω – шукана множина точок простору. З урахуванням умови, точка X простору належить множині Ω тоді і лише тоді, коли $XX_1=XX_2=XX_3$, де X_1,X_2,X_3 – основи перпендикулярів, опущених із точки X на сторони ($\triangle ABC$) BC, AC та AB відповідно.

2. Нехай α – площина, яка містить $\triangle ABC$ (тобто така, яка визначається трьома точками, що є вершинами $\triangle ABC$). За відомою аксіомою така площина α у просторі – єдина. Зі шкільного курсу планіметрії добре відомо, що в довільний трикутник можна вписати коло і тільки одне. Нехай O – центр кола ω, вписаного у $\triangle ABC$; A',B',C' – точки, в яких коло ω дотикається до сторін BC, AC та AB відповідно, а l – пряма, що проходить через т. O перпендикулярно до площини α. Добре відомо, що така пряма l – єдина (*бо за відомою теоремою стереометрії в просторі існує тільки одна пряма, яка проходить через фіксовану точку перпендикулярно до фіксованої площини*).



3. За властивістю дотичної до кола та з урахуванням введених позначень, маємо, що $OA'\perp BC$, $OB'\perp AC$, $OC'\perp AB$; звідки OA',OB',OC' є перпендикулярами, опущеними з точки O на прямі BC, AC та AB відповідно. З іншого боку – $OA'=OB'=OC'$ (як радіуси кола ω). І тому точка $O\in\Omega$.

4. Нехай X – довільна але фіксована точка прямої l, яка не співпадає із т. O. Оскільки $l\perp\alpha$, то (*за визначенням*) XO є перпендикуляром, опущеним з точки X на площину α, а відрізки OA',OB',OC' – проекціями похилих XA',XB' та XC' відповідно. Оскільки $OA'\perp BC$, $OB'\perp AC$, $OC'\perp AB$, то (*за теоремою про три перпендикуляри*) $XA'\perp BC$, $XB'\perp AC$, $XC'\perp AB$. Звідки XA',XB',XC' є перпендикулярами, опущеними з точки X на прямі BC, AC та AB відповідно. За властивістю «рівних проекцій та похилих» маємо, що $XA'=XB'=XC'$. І тому $X\in\Omega$.

Отже, з урахуванням пунктів 3 і 4, довільна точка прямої l *належить* Ω.

5. Нехай Y – така точка простору, що є рівновіддаленою від сторін $\triangle ABC$. Тобто, $Y \in \Omega$. ***Доведемо, що*** $Y \in l$***.*** *Справедливість останнього покажемо методом від супротивного, припустивши, що* $Y \in \Omega$ *але* $Y \notin l$.

Отже, нехай YY_1, YY_2, YY_3 – перпендикуляри, опущені з точки Y на сторони BC, AC та AB відповідно. Оскільки $Y \in \Omega$, то $YY_1 = YY_2 = YY_3$.

Якщо точка $Y \in \alpha$, то коло ω_1 з центром у точці Y та радіусом $R_1 = YY_i$ дотикається до сторін $\triangle ABC$. І тому ω_1 (за визначенням) є вписаним у $\triangle ABC$ колом. За припущенням $Y \notin l$, тому $Y \neq O$. Звідки ω та ω_1 – два різні (бо їх центри не співпадають) кола, кожне з яких вписано у $\triangle ABC$. Чого бути не може, бо прийшли до протиріччя з теоремо про те що «в довільний трикутник можна вписати коло і тільки одне».

Якщо ж точка $Y \notin \alpha$, то з Y опустимо перпендикуляр YH на площину α. Тоді за «ТТП» маємо, що $HY_1 \perp BC$, $HY_2 \perp AC$, $HY_3 \perp AB$. Оскільки $YY_1 = YY_2 = YY_3$ (похилі є рівними), то $HY_1 = HY_2 = HY_3$. Звідки коло ω_2 з центром у т. H та радіусом $R_2 = HY_i$ є вписаним у $\triangle ABC$. Що можливо лише коли ω_2 співпадає з ω. Звідки т. H співпадає з т. O. За припущенням $Y \notin l,\ YH \perp \alpha$. І тому $YO \perp \alpha$, а через т. O проходить дві різні прямі l та YO, кожна з яких перпендикулярна до α. Чого бути не може, бо прийшли до протиріччя з теоремою (*в просторі існує тільки одна пряма, яка проходить через фіксовану точку перпендикулярно до фіксованої площини)*. Отже, наше припущення щодо $Y \notin l$ є неправильним. *Таким чином, шукана множина* Ω *співпадає із прямою* l.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 3

?! Дано $\triangle ABC$. Знайдіть геометричне місце точок простору, що є рівновіддаленими від **прямих** AB, BC і CA. (**Відповідь**: чотири (паралельні) прямі, які проходять через центри вписаного і трьох зовнівписаних кіл $\triangle ABC$, та є перпендикулярними до площини трикутника)

Задача 4

На дошці написано дванадцять різних натуральних чисел. Середнє арифметичне семи найменших із них становить 8, а середнє арифметичне семи найбільших із них дорівнює 16.

а) Чи може найбільше з цих 12-ти чисел дорівнювати 18? (3 бали);

б) Чи може середнє арифметичне всіх 12-ти чисел становити 11? (4 бали).

Розв'язання.

Нехай $a_1, a_2, a_3, ..., a_{11}, a_{12}$ – 12 різних натуральних чисел, які написано на дошці. Без втрати загальності та задля зручності будемо вважати, що $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{11} < a_{12}$. Оскільки (за умовою):

– середнє арифметичне семи найменших із чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_{11}, a_{12}$ становить 8, то маємо рівність $\left(a_1 + a_2 + ... + a_7\right)/7 = 8 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_7 = 56$; (11.4.1)

– середнє арифметичне семи найбільших із чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_{11}, a_{12}$ дорівнює 16, то маємо рівність $\left(a_6 + a_7 + ... + a_{12}\right)/7 = 16 \Leftrightarrow a_6 + a_7 + ... + a_{12} = 112$. (11.4.2)

а) НІ. Доведення проведемо методом від супротивного, а саме:

нехай найбільше з 12-ти чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_{11}, a_{12}$ *дорівнює 18, тобто* $a_{12} = 18$; тоді найбільше значення суми семи найбільших з можливих різних натуральних чисел (за таких умов) становить

$$\max\{a_6 + ... + a_{12}\} = \max\{a_{12} + ... + a_6\} = 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 = 105;$$

тому, з урахуванням співвідношення (11.4.2), маємо що

$a_6 + a_7 + ... + a_{12} = 112 > 105 = \max\{a_6 + a_7 + ... + a_{12}\}$, чого, звісно, бути не може.

Отже, прийшли до (очевидного) протиріччя. І тому наше **припущення** про те, що «*найбільше з цих 12-ти чисел дорівнює 18*», **є неправильним**.

б) НІ. Доведення проведемо методом від супротивного, а саме:

Нехай середнє арифметичне всіх 12-ти таких чисел становить 11, тоді їх сума дорівнює $11 \cdot 12 = 132$.

Нехай далі: $A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ – сума найменших п'яти; $C = a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$ – сума найбільших п'яти; $B = a_6 + a_7$ – сума 6-го та 7-го з даних чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_{11}, a_{12}$ (які впорядковано за зростанням).

Тоді, з урахуванням (11.4.1) та (11.4.2), маємо таку систему

$$\begin{cases} A + B = 56 \\ B + C = 112 \\ A + B + C = 132 \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} A = 20 \\ B = 36. \\ C = 76 \end{cases} \qquad (11.4.3)$$

Оскільки всі 12 натуральних чисел є різними та $B = 36$, то найменше значення для a_7 становить 19. Пояснимо останнє: якщо $a_7 \le 18$, то $a_6 \le 17$, звідки $a_6 + a_7 \le 35$, чого бути не може, бо $B = 36$.

Тоді найменше можливе значення для a_8 становить 20. Звідки випливає, що найменшим можливим значенням для суми найбільших п'яти чисел є число

$$\min\{a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}\} = 20 + 21 + 22 + 23 + 24 = 110,$$

тому, з урахуванням співвідношення (11.4.3), маємо що

$$a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = 76 < 110 = \min\{a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}\},$$

чого, звісно, бути не може.

Отже, прийшли до (очевидного) протиріччя. І тому наше **припущення** про те, що «*середнє арифметичне всіх 12-ти таких чисел становить 11*», **є неправильним**.

Відповідь: а) НІ; б) НІ.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4

?! Знайдіть найменше значення середнього арифметичного всіх 12 чисел.

?! На дошці написано одинадцять різних натуральних чисел. Середнє арифметичне шести найменших із них становить 8, а середнє арифметичне семи найбільших із них дорівнює 14.

а) Чи може найбільше з цих одинадцяти чисел дорівнювати 16?

б) Чи може середнє арифметичне всіх одинадцяти чисел становити 10?

в) Знайдіть найменше значення середнього арифметичного всіх 11 таких чисел.

Задача 5

Знайдіть значення параметра a, при якому корінь рівняння $\lg\left(\sin\left(5\pi x\right)\right)=\sqrt{16+a-x}$ належить проміжку $\left[\frac{3}{2};2\right]$.

Розв'язання.

1. Очевидно, що ОДЗ змінної даного рівняння є розв'язки системи

$$\begin{cases}\sin\left(5\pi x\right)>0\\ 16+a-x\geq 0\end{cases}.$$

1 спосіб.

2. Добре відомо, що функція $y=\sin x$ є обмеженою та набуває значень, що належать відрізку $\left[-1;1\right]$.

З урахуванням ОДЗ даного рівняння, маємо що $0<\sin\left(5\pi x\right)\leq 1$.

Оскільки функція $y=\lg t$ зростає на всій області визначення (при $t\in\left(0;+\infty\right)$), то при всіх значеннях x з ОДЗ даного рівняння справджується нерівність

$$\lg\left(\sin\left(5\pi x\right)\right)\leq \lg 1 \Leftrightarrow \lg\left(\sin\left(5\pi x\right)\right)\leq 0. \qquad (11.5.1)$$

3. Також добре відомо, що функція $y=\sqrt{x}$ набуває невід'ємних значень на всій області визначення (при $x\in\left[0;+\infty\right)$), тобто при всіх x з ОДЗ даного рівняння справджується нерівність

$$\sqrt{16+a-x}\geq 0. \qquad (11.5.2)$$

Таким чином, з урахуванням нерівностей (11.5.1) та (11.5.2), дана рівність справджується (рівність для функцій у лівій та правій його частині досягається) лише за умов, коли

$$\lg\left(\sin\left(5\pi x\right)\right)=0=\sqrt{16+a-x} \Leftrightarrow \begin{cases}\lg\left(\sin\left(5\pi x\right)\right)=0\\ \sqrt{16+a-x}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(5\pi x\right)=1\\ 16+a-x=0\end{cases}.$$

4. Не важко переконатися в тому, що розв'язки останньої системи належать ОДЗ даного рівняння. Крім того, для визначення кореня / коренів даного рівняння маємо наступну систему

$$\begin{cases}5\pi x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z\\ x=a+16\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5x=\frac{1}{2}+2k,\ k\in Z\\ x=a+16\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{10}+\frac{2}{5}k,\ k\in Z\\ x=a+16\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a+16=\frac{1}{10}+\frac{2}{5}k,\ k\in Z\\ x=a+16\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-15\frac{9}{10}+\frac{2}{5}k,\ k\in Z\\ x=a+16\end{cases}.$$

5. Корінь даного рівняння (розв’язок останньої системи) належить проміжку $\left[\frac{3}{2};2\right]$ тоді і лише тоді, коли справджуються умови

$$\begin{cases} a=-15\frac{9}{10}+\frac{2}{5}k,\ k\in Z \\ \frac{3}{2}\le a+16\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-15\frac{9}{10}+\frac{2}{5}k,\ k\in Z \\ -14{,}5\le a\le -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-15\frac{9}{10}+\frac{2}{5}k,\ k\in Z \\ -14{,}5\le -15\frac{9}{10}+\frac{2}{5}k\le -14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-15\frac{9}{10}+\frac{2}{5}k,\ k\in Z \\ \frac{14}{10}\le \frac{2}{5}k\le \frac{19}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-15\frac{9}{10}+\frac{2}{5}k,\ k\in Z \\ \frac{14}{2}\le 2k\le \frac{19}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-15\frac{9}{10}+\frac{2}{5}k,\ k\in Z \\ 3\frac{1}{2}\le k\le 4\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-15\frac{9}{10}+\frac{2}{5}k \\ k=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{143}{10} \\ k=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-14{,}3 \\ k=4 \end{cases}.$$

Таким чином $a=-14{,}3$ – єдине значення параметра, при якому корінь рівняння $\lg\left(\sin\left(5\pi x\right)\right)=\sqrt{16+a-x}$ належить проміжку $\left[\frac{3}{2};2\right]$.

2 спосіб.

2. При всіх значеннях x із ОДЗ дане рівняння (за визначенням логарифма) є рівносильним до рівняння

$$\sin\left(5\pi x\right)=10^{\sqrt{16+a-x}}. \qquad (11.5.3)$$

3. Добре відомо, що при довільному $x\in R$ справджується нерівність

$$\sin\left(5\pi x\right)\le 1. \qquad (11.5.4)$$

Також добре відомо, що при довільному $x\in R$ $\sqrt{16+a-x}\ge 0$, звідки (з урахуванням зростання функції $y=10^t$ при $t\in\left[0;+\infty\right)$) справджується нерівність

$$10^{\sqrt{16+a-x}}\ge 10^0=1. \qquad (11.5.5)$$

Тому, з урахуванням нерівностей (11.5.4) та (11.5.4), рівняння (11.5.3) має місце (рівність для функцій у лівій та правій його частині досягається) лише за умов, коли

$$\sin\left(5\pi x\right)=1=10^{\sqrt{16+a-x}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(5\pi x\right)=1 \\ 16+a-x=0 \end{cases}.$$

Подальше розв’язання повністю повторює міркування пунктів 4) і 5) 1 способу.

Відповідь: $a=-14{,}3$.

ЧАСТИНА IV.
РОЗВ’ЯЗАННЯ «22-их» ЗАВДАНЬ НМТ з МАТЕМАТИКИ 2024 р.

Задачі, пов’язані з розв’язуванням рівнянь, їх систем, зокрема з параметром, передбачають опанування наступного «теоретичного мінімуму» щодо рівносильності рівнянь та конструкцій:

Означення 1. Два рівняння $f_1(x)=g_1(x)$ та $f_2(x)=g_2(x)$ називають рівносильними (або ж еквівалентними), якщо вони мають одні і ті самі корені (або ж, більш строго – якщо множини їх коренів/розв’язків співпадають).

В подальшому для позначення факту рівносильності рівнянь будемо використовувати загальновизнане / загальноприйняте позначення

$$f_1(x)=g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x)=g_2(x).$$

Із самого визначення рівносильності рівнянь випливає, що замість того, щоб розв’язувати дане рівняння $f_1(x)=g_1(x)$, можна розв’язувати рівняння $f_2(x)=g_2(x)$, яке є до нього рівносильним.

Також відомо, що відношення рівносильності має властивість транзитивності, тобто: якщо рівняння $f_2(x)=g_2(x)$ є рівносильним до рівняння $f_1(x)=g_1(x)$, а рівняння $f_3(x)=g_3(x)$ є рівносильним до рівняння $f_2(x)=g_2(x)$, то рівняння $f_3(x)=g_3(x)$ є рівносильним до рівняння $f_1(x)=g_1(x)$.

Заміну рівняння на рівносильне до нього рівняння або ж рівносильну до нього конструкцію – сукупність або систему рівнянь (нерівностей, систем) й прийнято називати ***рівносильним переходом або ж перетворенням***.

Зауваження 1. Зауважимо, що у визначенні рівносильних рівнянь не фігурує ОДЗ цих рівнянь. А тому слід розуміти, що можуть бути випадки:
– рівносильні рівняння мають різні ОДЗ (наприклад: $x=1$ та $\sqrt{x}=1$);
– ОДЗ рівнянь співпадають, проте рівняння не є рівносильними (наприклад: $(x-1)(x-2)=0$ та $(x-1)(x-3)=0$).

Означення 2. Рівняння $f_2(x)=g_2(x)$ називають наслідком рівняння $f_1(x)=g_1(x)$, якщо кожен корінь рівняння $f_1(x)=g_1(x)$ є коренем і рівняння $f_2(x)=g_2(x)$.

Зауваження 2. З урахуванням означень 1 та 2, можна говорити, що два рівняння є рівносильними, коли кожне з них є наслідком іншого.

Зауваження 3. Процес розв’язування / перетворення довільного рівняння можна подати у вигляді

$$(1)\to(2)\to\ldots\to(n-1)\to(n).$$

Останнє слід розуміти, що задане рівняння (1) перетворюють до рівняння (2), більш простого, ніж (1); рівняння (2) перетворюють до рівняння (3), більш простого, ніж (3) і т.д.. В результаті приходять до досить простого рівняння (n) та знаходять його корені. Саме в цей момент й виникає головне питання – «*Чи будуть знайдені корені рівняння* (n) *коренями вихідного рівняння (1)*?». Відповідь на це питання можна сформулювати наступним чином:

– якщо всі перетворення були рівносильними, тобто, $(1)\Leftrightarrow(2)$, $(2)\Leftrightarrow(3)$, ..., $(n-1)\Leftrightarrow(n)$, то «ТАК, БУДУТЬ»;

– якщо ж у рівносильності певного перетворення $(i)\to(i+1)$ не впевнені, проте переконані, що рівняння $(i+1)$ є насідком рівняння (i), то однозначної відповіді надати не можна; в цьому випадку кожен корінь рівняння (n) треба підставити та перевірити чи є він коренем рівняння (1); ті з коренів рівняння (n), які не є коренями рівняння (1), називають сторонніми для заданого рівняння (1) та їх не включають до множини його коренів.

Твердження 1. Якщо певний член рівняння перенести з однієї частини рівняння в іншу його частину з протилежним знаком, то одержимо рівняння, що є рівносильним даному.

Твердження 2. Якщо обидві частини рівняння піднести до однакового непарного степеня, то одержимо рівняння, що є рівносильним даному.

Твердження 3. Якщо обидві частини рівняння $f(x)=g(x)$ помножити на однаковий вираз $h(x)$, який:

– має зміст/сенс при кожному x з ОДЗ рівняння $f(x)=g(x)$,

– $h(x)\neq 0$ при жодному x з ОДЗ рівняння $f(x)=g(x)$,

то одержимо рівняння $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$, що є рівносильним даному.

Наслідок 1. Якщо обидві частини рівняння помножити, або розділити на одне і теж саме число, відмінне від нуля, то одержимо рівняння, що є рівносильним даному.

Твердження 4. Якщо обидві частини рівняння $f(x)=g(x)$ приймають невід’ємні значення на ОДЗ цього рівняння, то після піднесення до однакового парного степеня обох його частин, одержимо рівняння, що є рівносильним даному.

Зауважимо, що досить часто рівняння можуть *не бути рівносильними* (в сенсі означення 1), проте можуть бути рівносильними на певній множині. І тоді при розв’язуванні рівнянь замість поняття ***рівносильних рівнянь*** досить часто використовують поняття ***рівносильності рівнянь на множині***, а саме:

Означення 3. Два рівняння називають рівносильним на множині F, якщо співпадають множини всіх їх коренів, які належать множині F, або вони обидва не мають на цій множині розв’язків.

Твердження про рівносильність (еквівалентність) рівнянь:

0. Рівняння $f(x)=g(x)$ та $g(x)=f(x)$ є рівносильними.
1. Рівняння $f(x)=g(x)$ та $f(x)-g(x)=0$ є рівносильними.
2. Рівняння $f(x)=g(x)$ та $f(x)+a=g(x)+a$ є рівносильними для довільного числа $a\in\mathbb{R}$.
3. Рівняння $f(x)=g(x)$ та $\alpha\cdot f(x)=\alpha\cdot g(x)$ є рівносильними для довільного числа $\alpha\neq 0$.
4. Рівняння $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ ($a>0$ та $a\neq 1$) та $f(x)=g(x)$ є рівносильними для довільного числа $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.
5. Якщо функції $y=f(x)$ та $y=g(x)$ є невід'ємними на деякій множині F, то на цій множині F рівняння $f(x)=g(x)$ та $\left(f(x)\right)^n=\left(g(x)\right)^n$ є рівносильними для довільного натурального n.
6. Якщо функції $y=f(x)$ та $y=g(x)$ є додатними на деякій множині F, то на цій множині F рівняння $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ ($a>0$, $a\neq 1$) та $f(x)=g(x)$ є рівносильними. Зокрема, якщо $b>0$, то рівняння $a^{f(x)}=b$ та $f(x)=\log_a b$ є рівносильними.
7. Якщо функція $y=\varphi(x)$ є визначеною на множині F, яка є підмножиною ОДЗ рівняння $f(x)=g(x)$, та не приймає нульового значення при жодному $x\in F$, то рівняння $f(x)=g(x)$ та $\varphi(x)\cdot f(x)=\varphi(x)\cdot g(x)$ є рівносильними на множині F. Причому множина F може співпадати з ОДЗ рівняння $f(x)=g(x)$.

Твердження про рівняння-наслідки:

1. Рівняння $\left(f(x)\right)^{2n}=\left(g(x)\right)^{2n}$ ($n\in\mathbb{N}$) є наслідком рівняння $f(x)=g(x)$.
2. Рівняння $f(x)=g(x)$ є наслідком рівняння $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ ($a>0$, $a\neq 1$).
3. Рівняння $f(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$ є наслідком рівняння $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=g(x)$.
4. Рівняння $f(x)=g(x)$ є наслідком рівняння $f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$.
5. Сукупність рівнянь (конструкція) $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$ є наслідком рівняння $f(x)\cdot g(x)=0$.

   Дано два рівняння $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{f_3(x)}{f_4(x)}$ (I) і $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{f_1(x)+f_3(x)}{f_2(x)+f_4(x)}$ (II).
6. Якщо жоден з коренів рівняння (I) не є коренем рівняння $f_2(x)+f_4(x)=0$, то рівняння (II) є наслідком рівняння (I).

7. Якщо жоден з коренів рівняння (II) не є коренем рівняння $f_4(x)=0$, то рівняння (I) є наслідком рівняння (II).
8. Якщо жоден з коренів рівняння (I) не є коренем рівняння $f_2(x)+f_4(x)=0$ та жоден з коренів рівняння (II) не є коренем рівняння $f_4(x)=0$, то рівняння (I) і (II) є рівносильними.

Під час підготовки для складання НМТ з математики, розв'язування рівнянь, зокрема з параметром, більш ніж доцільно розвинути усвідомлені навички використання наступних рівносильних конструкцій:

$$f(x)\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)=0 \\ x\in D_{g(x)}\end{cases}\\ \begin{cases} g(x)=0 \\ x\in D_{f(x)}\end{cases}\end{array}\right. \tag{IV.1}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)\neq 0 \\ x\in D_{f(x)}\bigcap D_{g(x)}\end{cases} \tag{IV.2}$$

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\geq 0\end{cases} \tag{IV.3}$$

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^2(x) \\ g(x)\geq 0\end{cases} \tag{IV.4}$$

$$\begin{cases} a^{f(x)}=a^{g(x)} \\ \left[\begin{array}{l} 0<a<1 \\ a>1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow f(x)=g(x) \tag{IV.5}$$

$$\begin{cases} \log_a f(x)=\log_a g(x) \\ \left[\begin{array}{l} 0<a<1 \\ a>1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)>0\end{cases} \tag{IV.6}$$

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\leq P \quad \forall x\in D_f \\ g(x)\geq P \quad \forall x\in D_g \\ P=const\in R\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=P \\ g(x)=P\end{cases} \tag{IV.7}$$

Нижче наведемо розв'язання «22-их» завдань, які у 2024 році пропонувалися під час проведення НМТ з математики

(18.05.2024) Визначте кількість усіх цілих значень a з проміжку $[-11;11]$, за кожного з яких рівняння $\sqrt{2x-a+4}\cdot\left(\log_2 x-2\right)=0$ має два різних корені.

Розв'язання.

$$\sqrt{2x-a+4}\cdot\left(\log_2 x-2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{2x-a+4}=0\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2 x-2=0\\ 2x-a+4\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-a+4=0\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2 x=2\\ 2x\ge a-4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{a-4}{2}\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases}x=4\\ x\ge\dfrac{a-4}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

З урахуванням останньої сукупності рівняння $\sqrt{2x-a+4}\cdot\left(\log_2 x-2\right)=0$ буде мати два різних корені тоді і лише тоді, коли виконуватимуться умови

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{a-4}{2}\ne 4\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases}x=4\ne\dfrac{a-4}{2}\\ x\ge\dfrac{a-4}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{a-4}{2}\\ a\ne 12\\ \dfrac{a-4}{2}>0\end{cases}\\ \begin{cases}x=4\\ a\ne 12\\ 4\ge\dfrac{a-4}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{a-4}{2}\\ a\ne 12\\ a>4\end{cases}\\ \begin{cases}x=4\\ a\ne 12\\ a\le 12\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{a-4}{2}\\ a\ne 12\\ a>4\end{cases}\\ \begin{cases}x=4\\ a<12\end{cases}\end{array}\right.$$

Звідки випливає, що рівняння буде мати два різних корені $x_1=\dfrac{a-4}{2}$ та $x_2=4$ тільки при значеннях параметра $a\in\left(4;12\right)$.

Серед знайдених значень параметра a проміжку $[-11;11]$ належать лише цілі $a\in\left\{5;6;7;8;9;10;11\right\}$. І тому шукана кількість значень параметра a становить 7.

Відповідь: 7.

(25.05.2024) Визначте кількість усіх від'ємних цілих значень параметра a, за кожного з яких рівняння $\left(\sqrt{4x-2a-4}-3\right)\cdot\left(\lg^2 x+1\right)=0$ має корінь.

Розв'язання.

$$\left(\sqrt{4x-2a-4}-3\right)\cdot\left(\lg^2 x+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x-2a-4}-3=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x-2a-4}=3 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{4x-2a-4}\right)^2=3^2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2a-4=9 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2a+13}{4} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2a+13}{4} \\ \dfrac{2a+13}{4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2a+13}{4} \\ 2a+13>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2a+13}{4} \\ a>-6,5 \end{cases}.$$

Отже, рівняння буде мати корінь $x=\dfrac{2a+13}{4}$ лише при значеннях параметра $a\in\left(-6,5;+\infty\right)$.

Серед знайдених значень параметра a від'ємними цілими є лише числа $a\in\left\{-6;-5;-4;-3;-2;-1\right\}$. І тому шукана кількість значень параметра a становить 6.

Відповідь: 6.

(01.06.2024) Знайдіть суму всіх цілих значень параметра a, за яких усі корені рівняння $4^x - 15\cdot 2^x - 4a^2 + 30a = 0$ є додатними.

Розв'язання.

1) Нехай $2^x = t$. Тоді дане рівняння набуває вид $t^2 - 15\cdot t - 4a^2 + 30a = 0$ та є квадратним відносно змінної t.

$D = 15^2 - 4\left(-4a^2 + 30a\right) = 225 + 16a^2 - 120a = (4a - 15)^2 \ge 0$ при довільному a.

Оскільки корені даного рівняння мають бути додатними а при $x > 0$ *функція* $y = 2^x$ *набуває значень з проміжку* $(1;+\infty)$, *то* $t = 2^x > 1$ (*).

2) Якщо $D = (4a-15)^2 = 0$ ($\Leftrightarrow a = 15/4$), то $t = \dfrac{15}{2}$, а $x = \log_2\left(\dfrac{15}{2}\right) > 0$ – єдиний (додатній) корінь цього рівняння.

3) Якщо $D = (4a-15)^2 > 0$ ($\Leftrightarrow a \ne 15/4$), то

$$t_1 = \frac{15 - (4a-15)}{2} = -2a + 15,\ t_2 = \frac{15 + (4a-15)}{2} = 2a.$$

При $a \ne 3{,}75$ ($D > 0$) усі корені даного рівняння є додатними лише в одному з трьох наступних випадків:

$$1)\ \begin{cases} t_1 \le 0 \\ t_2 > 1 \end{cases},\qquad 2)\ \begin{cases} t_2 \le 0 \\ t_1 > 1 \end{cases},\qquad 3)\ \begin{cases} t_1 > 1 \\ t_2 > 1 \end{cases}.$$

3.1) $\begin{cases} t_1 \le 0 \\ t_2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 15 \le 0 \\ 2a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 7{,}5 \\ a > 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow a \ge 7{,}5.$

Тобто, при $a \in [7{,}5;+\infty)$ дане рівняння має один додатній корінь $x = \log_2(2a)$.

3.2) $\begin{cases} t_2 \le 0 \\ t_1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \le 0 \\ -2a + 15 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 0 \\ a < 7 \end{cases} \Leftrightarrow a \le 0.$

Тобто, при $a \in (-\infty;0]$ дане рівняння має один додатній корінь $x = \log_2(-2a + 15)$.

3.3) $\begin{cases} t_1 > 1 \\ t_2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 15 > 1 \\ 2a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 7 \\ a > 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}5 < a < 7.$

Тобто, при $a \in (0{,}5;3{,}75) \cup (3{,}75;7)$ дане рівняння має два додатні корені $x_1 = \log_2(-2a + 15)$ та $x_2 = \log_2(2a)$.

Отже при всіх значеннях параметра $a \in (-\infty;0] \cup (0{,}5;7) \cup [7{,}5;+\infty)$ усі корені даного рівняння є додатними. Крім того, цьому об'єднанню не належить лише ціле число +7 (а число -7 належить). Сума інших цілих чисел з цього об'єднання становить 0. Тому сума всіх цілих значень параметра a, за яких усі корені даного рівняння є додатними, становить -7.

Відповідь: -7.

Зауважимо, що наведена відповідь відрізняється від найбільш поширеної «напівофіціальної» відповіді до цього завдання.

(03.06.2024) Знайдіть кількість усіх цілих значень a з проміжку $[-5;10]$, за кожного з яких рівняння $\left(\sqrt{2x-a+4}-1\right)\cdot|x-2|=0$ має два різних корені.

Розв'язання.

$$\left(\sqrt{2x-a+4}-1\right)\cdot|x-2|=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-a+4}-1=0\\ \begin{cases}|x-2|=0\\ 2x-a+4\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-a+4}=1\\ \begin{cases}x-2=0\\ 2x-a+4\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{2x-a+4}\right)^2=1^2\\ \begin{cases}x=2\\ 2x-a+4\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-a+4=1\\ \begin{cases}x=2\\ 2\cdot 2-a+4\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{a-3}{2}\\ \begin{cases}x=2\\ a\leq 8\end{cases}\end{array}\right.$$

Звідки маємо, що:

при довільному значенні параметра a $x_1=\dfrac{a-3}{2}$ є коренем даного рівняння;

при $a\in(-\infty;8]$ $x_2=2$ також є коренем даного рівняння.

Корені x_1 та x_2 є різними тоді і лише тоді коли $\dfrac{a-3}{2}\neq 2 \Leftrightarrow a-3\neq 4 \Leftrightarrow a\neq 7$.

Таким чином, при довільному $a\in(-\infty;7)\cup(7;8]$ дане рівняння має два різних корені.

Серед знайдених значень параметра a проміжку $[-5;10]$ належать лице 13 цілих значень параметра $a\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;8\}$.

Тому кількість усіх цілих значень a з проміжку $[-5;10]$, за кожного з яких дане рівняння має два різних корені, становить 13.

Відповідь: 13.

(04.06.2024) Знайдіть усі значення a, за яких рівняння $\frac{x^2-ax+4}{x-5}=0$ має лише один корінь. Якщо таких значень декілька, то запишіть у відповіді їхній добуток.

Розв'язання.

$$\frac{x^2-ax+4}{x-5}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-ax+4=0 \\ x-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-ax+4=0 \\ x\neq 5 \end{cases}. \qquad (*)$$

Розв'яжемо квадратне рівняння

$$x^2-ax+4=0. \qquad (**)$$

Очевидно, що $D=a^2-16$.

1) Якщо $D<0$, то квадратне рівняння (**) а тому і система (*) та дане рівняння не матимуть розв'язків.

2) Якщо $D=0$, то $a^2-16=0$. Звідки $a=\pm 4$. Причому:

при $a=-4$ квадратне рівняння (**) має єдиний корінь $x=\frac{-4}{2}=-2\neq 5$, а

при $a=4$ квадратне рівняння (**) має єдиний корінь $x=\frac{4}{2}=2\neq 5$.

Таким чином при $a=\pm 4$ система (*) та дане рівняння має єдиний розв'язок.

3) Якщо $D>0$, то $a\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$, а квадратне рівняння (**) має два різні дійсні корені

$$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-16}}{2} \text{ та } x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-16}}{2}.$$

Не важко перевірити, що система (*) та дане рівняння буде мати єдиний розв'язок лише в одному з двох випадків: або $x_1=5$, або $x_2=5$.

$$x_1=5 \Leftrightarrow \frac{a-\sqrt{a^2-16}}{2}=5 \Leftrightarrow -\sqrt{a^2-16}=10-a \Leftrightarrow \sqrt{a^2-16}=a-10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-16=a^2-20a+100 \\ a-10\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20a=116 \\ a\geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5{,}8 \\ a\geq 10 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$

Тобто, при жодному значенні параметра a x_1 не може дорівнювати 5.

$$x_2=5 \Leftrightarrow \frac{a+\sqrt{a^2-16}}{2}=5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-16}=10-a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-16=a^2-20a+100 \\ 10-a\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20a=116 \\ a\leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5{,}8 \\ a\leq 10 \end{cases} \Rightarrow a=5{,}8\in(4;+\infty).$$

Таким чином дане рівняння має єдиний корінь лише при $a\in\{-4;4;5{,}8\}$.

Не важко перевірити, що добуток знайдених значень параметра a становить $-92{,}8$.

Відповідь: $-92{,}8$.

(05.06.2024) Знайдіть найменше ціле значення a, за якого розв'язок $(x_0; y_0)$ системи рівнянь $\begin{cases} \log_5 \dfrac{x}{y} = a - 18 \\ \log_5 x + 2\log_5 y = 3a + 12 \end{cases}$ задовольняє умову $\begin{cases} x_0 < \sqrt{5} \\ y_0 > 5 \end{cases}$.

Розв'язання.

$$\begin{cases} \log_5 \dfrac{x}{y} = a - 18 \\ \log_5 x + 2\log_5 y = 3a + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x - \log_5 y = a - 18 \\ \log_5 x + 2\log_5 y = 3a + 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x - \log_5 y = a - 18 \\ 3\log_5 y = 2a + 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = \log_5 y + a - 18 \\ \log_5 y = \dfrac{2a+30}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = \dfrac{2a+30}{3} + a - 18 \\ \log_5 y = \dfrac{2a+30}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = \dfrac{5a-24}{3} \\ \log_5 y = \dfrac{2a+30}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^{\frac{5a-24}{3}} \\ y = 5^{\frac{2a+30}{3}} \end{cases}$$

Розв'язок $(x_0; y_0)$ останньої системи рівнянь (а тому і даної системи рівнянь) задовольняє умову $\begin{cases} x_0 < \sqrt{5} \\ y_0 > 5 \end{cases}$ тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$\begin{cases} 5^{\frac{5a-24}{3}} < \sqrt{5} \\ 5^{\frac{2a+30}{3}} > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{\frac{5a-24}{3}} < 5^{\frac{1}{2}} \\ 5^{\frac{2a+30}{3}} > 5^{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5a-24}{3} < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2a+30}{3} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10a - 48 < 3 \\ 2a + 30 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a < 51 \\ 2a > -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 5{,}1 \\ a > -13{,}5 \end{cases}$$

Звідки $a \in (-13{,}5; 5{,}1)$.

Очевидно, що найменшим цілим числом, яке належить знайденому проміжку $(-13{,}5; 5{,}1)$, є число -13.

Відповідь: -13.

(06.06.2024) Визначте кількість усіх цілих значень a з проміжку $(-3;8)$, за кожного з яких рівняння $\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{8-2x}}{x}=0$ має корені.

Розв'язання.

$$\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{8-2x}}{x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2a}-\sqrt{8-2x}=0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2a}=\sqrt{8-2x} \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2a=8-2x \\ 8-2x\geq 0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=8-2a \\ x\leq 4 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{8-2a}{3} \\ x\leq 4 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

Остання система (а тому і дане рівняння) буде мати розв'язки (точно один $x=\frac{8-2a}{3}$) тоді і лише тоді, коли виконуються наступні умови

$$\begin{cases} \frac{8-2a}{3}\leq 4 \\ \frac{8-2a}{3}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2a\leq 12 \\ 8-2a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a\leq 4 \\ -2a\neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -2 \\ a\neq 4 \end{cases}$$

Таким чином дане рівняння має корені лише при $a\in[-2;4)\cup(4;+\infty)$.

Серед цілих значень a з проміжку $(-3;8)$ знайденій множині $[-2;4)\cup(4;+\infty)$ належать лише значення $a\in\{-2;-1;0;1;2;3;5;6;7\}$, кількість яких становить 9.

Відповідь: 9.

(07.06.2024) За якого найбільшого цілого від'ємного значення a для розв'язку $(x_0; y_0)$ системи рівнянь $\begin{cases} \log_2 x + y = 3a \\ 2\log_2 x - 3y = a + 25 \end{cases}$ справджується нерівність $(x_0 - 1) \cdot 2^{y_0} < 0$?

Розв'язання.

$$\begin{cases} \log_2 x + y = 3a \\ 2\log_2 x - 3y = a + 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\log_2 x + 3y = 9a \\ 2\log_2 x - 3y = a + 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + y = 3a \\ 5\log_2 x = 10a + 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3a - \log_2 x \\ \log_2 x = 2a + 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3a - (2a + 5) \\ x = 2^{2a+5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a - 5 \\ x = 2^{2a+5} \end{cases}$$

Для розв'язку $(x_0; y_0)$ останньої системи рівнянь (а тому і даної системи рівнянь) справджується нерівність $(x_0 - 1) \cdot 2^{y_0} < 0$ тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\left(2^{2a+5} - 1\right) \cdot 2^{a-5} < 0.$$

Оскільки при довільному значенні параметра a множник $2^{a-5} > 0$, то

$$\left(2^{2a+5} - 1\right) \cdot 2^{a-5} < 0 \Leftrightarrow 2^{2a+5} - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2a+5} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2a+5} < 2^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a + 5 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a < -2{,}5.$$

Таким чином для розв'язку даної системи справджується зазначена нерівність тоді і лише тоді, коли $a \in (-\infty; -2{,}5)$.

Очевидно, що найбільшим цілим від'ємним значенням a, яке належить знайденому проміжку $(-\infty; -2{,}5)$, є число -3.

Відповідь: -3.

(10.06.2024) Визначте кількість усіх цілих значень a, за кожного з яких система рівнянь $\begin{cases} 4^x + 2y^2 = 30 \\ 4^x - y^2 = 6a - 21 \end{cases}$ має принаймні один розв'язок.

Розв'язання.

$$\begin{cases} 4^x + 2y^2 = 30 \\ 4^x - y^2 = 6a - 21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^x + 2y^2 = 30 \\ 2 \cdot 4^x - 2y^2 = 12a - 42 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^x + 2y^2 = 30 \\ 3 \cdot 4^x = 12a - 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 = 30 - 4^x \\ 4^x = 4a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 = 30 - (4a - 4) \\ 4^x = 4a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 17 - 2a \\ 4^x = 4a - 4 \end{cases}$$

Остання система (а тому і дана система) буде мати принаймні один розв'язок тоді і лише тоді, коли виконуються наступні умови

$$\begin{cases} 17 - 2a \geq 0 \\ 4a - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 8,5 \\ a > 1 \end{cases}.$$

Таким чином дана система має принаймні один розв'язок тоді і лише тоді, коли $a \in (1; 8,5]$.

Очевидно, що цілими значеннями параметра a, які належить знайденому проміжку $(1; 8,5]$, є числа $a \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, кількість яких становить 7.

Відповідь: 7.

(11.06.2024) Знайдіть суму всіх цілих значень a, за кожного з яких рівняння $\lg(2ax+5-a)=\lg(4x)$ не має коренів.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо всі значення параметра a, за яких дане рівняння має корені.

$$\lg(2ax+5-a)=\lg(4x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2ax+5-a=4x\\4x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2a-4)x=a-5\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a-4=0\\(2a-4)x=a-5\\x>0\end{cases}\\\begin{cases}2a-4\neq0\\(2a-4)x=a-5\\x>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2\\0\cdot x=-3\\x>0\end{cases}\\\begin{cases}a\neq2\\x=\dfrac{a-5}{2a-4}\\x>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq2\\x=\dfrac{a-5}{2a-4}\\x>0\end{cases}$$

Остання система (а тому і дане рівняння) буде мати розв'язки тоді і лише тоді, коли виконують наступні умови

$$\begin{cases}a\neq2\\\dfrac{a-5}{2a-4}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq2\\\dfrac{a-5}{a-2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a-5}{a-2}>0\Leftrightarrow a\in(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$$

Таким чином дане рівняння має корені тоді і лише тоді, коли $a\in(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$.

Оскільки областю допустимих значень параметра a є всі дійсні числа, то при $a\in[2;5]$ дане рівняння **НЕ МАЄ** коренів. Очевидно, що сума всіх цілих чисел зі знайденого проміжку $[2;5]$ становить

$$2+3+4+5=14.$$

Відповідь: 14.

(12.06.2024) Знайдіть найбільше значення параметра a, за якого не має коренів рівняння $3^x+\left(4a^2+10a\right)\cdot 3^{-x}=4a+5$.

Розв'язання.

$$3^x+\left(4a^2+10a\right)\cdot 3^{-x}=4a+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x\right)^2+4a^2+10a=\left(4a+5\right)\cdot 3^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x\right)^2-\left(4a+5\right)\cdot 3^x+\left(2a+5\right)\cdot 2a=0 \qquad (*)$$

Нехай $3^x=t$. Тоді $t>0$, а ліву частину останнього рівняння (*) можна подати у вигляді квадратного тричлена $f\left(t\right)=t^2-\left(4a+5\right)\cdot t+\left(2a+5\right)\cdot 2a$ відносно змінної t. Розкладемо його на множники. Для цього розв'яжемо відповідне квадратне рівняння $t^2-\left(4a+5\right)\cdot t+\left(2a+5\right)\cdot 2a=0$.

$D=\left(4a+5\right)^2-8a\left(2a+5\right)=16a^2+40a+25-16a^2-40a=25$. Звідки: $\sqrt{D}=5$,

$$t_1=\frac{4a+5-5}{2}=2a; \quad t_2=\frac{4a+5+5}{2}=2a+5.$$

І тому (як добре відомо) квадратний тричлен $f\left(t\right)=t^2-\left(4a+5\right)\cdot t+\left(2a+5\right)\cdot 2a$ можна розкласти на множники у такий спосіб

$$f\left(t\right)=t^2-\left(4a+5\right)\cdot t+\left(2a+5\right)\cdot 2a=\left(t-t_1\right)\left(t-t_2\right)=\left(t-2a\right)\left(t-2a-5\right).$$

Звідки, з урахуванням введених позначень, рівняння (*) є рівносильним до рівняння

$$\left(3^x-2a-5\right)\left(3^x-2a\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x-2a-5=0\\ 3^x-2a=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=2a+5\\ 3^x=2a\end{array}\right..$$

З останньої сукупності маємо, що дане рівняння не має коренів тоді і лише тоді, коли справджується система

$$\begin{cases}2a+5\le 0\\ 2a\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a\le -5\\ a\le 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a\le -2{,}5\\ a\le 0\end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-\infty;-2{,}5\right]$$

Очевидно, що серед знайдених значень параметра a найбільшим є число $-2{,}5$.

Відповідь: $-2{,}5$.

(13.06.2024) Знайдіть кількість усіх цілих значень a з проміжку $(-7;7)$, за кожного з яких рівняння $\left(3^{a-2x}-3^{2-4x}\right)\cdot\left(3+\sqrt{3x-5}\right)=0$ має корені.

Розв'язання.

$$\left(3^{a-2x}-3^{2-4x}\right)\cdot\left(3+\sqrt{3x-5}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3+\sqrt{3x-5}=0 \\ \begin{cases} 3^{a-2x}-3^{2-4x}=0 \\ 3x-5\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x-5}=-3 \\ \begin{cases} 3^{a-2x}=3^{2-4x} \\ x\ge \dfrac{5}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ \begin{cases} 3^{a-2x}=3^{2-4x} \\ x\ge \dfrac{5}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{a-2x}=3^{2-4x} \\ x\ge \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2x=2-4x \\ x\ge \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2-a \\ x\ge \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{a}{2} \\ x\ge \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Остання система (а тому і дане рівняння) буде мати розв'язок тоді і лише тоді, коли виконується наступна умова

$$1-\frac{a}{2}\ge\frac{5}{3}\Leftrightarrow 2-a\ge\frac{10}{3}\Leftrightarrow a\le 2-\frac{10}{3}\Leftrightarrow a\le-\frac{4}{3}.$$

Таким чином дане рівняння має корені тоді і лише тоді, коли $a\in\left(-\infty;-1\dfrac{1}{3}\right]$. Очевидно, що серед знайдених значень параметра a проміжку $(-7;7)$ належать тільки наступні числа $a\in\{-6;-5;-4;-3;-2\}$, кількість яких становить 5.

Відповідь: 5.

(14.06.2024) Знайдіть найменше ціле значення a, за якого розв'язок $(x_0; y_0)$ системи рівнянь $\begin{cases} \log_3(xy) = a - 13 \\ \log_3 x - \log_3 y = 3a - 3 \end{cases}$ задовольняє умову $\begin{cases} x_0 < 1 \\ y_0 < 1 \end{cases}$.

Розв'язання.

$$\begin{cases} \log_3(xy) = a - 13 \\ \log_3 x - \log_3 y = 3a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = a - 13 \\ \log_3 x - \log_3 y = 3a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_3 y = -2a - 10 \\ 2\log_3 x = 4a - 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 y = -a - 5 \\ \log_3 x = 2a - 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3^{-a-5} \\ x = 3^{2a-8} \end{cases}.$$

Розв'язок $(x_0; y_0)$ останньої системи (а тому і даної системи) рівнянь задовольняє зазначеним умовам тоді і лише тоді, коли справджується система

$$\begin{cases} 3^{2a-8} < 1 \\ 3^{-a-5} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2a-8} < 3^0 \\ 3^{-a-5} < 3^0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 8 < 0 \\ -a - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 4 \\ a > -5 \end{cases}.$$

Таким чином розв'язок $(x_0; y_0)$ даної системи рівнянь задовольняє умову $\begin{cases} x_0 < 1 \\ y_0 < 1 \end{cases}$ тоді і лише тоді, коли $a \in (-5; 4)$.

Очевидно, що серед знайдених значень параметра a найменшим цілим значенням є число -4.

Відповідь: -4.

(17.06.2024) Визначити найменше ціле значення параметра a, за якого рівняння $\left(\sqrt{4x+8}+9\right)\cdot\left(\log_3(2x-a)-3\right)=0$ має корінь.

Розв'язання.

$$\left(\sqrt{4x+8}+9\right)\cdot\left(\log_3(2x-a)-3\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{4x+8}+9=0 \\ 2x-a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3(2x-a)-3=0 \\ 4x+8\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{4x+8}=-9 \\ 2x-a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3(2x-a)=3 \\ x\ge -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varnothing \\ 2x-a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-a=3^3 \\ x\ge -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{27+a}{2} \\ x\ge -2 \end{cases}$$

Остання система (а тому і дане рівняння) буде мати розв'язки (точно один $x=\dfrac{27+a}{2}$) тоді і лише тоді, коли виконується наступна умова

$$\frac{27+a}{2}\ge -2 \Leftrightarrow 27+a\ge -4 \Leftrightarrow a\ge -31.$$

Таким чином дане рівняння має корені тоді і лише тоді, коли $a\in[-31;+\infty)$.

Очевидно, що серед знайдених значень параметра a найменшим цілим значенням є число -31.

Відповідь: -31.

(18.06.2024) За якого значення a для розв'язку $(x_0; y_0)$ системи рівнянь $\begin{cases} 2^x - 3y = 5a - 8 \\ 2^{x+1} - y = 5a + 8 \end{cases}$ справджується рівність $x_0 = 1 + \log_2 y_0$?

Розв'язання.

$$\begin{cases} 2^x - 3y = 5a - 8 \\ 2^{x+1} - y = 5a + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 3y = 5a - 8 \\ 2 \cdot 2^x - y = 5a + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2^x - 6y = 10a - 16 \\ 2 \cdot 2^x - y = 5a + 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5y = 5a - 24 \\ 2 \cdot 2^x - y = 5a + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{24 - 5a}{5} \\ 2 \cdot 2^x = y + 5a + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{24 - 5a}{5} \\ 2 \cdot 2^x = \dfrac{24 - 5a}{5} + 5a + 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{24 - 5a}{5} \\ 2 \cdot 2^x = \dfrac{64 + 20a}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{24 - 5a}{5} \\ 2^x = \dfrac{32 + 10a}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{24 - 5a}{5} \\ 2^x = \dfrac{32 + 10a}{5} \end{cases}$$

Остання система (а тому і дана система рівнянь) буде мати розв'язки тоді і лише тоді, коли виконується наступна умова

$$\frac{32 + 10a}{5} > 0 \Leftrightarrow 32 + 10a > 0 \Leftrightarrow a > -3,2.$$

Тобто дана система рівнянь буде мати розв'язок $\begin{cases} y = \dfrac{24 - 5a}{5} \\ x = \log_2\left(\dfrac{32 + 10a}{5}\right) \end{cases}$ лише при $a \in (-3,2; +\infty)$. Для зазначеного розв'язку $(x_0; y_0)$ справджується рівність $x_0 = 1 + \log_2 y_0$ тоді і лише тоді, коли має місце рівність

$$\log_2\left(\frac{32 + 10a}{5}\right) = 1 + \log_2\left(\frac{24 - 5a}{5}\right) \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{32 + 10a}{5}\right) - \log_2\left(\frac{24 - 5a}{5}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2\left(\dfrac{32 + 10a}{5} : \dfrac{24 - 5a}{5}\right) = 1 \\ \dfrac{32 + 10a}{5} > 0 \\ \dfrac{24 - 5a}{5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2\left(\dfrac{32 + 10a}{24 - 5a}\right) = 1 \\ a > -3,2 \\ a < 4,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{32 + 10a}{24 - 5a} = 2 \\ -3,2 < a < 4,8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 32 + 10a = 48 - 10a \\ -3,2 < a < 4,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20a = 16 \\ -3,2 < a < 4,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,8 \\ -3,2 < a < 4,8 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0,8.$$

Відповідь: $0,8$.

(19.06.2024) Знайдіть суму всіх цілих значень a з проміжку $[-9;4]$, за кожного з яких рівняння $\dfrac{3^{x-4a}-3^{3x+10}}{\log_3 x}=0$ має корінь.

Розв'язання.

$$\frac{3^{x-4a}-3^{3x+10}}{\log_3 x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x-4a}-3^{3x+10}=0 \\ \log_3 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x-4a}=3^{3x+10} \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4a=3x+10 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2a-5 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

Остання система (а тому і дане рівняння) буде мати розв'язки (точно один $x=-2a-5$) тоді і лише тоді, коли виконуються наступні умови

$$\begin{cases} -2a-5>0 \\ -2a-5\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-2,5 \\ a\neq -3 \end{cases}.$$

Тобто дане рівняння буде мати корінь лише при $a\in(-\infty;-3)\cup(-3;-2,5)$.

Очевидно, що серед знайдених значень параметра a проміжку $[-9;4]$ належать тільки наступні цілі числа $a\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4\}$, сума яких становить

$$(-9)+(-8)+(-7)+(-6)+(-5)+(-4)=-39.$$

Відповідь: -39.

(20.06.2024) Знайдіть кількість усіх цілих значень a з проміжку $(-4;10)$, за кожного з яких рівняння $\log_2^2 x + a\log_2 x + 4a - 16 = 0$ має два різних корені, з яких один менший за 0,1, а другий – більший за 0,5.

Розв'язання.

Нехай $\log_2 x = t$. Тоді дане рівняння набуває вид

$$t^2 + a \cdot t + 4a - 16 = 0 \qquad (*)$$

та є квадратним відносної змінної t.

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4a - 16) = a^2 - 16a + 64 = (a-8)^2.$$

Очевидно, що при довільному a дискримінант $D = (a-8)^2 \ge 0$.

Якщо $D = 0$, то $(a-8)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 8$, а рівняння (*) має тільки один (два рівних) дійсний корінь $t_0 = \frac{-a}{2} = \frac{-8}{2} = -4$. І тому при $a = 8$ дане рівняння має тільки один корінь $x_0 = 2^{-4} = \frac{1}{16}$. Отже, $a = 8$ не задовольняє умову задачі.

Якщо ж $D > 0$ ($\Leftrightarrow a \ne 8$), то рівняння (*) має два різні дійсні корені

$$t_1 = \frac{-a-(a-8)}{2} = -a + 4 \qquad \text{та} \qquad t_2 = \frac{-a+(a-8)}{2} = -4.$$

Звідки при $a \in R \setminus \{8\}$ для визначення коренів даного рівняння маємо наступну сукупність

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = -a + 4 \\ \log_2 x = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^{-a+4} \\ x = 2^{-4} = \frac{1}{16} \end{array}\right.$$

Не важко перевірити, що (другий) корінь сукупності $x = \frac{1}{16} < 0{,}1$. А тому значення параметра a, які задовольняють умову задачі, слід шукати серед розв'язків нерівності

$$2^{-a+4} > 0{,}5 \Leftrightarrow 2^{-a+4} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{-a+4} > 2^{-1} \Leftrightarrow -a + 4 > -1 \Leftrightarrow a < 5.$$

Таким чином дане рівняння має два корені, що задовольняють відповідним умовам задачі, тоді і лише тоді, коли $a \in (-\infty;5)$.

Очевидно, що серед знайдених значень параметра a проміжку $(-4;10)$ належать тільки наступні цілі числа $a \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$, кількість яких становить 8.

Відповідь: 8.

(21.06.2024) Знайдіть найменше ціле значення параметра a, за якого рівняння $(2a-1)\cdot 25^x-(4a+8)\cdot 5^x+20=0$ має два різних корені, з яких один додатній, а другий – від'ємний.

Розв'язання.

Нехай $5^x=t$. Тоді $t\ge 0$ (*), а дане рівняння набуває вид

$$(2a-1)\cdot t^2-(4a+8)\cdot t+20=0. \qquad (**)$$

1) Якщо $2a-1=0$, то $a=0{,}5$ а рівняння (**) набуває вид $-10\cdot t+20=0$, коренем якого є $t=2$. Звідки при $a=0{,}5$ єдиним коренем даного рівняння є $x=\log_5 2$. І тому значення параметра $a=0{,}5$ не задовольняє умову задачі.

2) Якщо $2a-1\ne 0$ ($\Leftrightarrow a\ne 0{,}5$), то рівняння (**) є квадратним відносно змінної t. Дискримінант рівняння (**) становить $D=(4a+8)^2-4\cdot(2a-1)\cdot 20=$

$$=16a^2+64a+64-160a+80=16a^2-96a+144=(4a-12)^2.$$

Очевидно, що при довільному $a\ne 0{,}5$ дискримінант $D=(4a-12)^2\ge 0$.

2.1) Якщо $D=0$, то $a=3$, а єдиний корінь рівняння (**) дорівнює

$$t_0=\frac{4a+8}{2(2a-1)}=\frac{4\cdot 3+8}{2(2\cdot 3-1)}=\frac{20}{10}=2.$$

Звідки при $a=3$ дане рівняння має єдиний корінь $x=\log_5 2$. І тому значення параметра $a=3$ не задовольняє умову задачі.

2.2) Якщо $D>0$, то $a\in R\setminus\{3\}$. Крім того, при всіх значеннях параметра $a\in R\setminus\{3;0{,}5\}$ рівняння (**) має дві різні дійсні корені

$$t_1=\frac{4a+8-(4a-12)}{2(2a-1)}=\frac{10}{2a-1} \quad \text{та} \quad t_2=\frac{4a+8+(4a-12)}{2(2a-1)}=\frac{4(2a-1)}{2(2a-1)}=2.$$

При $a\in R\setminus\{3;0{,}5\}$ для визначення коренів даного рівняння маємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} 5^x=\dfrac{10}{2a-1} \\ 5^x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x=\dfrac{10}{2a-1} \\ x=\log_5 2 \end{array}\right..$$

Очевидно, що (другий) корінь сукупності $x=\log_5 2>0$. А тому значення параметра a, які задовольняють умову задачі, слід шукати серед розв'язків системи (яка гарантує, що перший корінь сукупності є від'ємним):

$$\begin{cases} \dfrac{10}{2a-1}>0 \\ \log_5\dfrac{10}{2a-1}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{2a-1}>0 \\ \log_5\dfrac{10}{2a-1}<\log_5 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{2a-1}>0 \\ \dfrac{10}{2a-1}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{1}{2} \\ a>\dfrac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a>5{,}5$$

Таким чином, дане рівняння має два різних корені (з яких один додатній, а другий – від'ємний) тоді і лише тоді, коли $a\in(5{,}5;+\infty)$. Очевидно, що число 6 є найменшим цілим значенням параметра a, яке задовольняє умову задачі.

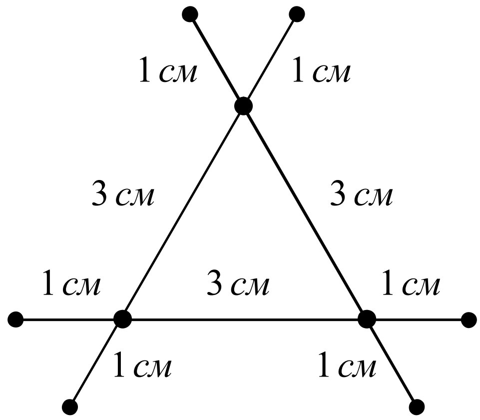
Відповідь: 6.

ДОДАТКИ

Умови завдань II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2021 / 2022 н.р. (Донецька область)

6 клас

1. Знайдіть суму довжин усіх відрізків, зображених на рисунку нижче



2. Яка найменша кількість метрів тканини може бути в рулоні, щоб його можна було продати без залишку по 6 метрів, по 8 метрів або по 10 метрів?
3. Знайдіть найбільше натуральне число, у якого всі цифри різні та кожні дві сусідні цифри відрізняються щонайменше на 2. Відповідь обґрунтуйте.
4. У класі 25% відмінників, серед яких кожна третя дівчина. Вісім хлопців не є відмінниками. Знайти кількість учнів класу, якщо у класі дівчат і хлопців порівну.
5. Софійка помножила деяке натуральне число на сусіднє натуральне число та отримала добуток рівний m. Марійка помножила деяке парне натуральне число на сусіднє парне натуральне число та отримала добуток, рівний n.
   а) Чи може різниця більшого та меншого з чисел m і n дорівнювати 6? (*2 бали*)
   б) Чи може різниця більшого та меншого з чисел m і n дорівнювати 13? (*2 бали*)
   в) Які значення може приймати різниця більшого та меншого з чисел m і n? (*3 бали*)

7 клас

1. За яких умов рівняння $ax+b=cx+d$ має єдиний корінь? Відповідь обґрунтуйте.
2. Зустрілись два пастухи Іван та Петро. Іван говорить Петру: «Віддай мені 1 вівцю, тоді у мене буде вдвічі більше овець, ніж у тебе» А Петро йому відповідає: «Ні! Краще ти мені віддай 1 вівцю, тоді у нас буде порівну овець». Скільки овець було у кожного пастуха? Відповідь обґрунтуйте.
3. Провели п'ять прямих, кожні дві з яких перетинаються.
   а) Яка найменша можлива кількість точок перетину цих прямих? Відповідь обґрунтуйте. (*2 бали*)
   б) Чи може кількість точок перетину цих прямих становити 8? Якщо так, наведіть приклад розташування таких прямих. (*2 бали*)
   в) Яка найбільша кількість точок перетину може утворитися. Відповідь обґрунтуйте. (*3 бали*)
4. Знайти суму
$$S=\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+...+\frac{1}{2020\cdot 2022}.$$
5. Нехай q – найменше спільне кратне, а d – найбільший спільний дільник натуральних чисел x та y, що задовольняють рівняння $3x=8y-29$.
   а) Чи може значення $\frac{q}{d}$ бути рівним 170? (*2 бали*)
   б) Чи може значення $\frac{q}{d}$ бути рівним 2? (*2 бали*)
   в) Знайти найменше (натуральне) значення $\frac{q}{d}$. (*3 бали*)

8 клас

1. Довжини двох сторін трикутника становлять 4 см та 5 см. Доведіть що:
   а) периметр такого трикутника є меншим за 18 см;
   б) периметр такого трикутника є більшим за 10 см.
2. За якого значення (параметра) a рівняння $a^2x-2a^2=49x+14a$ має єдиний корінь?
3. Відомо, що для чисел a і b справджуються рівності: $a+b=5$; $a\cdot b=3$.
   а) Знайти значення числового виразу a^2+b^2. (*2 бали*)
   б) Знайти значення числового виразу a^3+b^3. (*2 бали*)
   в) Знайти значення числового виразу a^4+b^4. (*3 бали*)
4. Через вершини A і C паралелограма $ABCD$ провели прямі m і n, кожна з яких паралельна до діагоналі BD. Промені AB і CD перетинають прямі n і m у точках N_1 та M_1 відповідно, а промені CB і AD перетинають прямі m і n у точках M_2 та N_2 відповідно. Доведіть, що прямі M_1N_1, M_2N_2 та BD перетинаються в одній точці.

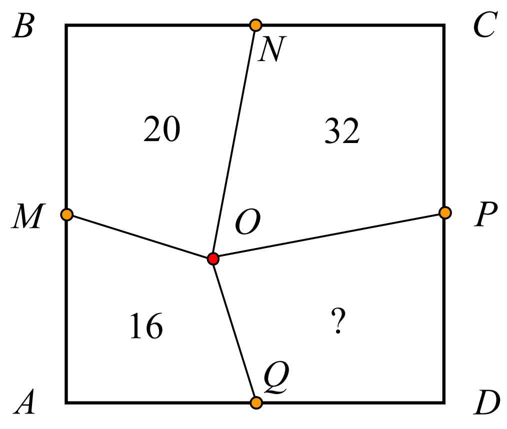
5. За перемогу в шаховій партії нараховують 1 бал, за нічию – 0,5 бали, за програш – 0 балів. У турнірі приймають участь m хлопчиків та d дівчат, причому кожен грає з кожним двічі.
   а) Яка найбільша кількість балів, яку в сумі можуть набрати дівчата, якщо $m=2$, $d=2$? (*2 бали*)
   б) Яка сума набраних усіма учасниками балів, якщо $m+d=10$? (*2 бали*)
   в) Знайти всі можливі значення d, якщо відомо, що в сумі хлопці набрали втричі більше балів ніж дівчата. (*3 бали*)

9 клас

1. Побудувати графік функції $y=\dfrac{4-x^2}{|x+2|}$.
2. Множину чисел назвемо «гарною», якщо її можна розбити на дві множини з однаковою сумою чисел.
   а) Чи є множина $\{100;101;102;...;199\}$ гарною? (*3 бали*)
   б) Чи є множина $\{2;4;8;...;2^{2021}\}$ гарною? (*4 бали*)
3. Знайти суму

$$S=\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+...+\frac{1}{2021\cdot 2025}.$$

4. M,N,P,Q – середини відповідних сторін квадрата $ABCD$. У середині квадрата $ABCD$ обрано таку точку O, що площі чотирикутників $OQAM$, $OMBN$, $ONCP$ становлять 16 кв. см, 20 кв. см та 32 кв. см. відповідно. Знайти площу чотирикутника $OPDQ$.



5. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння

$$\frac{x^2+x+a}{x^2-2x+a^2+6a}=0$$

має точно два різних корені.

10 клас

1. Побудувати графік функції $y = \frac{|x+2|}{4-x^2}$.
2. $ABCD$ – прямокутний хокейний майданчик з бортом вздовж периметру. Шайба (точка) знаходиться на стороні (борті) AB на відстані 1 м від точки A. Необхідно вдарити по шайбі так, щоб вона: потрапила в певну точку X на стороні (борті) BC; потім, відскочивши, вдарилася у борт (сторону) CD; після чого попала точно у середину борта (сторони) AD. Знайти довжину відрізка BX, якщо відомо, що $AB = 5$ м., $AD = 9$ м.

Примітка: *всі «відбиття» відбуваються за принципом «кут падіння дорівнює куту відбиття», а кригу на майданчику слід вважати ідеально гладкою*.

3. Графік квадратичної функції $y = 4x^2 + kx - 4$ перетинає вісь OX в точках A і B, а вісь OY – в точці C.
   а) Чому дорівнює найменша можлива площа $\triangle ABC$? (4 *бали*)
   б) При яких k досягається мінімальна площа? (2 *бали*)
   в) Які нулі має функція при зазначених значеннях k? (1 *бал*)
4. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких система рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{a-x^2} = \sqrt{a-y^2} \\ x^2 + y^2 = 2x + 4y \end{cases}$$
має точно два різних розв'язки.
5. Дано n різних натуральних чисел, які утворюють арифметичну прогресію ($n \geq 3$).
   а) Чи може сума таких чисел дорівнювати 16? (*2 бали*)
   б) Яке найбільше значення n, якщо сума всіх даних чисел менша за 900? (*2 бали*)
   в) Знайти всі можливі значення n, якщо сума всіх таких чисел дорівнює 235? (*3 бали*)

11 клас

1. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють S_1, S_2 та S_3 ($S_1 \neq S_2, S_1 \neq S_3$, $S_2 \neq S_3$). Знайти ребра такого паралелепіпеда.
2. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3-x} = -1$.
3. Дано трикутник ABC, в якому $\angle A = 20^0$, $\angle B = 40^0$. На стороні AB обрано таку точку L, що $\angle ALC = 100^0$. Знайти CL, якщо $AB - AC = 8$.
4. По колу в деякому порядку по одному разу написано натуральні числа від 9 до 18. Для кожної з десяти пар сусідніх чисел знайшли їх найбільший спільний дільник.
   а) Чи могло так статися, що всі найбільші спільні дільники становили 1?

б) Чи могло так статися, що всі найбільші спільні дільники були попарно різними?

в) Яка найбільша кількість попарно різних найбільших спільних дільників могла при цьому виникнути?

5. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких система рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{16-y^2} = \sqrt{16-a^2x^2} \\ x^2 + y^2 = 8x + 4y \end{cases}$$

має точно два різних розв’язки.

Умови завдань ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2022 / 2023 н.р. (Донецька область)

6 клас

1. Марія та Софія грають у гру «хрестики-нулики». Як повинна зробити свій хід Марія, яка ставить хрестики, щоб гарантовано виграти у Софії, яка розпочала другою і ставить нулики? Вказати всі такі можливі позиції.

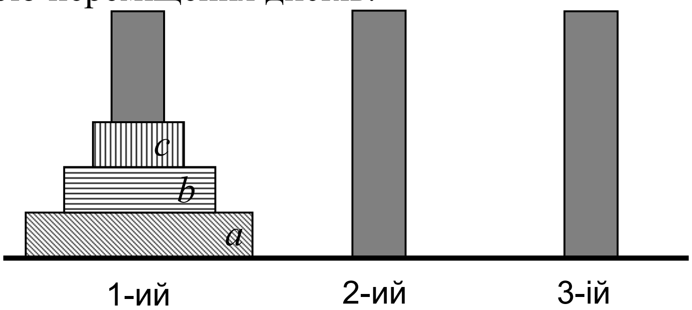
0		
	×	0
		×

2. Знайти суму

$$S = 2 + 4 + 6 + ... + 2018 + 2020 + 2022.$$

3. Чи можна на площині розташувати десять точок так, щоб на кожній прямій, з яких ніякі три не проходять через одну точку, було по чотири точки? Якщо так, то зобразіть відповідний спосіб розташування точок і прямих. Якщо ні, то поясніть чому.

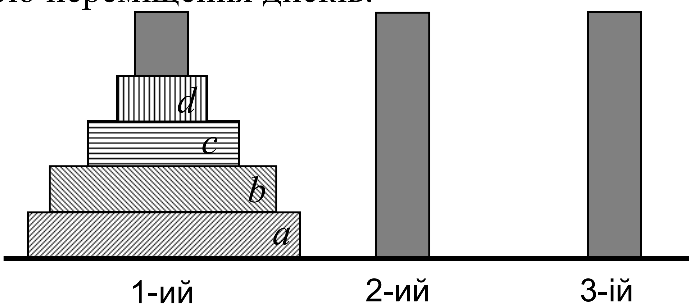
4. (*Задача про ханойські вежі*) Є три стрижні (1-ий, 2-ий та 3-ій), на одному з яких розміщена вежа з 3-х дисків (a, b і c). Нижній диск вежі має найбільший розмір (діаметр), а розмір (діаметр) кожного наступного диску менший від попереднього. За один хід із будь-якого стрижня можна взяти диск і перемістити на інший стрижень. Викладати можна тільки диски меншого розміру на диски більшого розміру. Чи можна перемістити піраміду (початковий набір дисків) з одного стрижня на інший (у тому ж самому порядку)? Якщо ні – обґрунтуйте, якщо так – опишіть спосіб переміщення дисків.



5. На дошці написано 38 різних натуральних чисел, кожне з яких є або парним, або його запис закінчується цифрою 5. Сума написаних чисел становить 1255.
   а) Чи може серед написаних на дошці чисел бути точно 31 парне число? (*2 бали*)
   б) Чи можуть серед чисел на дошці бути точно три числа, які закінчуються цифрою 5? (*2 бали*)
   в) Яка найменша кількість чисел, які закінчуються цифрою 5, може бути на дошці? (*3 бали*)

7 клас

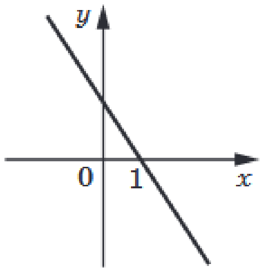
1. Відрізок поділили на частини у відношенні 2:5:7. Відстань між серединами перших двох частин дорівнює 7 см. Знайдіть довжину даного відрізка.
2. Знайти суму $S = \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 7} + ... + \frac{2}{2021\cdot 2023}$.
3. При діленні натурального числа на 8 одержали остачу 5. Число збільшили удвічі. Якою стане остача при ділення подвоєного числа на число 8? Відповідь обґрунтуйте.
4. (Задача про ханойські вежі) Є три стрижні (1-ий, 2-ий та 3-ій), на одному з яких розміщена вежа з 4-х дисків (a, b, c і d). Нижній диск вежі має найбільший розмір (діаметр), а розмір (діаметр) кожного наступного диску менший від попереднього. За один хід із будь-якого стрижня можна взяти диск і перемістити на інший стрижень. Викладати можна тільки диски меншого розміру на диски більшого розміру. Чи можна перемістити піраміду (початковий набір дисків) з одного стрижня на інший (у тому ж самому порядку)? Якщо ні – обґрунтуйте, якщо так – опишіть спосіб переміщення дисків.



5. На дошці написано 35 різних натуральних чисел, кожне з яких є або парним, або його запис закінчується цифрою 3. Сума написаних чисел становить 1062.
   а) Чи може серед написаних на дошці чисел бути точно 27 парних чисел? (*2 бали*)
   б) Чи можуть серед чисел на дошці бути точно два числа, які закінчуються цифрою 3? (*2 бали*)
   в) Яка найменша кількість чисел, які закінчуються цифрою 3, може бути на дошці? (*3 бали*)

8 клас

1. На рисунку нижче зображено графік функції $f\left(x\right)=ax+b$. Знайдіть значення виразу $a+b$.



2. Знайдіть геометричне місце вершин рівнобедрених трикутників, які мають спільну основу (сторону).
3. Знайти суму
$$1^2-2^2+3^2-4^2+...+2021^2-2022^2+2023^2.$$
4. При яких значеннях параметра a рівняння
$$\frac{\left(x+2a-2022\right)\left(x+2a-2023\right)}{x+a}=0$$
має два корені?
5. На дошці написано більше 35 але менше 49 цілих чисел. Середнє арифметичне цих чисел дорівнює 5, середнє арифметичне всіх додатних чисел становить 14, а середнє арифметичне всіх від’ємних чисел становить -7.
   а) Скільки чисел записано на дошці? (*2 бали*)
   б) Яких чисел більше: додатних чи від’ємних? (*2 бали*)
   в) Яка найбільша кількість додатних чисел може бути серед записаних на дошці? (*3 бали*)

9 клас

1. Знайдіть функцію f таку, що $D\left(f\right)=\mathbb{R}$ (областю її визначення є множина $\mathbb{R}$ усіх дійсних чисел) і для будь-якого $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність $f\left(2x-1\right)=x^2$.
2. У рівнобедреному трикутнику довжина основи дорівнює 6 см, а радіус кола, описаного навколо трикутника, – 5 см. Знайти довжину висоти, проведеної до основи.
3. При яких значеннях параметра b рівняння має єдиний розв’язок
$$\frac{\left(x+b\right)\left(x-5b\right)}{\left(x-3\right)\left(x+5\right)}=0?$$
4. Графіки функцій $f\left(x\right)=-\left(2k+3\right)x-1-2k$ і $g\left(x\right)=kx+k+2$, де $k>0$, перетинають вісь ординат у точках A і B відповідно. Точку перетину цих графіків позначено буквою M. Чи можна, стерши осі координат і графіки функцій $y=f\left(x\right)$ та $y=g\left(x\right)$, відновити систему координат за точками A, B і M?

5. Довжина сторони квадрату на 3 см довша за ширину прямокутника, площі яких є рівними а довжини сторін – натуральними числами.
   а) Чи може ширина прямокутника становити 8 см? (*2 бали*)
   б) Чи може довжина прямокутника становити 16 см? (*2 бали*)
   в) Знайти всі можливі варіанти таких пар прямокутників і квадратів. У відповідь запишіть довжини їх сторін. (*3 бали*)

10 клас

1. Обчислити
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2023}}.$$
2. H – основа висоти $\triangle ABC$, яка опущена з вершини C. Виявилося, що $CH^2 = AH \cdot HB$. Чи обов'язково такий трикутник буде прямокутним? Якщо так, – доведіть; якщо ні, – побудуйте контрприклад.
3. Знайти всі розв'язки в цілих числах наступного рівняння (з двома змінними)
$$2x^3 + xy - 7 = 0.$$
4. Всі члени скінченної послідовності є натуральними числами. Кожен член цієї послідовності, починаючи з другого, або у 12 разів більший, або ж у 12 разів менший за попередній член. Сума всіх членів послідовності становить 8750.
   а) Чи може послідовність складатися із двох членів? (*2 бали*)
   б) Чи може послідовність складатися із трьох членів? (*2 бали*)
   в) Яка найбільша кількість членів може бути у такій послідовності? (*3 бали*)
5. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких система рівнянь
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a-y^2}} \\ x^2 + y^2 = 2x + 6y \end{cases}$$
має точно два різних розв'язки.

11 клас

1. Обчислити
$$\ln\left(\text{tg}1^0\right)+\ln\left(\text{tg}2^0\right)+\ln\left(\text{tg}3^0\right)+...+\ln\left(\text{tg}88^0\right)+\ln\left(\text{tg}89^0\right).$$
2. H – основа висоти $\triangle ABC$, яка опущена з вершини C. Виявилося, що $AC^2 = AH \cdot AB$. Чи обов'язково такий трикутник буде прямокутним? Якщо так, – доведіть; якщо ні, – побудуйте контрприклад.
3. Доведіть, що наступне рівняння (з двома змінними)
$$12y + 5 = x^2$$
не має розв'язків в натуральних числах.

4. Перший набір чисел складається з чисел $2, 4, 8, ..., 2^{10}$. Другий набір складається з чисел $3, 9, 27, ..., 3^{10}$. Ці числа розбито на пари. В кожній парі на першому місці – число із першого набору, на другому місці – число із другого набору. В кожній парі два числа помножили одне на інше а одержані добутки додали.
   а) Чи може одержана сума бути більшою за 1 000 000? (*1 бал*)
   б) Чи може одержана сума ділитися на 9? (*2 бали*)
   в) Знайти найменше можливе значення такої суми. (*4 бали*)

5. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких система рівнянь

$$\begin{cases} \log_a\left(a - x^2\right) = \log_a\left(a - y^2\right) \\ x^2 + y^2 = 2x + 6y \end{cases}$$

має точно два різних розв'язки.

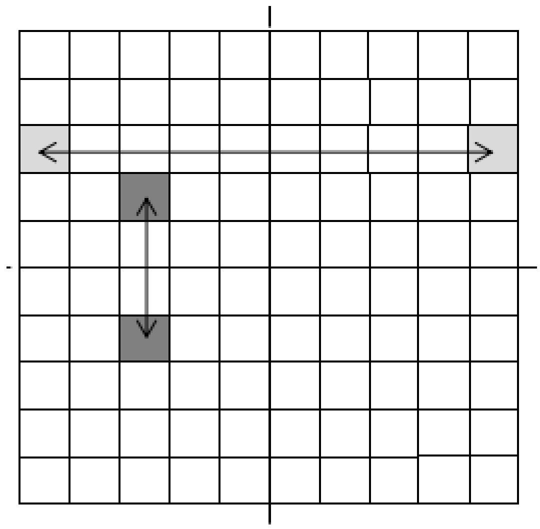
Умови завдань III (обласного) етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2023 / 2024 н.р. (Донецька область)

(середній рівень)[3]

7 клас

1. Квадрат $ABCD$ розрізаний відрізком EF на два прямокутники $AEFD$ та $BCFE$. Кожний з цих двох прямокутників має сторони, що задаються натуральними числами. Відомо, що прямокутник $AEFD$ має площу 30 і вона більша за площу прямокутника $BCFE$. Знайдіть площу квадрата $ABCD$. Відповідь обґрунтуйте.

2. Чи можна вписати числа від 1 до 100 в клітинки квадрату 10×10 так, щоб у кожну клітинку було записане рівно одне число, кожне число записане рівно один раз та щоб справджувалася умова: числа, які розташовані в клітинках, що симетричні відносно якогось із серединних перпендикулярів до сторін початкового квадрату 10×10, були однієї парності? На рисунку показані приклади таких пар клітин, числа в яких мають мати однакову парність. Відповідь обґрунтуйте.



3. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі і починає Петрик. За один хід гравець вибирає одне із чисел від 1 до 2024 і записує його на дошку. Кожне число протягом гри можна вибрати не більше одного разу. Програє той, після чийого ходу добуток чисел на дошці буде ділитися на 2024. Хто виграє за умови, що кожний гравець прагне перемогти? Відповідь обґрунтуйте.

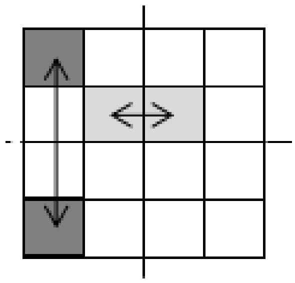
[3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка

4. Петрик задумав 4 цілих числа, а далі виписав усі 6 їхніх попарних сум. П'ять з них виявились рівними 70, 110, 120, 180 та 230. Чому дорівнює шоста сума? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. Знайдіть кількість натуральних чисел, для яких добуток цифр та сума цифр однакові і дорівнюють 8.

2. Запишіть натуральні числа від 1 до 16 в клітинки квадрату 4×4 так, щоб в кожну клітинку було записане рівно одне число, кожне число було записане рівно один раз та щоб справджувалася умова: числа, які розташовані в клітинках, що симетричні відносно якогось із серединних перпендикулярів до сторін початкового квадрату 4×4, дають в сумі просте число. На рисунку показані приклади таких пар клітин, суми чисел в яких мають бути простим числом.



3. Коло γ, що проходить через вершину A трикутника ABC, перетинає його сторони AB та AC вдруге в точках X та Y відповідно. Також коло γ перетинає сторону BC у точках D та E так, що $AD = AE$. Доведіть, що точки B, X, Y, C лежать на одному колі.

4. Додатні дійсні числа $a_1, a_2, ..., a_{2024}$ стоять по колу. Виявилось, що для довільного $i = 1, 2, ..., 2024$ справджується умова $a_i a_{i+1} < a_{i+2}$ (тут вважаємо, що $a_{2025} = a_1$ та $a_{2026} = a_2$). Яка найбільша кількість натуральних чисел може бути серед цих чисел $a_1, a_2, ..., a_{2024}$?

5. Натуральні числа a, b, c задовольняють рівності: $10a^2 - 3ab + 7c^2 = 0$. Яке найменше значення може приймати вираз

$$(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)?$$

Тут через (x,y) позначений найбільший спільний дільник натуральних чисел x та y.

9 клас

1. Нехай $\dfrac{p}{q}=\dfrac{2024}{2023}-\dfrac{2023}{2024}$, де $\dfrac{p}{q}$ – нескоротний дріб. Знайдіть значення p.

2. У гострокутному трикутнику ABC проведено бісектрису BL та висоту AD, що перетинаються в точці T. Виявилося, що висота LK $\triangle ALB$ ділиться навпіл прямою AD. Доведіть, що $KT \perp BL$

3. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі і починає Петрик. За один хід гравець вибирає одне із чисел від 1 до 2023 і записує його на дошку. Кожне число протягом гри можна вибрати не більше одного разу. Програє той, після чийого ходу добуток чисел на дощці буде ділитися на 2023. Хто виграє за умови, що кожний гравець прагне перемогти?

4. Додатні дійсні числа $a_1, a_2, ..., a_{2024}$ стоять по колу. Виявилось, що для довільного $i=1,2,...,2024$ справджується умова $a_i a_{i+1} < a_{i+2}$ (тут вважаємо, що $a_{2025}=a_1$ та $a_{2026}=a_2$). Яка найбільша можлива кількість натуральних чисел може бути серед чисел $a_1, a_2, ..., a_{2024}$?

5. Знайдіть усі такі натуральні числа m та n, для яких обидва дроби $\dfrac{2m-1}{n}$ та $\dfrac{2n-1}{m}$ є цілими числами.

10 клас

1. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a,b), для яких число $4b-1$ ділиться націло на число $3a+1$, а число $3a-1$ ділиться націло на число $2b+1$.

2. У гострокутному трикутнику ABC проведено бісектрису BL та висоту AD, що перетинаються в точці T. Виявилося, що висота LK $\triangle ALB$ ділиться навпіл прямою AD. Доведіть, що $KT \perp BL$.

3. На острові живуть 2025 людей, кожний з яких є лицарем, тобто завжди каже правду, або брехуном, тобто завжди бреше. Деякі мешканці острова знайомі один з одним, при цьому кожний має принаймні одного знайомого, але не більше трьох. Кожний мешканець острова стверджує, що серед його знайомих рівно два брехуна.

а) Яка найменша кількість лицарів може бути серед мешканців острова?

б) Яка найбільша кількість лицарів може бути серед мешканців острова?

4. Чи існує для натурального числа n така перестановка усіх його натуральних дільників $(d_1, d_2, ..., d_k)$, що рівняння $d_k x^{k-1} + ... + d_2 x^1 + d_1 = 0$ має раціональний корінь, якщо:

а) $n=2024$; б) $n=2025$?

5. Петрик мав необмежену кількість жовтої та синьої фарби. У дволітрову банку він налив 1 л жовтої та 1 л синьої фарби, які рівномірно перемішалися між собою, утворивши єдину суміш. За один крок Петрик виливає 1 л суміші з банки та доливає в банку 1 л жовтої або 1 л синьої фарби. Після n таких кроків відсоток синьої фарби в отриманій суміші мав значення від 83% до 84%. Для якого найменшого значення n це могло статися? Перша дія Петрика, коли він злив вперше разом 1 л жовтої та 1 л синьої фарби не рахується.

11 клас

1. Чотири натуральні числа a,b,c,d задовольняють умову: $a<b<c<d$. Для якого найменшого можливого значення d може справджуватися така умова: середнє арифметичне чисел a,b,c буде у два рази меншим за середнє арифметичне чисел a,b,c,d?

2 У трапеції $ABCD$ основа $BC=2AD$, на бічній стороні CD вибрана така точка M, для якої $AB=AM$. Доведіть, що $BM \perp CD$.

3. Задане деяке натуральне число $n>1$. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі і починає Петрик. За один хід гравець вибирає одне із чисел від 1 до n і записує його на дошку. Кожне число протягом гри можна вибрати не більше одного разу. Програє той, після чийого ходу добуток чисел на дошці буде ділитися на n. Для кожного $n>1$ визначте, хто виграє за умови, що кожний гравець прагне перемогти?

4. Знайдіть найменше дійсне число M, для якого $\{a\}+\{b\}+\{c\}\le M$ для будь-яких дійсних додатних чисел a,b,c таких, що $abc=2024$. Тут запис $\{x\}$ позначає дробову частину числа x, наприклад, $\{3,14\}=0,14$.

5. Функції $f:N\to N$ та $g:N\to N$ визначаються таким чином: для кожного $n\in N$ $f(n)$ – найменше натуральне число, факторіал якого ділиться націло на n, а $g(n)=f(n+1)-f(n)$. Доведіть, що функція g необмежена. Для натурального числа k його факторіалом називається добуток $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Математичні олімпіади і турніри в Україні

1. Змагання юних математиків України. 2003 рік / В.М. Лейфура. – Х. : Основа, 2004. – 80 с.
2. Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. : [збірник задач] / В.А. Вишенський, М. В. Карташов. – К. : Либідь, 1993. – 144 с.
3. Київські міські математичні олімпіади 2003–2011 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2011. – 192 с.
4. Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000 рр. / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. – Київ: Техніка, 2003. – 541 с.
5. Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр. / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. – Львів: Каменяр, 2008. – 348 с.
6. Математичні олімпіадні змагання школярів : 2006–2007 рр. / А.В. Анікушин, А.Р. Арман та ін. – К.: Літера, 2008 – 224 с.
7. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007–2008 та 2008–2009 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). – Л.: Каменяр, 2010. – 549 с.
8. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2009–2010 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2011. – 320 с.
9. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2010–2011 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2013. – 368 с.
10. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2011–2012 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2013. – 416 с.
11. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2012–2013 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2014. – 401 с.
12. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2013–2014 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2015. – 465 с.
13. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2014–2015 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2016. – 464 с.
14. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2015–2016 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2017. – 464 с.
15. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2016–2017 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2018. – 464 с.
16. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2017–2018 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2019. – 464 с.
17. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2018–2019 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2020. – 464 с.
18. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2019–2020 (за ред. Б.В. Рубльова). Харків: Гімназія, 2021. 496 с.

19. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2020–2021 (за ред. Б.В. Рубльова). Харків: Гімназія, 2022. 432 с.
20. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2021–2022 (за ред. Б.В. Рубльова). Харків: Гімназія, 2023. 384 с.
21. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2022–2023 (за ред. Б.В. Рубльова). Харків: Гімназія, 2024. 368 с.
22. Українські математичні олімпіади : [довідник] / В.А. Вишенський, О.Г. Ганюшкін та ін. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с.

***

23. Басанько А.М. За лаштунками підручника з математики : [збірник розвиваючих задач для учнів 5 – 7 класів] / А.М. Басанько, А.О. Романенко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2004. – 213 с.
24. Войцехівська В. Функціональні рівняння. – К.: ТОВ «Праймдрук», 2012. – 48 с.
25. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 1]. – Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 5(65). – 128 с.
26. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 2]. – Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 6(66). – 141 с.
27. Готуємось до олімпіади з математики / упорядн. А.Б. Веліховська, О.В. Гримайло. // Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2007. –Вип. 2 (50) – 160 с.
28. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад. 8-11 класи / Т. В. Коваль. – Тернопіль : Мандрівець, 2004. – 80 с.
29. Конет І.М. Вибрані питання шкільного курсу математики / І.М. Конет, Б.Я. Сиваківський, П.Б. Сиваківський. За ред. І.М.Конета. – Кам’янець-Подільський: ФОП Сисин О.В., 2008. – 365 с.
30. Конет І.М. Обласні олімпіади з математики / І.М. Конет, В.М. Радченко, Ю.В. Теплінський. За ред. І.М. Конета. – Кам’янець-Подільський: Абетка, 2010. – 388 с.
31. Кравчук В. Р. Задачі математичних олімпіад. – Тернопіль: «Підручники і посібники», 2019. – 128 с.
32. Кравчук В.Р. Доведення нерівностей. – Тернопіль: «Підручники і посібники», 1993. – 42 с.
33. Кужель О.В. Контрприклади в математиці. – К.: Рад. Школа, 1988. – 96 с.
34. Лагодюк В.Ю. Нестандартні методи розв’язання окремих типів математичних рівнянь. – Рівне: РМВК УО, 2010. – 18 с.
35. Лейфура В.М. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Л.: 1999. – 128 с.
36. Лоповок Л.М. Збірник математичних задач логічного характеру. – К.: Радянська школа, 1972. – 151 с.
37. Лось В.М. Математика : навчаємо міркувати. Розв’язування нестандартних задач / В.М. Лось, В.П. Тихієнко. – К. : Кондор, 2005 – 312 с.

38. Лук’янова С. Розв’язування текстових задач арифметичними способами : 5–6 кл. – К. : Вид. дім «Шкіл. світ» : Вид. Л. Галіцина, 2006. – 128 с. (Б-ка «Шкіл. світу»).
39. Маланюк М.П., Лукавецький В.І. Олімпіади юних математиків: посібник для вчителів. – Київ: Радянська школа, 1985. – 88 с.
40. Мовчан С.М. Метод математичної індукції в шкільному курсі математики. – К.: Ліцей №38 ім. В. М. Молчанова, 2013. – 52 с.
41. Петенчук В. М., Сігетій І. П. Завдання та розв’язки районних і міських олімпіад з математики 2000-2006 років. – Ужгород: ІВЦ ЗІППО, 2007. – 208 с.
42. Полонський В.Б., Рабинович Ю.М., Якір М.С. Вчимося розв’язувати задачі з геометрії. – К.: «Магістр-S», 1998. – 256 с.
43. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: навч. посіб. Вид. 2-ге, допов. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – 400 с.
44. Сарана О.А., Семенець С.П. Нестандартні геометричні задачі: Навчально-методичний посібник. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І.Франка, 2007. – 150 с.
45. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч : [навчальний посібник] – К. : А.С.К., 2005. – 344 с.
46. Собкович Р., Кульчицька Н. Основні методи доведення нерівностей. – Івано-Франківськ: Прикарпатський НУ ім. В. Стефаника, 2014. – 100 с.
47. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики. – Чернівці, 2003. – 360 с.
48. Федак І.В. Олімпіади з математики: 1987–2016 роки. Завдання, відповіді. – Х. : Видавнича група «Основа», 2016. – 239 с.
49. Федак І.В. Методи розв’язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх: Посібник для підг. до математичних олімпіад. – Чернівці: Зелена Буковина, 2002. – 340 с.
50. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики : [посібник для ЗНЗ]. – Чернівці, 2003. – 360 с.
51. Федак І.В. Олімпіади з математики: 1987–2016 роки. Завдання, відповіді. – Х. : Видавнича група «Основа», 2016. – 239 с.
52. Шматок А.В. 100 цікавих задач з математики для учнів 5, 6 класів. – Верхньодніпровськ: КЗ «Дніпровокам’янська СЗШ І-ІІІ ступенів», 2015. – 20 с.
53. Ясінський В.А. Олімпіадні задачі [випуск 1: навчальний посібник]. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 40 с.
54. Ясінський В.А. Практикум з розв’язування задач математичних олімпіад. Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2006. – 128 с.
55. Ясінський В.А. Геометричні задачі: Готуємося до математичної олімпіади. – Львів: Каменяр, 2003. – 76 с.
56. Ясінський В.А. Геометричні перетворення в задачах математичних олімпіад. Практикум із розв’язування геометричних задач. – К. : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2012. – 128 с.
57. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язання. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.

ІІ і ІІІ тури Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики в Донецькій області

1. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / [Р. И. Довбыш, Л. Л. Потемкина, Н. Л. Трегуб и др.] – Донецк: ООО ПКФ «БАО», **2005**. – 336 с.
2. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2007 / Б.Б. Беседін, Г.М. Бірюкова, Г.О. Ганзера, В.М. Кадубовська, О.А. Кадубовський, Л.Г. Плесканьова, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2008**. – 40 с.
3. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2008 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, Л.Г. Плесканьова, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 2, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2009**. – 44 с.
4. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2009 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, Г.О. Ганзера, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 5, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2010**. – 44 с.
5. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2010 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 8, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2011**. – 80 с.
6. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2011 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко, М.М. Рубан // Випуск 10, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2012**. – 84 с.
7. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: Розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2012 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, М.М. Рубан, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко // Випуск 11, СЕРІЯ: Викладачі ДДП – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. – Слов'янськ, **2013**. – 64 с.
8. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв’язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2013 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. – Слов’янськ : видавничий центр «Маторін», **2014**. – 60 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 12).

9. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв’язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2014 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко. – Слов’янськ : видавничий центр «Маторін», **2015**. – 64 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 13).
10. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв’язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2015 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, О.В. Чуйко, С.І. Воробйова. – Слов’янськ : видавничий центр «Маторін», **2016**. – 100 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 14).
11. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв’язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2016 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін, О.В. Чуйко. – Слов’янськ : видавничий центр «Маторін», **2017**. – 100 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 15).
12. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв’язання задач II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2018 : навчальний посібник / О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін, В. С. Сьомкін. – Слов’янськ : вид. центр «Маторін», **2019**. – 100 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 21).
13. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв’язання задач II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2019 : навчальний посібник / О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін. – Слов’янськ : вид. центр «Маторін», **2020**. – 88 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 24).
14. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв’язання задач II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2020 : навчальний посібник / О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін. – Слов’янськ : вид. центр «Маторін», **2021**. – 96 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 27).

Internet ресурси

1. Київські олімпіади з математики.
   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://matholymp.org.ua/
2. Сайт міжнародних олімпіад з математики
   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   https://www.imo2024.uk/
3. Українська сторінка міжнародного конкурсу «Кенгуру».
   [Електронний ресурс]. – Режим доступу:
   http://www.kangaroo.com.ua/index.php