УДК 514.113.4

Бондар Д.Ю., Кадубовський О.А.

[1] *здобувачка другого (магістерського) РВО за ОП «Середня освіта (Математика)», фізико-математичний факультет ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: bndrdiana@gmail.com, ORCID 0000-0003-1814-2325
[2] *кандидат фіз.-мат. н., доцент кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: kadubovs@ukr.net, ORCID 0000-0003-2045-810X

ПРО МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ПРЯМОКУТНОМУ ТЕТРАЕДРІ ТА СУМІЖНІ ПИТАННЯ

Представлена стаття присвячена систематизації фактів геометрії тетраедра, зокрема ортоцентричного і прямокутного та популяризації властивостей прямокутного тетраедра. Також висвітлено авторський підхід до можливого впровадження у шкільний курс геометрії властивостей та метричних співвідношень прямокутного тетраедра шляхом поміркованого добору дидактичного матеріалу під час вивчення відповідних тем стереометрії.

Ключові слова: *ортоцентричний тетраедр, прямокутний тетраедр, властивості, метричні співвідношення, ознаки рівності, впровадження.*

Вступ

Прямокутний тетраедр є добре відомим в класичному курсі елементарної геометрії видом тетраедрів. Проте, нажаль, відомості про нього майже не висвітлюються у діючих підручниках з геометрії.

Виключення складають, наприклад, підручники [1] та [5], в яких автори знайомлять з ортоцентричним та прямокутним тетраедром, закладаючи тим самим підгрунтя для можливих самостійних розвідок учнів в напрямку пошуку аналогій з трикутниками та встановлення відповідних властивостей.

Властивості ортоцентричного та прямокутного тетраедра досить детально та змістовно висвітлені, наприклад, у роботах І.А. Кушніра [8–10], Ж. Адамара, Д.І. Пєрєпьолкіна, З.А. Скопця, Я.П. Понаріна, І.Ф. Шаригіна, В.В. Прасолова, О.О. Заславського, Н.С. Денісової та багатьох ін. Проте, на думку авторів, факти з геометрії тетраедра, зокрема ортоцентричного та прямокутного, носять зазвичай розрізнений характер, в залежності від уподобань авторів та завдань викладеного матеріалу. А накопичений матеріал вимагає систематизації.

Тому мета представленої статті полягає у наступному:

– виокремити та систематизувати найбільш важливі факти геометрії тетраедра, зокрема ортоцентричного та прямокутного;

– привернути увагу вчителів математики та учнів ЗЗСО, викладачів математики та студентів педагогічних закладів вищої освіти до: популяризації властивостей прямокутного тетраедра; можливості впровадження метричних співвідношень прямокутного тетраедра в якості принципово нових та посильних для учнів задач з курсу стереометрії.

Автори переконані, що відсутність у шкільних підручниках відомостей (принаймні, в якості довідкового матеріалу у параграфах «Тим, хто хоче знати більше») про ортоцентричний тетраедр є суттєвим недоліком, бо і правильний, і прямокутний тетраедр є прикладами саме ортоцентричного тетраедра. А тому вони мають всі властивості ортоцентричного тетраедра.

Крім того, і ортоцентричний, і прямокутний тетраедр мають цілу низку (своїх-особливих) характеристичних властивостей, які, на превеликий жаль, залишаються за лаштунками діючих шкільних підручників з геометрії, навіть в якості пропонованих задач.

На думку авторів прямокутний тетраедр має посісти у навчанні (в курсі стереометрії) здобувачів загальної середньої освіти таке саме місце, яке посідає прямокутний трикутник (в курсах планіметрії та стереометрії). Бо, вивчаючи просторові фігури, більш ніж доцільно порівнювати їх з («відповідними») фігурами на площині. Добре відомо, що прямая (на площині) і площина (у просторі); параллелограм і паралелепіпед; коло і сфера; круг і куля мають схожі властивості. Тетраедр (трикутна піраміда) має цілу низку схожих властивостей із трикутником. А прямокутний тетраедр – низку схожих властивостей із прямокутним трикутником (напр., [8-10]). І цього всього учні, по суті, позбавлені в процесі навчання. Звісно, що вивчення многогранників учням дається набагато складніше ніж вивчення многокутників. Проте, можливо, саме пошук аналогій і є тим самим чинником, який додатково мотивує та полегшує вивчення просторових фігур.

Саме тому представлена стаття: з одного – присвячена популяризації фактів геометрії тетраедра, зокрема ортоцентричного та прямокутного; з іншого боку – метричним співвідношенням у прямокутному тетраедрі, зокрема одному з можливих підходів до вивчення прямокутного тетраедра без прив’язки до вивчення властивостей ортоцентричного тетраедра.

На рахунок останнього автори мають чітке переконання, що науковий підхід при переході від вивчення фактів геометрії тетраедра до вивчення властивостей правильного тетраедра не може дозволити відсутність ланки щодо вивчення властивостей ортоцентричного тетраедра. Хочаб тому, що втрачається стройність, краса та послідовність викладу геометричного матеріалу. А надання переваги у вивченні та важливості практичних застосувань у сферах людської діяльності правильному тетраедру у порівнянні з прямокутним взагалі викликає певні сумніви.

На нашу думку, поміркований добір дидактичного забезпечення при вивченні «Пірамід» у курсі стереометрії уможливлює впровадження у шкільний курс геометрії властивостей ортоцентричного та прямокутного тетраедра, принаймні в якості задач за рахунок мінімізації однотипних задач з числовими даними на відпрацювання певної формули.

Наслідуючи авторів [7], є щирі сподівання, що дана стаття буде корисною для цільової аудиторії, принаймні, як довідковий матеріал під гаслом «Енциклопедія метричних співвідношень у прямокутному тетраедрі».

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079142024311285

1. Основні поняття та відомості з геометрії тетраедра

Означення 1.1. [5, С. 44] Відрізок, який сполучає середини мимобіжних ребер тетраедра, називають середньою лінією (бімедіаною) тетраедра.

Означення 1.2. [5, С. 45] Відрізок, який сполучає вершину тетраедра з точкою перетину медіан протилежної грані, називають медіаною тетраедра.

1. У довільному тетраедрі:

1) середини чотирьох ребер (двох пар мимобіжних ребер) належать одній площині [10, С. 378];

2) шість площин, кожна з яких проходить через одне з його ребер та середину мимобіжного ребра, проходять через одну точку G;

3) чотири медіани перетинаються в одній точці G, яка ділить кожну з них у відношені 3:1, рухаючись від вершини тетраедра [5, С. 45];

4) три середні лінії (бімедіани) перетинаються в одній точці G, яка ділить кожну з них навпіл [5, С. 45].

Точку G називають центром тяжіння або ж центроїдом тетраедра.

5) шість площин, кожна з яких проходить через середину одного ребра та є перпендикулярною до мимобіжного ребра, перетинаються в одній точці (точці Монжа).

2. Для вершин тетраедра $ABCD$ справджується векторна рівність

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=0; \quad (1.1)$$

3. Якщо точки K і L є серединами ребер AB і CD тетраедра $ABCD$, то:

1) виконується векторна рівність (напр., [1, С. 143])

$$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right); \quad (1.2)$$

2) прямі / відрізки AC, BD, KL є паралельними до однієї площини.

4. Точка G є центроїдом тетраедра $ABCD$ тоді і лише тоді, коли виконується векторна рівність $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (1.3)

5. Відстань від центроїда тетраедра до (площини) певної грані дорівнює одній четвертій довжини відповідної висоти тетраедра.

6. Якщо точка G є центроїдом тетраедра $ABCD$, то об'єми тетраедрів $GABC$, $GABD$, $GACD$ та $GBCD$ є рівними. І навпаки: якщо об'єми тетраедрів $XABC$, $XABD$, $XACD$ та $XBCD$ є рівними, то $X\equiv G$.

7. (**Теорема Лейбніца,** [5, С. 109]). Нехай G – центроїд тетраедра $DABC$. Тоді для довільної точки P простору має місце рівність

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=GA^2+GB^2+GC^2+GD^2+4PG^2. \quad (1.4)$$

З теореми Лейбніца випливає екстремальна властивість центроїду тетраедра; *сума квадратів відстаней від точки P до вершин тетраедра набуває мінімального значення P співпадає з центроїдом G* [5, С. 110].

8. Площина, яка містить серредню лінію (бімедіану) тетраедра, ділить його на два многогранники рівних об'ємів [10, С. 380].

9. Площина, яка містить ребро тетраедра та середину протилежного (мимобіжного) ребра, ділить його на два тетраедри з рівними об'ємами.

10. Якщо $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ – вектори висот тетраедра $ABCD$, а S_1, S_2, S_3, S_4 – площі відповідних їм граней, то справджується рівність

$$S_1^2 \cdot \overrightarrow{AA_1} + S_2^2 \cdot \overrightarrow{BB_1} + S_3^2 \cdot \overrightarrow{CC_1} + S_4^2 \cdot \overrightarrow{DD_1} = \vec{0} \qquad (1.5)$$

11. (**З №12.35*** [5, С. 136]) Якщо AA_1 і BB_1, BB_2 і CC_1, CC_2 і AA_2 – висоти граней ADB, BDC та CDA (відповідно) тетраедра $DABC$, то прямі A_1B_1, C_1B_2 та A_2C_2 є паралельними до однієї площини.

12. Якщо в тетраедрі позначити мимобіжні ребра відповідно як a і a_1, b і b_1, c і c_1, то довжину d_1 середньої лінії тетраедра, яка сполучає середини ребер a та a_1, можна обчислити за формулою (напр., [1, С. 142])

$$d_1 = 0{,}5 \cdot \sqrt{b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2}\,. \qquad (1.6)$$

13. Якщо a, a_1, b, b_1, c, c_1 – довжини мимобіжних ребер тетраедра, то кут φ_1 між ребрами a і a_1 можна знайти за формулою (напр., [1, С. 142])

$$\cos\varphi_1 = \frac{\left|b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2\right|}{2aa_1}. \qquad (1.7)$$

14. (**Аналог теореми Чеви для тетраедра**, [9, С. 80]). Нехай X та Y – внутрішні точки відповідно граней ABC та DBC тетраедра $DABC$. Відрізки (прямі) DX та AY перетинаються в одній точці тоді і лише тоді, коли виконується співвідношення

$$\frac{S_{\triangle AXB}}{S_{\triangle AXC}} = \frac{S_{\triangle DYB}}{S_{\triangle DYC}}. \qquad (1.8)$$

15. (**Теорема Менелая для тетраедра**, [5, С. 48]). Точки M, K, P і N, позначені відповідно на ребрах DA, AC, CB і BD тетраедра $DABC$, належать одній площині тоді й тільки тоді, коли виконується рівність

$$\frac{DM}{MA} \cdot \frac{AK}{KC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BN}{ND} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{DM}}{\overrightarrow{MA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{ND}} = 1. \qquad (1.9)$$

Добре відомо (напр., [3, С. 136], [4, С. 94], [6, С. 131]), що піраміду можна вписати у сферу (сферу мажна описати навколо піраміди) тоді і лише тоді, коли навколо її основи можна описати коло. Звідки й випливає, що

16. Навколо довільного тетраедра можна описати сферу і тільки одну. Центр такої сфери є точкою перетину шести площин, які проходять через середини ребер перпендикулярно до них, та / або чотирьох прямих, які проходять через центри кіл, описаних накволо траней тетраедра перпендикулярно до площин, що їх містять. Радіус R такої сфери можна обчислити за наслідком із формули **Штаудта**

$$R = \frac{\sqrt{(aa_1 + bb_1 + cc_1)(bb_1 + cc_1 - aa_1)(cc_1 + aa_1 - bb_1)(aa_1 + bb_1 - cc_1)}}{24V}, \qquad (1.10)$$

a, a_1, b, b_1 та c, c_1 – довжини мимобіжних ребер тетраедра, а V – його об'єм.

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079142024311285

Також добре відомо (напр., [3, С. 139], [4, С. 99], [9, С. 43]), що:

17. В кожен тетраедр можна вписати сферу і тільки одну; центр такої сфери належить бісекторним площинам двогранних кутів при його ребрах; бісекторна площина двогранного кута тетраедра ділить протилежне ребро пропорційно площам граней, що утворюють кут; *величини кутів, під якими з точки дотику сфери з гранню видно ребра цієї грані, однакові для всіх чотирьох граней*; а радіус r такої сфери можна знайти (за об'ємом та площами граней тетраедра) зі співвідношення

$$3V = r\left(S_1 + S_2 + S_3 + S_4\right). \tag{1.11}$$

18. Якщо α_1,α_2, β_1,β_2, γ_1,γ_2 – міри плоских кутів бічних граней при вершинах A, B і C відповідно, причому до кожного ребра основи тетраедра $DABC$ прилягають кути з індексами різної парності, то має місце залежність

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma_1} = 1. \tag{1.12}$$

19. (Теорема косинусів для тетраедра). Квадрат площі певної грані тетраедра дорівнює сумі квадратів площ трьох інших його граней без подвоєних добутків площ цих граней, взятих попарно, та косинусів двогранних кутів між ними, тобто:

$$\begin{aligned}
S_4^2 &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2\cos\varphi_{12} - 2S_1S_3\cos\varphi_{13} - 2S_2S_3\cos\varphi_{23},\\
S_3^2 &= S_1^2 + S_2^2 + S_4^2 - 2S_1S_2\cos\varphi_{12} - 2S_1S_4\cos\varphi_{14} - 2S_2S_4\cos\varphi_{24},\\
S_2^2 &= S_1^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_1S_3\cos\varphi_{13} - 2S_1S_4\cos\varphi_{14} - 2S_3S_4\cos\varphi_{34},\\
S_1^2 &= S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2S_3\cos\varphi_{23} - 2S_2S_4\cos\varphi_{24} - 2S_3S_4\cos\varphi_{34}
\end{aligned}, \tag{1.13}$$

20. (Теорема синусів для тетраедра). Добутки довжин протилежних (мимобіжних) ребер тетраедра пропорційні добуткам синусів відповідних двогранних кутів, тобто

$$\frac{a\cdot a_1}{\sin\alpha\cdot\sin\alpha_1} = \frac{b\cdot b_1}{\sin\beta\cdot\sin\beta_1} = \frac{c\cdot c_1}{\sin\gamma\cdot\sin\gamma_1} = \frac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}, \tag{1.14}$$

де: a,a_1, b,b_1 та c,c_1 – довжини мимобіжних ребер тетраедра, α,α_1, β,β_1, γ,γ_1 – величини двогранних кутів при відповідних ребрах, S_1,S_2,S_3,S_4 – площі граней, а V – об'єм тетраедра.

21. (КЗ №18.40, [5, С. 178]**)**. Нехай S_1,S_2 – площі граней тетраедра, c – довжина їх спільного ребра, а α – величина двогранного кута при цьому ребрі. Тоді об'єм V такого тетраедра можна знайти за формулою

$$V = \frac{2}{3c}S_1S_2\sin\alpha \tag{1.15}$$

22. (КЗ №18.49, [5, С. 179]**)**. Нехай a,a_1, b,b_1 та c,c_1 – довжини мимобіжних ребер тетраедра, а δ_1,φ_1, δ_2,φ_2, δ_3,φ_3 – відстані та кути між прямими, які містять відповідні мимобіжні ребра. Тоді об'єм V тетраедра можна обчислити за формулою

$$V = \frac{1}{6} aa_1\delta_1 \sin\varphi_1 = \frac{1}{6} bb_1\delta_2 \sin\varphi_2 = \frac{1}{6} cc_1\delta_2 \sin\varphi_3 \qquad (1.16)$$

23. ([10, С. 382]). Якщо h_1, h_2, h_3, h_4 – довжини висот, а $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – відстані між мимобіжними ребрами тетраедра, то має місце співвідношення

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} = \frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2} + \frac{1}{\delta_3^2} \qquad (1.17)$$

24. («Формула 12 величин»). Нехай S_i, R_i, l_i $(i = 1,2,3,4)$ – відповідно площі граней, радіуси описаних навколо цих граней кіл та відстані від центрів цих кіл до протилежних вершин тетраедра. Тоді для об'єма V тетраедра є справедливою формула

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i^2\left(l_i^2 - R_i^2\right)}. \qquad (1.18)$$

25. (Теорема Бретшнейдера). Нехай a, a_1, b, b_1 та c, c_1 – довжини мимобіжних ребер тетраедра, а α, α_1, β, β_1, γ, γ_1 – величини двогранних кутів при відповідних ребрах. Тоді мають місце рівності

$$a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha_1 =$$
$$= b^2 + b_1^2 + 2bb_1 \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\beta_1 = c^2 + c_1^2 + 2cc_1 \operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\gamma_1. \qquad (1.19)$$

26. Щоб два мимобіжних ребра тетраедра були взаємно перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб основи висот, проведених з кінців одного з цих ребер на інше ребро, збігалися [8, С. 106].

Означення 1.3. Якщо прямі, які містять висоти тетраедра, перетинаються в одній точці, то такий тетраедр називають ортоцентричним (а зазначену точку – ортоцентром тетраедра) [5, С. 43].

Добре відомими також є наступні **властивості-ознаки** ортоцентричного тетраедра, а саме:

27. Висоти тетраедра перетинаються в одній точці (**тетраедр є ортоцентричним**) тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних умов:

1) перпендикуляри до граней тетраедра в центрах їх тяжіння (в точках перетину медіан) перетинаються в одній точці;
2) має дві пари перпендикулярних мимобіжних ребер [5, С. 44];
3) мимобіжні ребра є (попарно) перпендикулярними [5, С. 51];
4) основа однієї з висот тетраедра співпадає з точкою перетину висот його грані [5, С. 51];
5) довжини середніх ліній / бімедіан тетраедра є рівними [5, С. 51];
6) суми квадратів довжин мимобіжних ребер є рівними [5, С. 52];
7) добутки косинусів двогранних кутів при мимобіжних ребрах є рівними;
8) три кути між мимобіжними ребрами є рівними.

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079142024311285

28. В ортоцентричному тетраедрі:

1) сума квадратів добутків довжин мимобіжних ребер у чотири рази більша за суму квадратів площ його граней;

2) сума квадратів відстаней від ортоцентра до його вершин дорівнює квадрату діаметра описаної навколо нього сфери;

3) спільні перпендикуляри до мимобіжних ребер (з кінцями на них) перетинаються в його ортоцентрі [9, С. 19];

4) ортоцентр ділить спільні перпендикуляри до мимобіжних ребер, як і висоти тетраедра, на відрізки, добуток довжин яких є величиною сталою;

5) основи спільних перпендикулярів до мимобіжних ребер належать одній сфері [9, С. 19];

6) точки, що є симетричними до основ висот тетраедра відносно ребер, які належать одній і тій самій грані, належать описаній сфері [9, С. 39].

7) всі плоскі кути при певній вершині є одночасно гострими, прямими або тупими, а одна з граней є гострокутним триктуником;

8) перерізи, що містять ребра тетраедра та є перпендикулярними до мимобіжних ребер, задовольняють умовам: всі такі перерізи мають спільну точку; три перерізи, що перпендикулярні до ребер однієї грані, мають спільну пряму, причому, якщо ці три перерізи є рівновеликими, то тетраедр є правильним; якщо 4 із зазначених перерізів є рівновеликими, то тераедр є правильним.

Означення 1.4. *Тетраедр ($DABC$), у якого кожний плоский кут при одній із вершин є прямим ($\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 90^{\circ}$), називають прямокутним.*

Ті його грані, які містять перпендикулярні ребра, будемо називати бічними гранями («гранями-катетами»), а четверту грань (яка не містить перпендикулярних ребер) – основою тетраедра («грань-гіпотенуза»).

В подальшому таку трикутну піраміду будемо коротко називати **прямокутним тетраедром** $DABC$ **з основою** ABC / **вершиною** D.

Очевидно, що прямокутний тетраедр є ортоцентричним. ***І тому прямокутний тетраедр має всі властивості ортоцентичного тетраедра***.

Більш детально, зокрема із наведеними твердженнями з геометрії тетраедра та його видів, можна ознайомитися, наприклад, у наступних працях авторів: Адамар Ж. (*Елементарна геометрія. Стереометрія.*, 1951 р.); Пєрєпьолкін Д.І. (*Курс елементарної геометрії. Геометрія в просторі*, 1949 р.); Скопець З.А., Понарін Я.П. (*Геометрія тетраедра та його елементів*, 1974 р.); Шаригін І.Ф. (*Задачі з геометрії (стереометрія)*, 1984 р.); Прасолов В.В., Шаригін І.Ф. (*Задачі зі стереометрії*, 1989 р.); Заславський О.О. (*Порівняльна геометрія трикутника і тетраедра*, 2004 р.); Понарін Я. П. (*Елементарна геометрія. Стереометрія, перетворення простору*, 2006 р.; *Елементарна геометрія. Трикутники і тетраедри*, 2009 р.); Прасолов В.В. (*Задачі зі стереометрії*, 2016 р.); Денісова Н.С. (*Геометрія трикутника, тетраедра, симплекса*, 2016 р.) та І.А. Кушніра [8], [9], [10].

1.1. Найпростіші метричні співвідношення в прямокутному тетраедрі та їх наслідки.

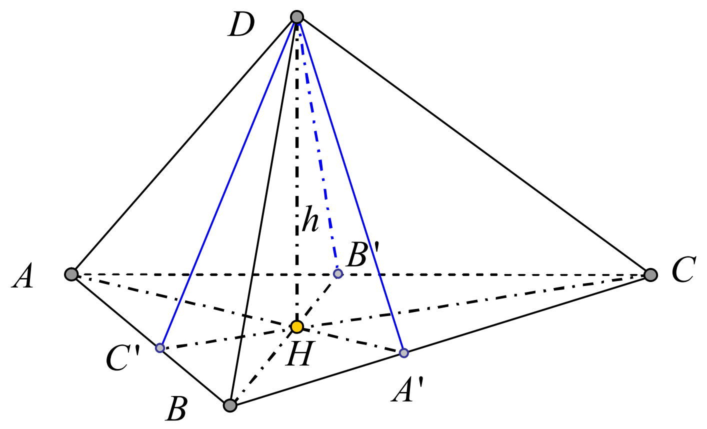

Рис. 1: до основних властивостей прямокутного тетраедра

Відтепер і в подальшому будемо використовувати наступні позначення для елементів прямокутного тетраедра $DABC$ – (рис. 1):

$a = DA$, $b = DB$, $c = DC$ – довжини бічних ребер прямокутного тетраедра $DABC$ (з основою ABC);

$t_1 = DA'$, $t_2 = DB'$, $t_3 = DC'$ – довжини апофем прямокутного тетраедра $DABC$ (з основою ABC);

$H = AA' \cap BB' \cap CC'$ – ортоцентр $\triangle ABC$;

$q_1 = AA'$, $q_2 = BB'$, $q_3 = CC'$ – довжини висот грані ABC;

$q_{11} = AH$, $q_{21} = BH$, $q_{31} = CH$ – відстані від вершин основи ABC до її ортоцентра; $q_{12} = HA'$, $q_{22} = HB'$, $q_{32} = HC'$ – відстані від ортоцентра основи ABC до сторін BC, AC та AB відповідно.

$h = DH$ – довжина висоти тетраедра, опущеної на його основу ABC;

$a_1 = BC$, $b_1 = CA$, $c_1 = AB$ – довжини ребер основи;

A_0, B_0, C_0 – середини ребер основи BC, CA та AB відповідно;

$n_1 = DA_0, n_2 = DB_0, n_3 = DC_0$ – довжини медіан бічних граней тетраедра $DABC$, що проведені до сторін (основи) BC, CA та AB відповідно;

$m_1 = AA_0, m_2 = BB_0, m_3 = CC_0$ – довжини медіан основи ABC;

A_1, B_1, C_1 – середини бічних ребер DA, DB та DC відповідно;

$d_1 = A_1A_0, d_2 = B_1B_0, d_3 = C_1C_0$ – довжини середніх ліній тетраедра;

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – вістані між мимобіжними ребрами a, a_1, b, b_1 та c, c_1 відповідно;

M, G_1, G_2, G_3 – центроїди (точки перетину медіан) граней ABC, DBC, DCA та DAB відповідно;

$g_0 = DM$, $g_1 = AG_1$, $g_2 = BG_2$, $g_3 = CG_3$ – довжини медіан тетраедра;

O', R – центр та радіус сфери, описаної навколо тетраедра $DABC$;

I, r – центр та радіус сфери, вписаної в прямокутний тетраедр $DABC$;

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079142024311285

r_1, r_2, r_3, r_0 – радіуси зовнівписаних сфер (1 роду) прямокутного тетраедра, які дотикаються граней DBC, DCA, DAB та ABC відповідно;

$R_{осн}$, $r_{осн}$ – радіус кола, описаного навколо основи / вписаного в основу ABC прямокутного тетраедра $DABC$;

$\mathrm{R}BC$, $\mathrm{R}AC$, $\mathrm{R}AB$ – лінійні кути двогранних кутів при ребрах (основи) BC, CA та AB відповідно;

$S_1 = S_{\mathrm{V}DBC}$, $S_2 = S_{\mathrm{V}DCA}$, $S_3 = S_{\mathrm{V}DAB}$, $S_0 = S_{\mathrm{V}ABC}$;

$S_1^{'} = S_{\mathrm{V}HBC}$, $S_2^{'} = S_{\mathrm{V}HCA}$, $S_3^{'} = S_{\mathrm{V}HAB}$;

J_0 – точка дотику вписаної в тетраедр $DABC$ сфери з основою ABC;

$\overset{\circ}{S}_1 = S_{\mathrm{V}J_0BC}, \overset{\circ}{S}_2 = S_{\mathrm{V}J_0CA}, \overset{\circ}{S}_3 = S_{\mathrm{V}J_0AB}$;

J_1, J_2, J_3 – точки дотику вписаної в тетраедр $DABC$ сфери з гранями DBC, DCA та DAB відповідно;

$V = V_{DABC}$; $V_1 = V_{IDBC}, V_2 = V_{IDCA}, V_3 = V_{IDAB}, V_0 = V_{IABC}$.

Формулу Герона (*для обчислення площі S трикутника за довжинами e, f, g його сторін*) досить часто (наприклад, для одержання формули (1.1.5)) зручно використовувати у маловідомому вигляді

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4e^2 f^2 - \left(e^2 + f^2 - g^2\right)^2}\,. \tag{1.1.0}$$

Твердження 1.1.1. Для прямокутного тетраедра $DABC$ з основою ABC, довжини бічних ребер DA, DB і DC якого становлять a, b і c відповідно, мають місце **найпростіші метричні співвідношення**:

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2} = a_1, \qquad CA = \sqrt{c^2 + a^2} = b_1, \qquad AB = \sqrt{a^2 + b^2} = c_1 \tag{1.1.1}$$

$$\cos\angle CAB = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}\cdot\sqrt{a^2 + c^2}} = \sin\angle ACD \cdot \sin\angle ABD,$$
$$\cos\angle ABC = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}\cdot\sqrt{b^2 + c^2}} = \sin\angle BAD \cdot \sin\angle BCD, \tag{1.1.2}$$
$$\cos\angle BCA = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + a^2}\cdot\sqrt{c^2 + b^2}} = \sin\angle CAD \cdot \sin\angle CBD$$

$$S_{BDC} = \frac{1}{2}bc = S_1, \qquad S_{CDA} = \frac{1}{2}ca = S_2, \qquad S_{ADB} = \frac{1}{2}ab = S_3 \tag{1.1.3}$$

$$V_{DABC} = \frac{1}{3}aS_1 = V, \qquad V_{DABC} = \frac{1}{3}bS_2 = V, \qquad V_{DABC} = \frac{1}{3}cS_3 = V \tag{1.1.4}$$

$$V_{DABC} = \frac{1}{6}abc = V \tag{1.1.4*}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = S_0 \tag{1.1.5}$$

$$DH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} = h \tag{1.1.6}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2} \tag{1.1.6*}$$

$$DA' = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} = t_1, \qquad DB' = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} = t_2, \qquad DC' = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = t_3 \tag{1.1.7}$$

1.2. Основні властивості та метричні співвідношення в прямокутному тетраедрі.

Властивість 1.2.1. У прямокутному тетраедрі $DABC$ з основою ABC прямі, що містять ребра AD, BD і CD, є перпендикулярними до площин граней BDC, CDA та ADB відповідно.

(Справедливість твердження є наслідком з ознаки та визначення перпендикулярних прямої та площини).

Наслідок 1.2.1. Мимобіжні ребра прямокутного тетраедра є перпендикулярними (тобто, $AD \perp BC$, $BD \perp CA$, $CD \perp AB$).

Властивість 1.2.2. У прямокутному тетраедрі $DABC$ з основою ABC грань ABC є гострокутним трикутником.

(Справедливість твердження є наслідком зі співвідношень (1.1.2)).

Властивість 1.2.3. Нехай DA', DB', DC' – апофеми (висоти бічних граней BDC, CDA та ADB відповідно), а DH – висота прямокутного тетраедра $DABC$ з основою ABC. Тоді:

1) $VADA'$, $VBDB'$, $VCDC'$ є прямокутними трикутниками;

2) AA', BB', CC' – висоти $VABC$ ($AA' \perp BC$, $BB' \perp CA$, $CC' \perp AB$), довжини яких можна обчислити за допомогою співвідношень

$$AA' = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}} = q_1,$$
$$BB' = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}} = q_2, \; CC' = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = q_3 \tag{1.2.1}$$

3) DA', DB', DC' є спільними перпендикулярами до відповідних момобіжних пар ребер;

4) $HA' \perp BC$, $HB' \perp CA$, $HC' \perp AB$;

5) H – ортоцентр $VABC$ (тобто, вершина D ортогонально проектується в ортоцентр H грані ABC); тому мають місце наступні метричні співвідношення та наслідки з них:

$$AH = \frac{a^2\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \; HA' = \frac{b^2c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \tag{1.2.2}$$

$$BH = \frac{b^2\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \; HB' = \frac{a^2c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \tag{1.2.3}$$

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079142024311285

$$CH=\frac{c^2\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},\ HC'=\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \qquad (1.2.4)$$

$$S_{BHC}=\frac{b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}=S_1',$$
$$S_{CHA}=\frac{c^2a^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}=S_2'.\ S_{AHB}=\frac{a^2b^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}=S_3' \qquad (1.2.5)$$

6) $\angle DA'A$, $\angle DB'B$, $\angle DC'C$ – лінійні кути двогранних кутів при ребрах (основи) BC, CA та AB відповідно, для яких виконуються рівності $\angle DA'A=\angle ADH$, $\angle DB'B=\angle BDH$, $\angle DC'C=\angle CDH$ та які можна визначити за допомогою співвідношень:

$$\cos\angle DA'A=\frac{bc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}=\frac{S_1}{S_0}=\cos\mathrm{R}BC,$$
$$\cos\angle DB'B=\frac{ac}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}=\frac{S_2}{S_0}=\cos\mathrm{R}AC, \qquad (1.2.6)$$
$$\cos\angle DC'C=\frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}=\frac{S_3}{S_0}=\cos\mathrm{R}AB$$

Властивість 1.2.4. [Теорема Де-Гюа – *просторовий аналог теореми Піфагора***].** У прямокутному тетраедрі $DABC$ з основою ABC квадрат площі основи дорівнює сумі квадратів площ бічних граней, тобто:

$$S_{ABC}^2=S_{ADB}^2+S_{BDC}^2+S_{CDA}^2 \quad \text{або ж} \quad S_0^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2. \qquad (1.2.7)$$

(Справедливість твердження є наслідком зі співвідношень (1.1.3), (1.1.5) або ж (1.2.6)).

Наслідок 1.2.2. Мають місце наступні тригонометричні співвідношення

$$\cos^2\mathrm{R}BC+\cos^2\mathrm{R}AC+\cos^2\mathrm{R}AB=1. \qquad (1.2.8)$$
$$\sin^2\mathrm{R}BC+\sin^2\mathrm{R}AC+\sin^2\mathrm{R}AB=2. \qquad (1.2.8^*)$$

Зауваження 1.2.1. Твердження, що є оберненим до теореми Де-Гюа, <u>не є ознакою</u> прямокутного тетраедра. В роботі [10, С. 363–364] І.А. Кушніром наведено приклад тетраедра (з рівними двогранними кутами при основі), який не є прямокутним, але у якому квадрат площі однієї з граней дорівнює сумі квадратів площ трьох інших граней.

Властивість 1.2.5. У прямокутному тетраедрі $DABC$ з основою ABC квадрат площі (кожної) бічної грані дорівнює добутку площі її проекції (на площину основи) та площі його основи. Тобто:

$$S_{BDC}^2=S_{BHC}\cdot S_{ABC}\Leftrightarrow S_1^2=S_1'\cdot S_0,$$
$$S_{CDA}^2=S_{CHA}\cdot S_{ABC}\Leftrightarrow S_2^2=S_2'\cdot S_0, \qquad (1.2.9)$$
$$S_{ADB}^2=S_{AHB}\cdot S_{ABC}\Leftrightarrow S_3^2=S_3'\cdot S_0$$

(Справедливість твердження є наслідком зі співвідношень (1.1.3), (1.1.5) та (1.2.5)).

Властивість 1.2.6. У прямокутному тетраедрі $DABC$ з основою ABC:

1) вершина D, точка M перетину медіан грані ABC та центр (O') описаної навколо нього сфери належать одній прямій;

2) центроїд належить прямій MO' [10, С. 372];

3) точка M є внутрішньою точкою відрізка DO' та ділить його на відрізки, довжини яких перебувають у відношенні 2:1, а саме $DM:MO' = 2:1$; тобто, центр O' описаної навколо прямокутного тетраедра сфери є точкою, зовнішньою відносно нього;

4) радіус R описаної навколо нього сфери можна обчислити за формулою [5, С. 132]

$$R = 0{,}5\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,. \tag{1.2.10}$$

Наслідок 1.2.3. Довжину медіани DM (відрізка, який сполучає вершину D з центроїдом M протилежної грані) прямокутного тетраедра $DABC$ з основою ABC можна знайти за формулою

$$g_0 = DM = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2}{3}R\,. \tag{1.2.11}$$

Властивість 1.2.7. У прямокутному тетраедрі довжина (кожної) бімедіани дорівнює довжині радіуса описаної навколо нього сфери.

Властивість 1.2.8. Радіус r вписаної у прямокутний тетраедр сфери / кулі можна знайти за формулою

$$r = \frac{\frac{1}{2}abc}{S_1 + S_2 + S_3 + S_0} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 - S_0}{a + b + c}\,. \tag{1.2.12}$$

Звідки, з урахуванням співвідношень (1.1.3) – (1.1.6*), маємо, що

$$\frac{1}{r} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_0}{\frac{1}{2}abc} = \frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\frac{1}{2}abc} =$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{h}\,. \tag{1.2.12*}$$

Властивість 1.2.9. У прямокутному тетраедрі сума квадратів площ перерізів, проведених через бічні ребра та його центроїд, дорівнює половині квадрата площі його основи (грані-гіпотенузи).

Властивість 1.2.10. У прямокутному тетраедрі сума квадратів площ перерізів, проведених через ребра основи (грані-гіпотенузи) та його центроїд, дорівнює квадрату площі його основи (грані-гіпотенузи).

1.3. Нерівності між елементами довільного та прямокутного тетраедра.

Відомо (напр., [1, С. 145], [8, С. 132], [9, С. 41, 43], [10, С. 404, 405, 409]), що для довільного тетраедра справджуються наступні нерівності:

$$aa_1 < bb_1 + cc_1\,, \qquad bb_1 < aa_1 + cc_1\,, \qquad cc_1 < aa_1 + bb_1 \tag{1.3.1}$$

$$a + a_1 < b + b_1 + c + c_1\,, \quad b + b_1 < a + a_1 + c + c_1\,, \quad c + c_1 < a + a_1 + b + b_1 \tag{1.3.2}$$

ISSN 24132667 (Print), ISSN 24153079 (Online)

$$a+b+c>\frac{a_1+b_1+c_1}{2},$$
$$a+b_1+c_1>\frac{b+c+a_1}{2},\ b+a_1+c_1>\frac{a+c+b_1}{2},\qquad c+b_1+c_1>\frac{a+b+c_1}{2} \tag{1.3.3}$$

$$a+a_1+b+b_1+c+c_1\le 4\sqrt{6}R \tag{1.3.4}$$

$$h_1+h_2+h_3+h_4\ge 16r,\qquad h_1h_2h_3h_4\ge 256r^4 \tag{1.3.5}$$

(h_1,h_2,h_3,h_4 – довжини висот тетраедра)

$$R\ge 3r,\qquad 2R\ge 3h \tag{1.3.6}$$

$$g_0<\frac{1}{3}(a+b+c),$$
$$g_1<\frac{1}{3}(a+t_2+t_3),\qquad g_2<\frac{1}{3}(t_1+b+t_3),\qquad g_3<\frac{1}{3}(t_1+t_2+c) \tag{1.3.7}$$

$$16r\le g_0+g_1+g_2+g_3\le\frac{16}{3}R \tag{1.3.8}$$

$$S_0<S_1+S_2+S_3,$$
$$S_1<S_0+S_2+S_3,\qquad S_2<S_1+S_0+S_3,\qquad S_3<S_1+S_2+S_0 \tag{1.3.9}$$

$$4\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_0^2\right)\le(aa_1)^2+(bb_1)^2+(cc_1)^2 \tag{1.3.10}$$

$$6\sqrt[3]{\sqrt{3}V^2}\le S_1+S_2+S_3+S_0\le\frac{8\sqrt{3}}{3}R^2 \tag{1.3.11}$$

$$V\le\frac{1}{9}(S_1+S_2+S_3+S_0)R\le\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3 \tag{1.3.12}$$

$$V\ge\frac{1}{3}\delta_1\delta_2\delta_3,\qquad V\le\frac{1}{6}\sqrt{aa_1bb_1cc_1},\qquad V\le\frac{1}{3}\sqrt[3]{S_1S_2S_3h_1h_2h_3} \tag{1.3.13}$$

$$r<\frac{a\cdot a_1}{2(a+a_1)},\qquad r<\frac{b\cdot b_1}{2(b+b_1)},\qquad r<\frac{c\cdot c_1}{2(c+c_1)} \tag{1.3.14}$$

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2<4R^2+a^2+b^2+c^2,\quad a_1^2+b^2+c^2<4R^2+a^2+b_1^2+c_1^2,$$
$$a^2+b_1^2+c^2<4R^2+a_1^2+b^2+c_1^2,\quad a^2+b^2+c_1^2<4R^2+a_1^2+b_1^2+c^2 \tag{1.3.15}$$

$$d_1<\frac{c+c_1}{2},\ d_2<\frac{a+a_1}{2},\ d_3<\frac{b+b_1}{2},\ d_1+d_2+d_3<\frac{a+b+c+a_2+b_1+c_1}{2} \tag{1.3.16}$$

$$aa_1+bb_1+cc_1<2(ab+bc+ca),\ aa_1+bb_1+cc_1<2(ab_1+b_1c_1+c_1a),$$
$$aa_1+bb_1+cc_1<2(a_1b+bc_1+c_1a_1),\ aa_1+bb_1+cc_1<2(a_1b_1+b_1c+ca_1) \tag{1.3.17}$$

Для ***прямокутного*** тетраедра – мають місце (напр., [8, С. 115–116], [9, С. 25–26, 41], [10, С. 370, 403-404, 407]) наступні нерівності:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}h^2 \le S_0 < S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \le S_0\sqrt{3} \quad (1.3.18)$$

$$\frac{9}{2}h^2 \le S_0\sqrt{3} \le 2R^2 \quad (1.3.19)$$

$$\frac{1}{h} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{\sqrt{3}}{h} \quad (1.3.20)$$

$$S_1 < S_0,\ S_2 < S_0,\ S_3 < S_0 \quad (1.3.21)$$

$$\mathrm{tg}\,\mathrm{R}BC + \mathrm{tg}\,\mathrm{R}CA + \mathrm{tg}\,\mathrm{R}AB \ge 3\sqrt{2} \quad (1.3.22)$$

$$2r < h \le \left(1+\sqrt{3}\right)r \quad (1.3.23)$$

$$S_1 + S_2 + S_3 \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{36V^2} \quad (1.3.24)$$

$$V \ge \frac{\sqrt{3}}{2}h^3 \quad (1.3.25)$$

$$S_1 + S_2 + S_3 \ge \frac{9}{2}h^2 \quad (1.3.25^*)$$

$$S_0^3 > S_1^3 + S_2^3 + S_3^3 \quad (1.3.26)$$

$$\frac{R}{r} \ge \frac{3\sqrt{3}+3}{2} \quad (1.3.27)$$

Слід відзначити, що у нерівностях (1.4.13) – (1.4.20) знак рівності (досягається) має місце лише у випадку, коли $a = b = c$.

2. Основна частина

Нехай у тетраедрі $DABC$ точка O' є центром описаної кулі, R – її радіус, точка O – центр кола, описаного навколо основи ABC, точка I_0 – центр вписаного у $\mathrm{V}ABC$ кола, $R_{осн}$ і $r_{осн}$ – радіуси описаного та вписаного кіл $\mathrm{V}ABC$. Тоді, як відомо (напр., [10, С 419]), має місце (***формула Ейлера в просторі***) рівність

$$O'I_0{}^2 = R^2 - 2R_{осн}r_{осн}. \quad (2.1)$$

Також добре відомо (напр., Шаригін І.Ф. *Задачі з геометрії (стереометрія)*, 1984 р.), що якщо точки O', H^*, G є відповідно центром описаної сфери, ортоцентром та центроїдом ортоцентричного тетраедра, а R та l – довжини радіуса описаної кулі та середньої його лінії (відстань між серединами мимобіжних ребер), то:

1) O', G та H^* належать одній прямій (***прямій Ейлера ортоцентричного тетраедра***); причому G – середина відрізка $O'H^*$;

2) виконується співвідношення $\left|\overrightarrow{O'H^*}\right|^2 = 4R^2 - 3l^2$;

крім того, в ортоцентричному тетраедрі:

3) центри тяжіння і ортоцентри його граней та точки, які ділять висоти тетраедра у відношенні 2:1 (рухаючись від вершини), належать одній сфері («сфера 12 точок»);

4) якщо Q – центр тяжіння певної грані, а K – точка перетину променя H^*Q з описаною сферою, то справджується відношення $H^*Q : QK = 1:2$;

5) якщо T – ортоцентр певної грані, а L – точка перетину променя TG з описаною сферою, то справджується відношення $TG : GL = 1:3$.

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079142024311285

ISSN 24132667 (Print), ISSN 24153079 (Online)

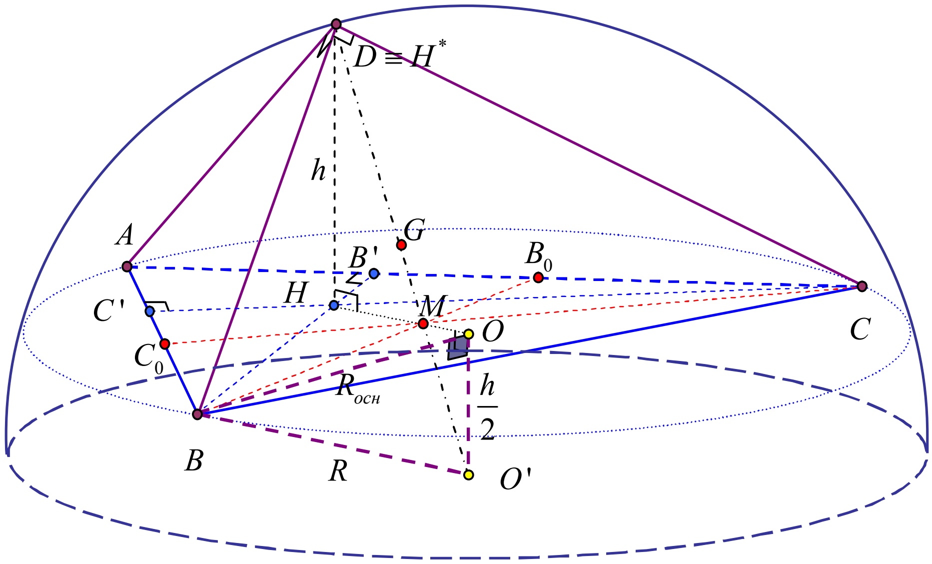

Рис. 2: до твердження 2.1 та твердження 2.2

Твердження 2.1. (Наслідок з теореми про пряму Ейлера для прямокутного тетраедра, [10, С. 372-373]). Для прямокутного тетраедра $DABC$ з основою ABC має місце рівність

$$R^2 = R_{осн}^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Leftrightarrow d^2 = d_{осн}^2 + h^2, \qquad (2.2)$$

де: R, $d = 2R$ – радіус / діаметр описаної навколо нього сфери; $R_{осн}$, $d_{осн} = 2R_{осн}$ – радіус / діаметр описаного навколо грані ABC кола; $h = DH$ – висота тетраедра, що проведена до його основи.

Наслідок 2.1. Для прямокутного тетраедра $DABC$ з основою ABC має місце рівність

$$O'I_0^2 = R_{осн}^2 - 2R_{осн}r_{осн} + 0,25 \cdot h^2. \qquad (2.3)$$

Твердження 2.2. Нехай O' – центр описаної сфери, а A_0, B_0, C_0 – середини ребер BC, CA та AB прямокутного тетраедра $DABC$ з основою ABC. Тоді:

1) $O'A_0 \parallel AD$, $O'B_0 \parallel BD$, $O'C_0 \parallel CD$;

2) $O'A_0 = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$, $O'B_0 = \frac{1}{2}BD = \frac{b}{2}$, $O'C_0 = \frac{1}{2}CD = \frac{c}{2}$.

Подальший виклад матеріалу буде присвячено систематзації метричних співвідношень у прямокутному тетраедрі, зокрема явним формулам для взначення основних елементів прямокутного тетраедра за трьома однотипними його елементами. Слід відзначити, що метою викладу не є саме «кінцеві формули». Навпаки – вони повинні бути результатом відповідних досліджень та стати основою для відповідних наслідків і застосувань.

Але спочатку наведемо нижче загальновідомі (в математичній та методичній літературі) формули для визначення/знаходження основних елементів прямокутного тетраедра за відомими довжинами a, b і c його бічних ребер.

2.1. Формули для знаходження основних елементів прямокутного тетраедра за відомими довжинами його бічних ребер a, b, c:

$$S_1 = \frac{1}{2}bc, \qquad S_2 = \frac{1}{2}ac, \qquad S_3 = \frac{1}{2}ab \tag{2.1.1}$$

$$S_{бп} = \frac{1}{2}\left(ab + bc + ca\right) \tag{2.1.1*}$$

$$S_0 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \tag{2.1.2}$$

$$S_{пп} = \frac{1}{2}\left(ab + bc + ca\right) + \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \tag{2.1.2*}$$

$$h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}, \quad \frac{1}{h} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \tag{2.1.3}$$

$$a_1 = \sqrt{b^2 + c^2}, \qquad b_1 = \sqrt{a^2 + c^2}, \qquad c_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{2.1.4}$$

$$t_1 = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \qquad t_2 = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad t_3 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.1.5}$$

$$n_1 = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}, \qquad n_2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}, \qquad n_3 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \tag{2.1.6}$$

$$m_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2 + c^2}, \quad m_2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2 + c^2}, \quad m_3 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2} \tag{2.1.7}$$

$$g_1 = \frac{1}{3}\sqrt{9a^2 + b^2 + c^2}, \quad g_2 = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + 9b^2 + c^2}, \quad g_3 = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + 9c^2} \tag{2.1.8}$$

$$q_1 = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad q_3 = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.1.9}$$

$$q_{11} = \frac{a^2\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \quad q_{21} = \frac{b^2\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \quad q_{31} = \frac{c^2\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \tag{2.1.10}$$

$$q_{12} = \frac{b^2c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \quad q_{22} = \frac{a^2c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \quad q_{32} = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \tag{2.1.11}$$

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079142024311285

$$r_1=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}+bc-ac-ab}{2(-a+b+c)}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{abc}{-a+b+c}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right),$$
$$r_2=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}-bc+ac-ab}{2(a-b+c)}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{abc}{a-b+c}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right), \quad (2.1.12)$$
$$r_3=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}-bc-ac+ab}{2(a+b-c)}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{abc}{a+b-c}\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right)$$

$$\frac{1}{r_1}=-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h},\qquad \frac{1}{r_2}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h},\qquad \frac{1}{r_3}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+\frac{1}{h} \quad (2.1.12^*)$$

$$r=\frac{-\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}+bc+ac+ab}{2(a+b+c)}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{abc}{a+b+c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right) \quad (2.1.13)$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} \quad (2.1.13^*)$$

$$r_0=\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}+bc+ac+ab}{2(a+b+c)}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{abc}{a+b+c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right) \quad (2.1.14)$$

$$\frac{1}{r_0}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} \quad (2.1.14^*)$$

$$S_1'=\frac{b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},$$
$$S_2'=\frac{a^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},\ S_3'=\frac{a^2b^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \quad (2.1.15)$$

$$\mathring{S}_1 = \frac{1}{2}bc - \frac{1}{4}\cdot\frac{abc}{a+b+c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right)(b+c),$$

$$\mathring{S}_2 = \frac{1}{2}ac - \frac{1}{4}\cdot\frac{abc}{a+b+c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right)(a+c), \qquad (2.1.16)$$

$$\mathring{S}_3 = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}\cdot\frac{abc}{a+b+c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right)(a+b)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \qquad (2.1.17)$$

$$\cos\angle CAB = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$\cos\angle ABC = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+a^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}},\ \cos\angle BCA = \frac{c^2}{\sqrt{c^2+a^2}\cdot\sqrt{c^2+b^2}} \qquad (2.1.18)$$

$$\cos \mathrm{R}BC = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},$$

$$\cos \mathrm{R}AC = \frac{ac}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},\ \cos \mathrm{R}AB = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \qquad (2.1.19)$$

$$R^2_{осн} = \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) - \frac{1}{4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)} \qquad (2.1.20)$$

$$r_{осн} = \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}} \qquad (2.1.21)$$

$$V = \frac{1}{6}abc \qquad (2.1.22)$$

$$V_0 = \frac{1}{3}S_0 r = \frac{1}{12}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\frac{abc}{a+b+c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right) \qquad (2.1.23)$$

$$V_1 = \frac{1}{3}S_1 r = \frac{1}{12}\cdot\frac{ab^2c^2}{a+b+c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right),$$

$$V_2 = \frac{1}{3}S_2 r = \frac{1}{12}\cdot\frac{a^2bc^2}{a+b+c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right), \qquad (2.1.24)$$

$$V_3 = \frac{1}{3}S_3 r = \frac{1}{12}\cdot\frac{a^2b^2c}{a+b+c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right)$$

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079142024311285

2.2. «Співвідношення-наслідки» для елементів прямокутного тетраедра.

Наступні співвідношення між елементами прямокутного тетраедра є безпосередніми наслідками зі співвідношень (2.1.1) – (2.1.24), в справедливості яких не важко переконатися шляхом звичайної перевірки.

$$\frac{S_1-S_2}{c}+\frac{S_2-S_3}{a}+\frac{S_3-S_1}{b}=0, \quad S_1\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+S_2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+S_3\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0 \quad (2.2.1)$$

$$\frac{S_1}{a}+\frac{S_2}{b}+\frac{S_3}{c}=\frac{S_0}{h}, \qquad S_1S_2S_3=\frac{a^2b^2c^2}{8} \quad (2.2.2)$$

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)=8R^2, \quad a^2+a_1^2=b^2+b_1^2=c^2+c_1^2=4R^2 \quad (2.2.3)$$

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=2R^2 \quad (2.2.4)$$

$$\frac{1}{t_1^2}+\frac{1}{t_2^2}+\frac{1}{t_3^2}=\frac{2}{h^2} \quad (2.2.5)$$

$$m_1^2+m_2^2+m_3^2=\tfrac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)=6R^2 \quad (2.2.6)$$

$$g_1^2+g_2^2+g_3^2+g_0^2=\frac{4}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{16}{3}R^2 \quad (2.2.7)$$

$$\cos \mathrm{R}BC=\frac{h}{a}=\frac{t_1}{q_1}, \qquad \cos \mathrm{R}AC=\frac{h}{b}=\frac{t_2}{q_2}, \qquad \cos \mathrm{R}AB=\frac{h}{c}=\frac{t_3}{q_3} \quad (2.2.8)$$

$$h^2=q_{11}\cdot q_{12}, \qquad h^2=q_{21}\cdot q_{22}, \qquad h^2=q_{31}\cdot q_{32} \quad (2.2.9)$$

$$h=\sqrt{\frac{\left(a_1^2+b_1^2-c_1^2\right)\left(a_1^2-b_1^2+c_1^2\right)\left(-a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)}{2\left(a_1+b_1+c_1\right)\left(a_1+b_1-c_1\right)\left(a_1-b_1+c_1\right)\left(-a_1+b_1+c_1\right)}} \quad (2.2.10)$$

$$S_1^{'}S_2^{'}S_3^{'}=\frac{abc}{8}\cdot h^3 \quad (2.2.11)$$

$$\sqrt{S_1^{'}S_2^{'}+S_1^{'}S_3^{'}+S_2^{'}S_3^{'}}=2Rh, \qquad S_1^{'}S_2^{'}+S_1^{'}S_3^{'}+S_2^{'}S_3^{'}=4R^2h^2 \quad (2.2.12)$$

$$S_1=\sqrt{S_1^{'}\left(S_1^{'}+S_2^{'}+S_3^{'}\right)}, \quad S_2=\sqrt{S_2^{'}\left(S_1^{'}+S_2^{'}+S_3^{'}\right)}, \quad S_3=\sqrt{S_3^{'}\left(S_1^{'}+S_2^{'}+S_3^{'}\right)} \quad (2.2.13)$$

$$\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)-\left(S_1^{'2}+S_2^{'2}+S_3^{'2}\right)=8R^2h^2=S_0^2-S_1^{'2}-S_2^{'2}-S_3^{'2} \quad (2.2.14)$$

$$\left(\frac{2S_1^{'}}{bc}\right)^2+\left(\frac{2S_2^{'}}{ac}\right)^2+\left(\frac{2S_3^{'}}{ab}\right)^2=1 \quad (2.2.15)$$

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{h}, \qquad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}+\frac{2}{h} \quad (2.2.16)$$

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_1r_3}+\frac{1}{r_2r_2}}, \qquad \frac{1}{r_0}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{h} \quad (2.2.17)$$

$$r_0-r=\frac{2S}{a+b+c}, \qquad \frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}=\frac{2}{h}, \qquad \frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}=\frac{2\left(S_1+S_2+S_3\right)}{3V} \quad (2.2.18)$$

$$rr_0 = \frac{3V}{a+b+c}, \qquad \frac{r_0}{r} = \frac{S_1+S_2+S_3+S}{S_1+S_2+S_3-S} \tag{2.2.19}$$

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_0} = 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{h}\right) = \frac{2}{r} \tag{2.2.20}$$

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{S}_1 = \frac{1}{2}bc - \frac{1}{2}r\left(b+c\right) = S_1\left(\frac{V_1}{V}+\frac{V_0}{V}\right) = \frac{3}{a}\left(V_1+V_0\right), \\ \overset{\circ}{S}_2 = \frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}r\left(a+c\right) = S_2\left(\frac{V_2}{V}+\frac{V_0}{V}\right) = \frac{3}{b}\left(V_2+V_0\right), \\ \overset{\circ}{S}_3 = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}r\left(a+b\right) = S_3\left(\frac{V_3}{V}+\frac{V_0}{V}\right) = \frac{3}{c}\left(V_3+V_0\right)\end{gathered} \tag{2.2.21}$$

$$V = V_0+V_1+V_2+V_3, \qquad V_1^2+V_2^2+V_3^2 = V_0^2, \qquad \frac{V_1^2}{a^2}+\frac{V_2^2}{b^2}+\frac{V_3^2}{c^2} = \frac{V^2}{h^2} \tag{2.2.22}$$

$$V = \frac{1}{3}S_0h = \frac{1}{3}aS_1 = \frac{1}{3}bS_2 = \frac{1}{3}cS_3, \qquad V = \frac{1}{6}\frac{S_0^3h^3}{S_1S_2S_3} \tag{2.2.23}$$

$$V = \frac{2\left(S_1S_2+S_1S_3+S_2S_3\right)}{3\left(a+b+c\right)} = \frac{\left(S_1+S_2+S_3-S_0\right)\cdot\left(S_1+S_2+S_3+S_0\right)}{3\left(a+b+c\right)} \tag{2.2.24}$$

$$V = \frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3} \tag{2.2.25}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt[4]{S_1'S_2'S_3'\cdot\left(S_1'+S_2'+S_3'\right)^3}, \qquad V = \frac{4S_1'S_2'S_3'}{3h^3} \tag{2.2.26}$$

$$V = \frac{2R}{3\sqrt{\dfrac{1}{S_1^2}+\dfrac{1}{S_2^2}+\dfrac{1}{S_3^2}}} \tag{2.2.27}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{24}\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2-c_1^2\right)\left(a_1^2-b_1^2+c_1^2\right)\left(-a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)} \tag{2.2.28}$$

$$V = \frac{1}{3}\left(a+b+c\right)rr_0, \qquad V = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right)\left(S_1+S_2+S_3\right) \tag{2.2.29}$$

$$\frac{3V}{2} = \frac{r}{2}\left(S_1+S_2+S_3+S_0\right) = \frac{S_1+S_2+S_3+S_0}{\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}+\dfrac{1}{r_0}} = \frac{\left(S_1+S_2+S_3+S_0\right)r_1r_2r_3r_0}{r_1r_2r_3+r_1r_2r_0+r_1r_0r_3+r_0r_2r_3} \tag{2.2.30}$$

$$\begin{gathered}81V^4 = 2r_1r_2r_3r_0\left(S_0-S_1+S_2+S_3\right)\left(S_0+S_1-S_2+S_3\right)\times \\ \times\left(S_0+S_1+S_2-S_3\right)\left(-S_0+S_1+S_2+S_3\right)\end{gathered} \tag{2.2.31}$$

$$V = \frac{S_1}{\overset{\circ}{S}_1}\left(V_1+V_0\right) = \frac{S_2}{\overset{\circ}{S}_2}\left(V_2+V_0\right) = \frac{S_3}{\overset{\circ}{S}_3}\left(V_3+V_0\right) \tag{2.2.32}$$

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079142024311285

2.3. Формули для знаходження довжин бічних ребер a, b, c за відомими «однотипними» елементами прямокутного тетраедра.

Використовуючи співвідношення (2.1.1), (2.1.4) – (2.1.9), (2.1.12*), (2.1.15), (2.1.24) шляхом розв'язання відповідної системи рівнянь не складно одержати наступні формули для знаходження довжин бічних ребер прямокутного тетраедра за найбільш поширеними його елементами:

$$a = \sqrt{\frac{2S_2S_3}{S_1}}, \qquad b = \sqrt{\frac{2S_1S_3}{S_2}}, \qquad c = \sqrt{\frac{2S_1S_2}{S_3}} \tag{2.3.1}$$

$$a = \sqrt{2\sqrt{\frac{S_2'S_3'}{S_1'}}\sqrt{S_1' + S_2' + S_3'}},$$

$$b = \sqrt{2\sqrt{\frac{S_1'S_3'}{S_2'}}\sqrt{S_1' + S_2' + S_3'}}, \; c = \sqrt{2\sqrt{\frac{S_1'S_2'}{S_3'}}\sqrt{S_1' + S_2' + S_3'}} \tag{2.3.2}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_2^2} + \frac{1}{t_3^2} - \frac{1}{t_1^2}\right)}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} + \frac{1}{t_3^2}\right)}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_3^2}\right)}} \tag{2.3.3}$$

$$a = \sqrt{2\left(n_2^2 + n_3^2 - n_1^2\right)}, \quad b = \sqrt{2\left(n_1^2 - n_2^2 + n_3^2\right)}, \quad c = \sqrt{2\left(n_1^2 + n_2^2 - n_3^2\right)} \tag{2.3.4}$$

$$a = \frac{\sqrt{10m_1^2 - 2m_2^2 - 2m_3^2}}{3},$$

$$b = \frac{\sqrt{10m_2^2 - 2m_1^2 - 2m_3^2}}{3}, \; c = \frac{\sqrt{10m_3^2 - 2m_1^2 - 2m_2^2}}{3} \tag{2.3.5}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{10g_1^2 - g_2^2 - g_3^2},$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{10g_2^2 - g_1^2 - g_3^2}, \; c = \frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{10g_3^2 - g_1^2 - g_2^2} \tag{2.3.6}$$

$$a = \sqrt{\frac{-a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{2}}, \qquad b = \sqrt{\frac{a_1^2 - b_1^2 + c_1^2}{2}}, \qquad c = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2}{2}} \tag{2.3.7}$$

$$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_1r_3} + \frac{1}{r_2r_2}} - \frac{1}{r_1}\right),$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_1r_3} + \frac{1}{r_2r_2}} - \frac{1}{r_2}\right), \; c = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_1r_3} + \frac{1}{r_2r_2}} - \frac{1}{r_3}\right) \tag{2.3.8}$$

$$a^3 = \frac{6V_2V_3}{V_1^2}\left(V_1 + V_2 + V_3 + \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}\right), \tag{2.3.9}$$

$$b^3 = \frac{6V_1V_3}{V_2^2}\left(V_1 + V_2 + V_3 + \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}\right),$$

$$c^3 = \frac{6V_1V_2}{V_3^2}\left(V_1 + V_2 + V_3 + \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}\right)$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\Delta}\sqrt{\frac{1}{q_2^2} + \frac{1}{q_3^2} - \frac{1}{q_1^2}},\ b = \frac{\sqrt{2}}{\Delta}\sqrt{\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_3^2} - \frac{1}{q_2^2}},\ c = \frac{\sqrt{2}}{\Delta}\sqrt{\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2} - \frac{1}{q_3^2}},\tag{2.3.10}$$

де $\Delta = \sqrt{\left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}\right)\left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3}\right)\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}\right)\left(-\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}\right)}$

Зауваження 2.3.1. Очевидно, що два прямокутні тетраедри є (власне/невласне) рівними тоді і лише тоді, коли рівними є довжини (відповідних) бічних ребер. Безпосереднім наслідком зі співвідношення (2.3.7) є наступна маловідома ознака рівності прямокутних тетраедрів, а саме:

«***Два прямокутні тетраедри є (власне/невласне) рівними тоді і лише тоді, коли рівними є їх основи (грані-гіпотенузи)***».

Більше того, наслідками зі співвідношень (2.3.1) – (2.3.10) є відповідні ознаки рівності прямокутних тетраедрів, бо відповідні бічні ребра визначаються однозначно.

2.4. Формули для знаходження основних елементів прямокутного тетраедра за відомими площами бічних граней S_1, S_2, S_3.

Використовуючи співвідношення (2.3.1) та (2.1.1) – (2.1.24) не важко встановити явні формули для знаходження основних елементів прямокутного тетраедра за відомими площами бічних граней:

$$S_{бп} = S_1 + S_2 + S_3 \tag{2.4.1}$$

$$S_0 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \tag{2.4.2}$$

$$S_{пп} = S_1 + S_2 + S_3 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \tag{2.4.2*}$$

$$h = \sqrt{\frac{2S_1S_2S_3}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}},\quad \frac{1}{h} = \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{2S_1S_2S_3}} = \sqrt{\frac{S_1}{2S_2S_3} + \frac{S_2}{2S_1S_3} + \frac{S_3}{2S_1S_2}} \tag{2.4.3}$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{2S_1}{S_2S_3}}\sqrt{S_2^2 + S_3^2},\qquad b_1 = \sqrt{\frac{2S_2}{S_1S_3}}\sqrt{S_1^2 + S_3^2},\qquad c_1 = \sqrt{\frac{2S_3}{S_1S_2}}\sqrt{S_1^2 + S_2^2} \tag{2.4.4}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2S_1S_2S_3}{S_2^2 + S_3^2}},\qquad t_2 = \sqrt{\frac{2S_1S_2S_3}{S_1^2 + S_3^2}},\qquad t_3 = \sqrt{\frac{2S_1S_2S_3}{S_1^2 + S_2^2}} \tag{2.4.5}$$

$$n_1 = \sqrt{\frac{S_1}{2S_2S_3}}\sqrt{S_2^2 + S_3^2},\quad n_2 = \sqrt{\frac{S_2}{2S_1S_3}}\sqrt{S_1^2 + S_3^2},\quad n_3 = \sqrt{\frac{S_3}{2S_1S_2}}\sqrt{S_1^2 + S_2^2} \tag{2.4.6}$$

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079142024311285

$$m_1=\sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{2}}\sqrt{\frac{4}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}+\frac{1}{S_3^2}},$$
$$m_2=\sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{2}}\sqrt{\frac{1}{S_1^2}+\frac{4}{S_2^2}+\frac{1}{S_3^2}},\ m_3=\sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{2}}\sqrt{\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}+\frac{4}{S_3^2}} \tag{2.4.7}$$

$$g_1=\frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}\sqrt{\frac{9}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}+\frac{1}{S_3^2}},$$
$$g_2=\frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}\sqrt{\frac{1}{S_1^2}+\frac{9}{S_2^2}+\frac{1}{S_3^2}},\ g_3=\frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}\sqrt{\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}+\frac{9}{S_3^2}} \tag{2.4.8}$$

$$q_1=\frac{\sqrt{2S_2S_3}\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}{\sqrt{S_1}\sqrt{S_2^2+S_3^2}},$$
$$q_2=\frac{\sqrt{2S_1S_3}\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}{\sqrt{S_2}\sqrt{S_1^2+S_3^2}},\ q_3=\frac{\sqrt{2S_1S_2}\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}{\sqrt{S_3}\sqrt{S_1^2+S_2^2}} \tag{2.4.9}$$

$$q_{11}=\frac{\sqrt{2S_2S_3}\sqrt{S_2^2+S_3^2}}{\sqrt{S_1}\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}},$$
$$q_{21}=\frac{\sqrt{2S_1S_3}\sqrt{S_2^2+S_3^2}}{\sqrt{S_2}\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}},\ q_{31}=\frac{\sqrt{2S_1S_2}\sqrt{S_2^2+S_3^2}}{\sqrt{S_3}\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}} \tag{2.4.10}$$

$$q_{12}=\frac{\sqrt{2S_2S_3}S_1^2}{\sqrt{S_1}\sqrt{S_2^2+S_3^2}\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}},$$
$$q_{22}=\frac{\sqrt{2S_1S_3}S_2^2}{\sqrt{S_2}\sqrt{S_1^2+S_3^2}\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}},\ q_{32}=\frac{\sqrt{2S_1S_2}S_3^2}{\sqrt{S_3}\sqrt{S_1^2+S_2^2}\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}} \tag{2.4.11}$$

$$r_1=\frac{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}+S_1-S_2-S_3}{-\sqrt{\frac{2S_2S_3}{S_1}}+\sqrt{\frac{2S_1S_3}{S_2}}+\sqrt{\frac{2S_1S_2}{S_3}}},$$
$$r_2=\frac{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}-S_1+S_2-S_3}{+\sqrt{\frac{2S_2S_3}{S_1}}-\sqrt{\frac{2S_1S_3}{S_2}}+\sqrt{\frac{2S_1S_2}{S_3}}},\ r_3=\frac{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}-S_1-S_2+S_3}{+\sqrt{\frac{2S_2S_3}{S_1}}+\sqrt{\frac{2S_1S_3}{S_2}}-\sqrt{\frac{2S_1S_2}{S_3}}} \tag{2.4.12}$$

$$\frac{1}{r_1}=\frac{-S_1+S_2+S_3+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}{\sqrt{2S_1S_2S_3}},$$
$$\frac{1}{r_2}=\frac{+S_1-S_2+S_3+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}{\sqrt{2S_1S_2S_3}},\ \frac{1}{r_3}=\frac{+S_1+S_2-S_3+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}{\sqrt{2S_1S_2S_3}} \tag{2.4.12*}$$

$$r=\frac{S_1+S_2+S_3-\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}{\sqrt{\frac{2S_2S_3}{S_1}}+\sqrt{\frac{2S_1S_3}{S_2}}+\sqrt{\frac{2S_1S_2}{S_3}}}=\frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{S_1+S_2+S_3+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}} \qquad (2.4.13)$$

$$\frac{1}{r}=\frac{S_1+S_2+S_3+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}{\sqrt{2S_1S_2S_3}} \qquad (2.4.13^*)$$

$$r_0=\frac{S_1+S_2+S_3+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}{\sqrt{\frac{2S_2S_3}{S_1}}+\sqrt{\frac{2S_1S_3}{S_2}}+\sqrt{\frac{2S_1S_2}{S_3}}}=\frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{S_1+S_2+S_3-\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}} \qquad (2.4.14)$$

$$\frac{1}{r_0}=\frac{S_1+S_2+S_3-\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}{\sqrt{2S_1S_2S_3}} \qquad (2.4.14^*)$$

$$S_1'=\frac{S_1^2}{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}},\qquad S_2'=\frac{S_2^2}{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}},\qquad S_3'=\frac{S_3^2}{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}} \qquad (2.4.15)$$

$$\mathring{S}_1=\frac{S_1\left(S_1+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}\right)}{S_1+S_2+S_3+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}},$$

$$\mathring{S}_2=\frac{S_2\left(S_2+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}\right)}{S_1+S_2+S_3+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}, \qquad (2.4.16)$$

$$\mathring{S}_3=\frac{S_3\left(S_3+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}\right)}{S_1+S_2+S_3+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2S_2S_3}{S_1}+\frac{2S_1S_3}{S_2}+\frac{2S_1S_2}{S_3}}=\sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{2}}\sqrt{\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}+\frac{1}{S_3^2}} \qquad (2.4.17)$$

$$\cos\angle CAB=\frac{S_2S_3}{\sqrt{S_1^2+S_2^2}\cdot\sqrt{S_1^2+S_3^2}},$$

$$\cos\angle ABC=\frac{S_1S_3}{\sqrt{S_2^2+S_1^2}\cdot\sqrt{S_2^2+S_3^2}},\ \cos\angle BCA=\frac{S_1S_2}{\sqrt{S_3^2+S_1^2}\cdot\sqrt{S_3^2+S_2^2}} \qquad (2.4.18)$$

$$\cos \mathrm{R}BC=\frac{S_1}{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}},$$

$$\cos \mathrm{R}AC=\frac{S_2}{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}},\ \cos \mathrm{R}AB=\frac{S_3}{\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}} \qquad (2.4.19)$$

DOI: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079142024311285

$$R^2_{осн} = \frac{1}{2} S_1 S_2 S_3 \left(\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{S_2^2} + \frac{1}{S_3^2} - \frac{1}{4\left(S_1^2 S_2^2 + S_1^2 S_3^2 + S_2^2 S_3^2\right)} \right) \qquad (2.4.20)$$

$$r_{осн} = \frac{2\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{\sqrt{2S_1S_2S_3}\left(\sqrt{\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{S_2^2}} + \sqrt{\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{S_3^2}} + \sqrt{\frac{1}{S_2^2} + \frac{1}{S_3^2}} \right)} \qquad (2.4.21)$$

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{2S_1S_2S_3} \qquad (2.4.22)$$

$$V_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \cdot \sqrt{2S_1S_2S_3}}{S_1 + S_2 + S_3 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}} \qquad (2.4.23)$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_1 \cdot \sqrt{2S_1S_2S_3}}{S_1 + S_2 + S_3 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}},$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_2 \cdot \sqrt{2S_1S_2S_3}}{S_1 + S_2 + S_3 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}, \qquad (2.4.24)$$

$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_3 \cdot \sqrt{2S_1S_2S_3}}{S_1 + S_2 + S_3 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}$$

В аналогічний спосіб, використовуючи співвідношення (2.3.2) – (2.3.10) та (2.1.1) – (2.1.24) не важко встановити явні формули (у вигляді ще 9 умовних таблиць) для знаходження основних елементів прямокутного тетраедра за трьома відомими «однотипними» елементами: $\{S_1', S_2', S_3'\}$, $\{t_1, t_2, t_3\}$, $\{n_1, n_2, n_3\}$, $\{m_1, m_2, m_3\}$, $\{g_1, g_2, g_3\}$, $\{a_1, b_1, c_1\}$, $\{r_1, r_2, r_3\}$, $\{V_1, V_2, V_3\}$ та $\{q_1, q_2, q_3\}$ відповідно. Тобто, за допомогою 24 метричних співвідношень ((2.1.1)–(2.1.24)) в прямокутному тетраедрі, які дозволяють одержати в якості наслідків 10 співвідношень ((2.3.1)–(2.3.10)), є цілком досяжним одержання в явному вигляді 240 формул для знаходження основних елементів прямокутного тетраедра за трьома його «однотипними» елементами.

3. Наслідки та прикінцеві зауваження

З урахуванням співвідношень, які мають місце для трьох однотипних елементів та відповідного четвертого елемента прямокутного тетраедра (наприклад, співвідношення (2.2.3)–(2.2.7), (2.2.10), (2.2.13), (2.2.17), (2.2.22), (2.2.25), (2.2.28)), зазначену вище низку 240 задач можна поповнити значною кількістю принципово різних задач про знаходження невідомого третього елементу прямокутного тетраедра за 2 іншими однотипними його елементами та відповідним до них четвертим елементом.

Проте слід зауважити, що природнім чином постає питання щодо розв'язності задач про знаходження одного з однотипних за 2 іншими однотипними елементами та відповідним до них четвертим елементом.

Розв'язки представлених у статі 66 принципово різних задач про знаходження невідомого елементу прямокутного тетраедра дозволяють розв'язати доволі широке коло задач на знаходження невідомого елементу прямокутного тетраедра за трьома відомими його елементами, з яких принаймні два є однотипними лінійним.

Ідея пропонованого авторами підходу полягає у наступному:

1) спочатку (за необхідності) визначається невідомий третій елемент з числа однотипних за 2 відомими однотипними елементами та відповідним до них четвертим елементом;
2) за допомогою співвідношень (2.3.1) – (2.3.10) визначаються довжини бічних ребер прямокутного тетраедра;
3) потім за допомогою співвідношень (2.1.1) – (2.1.24) – невідомий елемент прямокутного тетраедра.

Автори мають своїм обов'язком також відзначити, що хоча пропонований підхід дозволяє звести до мінімуму кількість опорних задач та гарантовано розв'язувати зазначене вище (доволі широке) коло метричних задач на прямокутний тетраедр, проте він далеко не завжди є раціональним.

Слід також розуміти, що співвідношення (2.3.1) – (2.3.10) дають в явному вигляді ознаки рівності прямокутних тетраедрів, бо зводяться до ознаки їх рівності «за трьома бічними ребрами».

Висновки

На підставі аналізу теоретичного та дидактичного матеріалів широкого кола видань (присвячених вивченню тетраедрів), в представленій статті:

– зведено в систему більше 30 фактів (найбільш важливих на думку авторів тверджень і співвідношень) з геометрії тетраедра, більше 20 – з геометрії ортоцентричного та більше 20 фактів з геометрії прямокутного тетраедра;
– виокремлено 17 суттєво різних нерівностей для елементів довільного тетраедра та 10 суттєво різних нерівностей, які мають місце для прямокутного тетраедра.

Зміст наведених та зазначених вище 10 (так званих умовних) таблиць (з явними формулами для знаходження невідомго елементу прямокутного тетраедра за трьома однотипними його елементами) може значною мірою збагатити дидактичне забезпечення шкільних підручників принципово новими задачами; уможливити та спростити розробку однакових за складністю діагностичних матеріалів з теми; стати предметом групових та / або індивідуальних завдань для учнів, довгострокових завдань тощо.

Автори мають надію, що викладений матеріал буде цікавим вчителям і викладачам математики, стане корисним студентам відповідних спеціальностей і молодим вчителям математики при систематизації та узагальнені фактів геометрії тетраедра, метричних співвідношень між його елементами тощо.

На думку авторів цілком досяжною є подальша робота, пов'язана із одержанням явних формул для знаходження довжин бічних ребер прямокутного тетраедра за іншими трійками однотипних його елементів.

Література

1. Бевз Г.П. Геометрія трикутника і тетраедра. К. : Вежа, 2009. 240 с.
2. Геометрія : 11 кл. : підр. для загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень, профіл. рівень / Г.В. Апостолова; упорядкув. завдань: Ліпчевського Л.В. [та ін.]. К. : Генеза, 2011. 304 с.
3. Геометрія: (профіл. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. Київ : Генеза, 2019. 288 с.
4. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Х. : Гімназія, 2019. 204 с.
5. Геометрія : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф.. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзяк, Д.А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2019. 240 с.
6. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 208 с.
7. Гриценко Т.Ю., Кадубовський О.А. Про метричні співвідношення в прямокутному трикутнику та суміжні питання. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. **2023**. Вип. 13. С. 7–33.
8. Кушнір І. Трикутник і тетраедр у задачах. К. : Рад. шк., 1991. 208 с.
9. Кушнір І. Трикутна піраміда у задачах. К. : Либідь, 1994. 112 с.
10. Кушнір І. Тріумф шкільної геометрії. К. : Наш час, 2007. 432 с.

Diana S. Bondar, Oleksandr A. Kadubovskyi
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

On Metric Relations in a Rectangular Tetrahedron and Related Issues

The presented article is dedicated to the systematization of facts about the geometry of the tetrahedron, particularly the orthocentric and rectangular types, and to popularizing the properties of the rectangular tetrahedron. The article also highlights the author's approach to the possible introduction of the properties and metric relations of the rectangular tetrahedron into the school geometry curriculum through the careful selection of didactic material during the study of relevant topics in stereometry.

Keywords: *orthocentric tetrahedron, rectangular tetrahedron, properties, metric relations, criteria for equality, implementation*.