В.К. Сарієнко
В.В. Сарієнко

МАТЕМАТИКА

НЕВІД'ЄМНІ ЦІЛІ ЧИСЛА
ВЕЛИЧИНИ
РОЗШИРЕННЯ ПОНЯТТЯ ПРО ЧИСЛО

Навчальний посібник

Слов'янськ
2013

УДК 373.3.016:511-028.31(07)
ББК 22.1

С201

***САРІЄНКО В.К. Математика. (Невід'ємні цілі числа. Величини. Розширення поняття про число.)*:** Навчальний посібник/В.К.Сарієнко, В.В.Сарієнко. – Слов'янськ: 2013. – 162 с.

Рецензенти: ***Ковальчук В.Ю.*** *– доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики і методики математики (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка)*
Митник О.Я. *– доктор педагогічних наук, професор кафедри початкової освіти та методик природничо-математичних дисциплін (Київський університет імені Бориса Грінченка)*
Чиж О.Н. *– доктор педагогічних наук, професор кафедри дошкільної та початкової освіти (Луганський національний університет імені Тараса Шевченка)*

Навчальний посібник для студентів факультетів підготовки вчителів початкових класів педагогічних вищих навчальних закладів.

У посібнику викладені теоретичні і практичні основи теорії невід'ємних цілих чисел, розширення поняття про число, теоретичні відомості про величини. Матеріал подано відповідно до навчальної програми з математики для педагогічних вищих навчальних закладів спеціальності 6.010102 „Початкова освіта".

Матеріал посібника є теоретичним підґрунтям відомостей з математики, визначених освітньо-професійною програмою підготовки вчителя початкової школи і викладених у підручниках з математики для початкових класів.

Оволодіння викладеним у посібнику матеріалом забезпечує вчителю глибоке проникнення в сутність тих математичних понять і відношень, які складають зміст математичної освіти молодших школярів.

Авторству Сарієнка В.К. належать розділи: "Сутність кількісного натурального числа", "Подільність невід'ємних цілих чисел", "Множина цілих чисел", "Величини", "Множина раціональних чисел".

Авторству Сарієнка В.В. належать розділи: "Системи числення", "Десяткові дроби", "Дійсні числа".

Рекомендовано Вченою радою Державного вищого навчального закладу "Донбаський державний педагогічний університет" (протокол № 5 від 27грудня 2012 р.).

Передмова

Математика є наукова галузь, яка посідає одне з ключових місць у загальній системі наук. Зважаючи на це, вертикаль математичної освіти пронизує практично кожну професійну галузь. Потребу в певному обсязі математичних знань (від професійної складової до побутової) має практично кожна людина. Тому математика є однією з провідних і обов'язкових навчальних дисциплін протягом усього шкільного та професійного навчання.

Математика початкової школи закладає у свідомість людини основні первинні, найпростіші кількісні поняття і відношення, формує і розвиває логіку мислення, формує просторову уяву.

Завдяки високому рівню абстрактності кожне математичне поняття вимагає свого опису, твердження – пояснення, висновок – обґрунтування. Якщо ці вимоги не витримуються, то в людини виникають певні незрозумілості, через які математика сприймається як незрозуміла, важка дисципліна.

Початкова школа в системі математичної освіти посідає особливе місце. Особливість її полягає в тому, що в молодшому шкільному віці рівень абстрактного мислення ще досить не високий, тому обґрунтування математичних тверджень, опис понять часто важко піддається дитячому розумінню. Тут вихід із становища повністю лежить у сфері професійності і педагогічної майстерності вчителя. Тільки глибоке знання основ математичних понять і відношень, на яких ґрунтується математичний матеріал початкової школи дасть учителю ключ до доступного пояснення математичного матеріалу учням. Причому математичні знання вчителя повинні поширюватися значно далі, ніж необхідний обсяг для сьогодення. Адже у зв'язку з розвитком науково-технічного прогресу обсяг знань значно зростає, що знаходить свій відбиток і в шкільних програмах, зокрема й у програмах початкової школи.

Пропонований навчальний посібник написаний відповідно як до нинішніх вимог шкільних програм, так і на перспективу.

Однією з особливостей посібника є те, що представлений у ньому матеріал у деяких випадках поданий у спрощеному варіанті, адекватному до рівня пояснення понять і тверджень, які передбачаються програмою початкової школи.

Переважну більшість змісту математики початкової школи складає матеріал, який належить до розділів „Невід'ємні цілі числа" і „Розширення поняття про число", і майже стовідсотково він пронизаний знаннями, що стосуються поняття „Величина". Кожна задача обчислювального або вимірювального характеру розв'язується в полі поняття величини.

Поняття „число" і „величина" є основними, базовими поняттями курсу математики початкової школи. Це визначається їхнім винятковим значенням під час формування як найважливіших теоретичних закономірностей, так і практичних дій. Функціонування понять „величина" і „число" є основою розробок змісту більшості наявних сьогодні програм, курсів, підручників, посібників з математики початкової школи.

На жаль, аналіз навчального матеріалу, представленого в наявних підручниках, містить низку змістовних недоліків, через які в учнів часто формується хибне уявлення про величину. Саме цим визначається те, що значна кількість понять у темі „Величини" вводиться на демонстративному рівні, зміст не розкривається, визначення не формулюються.

Саме ці аргументи й визначили зміст посібника, що пропонується.

У першому розділі „Невід'ємні цілі числа" представлений матеріал, який містить у собі теоретичну базу поняття натурального числа, числа нуль і операцій над цими числами. Розглянуто два підходи: теоретико-множинний і аксіоматичний. Під час написання цього розділу було використано матеріали інших підручників і посібників, представлених у списку використаної літератури, зокрема [7], [8], [10], [19], [20] та інших.

На відміну від авторів деяких інших посібників ([8], [19]) при розгляді аксіоматичного поняття числа ми спиралися на аксіоматику Пеано, яка, на наш погляд, більш доступна розумінню завдяки логіці відображення числових відношень. Окрім цієї відмінності, у пропонованому посібнику, докладно представлений алгоритм дій (в загальному вигляді) для будь-яких систем числення; ознаки подільності розглядаються не тільки в традиційному наборі (2, 3, 4, 5, 9, 25, 50), а й представлений алгоритм визначення подільності на будь-яке просте число, зокрема, на 7, 11, 13, 17, 19 ... . Є й інші відмінності.

У розділі „Величини” ми спиралися на традиційне визначення величини як загальної властивості елементів певної множини за певних умов. Зазначимо, що в різних підручниках і посібниках це поняття і його властивості подані часто в полярних обсягах: або надто об’ємно й академічно, або доволі стисло. В одному випадку виклад перебільшує обсяг і складність знань, які відповідають потребам обґрунтування математичних відомостей курсу початкової школи, в інших його недостатньо. У поданому ж посібнику здійснений збалансований підхід.

Зміст і обсяг блоку „Розширення поняття про число” представлений також адекватно до потреб теоретичної бази знань учителя початкової школи. Програмою початкової школи передбачається лише загальне ознайомлення молодших школярів з поняттям звичайного дробу і найпростіших дій з цими дробами. Однак це зобов’язує укладачів освітньо-кваліфікаційної характеристики учителя початкової школи забезпечити належну підготовку майбутніх фахівців щодо набуття якісних і певною мірою фундаментальних знань з цього розділу. Тому в посібнику викладений математичний матеріал, який забезпечує студентам усвідомлення суті основ теорії розширення поняття про число.

Оскільки ж програма початкової школи не торкається теорії дійсних чисел, то в посібнику, як, власне кажучи, і в інших посібниках та підручниках цього рівня, розділ "Дійсні числа" подається в оглядовому плані, маючи на меті створення в свідомості учителя початкової школи цілісної картини побудови числових множин.

Зміст, обсяг і структура посібника визначені багаторічним вивченням досвіду викладання математики вчителями початкової школи, змістом навчальних підручників і посібників з математики, остаточним рівнем математичних знань учнями-випускниками початкової школи.

Посібник написано на основі джерел, зазначених у списку літератури, а також власного багаторічного досвіду викладання математики на факультеті підготовки вчителів початкових класів.

Посібник розрахований на студентів факультетів підготовки вчителів початкової школи вищих навчальних закладів 2 – 4 рівнів акредитації, методистів та вчителів початкових класів.

НЕВІД’ЄМНІ ЦІЛІ ЧИСЛА

Розділ І. Сутність кількісного натурального числа та арифметичних дій

1. Теоретико-множинна суть кількісного натурального числа

На сучасному етапі математика набула такої глибини розвитку, що стала універсальним інструментом для становлення та досліджень будь-якої науки. Завдяки цій універсальності вона зайняла особливе місце в системі наук. Її методи використовуються як у технічних областях, так і в суто гуманітарних. Тому її не можна віднести ні до гуманітарних, ні до природничих. Рівень абстрактності в математиці є таким високим, що нині вона розглядає не тільки кількісні відношення і просторові форми реального світу, а й будь-які уявні відношення і форми, які мають свої основи в реальному світі. Це надає можливість значно розширити поле математичних досліджень, вторгнутися в такі заповідні області як психіка, біоенергетика, які довго вважалися недоступними. Це стало наслідком високого рівня абстрагування від конкретного змісту об’єктів, що вивчаються. Але абсолютний відрив від змісту неможливий, бо без нього втрачається смисл самої математики. Високий рівень абстракції і конкретний зміст – це дві протилежності єдиного цілого, містком між якими виступає *модель.*

Математична модель – це наближений опис будь-якого класу явищ реального світу, виражений за допомогою математичної символіки [16, с.21]. Модель – це не саме явище, а його наближений образ, позбавлений низки властивостей цього явища. Наприклад, у фізиці в молекулярно-кінетичній теорії для розкриття властивостей та встановлення закономірностей поводження і взаємодії газів розглядається поняття ідеального газу. У реальності газоподібна речовина складається з дрібних часточок – молекул, між якими діють різні сили взаємодії. Розміри молекул дуже малі порівняно з відстанями між ними, тому й сили взаємодії між ними надто малі. Тому для спрощення міркувань та розрахунків прийнято об’ємом молекул та силами взаємодії між ними зневажати і вважати, що взаємодія між молекулами полягає лише у співударах, причому прийнято вважати, що при співударах енергія не витрачається. Завдяки введенням таких спрощень вивчення реального газу замінюється вивченням його наближеного образу – моделі під назвою ідеальний газ. Метод моделювання є дуже ефективним засобом дослідження, бо надає можливість розглядати певні властивості та відношення об'єкта відокремлено від самого об'єкта, узагальнювати ці властивості, поширюючи їх на інші однорідні об'єкти.

Математичні моделі побудовані на відволіканні від будь-яких властивостей об'єктів реального світу і зосереджують увагу лише на їхніх кількісних і порядкових відношеннях та просторових формах. А засобом утворення такої моделі стало *число*. Воно виконує роль однієї із загальних властивостей скінченної множини – її *чисельності.*

Розглядаючи множину будь-яких елементів, у ній можна виділити дві характеристичні властивості: якісну і кількісну. Якісна визначає, з яких елементів складається множина, кількісна – скільки елементів у множині. Кількісна властивість множини власне і є *чисельність.*

Виникнення чисел, як і всіх інших математичних понять, було результатом практичної діяльності людини. Уже на стародавніх етапах розвитку суспільства наявною була потреба в кількісній оцінці продуктів діяльності. Серед багатьох задач була і задача встановити, чи рівна кількість елементів у множинах якихось побутових об'єктів, а якщо ні, то в якій множині їх більше і на скільки більше. Наприклад, чи є приріст гурта худоби, або чи вистачить списів кожному воїну? На перших порах порівняння двох множин відбувалося на основі зіставлення елементів однієї множини з елементами іншої, тобто на основі встановлення взаємно однозначної відповідності між множинами. Якщо така відповідність була наявна, то і множини вважалися складеними з однакової кількості елементів. Якщо ж ні, то множина, в якій залишались елементи, мала більше елементів ніж інша. Цей спосіб не потребував переліку. Але його не завжди можна було використовувати. Наприклад, неможливо було таким зіставленням порівняти два табуни, визначити на відстані, у якому табуні більше коней. Тому для порівняння почали використовувати множини-посередники, наприклад, мішки з камінцями, або зарубки на палицях, і вже зіставлялися не самі об'єкти, а їхні множини-посередники.

З часом, унаслідок необхідності фіксувати ту чи іншу кількість об'єктів, виникла символіка у формі чисел, яка значно спростила порівняння. Відпала необхідність носити мішки з камінцями або палиці із зарубками. Унаслідок зіставлення символів кількості об'єктів виникла письмова нумерація, а разом з нею й усна. Числа стали універсальною множиною, яка дала змогу порівнювати будь-які множини незалежно від їхньої природи, місця розташування, сприйняття. Числення вийшло на абстрактний рівень. На цьому ґрунті і виникло поняття *числа*.

Виникнення поняття числа надало можливість вивчати кількісні відношення незалежно від об'єктів, які з ними зіставляються. Так з'явилася теоретична наука про числа, яку назвали "арифметика".

Оскільки з розвитком господарчої діяльності ускладнювалися й арифметичні розрахунки, виникла і потреба у розширенні множини чисел. Тому, щоб відрізнити від нових числових множин множину, за допомогою якої виконувалася лічба, їх стали називати *натуральними числами* (від слова *nature* – природа), тобто числами, за допомогою яких обчислювалася кількість об'єктів з навколишнього світу. Термін "натуральне число" вперше використав римський учений Боецій (475-524 рр. н.е.).

Кожна математична теорія вивчає множини з тими чи іншими властивостями елементів та відношеннями між ними. Коли ми розглядаємо кількісну властивість якоїсь скінченної множини, то, здебільшого, нам доводиться розв'язувати одну з двох задач:

1) встановити кількість елементів у заданій множині, або, іншими словами, дати кількісну оцінку множині;

2) встановити упорядкованість заданої множини.

Обидві ці задачі розв'язуються за допомогою операції *лічби*. Будь-яка лічба елементів заданої скінченної множини є встановлення взаємно однозначної відповідності між нею та частиною деякої стандартної множини, яка прийнята для фіксування елементів будь-якої множини.

Найменша кількість елементів, яку може мати непорожня множина, це один. Така множина називається *одноелементною*. Тому числовий ряд починається з числа 1.

Процес лічби (встановлення кількості) елементів деякої конкретної множини за допомогою чисел полягає в тому, що ми встановлюємо взаємно однозначну відповідність між елементами множини й елементами числового ряду, починаючи з одиниці. При цьому нас не цікавить, якому елементу яке число відповідає. Головне тут – яке число відповідає останньому елементу. Яке число – стільки й елементів, тобто *число* в цьому разі *є кількісною характеристикою скінченної множини.*

Якщо ж насамперед нас цікавить, у якому порядку розташовані елементи даної множини, то істотним є питання, якому елементу яке число відповідає. Природно, що останньому елементу буде відповідати таке ж число, як і в кількісній характеристиці множини. Наприклад, щоб визначити порядок елементів якоїсь множини з чотирьох елементів, ми говоримо: "перший", "другий", "третій", "четвертий". На цьому процес лічби закінчується, бо названі всі елементи. Підрахувавши елементи цієї множини, ми говоримо, що в ній чотири елементи, тобто отримуємо кількісну характеристику заданої множини. Але щоб її одержати, використовуються числові символи, які мають таке ж позначення, як і кількісні. У цьому моменті кількісна характеристика множини і порядковий номер останнього елементу множини збігаються. Число, що відповідає кількості елементів заданої скінченної множини, ще називається *чисельністю множини*.

Розглянемо поняття натурального числа як моделі переліку предметів.

Система модельної побудови тих чи інших понять передбачає іноді дуже складні структури. Вони представляють собою як одноступеневі, так і багатоступеневі конструкції. Одноступеневі моделі – це такі, які є безпосереднім спрощеним образом об’єкта, що вивчається. Це, наприклад, поняття математичного маятника. Воно відрізняється від реального маятника безпосередньо тим, що в ньому не враховується сила опору повітря, тертя в точці закріплення та інші фактори. Багатоступеневі моделі – це такі, які пов’язують об’єкт-прообраз з кінцевим образом за допомогою побудови системи моделей. Наприклад, щоб побудувати просторову модель тіла, треба спочатку побудувати площинні моделі його перерізу. Тобто одна модель ґрунтується на іншій. У цьому разі кожна нова модель-надбудова виступає наслідком попередньої зі своїми додатковими властивостями. Попередня ж модель має узагальнювальні властивості відносно неї і дає можливість побудувати клас моделей-надбудов.

Як же у цій системі виглядає теорія натуральних чисел, тобто що представляє собою *натуральне число як математична модель переліку предметів*?

Множини, між елементами яких можна встановити взаємно однозначну відповідність, називаються *рівнопотужними*. Відповідно до цього всі множини, які не перетинаються, поділяються на класи рівнопотужності, оскільки взаємно однозначна відповідність визначає розбиття множин на класи еквівалентності:

1°. $M \sim M$ – *рефлексивність;*

2°. $[M_1 \sim M_2] \Rightarrow [M_2 \sim M_1]$ – *симетричність;*

3°. $[M_1 \sim M_2 \wedge M_2 \sim M_3] \Rightarrow [M_1 \sim M_3]$ – *транзитивність.*

Нехай задана якась скінченна множина P, яка має потужність $p=n(P)$. Зберемо в один клас усі рівнопотужні множини, які мають потужність p. Тобто, якщо P – множина днів у тижні, то в один клас із нею попадуть всі многокутники, що мають сім вершин, усі слова, що складаються із семи букв, кольори райдуги та ін. До складу іншої множини K, не рівнопотужної з P, і яка має потужність k, зберемо всі рівнопотужні множини, що мають потужність k. Наприклад, якщо K – множина пальців на руці, то в один клас із нею попадуть кількість дільників числа 16, кількість робочих днів у тижні, кількість літер у слові “число” та інші, що мають потужність 5. І так далі. У результаті цього процесу всі скінченні множини будуть розподілені за класами рівнопотужності. Отже, будь-які дві множини одного класу будуть рівнопотужними, а будь-які дві множини різних класів – не рівнопотужними.

Загальною властивістю множин одного класу є те, що вони мають однакову потужність. Оскільки потужність кожного класу рівнопотужних множин різна, то вона позначається певним символом. Звідси випливає, що потужність рівнопотужних множин позначаються однаковими символами, а не рівнопотужних – різними. Потужність (кількісну характеристику) множин одного класу еквівалентності і називають *натуральним числом.* Наприклад, кількісна характеристика множин, рівнопотужних множині днів тижня, є натуральне число "сім", а кількісна характеристика множин, рівнопотужних множині пальців на руці є натуральне число "п'ять".

Отже, ***кількісне натуральне число – це кількісна характеристика класу скінченних рівнопотужних множин.***

Із цього означення випливає, що кожній скінченній множині P відповідає тільки одне натуральне число $p = n(P)$, але кожному натуральному числу p відповідають різні рівнопотужні множини одного класу еквівалентності. Тому числу "п'ять" буде відповідати і множина сторін п'ятикутника, і множина літер у слові "число", і множина пальців на руці і т.д.

Упорядковану множину натуральних чисел називають *натуральним рядом* або *рядом натуральних чисел.* Множину натуральних чисел позначають символом N.

Виконуючи підрахунок елементів заданої множини P, наприклад, днів у тижні, ми починаємо рахувати з одиниці і закінчуємо числом сім. Очевидно, що кількість днів з понеділка до п'ятниці не перевищує кількості днів від понеділка до суботи, а кількість днів від понеділка до суботи не перевищує кількості днів від понеділка до неділі. Із цього факту доцільно ввести поняття *відрізка натурального ряду.*

ОЗНАЧЕННЯ. ***Відрізком N_a натурального ряду називається множина натуральних чисел, що не перевищують натурального числа a****, тобто*

$$\boldsymbol{N_a} = \{x / x \in N, x \le a\}.$$

Введення поняття відрізка натурального ряду дає можливість уточнити поняття лічби елементів множини. У процесі лічби ми кожному елементу з множини ставимо у відповідність один елемент з відрізка натурального ряду.

ОЗНАЧЕННЯ. ***Лічбою елементів множини А називається встановлення взаємно-однозначної відповідності між елементами цієї множини і відрізком натурального ряду N_a*** [17, с.125].

Найбільш істотним питанням у лічбі є встановлення писемної та усної нумерації. З теоретико-множинних позицій це виглядає так: кожна множина має певну кількість елементів, тобто чисельність. Але для її фіксації треба ввести певні позначення і цим позначенням дати назву. Оскільки це явище цілком умовне, то в процесі життєвої практики в різних народів виникла своя символіка в позначенні. Наприклад, в арабській системі лічби чисельність множини, що має один елемент {|} позначена символом 1, чисельність множини, що має два елементи – {||} – символом 2, три елементи – {|||} – 3, чотири елементи – {||||} – 4, п’ять елементів – {|||||} – 5 і т.д. Відповідно цим символам була дана і назва “один”, “два”, “три”, “чотири”, “п’ять” і т.д. У системі дій ця нумерація виглядає так. Наприклад, 2+3. Це значить, що до елементів множини {||} треба приєднати елементи множини {|||}. Одержимо нову множину {|||||}. У символічній чисельній формі це буде виглядати як 2 + 3 (приєднання будемо позначати символом +. Але чисельність множини {|||||} позначається символом “5”, значить 2 + 3 = 5.

Аналогічно в плані нумерації виглядає і дія віднімання.

Число “нуль”

Розглядаючи множини, ми говорили, що вони можуть бути порожніми або непорожніми. Узагальнюючи поняття рівносильності множин, вважаємо, що всі порожні множини рівносильні між собою, тобто утворюють особливий клас, клас порожніх множин, тобто множин, що не мають елементів.

Розгляд кількісної характеристики непорожніх скінченних множин привів нас до поняття натурального числа. Очевидно, що порожня множина є теж множина, і, як і всі множини, вона має свою потужність (кількісну характеристику). Але вона відрізняється від потужності (кількісної характеристики) непорожніх множин тим, що непорожні множини містять у собі хоч би один елемент, а порожня множина їх не має. Тому й символ, яким позначається потужність порожньої множини, відрізняється від позначень потужності інших множин. Вона позначається символом “0” і має назву “нуль”. Ця назва утворилася від латинського слова “*nullus*” (нуллюс) – *ніякий*. Таким чином можна записати $n(\varnothing) = 0$. У прикладному значенні число “нуль” як потужність порожньої множини свідчить про нейтральний стан. Наприклад, в економіці – що немає ні прибутку, ні збитку; у механіці – що тіло не рухається ні в заданому, ні в зустрічному напрямку і т.д.

Якщо до чисел натурального ряду приєднати число “нуль”, то такий натуральний ряд будемо називати *розширеним*, а множину чисел $\{0\} \cup N$ – *множиною невід’ємних цілих чисел.*

Теорія моделей свідчить, що якого б рівня абстракції вона не набувала, своїми коренями вона сягає реального світу.

Відношення “дорівнює” і “менше”

Із розглянутих властивостей випливає дуже важливий висновок, що натуральні числа знаходяться між собою у певних порівняльних відношеннях. Розглянемо їх.

Нехай задані два цілих невід’ємних числа a і b. З кількісних позицій вони показують чисельність елементів скінченних множин A і B: $a = n(A)$, $b = n(B)$. З ємкісних же позицій вони характеризують потужності цих множин. Якщо ці множини рівнопотужні, то їм відповідає одне і те ж число, тобто $a = b$.

<u>*Означення.*</u> ***Числа a і b називаються рівними, якщо вони характеризують чисельності рівнопотужних множин:***

$$a = b \Leftrightarrow A \sim B, \text{ де } n(A) = a, n(B) = b$$

Якщо множини A і B не рівнопотужні, то й числа, які їх характеризують, теж різні. У цьому разі, ***якщо множина A рівнопотужна власній підмножині множини B, де n(A) = a і n(B) = b, то говорять, що число a менше числа b, і записують a < b,*** тобто $a < b \Leftrightarrow A \sim B_1$, ***де*** $B_1 \subset B$ ***і*** $B_1 \neq B$.

Нехай $a < b$. Тоді якщо натуральне число x таке, що $x \le a$, то $x < b$. Це свідчить про те, що при $a < b$ відрізок натурального ряду N_a є власною підмножиною відрізка N_b. правильним є і зворотне твердження.

Так одержуємо ще одне означення відношення “менше”:

<u>*Означення.*</u> ***Будемо вважати число а меншим за число b, якщо відрізок натурального ряду N_a є власною підмножиною відрізка цього ряду N_b.***

З наведених суджень випливає, що якщо число ***a*** передує числу ***b,*** то ***a < b.*** Але ж у цьому разі ***b*** слідує за ***a***. В цьому разі говорять, що ***b більше a,*** і записують ***b > a.***

Логіка викладу введення поняття про число вимагає від учителя знання таких понять як множина, скінченна множина, чисельність множини, потужність множини, кількісне натуральне число, натуральний ряд чисел, лічба, нумерація, поняття числа „нуль”, множина невід’ємних цілих чисел, поняття відношень „дорівнює”, „ менше” „більше”.

Викладений вище матеріал є теоретичною основою для введення поняття про число в курсі математики початкової школи з теоретико-множинних позицій. Оволодіння цим матеріалом забезпечує можливість учителю побудувати урок з математики в початковій школі строго відповідно до логіки побудови найголовнішого поняття математики – поняття про число.

Однак теоретико-множинний підхід у подальшому розгляді поняття про число, а особливо у відношенні між числами, не забезпечує повноти понятійного апарату будь-якої теорії, оскільки будь-яка система понять будується за принципом послідовності, тобто кожне наступне поняття спирається на якісь попередні і визначається через них. Але в цьому разі повинні бути якісь поняття і відношення, які є первинними, а значить неозначуваними. На початковому періоді розвитку теорії аксіоматичної побудови теорії аксіоми розглядалися як очевидні твердження. Проте з часом, коли одні й ті ж теорії будувалися з різних вихідних позицій, зокрема, завдяки М.І.Лобачевському, „...аксіоми стали розглядатися як твердження, які умовно, (за домовленістю, ***ред.наша****), приймаються істинними без доведення в межах певної теорії” [8, с. 190].*

От і в нашому випадку, у теоретико-множинному підході використовується термін ***множина****. Поняття множини є первинним, але не завжди очевидним. Тому воно може лише описуватися на певному наочно-образному рівні. Такими ж поняттями є поняття* ***кількість****,* ***одиниця****,* ***слідувати за*** *та інші. Відсутність означення цих понять значно утруднює визначення і доведення багатьох і багатьох властивостей і відношень у будь-якій теорії, зокрема і в теорії невід’ємних цілих чисел. Ці утруднення певним чином впливають на розуміння цих понять і відношень. Тому логічним кроком у побудові теорії невід’ємних цілих чисел є розгляд аксіоматичного підходу до визначення поняття натурального числа. Такий підхід дає ключ до представлення математичних понять початкового кусу математики в логічно обґрунтованому об’єктивованому* *вигляді у шкільних підручниках і забезпечить усвідомлене сприймання навчального матеріалу.*

2. Аксіоматичний підхід до визначення поняття натурального числа

Для того щоб розглянути аксіоматичний підхід до поняття натурального числа, треба ввести деякі фундаментальні поняття з теорії арифметики, а також визначитись у відповідній термінології.

По-перше, що ми розуміємо під поняттям аксіоматики?

Розглядаючи будь-які математичні поняття, ми відмічаємо, що всі вони ґрунтуються на певних інших поняттях, а ці інші поняття – в так само ще на інших і так далі. Наприклад: “Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні”. ⇓ “Прямокутник – це чотирикутник, у якого всі кути рівні”. ⇓ “Чотирикутник – це замкнена ламана лінія з чотирьох відрізків, які лежать в одній площині”. ⇓ “Ламана лінія – це сукупність відрізків, з’єднаних послідовно, тобто, кінець одного є початком іншого”. ⇓ “Відрізок – це частина прямої лінії, обмежена з двох кінців точками”. ⇓ “Точка -?”, “Пряма - ?”. Розглядаючи цей ланцюг, ми дійшли понять, які визначити вже неможливо, бо вже немає більш простих за них понять. Тому їх приймають без означення, на емпіричному, описовому, або умоглядному рівні. Такі найпростіші поняття, які приймаються без означення, називаються аксіоматичними, а відношення, якими пов’язуються між собою аксіоматичні поняття – ***аксіомами.*** Залежно від того, якого розділу математики аксіоми стосуються, вони об’єднуються в групи й утворюють систему аксіом тієї чи іншої області математики. Так, є системи аксіом у геометрії, в алгебрі, в арифметиці та інших науках.

Алгебраїчні операції

У математиці поряд із відношеннями між множинами розглядаються і тісно пов’язані з ними дії, за допомогою яких виконуються певні перетворення з елементами цих множин. Ці дії називаються операціями. Операції за своєю суттю залежать від характеру об’єктів, над якими вони виконуються. Так, якщо об’єктами є множини, то над ними виконуються операції об’єднання, перерізу, доповнення, декартового добутку тощо. Якщо це висловлення, то над ними виконуються операції кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації, еквіваленції та ін. Над числами виконуються операції додавання, віднімання, множення, ділення тощо. У деяких випадках операції над елементами різних видів об'єктів за певними властивостями збігаються, в інших – ні. Намагання дослідити ці властивості в різних множинах, встановити взаємозв'язок між ними привело до появи загального поняття алгебраїчної операції. Це поняття лягло в основу аксіоматичної побудови різних математичних теорій і, зокрема, теорії натуральних чисел.

Щоб зрозуміти суть аксіоматичної побудови теорії натуральних чисел, потрібно ввести поняття і відношення, які б дозволили визначити поняття натурального числа й побудувати систему дій і відношень між числами.[1/]

Означення 1. ***Бінарною алгебраїчною операцією (*) на множині X називається відображення (x;y)→z, яке за правилом f ставить у відповідність до будь-якої упорядкованої пари елементів (x;y) цієї множини однозначно визначений третій елемент z тієї ж множини.***

Якщо ж відображення f одному елементу з множини X ставить у відповідність лише один певний елемент з тієї ж множини, то алгебраїчна операція називається *унарною*. Наприклад, $a \xrightarrow{f} -a$

Означення 2. ***Частковою алгебраїчною операцією на множині X називається відповідність, за якою з деякими парами елементів із множини X зіставляється один елемент тієї ж множини.***

Означення 3. ***Множина Y пар (x;y), яким відповідає елемент z, називається областю визначення алгебраїчної операції.***

Означення 4. ***Алгебраїчна операція (*) на множині X називається порожньою, якщо жодній парі (x;y) з множини X не відповідає елемент $z \in X$.***

Нехай на множині X задана алгебраїчна операція $*$ і A – певна підмножина множини X.

[1/] Оскільки програма передбачає лише оглядове ознайомлення з алгебраїчними операціями, ми обмежимося лише тими поняттями, які необхідні для подальшого висвітлення понять теорії натуральних чисел.

Означення 5. ***Якщо для будь-якої пари (x;y) елементів з A відповідний елемент z теж належить до A, то підмножина A називається замкненою відносно заданої алгебраїчної операції на множині A.***

Означення 6. ***Алгебраїчна операція (⌧) називається асоціативною на множині X, якщо для будь-яких елементів з множини X виконується рівність a ∗(b ∗c) = (a ∗ b) ∗c.***

Означення 7. ***Алгебраїчна операція (⌧) називається комутативною на множині X, якщо для будь-яких елементів з множини X виконується рівність a ∗b = b ∗a.***

Означення 8. ***Алгебраїчна операція (⌧) називається скорочуваною на множині X, якщо з умов a ⌧ x = a ⌧ y і x ⌧ a = y ⌧ a випливає, що x = y.***

Подані вище означення стосуються виразів, які пов'язані однією алгебраїчною операцією. Проте в математиці є багато операцій, які, між іншим, певним чином пов'язані між собою.

Нехай задані дві алгебраїчні операції, які позначимо (1) і (⌧).

Означення 9. ***Назвемо операцію*** 1 ***дистрибутивною відносно операції ⌧ на множині X, якщо виконується рівність***

a 1***(b ⌧ c) = (a*** 1 ***b) ⌧ (a*** 1 ***c).***

Нехай у множині X задана алгебраїчна операція ⌧. Тоді

Означення 10. ***Елемент*** *e* ***називається нейтральним відносно операції ⌧ на множині X, якщо для всіх елементів a ∈ X виконується рівність a ⌧*** *e* ***=*** *e* ***⌧ a = a.***

Означення 11. ***Елемент*** *ā* ***називається симетричним до елементу a на множині X, якщо виконується рівність a ⌧*** *ā* ***=*** *ā* ***⌧ a =*** *e.*

Означення 12. ***Елемент*** *p* ***називається поглинаючим відносно алгебраїчної операції ∗ на множині X, якщо для будь-якого елементу x з множини X виконується рівність x ∗p = p ∗x = p.***

Означення 13. ***Нехай ∗ – скорочувана і комутативна алгебраїчна операція, яка задана на множині X. Тоді операція*** 1 ***називається оберненою до операції ⌧, якщо x***1***y = z тоді і тільки тоді, коли y ⌧ z = x.***

Аксіоматика натуральних чисел

Аксіоматичну побудову арифметики натуральних чисел переважно основному пов'язують з іменем італійського математика Д. Пеано (1891 р.), хоч аксіоматичну характеристику натуральному ряду трохи раніше (у 1888 р.) дав німецький математик Ю. Дедекінд.

При аксіоматичній побудові теорії натуральних чисел за Д. Пеано вводяться одне головне відношення "*b слідує за a*" і чотири аксіоми. Ці відношення й аксіоми лягли в основу визначення поняття натурального числа і подальшої побудови всієї системи.

<u>*Означення.*</u> ***Натуральними числами називаються елементи будь-якої непорожньої множини N, у якій для елементів a і b існує відношення "b слідує за a" (число, яке слідує за числом a, будемо позначати a'), яке задовольняє аксіомам:***

1. ***Існує число 1, яке не слідує ні за яким іншим числом, тобто $a' \neq 1$ для будь-якого числа a.***

2. ***Для будь-якого числа a існує число** a'**, яке слідує безпосередньо за a, і притому тільки одне, тобто з** $a = b$ **випливає, що** $a' = b'$**.***

3. ***Будь-яке число безпосередньо слідує не більше як за одним числом, тобто, якщо** $a' = b'$**, то** $a = b$**.***

4. ***(Аксіома індукції). Будь-яка підмножина M множини N, яка має властивості:***

а) $1 \in M$;

б) $a \in M \Rightarrow a' \in M$, ***збігається з множиною N, тобто з множиною натуральних чисел.***

Із цього означення випливає низка дуже важливих властивостей.

Властивості натурального ряду чисел

<u>*Означення.*</u> ***Якщо** b **слідує за** a**, то говорять, що** a **передує** b**.***

1**. *Натуральний ряд чисел має початок*.**

Ця властивість означає, що натуральний ряд чисел обмежений знизу. Це випливає з першої аксіоми Д. Пеано. Дійсно, число 1 є натуральне число, якому не передує ніяке інше натуральне число, тобто натуральний ряд обмежений знизу.

2. ***Натуральні числа розташовані в ряду в певному порядку, а саме так, що для кожного натурального числа існує тільки одне***

натуральне число, яке безпосередньо слідує за ним, і кожне натуральне число, окрім 1, само безпосередньо слідує тільки за одним числом. Це випливає з другої і третьої аксіом Д. Пеано. Виходячи з наших позначень, натуральний ряд чисел має такий вигляд: $1,\ 1',\ 1'',\ 1''',\ \ldots$, які ми позначаємо символами 1, 2, 3, 4, ...

3. ***Натуральний ряд чисел дискретний***. Це означає, що між будь-якими двома сусідніми натуральними числами немає більше натуральних чисел. Множина дробів, наприклад, такої властивості не має.

4. ***Натуральний ряд чисел нескінченний***. Це значить, що в напрямку збільшення він може бути продовжений безмежно. Це випливає з аксіоми 2, тобто яким би великим число p не було, завжди існує ще одне число, яке слідує за ним.

5. ***Між будь-якими двома натуральними числами в кількісній характеристиці існує одне з трьох відношень: "більше", "менше", "дорівнює".*** Це записується так: $a > b$, $a < b$ і $a = b$.

Відношення рівності і нерівності натуральних чисел мають такі властивості:

а) рефлексивності: $a = a$, тобто кожне число само собі дорівнює;

б) антирефлексивності нерівності: відношення $a > a$ хибне;

в) симетричності рівності: якщо $a = b$, то і $b = a$;

в) асиметричності нерівності: якщо $a > b$, то $b < a$;

г) транзитивності рівності: якщо $a = b$, і $b = c$, то $a = c$;

д) транзитивності нерівності: якщо $a > b$, і $b > c$, то $a > c$.

Аналогічно і для знака <. Ця властивість випливає безпосередньо з поняття „*менше*"

6. ***У будь-якій сукупності натуральних чисел завжди існує найменше число***. Це безпосередньо випливає з першої та попередньої властивостей.

З наведених означень відношень "дорівнює", "менше", "більше" виходять у початковій школі, коли пояснюють, що $2 = 2$, $3 = 3$, $2 < 3$ і $3 > 2$ і т.д.

У сукупності властивостей натуральних чисел важливу роль відіграють і такі теореми:

7. *Теорема.* ***Будь-яке*** $a \neq 1$ ***має попереднє число і притому тільки одне.***

Доведення. Нехай M – множина, якій належать 1 і всі числа, які мають хоч би одне попереднє. Тоді, якщо $a \in M$, то і $a' \in M$, оскільки a' має попереднє число a. За аксіомою 4 множина M містить усі натуральні числа. Значить будь-яке $a \neq 1$ має хоч би одне попереднє. Одиничність попереднього числа випливає з аксіоми 3.

8. *Теорема.* ***Якщо числа, які слідують за даними, різні, то й дані числа різні, тобто якщо*** $a' \neq b'$***, то і*** $a \neq b$***.***

Це випливає безпосередньо з аксіоми 2.

9. *Теорема.* ***Якщо дані числа різні, то і наступні за ними числа різні, тобто, якщо*** $a \neq b$***, то і*** $a' \neq b'$***.***

Це випливає безпосередньо з аксіоми 3.

10. *Теорема.* ***Будь-яке натуральне число відмінне від числа, яке слідує за ним, тобто*** $a \neq a'$ ***для будь-якого числа*** a***.***

Доведення. Нехай M – множина, для якої теорема істинна. Тоді за першою аксіомою $1' \neq 1$. Значить $1 \in M$. Якщо $a \in M$, то і $a' \neq a$. А тоді за теоремою 8 і $(a')' \neq a'$, тобто $a' \in M$. А тоді за аксіомою 4 множина M містить усі натуральні числа, тобто $a \neq a'$ для будь-якого числа a.

Принцип математичної індукції

Усі твердження можна поділити на дедуктивні й індуктивні. Дедуктивні твердження це такі, у яких на основі загального висловлення робляться часткові висновки. Наприклад, “У будь-якому трикутнику сума внутрішніх кутів дорівнює 180°”. Це означає, що 180° мають і прямокутні трикутники, і рівносторонні, і різносторонні тощо. Дедуктивні судження, здебільшого, істинні. Дедукція лежить в основі багатьох математичних тверджень. Усі загальні теореми ми доводимо для того, щоб використовувати їх для розв’язання різних часткових задач.

Протилежний напрямок суджень мають індуктивні твердження. Індуктивні судження це такі, коли на основі декількох часткових випадків робиться загальний висновок. Наприклад, витягуючи з коробки кульки з номерами, ми витягли номери 4, 8, 10, 14, 6 і на основі цього зробили висновок, що в коробці всі кулі з парними номерами. Чи достовірний наш висновок? Напевне ні, тому що можливо в коробці є хоч би одна кулька з непарним номером. Тому індуктивні судження, переважно, хибні. Але є і такі задачі, у яких індуктивні методи суджень істинні і найбільш прийнятні. Це здебільшого стосується циклічних процесів. Наприклад, індуктивними методами доведення ми користувалися, коли виводили формулу загального члена арифметичної і геометричної прогресії. Широко використовується принцип математичної індукції і в інших випадках, які ми розглянемо пізніше.

У чому ж суть математичної індукції?

Принцип математичної індукції базується на четвертій аксіомі Д. Пеано. З неї випливає, що деяке твердження A буде істинним в усіх випадках (для будь-якого натурального числа n), якщо

а) воно істинне для $n = 1$ і

б) з істинності його для будь-якого числа $n = k$ випливає істинність його і для наступного за ним числа $n = k'$.

Отже, щоб довести істинність твердження A, треба

1) перевірити його істинність для $n = 1$;

2) припустити, що твердження A істинне для якогось числа $n = k$;

3) довести, що воно буде істинним і для $n = k'$.

Теорема. (про законність математичної індукції).

Якщо будь-яке твердження T, формулювання якого містить натуральне число n, доведене для числа 1 і в припущенні, що воно істинне для числа n, доведене й для наступного числа n', то це твердження буде істинним для будь-якого натурального числа.

Дійсно, нехай M – множина тих натуральних чисел, для яких твердження T істинне. Тоді а) число 1 належить множині M (за умовою), б) нехай $n \in M$, тобто для числа n твердження істинне. Але за умовою теореми у цьому випадку твердження буде істинне і для наступного числа n', а це свідчить про те, що $n' \in M$. Отже, множина M має властивості а) і б) аксіоми 4, унаслідок якої вона має містити в собі усі натуральні числа, що означає, що твердження *T* істинне для будь-якого $n \in N$.

Отже, смисл доведення твердження методом математичної індукції базується на умовиводі: якщо твердження істинне для одного випадку, і з припущення того що воно істинне для *n* випадків, випливає, що воно істинне і для *n + 1* випадків (попередньо будемо вважати, що $n' = n+1$), то воно буде істинним і для будь-якої кількості випадків. Для пояснення практичного застосування методу математичної індукції наведемо приклад:

Довести істинність твердження, що $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Перевіримо істинність твердження для *n = 1,* тобто якщо в лівій частині ми маємо тільки один доданок. Цей доданок 1^2. $1^2 = 1$. У правій частині, підставивши замість *n* число 1, маємо $\frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Тобто для $n = 1$ маємо рівність лівої і правої частин твердження: 1 = 1.

2. Припустимо, що твердження істинне для якогось $n = k$, тобто

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

3. Доведемо, що воно буде істинним і для $n = k + 1$, тобто і для наступного за *k* числа, тобто $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$. Дійсно, замінимо суму перших *k* доданків їхнім значенням, адже це нам відомо з пункту 2, тоді в лівій частині будемо мати вираз $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$. Виконаємо перетворення цього виразу:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}.$$ Знайшовши корені квадратного тричлена в чисельнику (-2 і $-\frac{3}{2}$) і, перетворивши його на добуток $(k+2)(2k+3)$, отримаємо $\frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$. Порівнявши отриманий вираз з тим, який нам треба було отримати (див. пункт 3), відмічаємо, що вони ідентичні, тобто наше твердження буде істинним для будь-якого *n*.

Принцип математичної індукції посідає особливе місце в системі математичних доведень, має широке практичне застосування під час розв’язання низки задач і лежить в основі методу доведення багатьох математичних тверджень.

В п р а в и.

Доведіть за допомогою математичної індукції рівності:

а) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

б) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$;

в) $1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

г) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

д) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + ... + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

е) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

є) $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

ж) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;

з) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + ... + \frac{1}{(3n-2)(2n+1)} = \frac{n}{3n+1}$;

і) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$;

к) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + ... + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$;

л) $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + ... + \frac{2n+1}{n^2(n+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$;

м) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$.

3. Арифметика натуральних чисел

Оскільки натуральне число є кількісна характеристика деякої скінченної множини, а множини між собою можуть вступати в певні відношення і між ними можна виконувати певні операції, то ці відношення та дії відображаються і на числах, які характеризують дані множини, тобто числа також вступають між собою в певні відношення і між ними можна виконувати певні дії. Розглянемо їх.

Додавання

Нехай задані дві скінченні множини A і B, які не мають спільних елементів, тобто $A \cap B = \varnothing$. Позначимо чисельність множини A через $n(A)$ і чисельність множини B через $n(B)$. Нехай $n(A) = a$, а $n(B) = b$. Утворимо об'єднання множин A і B, тобто множину $C = A \cup B$. Позначимо чисельність множини C через $n(C)$ і нехай $n(C) = c$. Звідси ж, оскільки $C = A \cup B$, то і $n(C) = n(A \cup B)$. Оскільки множина $A \cup B$ складається з елементів множин A і B, то її чисельність буде залежати від чисельностей цих множин. Позначимо цю залежність як $a + b$, тобто чисельність множини $A \cup B$ буде $a + b$ і будемо називати цей запис сумою чисел a і b, тобто $n(A \cup B) = a + b$. Оскільки ж $n(A \cup B) = n(C)$, а $n(C) = c$, то випливає, що $a + b = c$.

<u>Означення</u>. ***Сумою натуральних чисел a і b називається чисельність об'єднання скінченних множин A і B, які не перетинаються і мають відповідно чисельності a і b. Вона записується: a + b = c, де a = n(A), b = n(B), c = n(C).***

Сума $a + b$ не залежить від природи елементів множин, бо предметом її утворення є не самі елементи заданих множин, а їхні чисельності, які виражаються натуральними числами.

<u>Означення</u>. ***Процес знаходження суми двох або декількох чисел називається додаванням.***

Узагальнення дії додавання виражається в тому, що сума $n + 1$ чисел представляється як сума n чисел і ще одного, тобто,

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1}$.

Властивості додавання

1. *Сума двох чисел завжди існує*

Нехай задані дві скінченні множини A і B, які не мають спільних елементів. З теорії множин відомо, що які б не були скінченні множини A і B, завжди можна утворити їхнє об'єднання – скінченну множину $C = A \cup B$. Оскільки чисельності заданих множин виражаються натуральними числами, то і чисельність множини C буде виражена натуральним числом $\boldsymbol{c}$, яке є сумою натуральних чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, тобто за умови, що $A \cap B = \varnothing$, $a + b = c$, де знаком + будемо позначати бінарну алгебраїчну операцію додавання. А це значить, що які б не були натуральні числа a і b, завжди можна знайти їхню суму, і вона також буде натуральним числом. Отже, сума двох натуральних чисел завжди існує, оскільки завжди існує об'єднання скінченних множин, які не перетинаються і мають чисельностями ці натуральні числа.

2. *Сума двох чисел однозначна*

При об'єднанні двох скінченних множин A і B утворюється єдина скінченна множина $C = A \cup B$. Оскільки ж множині A відповідає єдине натуральне число a, множині B – єдине натуральне число b, а множині C – єдине натуральне число c, то сума $a + b = c$ буде єдиною.

3. *Додавання комутативне*, тобто для будь-яких цілих невід'ємних чисел a і b виконується рівність $a + b = b + a$.

Дійсно, нехай a – чисельність множини A, b – чисельність множини B і $A \cap B = \varnothing$. Тоді за означенням суми сума $a + b$ є чисельністю множини $A \cup B$, але $A \cup B = B \cup A$, тому і $n(A \cup B) = n(B \cup A)$, але $n(B \cup A) = b + a$, тому $a + b = b + a$.

4. *Додавання асоціативне*, тобто для будь-яких цілих невід'ємних чисел a, b і c виконується рівність $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Дійсно, нехай задані множини A, B і C такі, що $n(A) = a$, $n(B) = b$ і $n(C) = c$, причому $A \cap B = \varnothing$, $C \cap B = \varnothing$ і $A \cap C = \varnothing$. Тоді за означенням суми множина $(A \cup \mathrm{B}) \cup C$ має чисельність $n(A \cup B) + n(C) = (a + b) + c$, оскільки $(A \cap B) \cup (C \cap B) = (A \cup \mathrm{B}) \cap C = \varnothing$. Але за асоціативною властивістю об'єднання $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, а за означенням суми $n(A \cup (B \cup C)) = n(A) + n(B \cup C) = a + (b + c)$, оскільки $A \cap (B \cup C) = \varnothing$. Звідси випливає, що $(a + b) + c = a + (b + c)$.

5. *Виконується властивість монотонності*, тобто для будь-яких невід'ємних цілих чисел a, b і c, якщо $a = b$, то $a + c = b + c$. Аналогічно, якщо $a < b$, то $a + c < b + c$, якщо $a > b$, то $a + c > b + c$.

Дійсно, виходячи з властивості монотонності для множин, що якщо $A = B$ і C будь-яка множина, виконується відношення $A \cup C = B \cup C$, то на основі означення додавання правильною буде і рівність чисельностей цих множин, тобто $a + c = b + c$.

Виходячи з того, що для відношення $A \subset B$ правильним буде $A \cup C \subset B \cup C$, то істинною буде нерівність $a + c < b + c$. Аналогічно і для останнього випадку.

6. *Виконується властивість* $a + 0 = 0 + a = a$.

Дійсно, з теорії множин відома властивість $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$. Тоді за означенням суми справедливою буде і рівність $a + 0 = 0 + a = a$.

На основі означення та властивостей додавання можна вказати і третій підхід до поняття “менше”.

Число $\boldsymbol{a}$ *менше числа* $\mathbf{b}$, *якщо існує таке третє число* $\boldsymbol{c}$ 🕒 0, *що виконується рівність* $\boldsymbol{a + c = b}$. *Звідси ж випливає наслідок* $\boldsymbol{a = a + 0 < a + c}$, тобто *сума двох чисел більша за кожний із доданків.*

Аксіоматичний підхід до операції додавання

Ми розглянули додавання з *теоретико-множинних* позицій. Тепер розглянемо додавання з *аксіоматичних позицій*.

Аксіоматичний підхід до поняття натурального числа можна здійснити з різних позицій. Найважливіше тут – що вибрати за основне поняття: суму чисел, відношення порядку, відношення безпосереднього слідування одного числа за іншим тощо. У кожному випадку слід задати систему аксіом, яка б описувала властивості основних понять. Вище ми визначили поняття натурального числа на основі системи аксіом Пеано, яка спирається на властивості безпосереднього наслідування одного числа за іншим. Покажемо, як за допомогою відношення „безпосередньо слідувати за” можна визначити операцію додавання натуральних чисел.

Нехай нам заданий натуральний ряд чисел. Як ми знаємо, числа в ньому розташовані в певному порядку. Виберемо деяке число m і поставимо задачу встановити, яке число стоїть на k-тому місці після m. Для розв’язання цієї задачі треба виконати певну операцію, за допомогою якої за двома числами m і k можна знайти таке третє число n, яке б відповідало питанню задачі. Назвемо таку операцію *додаванням.*

Для розв'язання зазначеної задачі необхідно ввести дві аксіоматичні умови цієї операції:

*1) $n + 1 = n'$ (**n'** – це число, яке безпосередньо слідує за **n**)*;

2)) $m + n' = (m + n)'$.

За допомогою суджень, які виходять за межі нашої програми, можна довести, що в множині N бінарна алгебраїчна операція, яка задовольняє умовам 1) і 2) існує, причому вона однозначно визначена і має властивості:

а) $m + n = n + m$ (комутативність);

б) $m + (n + p) = (m + n) + p$ (асоціативність);

в) $m + n$ 🕒 m;

г) у будь-якій непорожній підмножині A множини N існує таке натуральне число m, що будь-яке натуральне число $x \neq m$, $x \in N$ можна представити у вигляді $x = m + n$, де $n \in N$.

На основі викладеного можна сформулювати означення додавання так:

<u>Означення.</u> ***Додаванням у множині*** *N* ***натуральних чисел називається бінарна алгебраїчна операція, яка будь-якій парі натуральних чисел*** *a* ***і*** *b* ***ставить у відповідність певне натуральне число*** *k*, (яке будемо позначати як $k = a + b$) ***знайдене за аксіомами:***

1) $n + 1 = n'$ (n'- це число, яке безпосередньо слідує за n);

2)) $m + n' = (m + n)'$.

Це означення повністю розкриває суть операції додавання.

Дійсно, згідно з властивістю *а)* число, яке займає n-те місце після m, дорівнює числу, яке займає m-те місце після n. Це число буде k, тобто $m + n = n + m = k$.

Згідно з властивістю *б)* число, яке стоїть на $(n + p)$ місці після m, дорівнює числу, яке стоїть на p-тому місці після числа $(m + n)$.

Згідно з властивістю *г)* вказаним числом x є число k, яке дорівнює сумі чисел m і n.

Згідно з аксіомою *2)* число, яке займає наступне місце за n-тим числом після m, дорівнює числу, яке займає наступне місце після числа $m + n$.

Відношення менше в аксіоматичному підході визначається так: $a < b \Leftrightarrow (\exists k \neq 0)(b = a+k)$, тобто „число $a < b$, якщо існує таке натуральне число k, що $b=a+k$".

Розглядаючи *нуль* у додаванні, як бінарній алгебраїчній операції, ми відмічаємо, що він виступає нейтральним елементом:

$n \boxtimes e = e \boxtimes n = n$, тобто для $\boxtimes$ = “+” $e = 0$.

Згідно з властивістю *в)* число, яке стоїть на n-тому місці після m, де $n \neq 0$, не може дорівнювати числу m.

Порівняння цього аксіоматичного підходу з поданими вище властивостями показує, що він визначає ті ж властивості додавання, які ми розглянули вище.

Відношення порядку на множині невід’ємних цілих чисел.

Як ми засвідчили вище, число a менше числа b, якщо існує таке третє число c, що виконується рівність $a + c = b$. У цьому разі записують: $a < b$. Наприклад, $5 < 8$, оскільки існує таке число 3, що $5 + 3 = 8$. Доведемо, що відношення “ < ” у множині натуральних чисел є відношенням строгого порядку.

<u>*Теорема.*</u> ***На множині невід’ємних цілих чисел відношення “менше” є відношенням строгого порядку.***

Для того, щоб довести це твердження, треба довести, що відношення “менше” асиметричне і транзитивне.

Дійсно, нехай $a < b$ і $b < c$. За означенням поняття “менше” випливає, що для чисел a і b існує таке число k_1, що $b = a + k_1$, а для чисел b і c існує таке k_2, що $c = b + k_2$. Тоді з цих двох рівностей випливає: $c = a + (k_1 + k_2)$, а це значить, що $a < c$, тобто виконується транзитивність.

Тепер доведемо, що на цій множині відношення “менше” асиметричне. Дійсно, якби виконувалася властивість симетричності, тобто $a < b$ і $b < a$, то, виходячи з транзитивності, було б $a < a$. Але це значить, що $a = a + k$, де $k \in N$, чого бути не може.

Розглядаючи впорядкованість множини невід’ємних цілих чисел, нам важливо визначити місце числа *нуль* у цьому ряду. Очевидно, що число *нуль* не може слідувати за будь-яким натуральним числом, тому що будь-яке натуральне число є кількісною характеристикою непорожньої множини, і ніяка непорожня множина не може бути підмножиною порожньої множини. Навпаки, з теорії множин ми знаємо, що порожня множина є невласною підмножиною будь-якої непорожньої множини, тому і її кількісна характеристика повинна передувати кількісній характеристиці будь-якої непорожньої множини. За аксіоматикою Д.Пеано найменшим натуральним числом (що характеризує найменш потужну непорожню одноелементну множину) є число 1. А оскільки порожня підмножина є підмножиною й одноелементної множини, то число нуль повинно передувати числу 1. Тобто ряд невід’ємних цілих чисел починається з числа 0. Перша ж аксіома Д.Пеано для множини невід’ємних цілих чисел тоді буде мати вигляд: *існує число 0, яке не слідує ні за яким іншим числом.*

Отже, ряд невід’ємних цілих чисел починається з числа 0, тобто він має вигляд: $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ Назвемо їх цифрами і для зручності позначимо відповідно 0, $0'=1$, $0''= 1' = 2$, $0'''= 2' = 3, \ldots$

Виходячи з вище сказаного, можна доповнити властивості додавання ще такими:

7. Сума двох натуральних чисел завжди більша за кожний з доданків. Дійсно, очевидною є нерівність $a > 0$, оскільки будь-яке натуральне число більше нуля. На основі властивості 5 істинною буде нерівність $a + b > 0 + b$. Але $0 + b = b$. Тоді $a + b > b$. Аналогічно доводиться що і $a + b > a$.

8. Для будь-якого невід’ємного цілого числа a $a' = a + 1$. Дійсно, на основі аксіоми додавання $a + b' = (a + b)'$ виконаємо такі перетворення: нехай $b = 0$. Тоді отримаємо $a + 0' = (a + 0)'$. Але $0' = 1$, а $a + 0 = a$. Підставивши це в попередню рівність, отримаємо: $a + 1 = a'$.

Цей висновок один з найважливіших в арифметиці, бо він показує, що кожне наступне натуральне число на 1 більше попереднього. Саме він лежить в основі утворення ряду натуральних чисел і визначає методику вивчення молодшими школярами натурального ряду чисел і операції додавання.

Вправи.

1. Доведіть двома способами, чому: $3 < 5$; $0 < 8$.

2. Використовуючи означення відношення “менше”, доведіть, що для будь-яких натуральних чисел a, b і c виконується твердження: “якщо $a < b$, то $a + c < b + c$ “.

3. Доведіть, що якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

4. Доведіть, що якщо $a \geq b$ і $b \geq a$, то $a = b$.

5. На основі аксіом Д.Пеано доведіть, що ні одне з натуральних чисел не збігається з наступним за ним числом.

Множення

Множення з теоретико-множинних позицій – це арифметична операція, яка є похідною від додавання. Поняття множення тут розглядається як спрощений варіант додавання. З таких позицій, зокрема, розглядається множення в початковому курсі математики. Розглянемо обґрунтування цього поняття з теоретико-множинних позицій.

Нехай задано дві множини: $A = \{a, b, c, d\}$ і $B = \{m, n, p\}$. Утворимо їхній декартовий добуток і обчислимо кількість його елементів.

$$\begin{aligned} A\times B = \{ &(a, m), (b, m), (c, m), (d, m),\\ &(a, n), (b, n), (c, n), (d, n),\\ &(a, p), (b, p), (c, p), (d, p)\}. \end{aligned}$$

У нашій задачі $n(A) = 4$, а $n(B) = 3$. Підрахуємо кількість пар у множині $A \times B$: у прямокутнику три рядки по чотири пари в кожному, тобто кількість пар у прямокутнику $4 + 4 + 4 = 12$. Замінимо запис цієї суми на іншу, скорочену форму: запишемо $4 + 4 + 4 = 4\cdot 3$, де перше число показує доданок, а друге – кількість доданків. Операцію скороченого додавання назвемо *множенням*, а числа, які перемножуються – *співмножниками.* Результат множення (число 12) назвемо *добутком*. Отже, згідно з теоретико-множинним підходом запис добутку має такий вигляд:

$$a \cdot b = \mathrm{n}(A \times B) = \mathrm{n}(A) \cdot \mathrm{n}(B), \text{ де } \mathrm{n}(A) = a, \text{ а } \mathrm{n}(B) = b,$$

тобто ***добутком цілих невід'ємних чисел a і b називається число елементів декартового добутку множин A і B, де*** $\mathbf{n}(A) = a$, **і** $\mathbf{n}(B) = b$, а ***множенням*** у цьому разі ***називається процес знаходження суми a однакових доданків b.*** Так визначається множення в початковому курсі математики.

На основі узагальнення декартового добутку на n множин можна узагальнити і дію множення, поширивши її на декілька співмножників. Так, оскільки $A \times B \times C \times \ldots \times К \times P = (A \times B \times C \times \ldots \times К) \times P$, то

$n(A \times B \times C \times \ldots \times К \times P) = n(A \times B \times C \times \ldots \times К) \times n(P)$, тобто

$a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot к \cdot p = (a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot к) \cdot p$

Операція множення має такі властивості:

1. *Комутативна властивість. Операція множення комутативна, тобто для будь-яких двох цілих невід'ємних чисел* ***a*** і ***b*** *справедлива рівність* $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$.

Ця властивість має назву *переставний* або *комутативний закон*. Доведемо її.

Нехай задані дві множини A і B і $n(A) = a$, а $n(B) = b$. Тоді на основі означення $n(A \times B) = a \cdot b$. Але з теорії множин ми знаємо, що множини $A \times B$ і $B \times A$ рівнопотужні, тобто будь-якій парі $(a;b)$ з множини $A \times B$ можна поставити у відповідність пару (b, a) з множини $B \times A$ і навпаки. Тому $n(A \times B) = n(B \times A)$, тобто

$$a \cdot b = n(A \times B) = n(B \times A) = b \cdot a.$$

2. *Асоціативна властивість. Операція множення асоціативна, тобто для будь-яких цілих невід'ємних чисел* ***a***, ***b*** *і* ***c*** *справедлива рівність*: $(\boldsymbol{a \cdot b}) \cdot \boldsymbol{c = a \cdot (b \cdot c)}$.

Дійсно, з теорії множин ми знаємо, що $n((A \times B) \times C) = n(A \times (B \times C))$, оскільки множини $A \times (B \times C)$ і $(A \times B) \times C$ рівнопотужні. Якщо ж $n(A) = a$, $n(B) = b$ а $n(C) = c$, то рівність $n((A \times B) \times C) = n(A \times (B \times C))$ можна записати як $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3. *<u>Дистрибутивна властивість (відносно додавання</u>). Операція множення дистрибутивна, тобто для будь-яких цілих невід'ємних чисел* ***a, b*** *і* ***c*** *справедлива рівність*

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}.$$

Цей закон випливає з дистрибутивної властивості декартового добутку множин, що $(A \cup B)\times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ (*). Якщо $n(A) = a$, $n(B) = b$, а $n(C) = c$ і $A \cap B = \varnothing$, то за означенням добутку маємо, що $n((A \cup B) \times C) = (a + b) \cdot c$. Звідки на основі рівності (*) отримаємо $n((A \cup B) \times C) = n((A \times C) \cup (B \times C))$ і далі за означенням суми та добутку $n((A \times C) \cup (B \times C)) = n(A \times C) + n(B \times C) = ac + bc$. Що і треба було довести.

Комутативний і асоціативний закони множення можна поширити на будь-яку кількість множників. Як і при додаванні ці закони часто використовуються разом, тобто добуток декількох чисел не зміниться, якщо їх переставити будь-яким чином і якщо будь-яку їхню групу взяти в дужки.

Дистрибутивний закон встановлює зв'язок множення з додаванням та відніманням і справедливий для будь-якої кількості доданків.

Розгляд операції множення на *множині невід'ємних цілих чисел N* з **аксіоматичних позицій** дає можливість представити її як *бінарну алгебраїчну операцію, яка будь-якій парі (a;b), утвореній з елементів множини* $\{0\} \cup N$, *де* $((a;b) \in (\{0\} \cup N) \times (\{0\} \cup N))$, *ставить у відповідність число c з тієї ж множини і при цьому виконуються умови:*

а) для будь-якого натурального числа виконується рівність

$a \cdot 0 = 0;$

б) для будь-яких натуральних чисел a і b виконується рівність

$ab' = ab + a.$

Число c називається добутком чисел a і b і записується $c = a \cdot b$.

Друга умова означає, що число 1 відносно операції множення є нейтральним елементом, тобто $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Дійсно,

$$a \cdot 1 = a \cdot 0' = a \cdot 0 + a = 0 + a = a.$$

$1 \cdot a = 1 \cdot (a-1) + 1 = 1 \cdot (a-2) + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = a$, тобто число 1 є нейтральний елемент відносно операції множення (·).

Властивості множення

1. *Операція множення існує і вона єдина*

Спочатку доведемо, що операція множення в множині N завжди існує.

Доведемо цю теорему методом математичної індукції. Для цього треба довести, що вказані властивості виконуються для всього ряду натуральних чисел.

Позначимо символом A множину натуральних чисел a, для яких операція множення існує (виконуються умови а) і б)). Тоді за умовою а) $1 \in A$. Припустимо, що число $a \in A$. Доведемо, що і $(a + 1) \in A$. За умовою б) $a(b + 1) = ab + a$. Доведемо, що це твердження буде істинним і для $a + 1$ елемента, тобто що і $(a + 1) \in A$.

$(a + 1)\cdot(b + 1) = a(b + 1) + (b + 1) = a\,b + a + b + 1 = (a+1)\cdot b + (a + 1)$. А це означає, що і $(a + 1) \in A$. Тоді внаслідок математичної індукції A [illegible] N. Тобто операція множення визначена для будь-яких натуральних чисел.

Доведемо, що операція множення однозначна. Нехай у множині M існують дві операції множення, які мають властивості *а*) і *б*). Одну з них позначимо значком $\prec$, а другу – /. Тоді для обох операцій будуть наявні властивості:

1) $a \cdot 1 = a$ і 1) $a / 1 = a$

2) $a\cdot(b + 1) = a\cdot b + a$ і 2) $a / (b + 1) = a/b + a$

Доведемо, що для будь-яких a і b виконується рівність

$$a \prec b = a / b. \quad (*)$$

Нехай число a вибране довільно, а число b приймає різні числові значення. Перевіримо виконання рівності для $b = 1$. Оскільки $a \cdot 1 = a$ і $a / 1 = a$, то $a \cdot 1 = a / 1$, рівність правильна, тобто $1 \in M$.

Нехай ця рівність виконується для певного $b \in M$, тобто $a \prec b = a/b$. Доведемо, що вона виконується і для $b' \in M$, тобто $a \prec b' = a / b'$. (*Нагадаємо, що* $b' = b + 1$). Дійсно, $a\cdot b' = a\cdot(b + 1) = a\cdot b\ a = a/b + a$. Аналогічно $a/b' = a / (b + 1) = a / b + a$. Порівняння результатів операцій $\cdot$ і / приводить нас до висновку, що $a \prec b = a / b$, тобто, що операція множення єдина і $M = N$.

2. *У множині N виконується дистрибутивний закон множення відносно до додавання, тобто* $(a + b)\cdot c = ac + bc$.

Для доведення скористаємося методом математичної індукції. Нехай M – множина, у якій ця властивість виконується. Нехай $a \in M$ і $b \in M$. Доведемо, що властивість виконується для будь-якого натурального c.

Нехай $c = 1$. Тоді $(a + b)\cdot 1 = a + b$. $a \cdot 1 + b \cdot 1 = a + b$ Рівність правильна, значить $1 \in M$.

Нехай твердження, висловлене у теоремі, істинне для певного c, тобто $(a + b)\cdot c = ac + bc$, $c \in M$. Доведемо, що твердження буде вірним і для c', тобто $(a + b)\cdot c' = ac' + bc'$. Ми вже знаємо, що $c' = c+1$. Тоді $(a+b)\cdot c' = (a+b)\cdot(c+1) = (a+ b)\cdot c +(a + b)\cdot 1 = ac + bc + a + b = =(ac + a) + (bc + b) = ac' + bc'$. Що і треба було довести. Значить теорема істинна для усіх натуральних чисел.

3. *Виконується комутативна властивість, тобто* $ab = ba$.

Цю властивість також доведемо методом математичної індукції. Нехай M – це множина, у якій ця властивість виконується. Нехай $a \in M$. Доведемо, що і будь-яке b з множини натуральних чисел належить M.

Дійсно, для $b = 1$ маємо $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, тобто для $b = 1$ твердження правильне. Нехай твердження буде істинним для b, тобто $ab = ba$. Доведемо, що воно буде істинним і для b', тобто $ab' = b'a$. Відомо, що $b' = b + 1$. Тоді $ab' = a\cdot(b + 1) = ab + a = ba + a = (b + 1)\cdot a = b'a$. Тобто $b' \in M$ і $M = N$, що і треба було довести.

4. *Виконується асоціативна властивість множення*, тобто

$$(ab)\cdot c = a\cdot(bc).$$

Нехай задані натуральні числа a і b, а множина M – це множина таких чисел c, для яких асоціативна властивість виконується. Доведемо, що вона виконується для будь-якого натурального c.

Нехай $c = 1$. Тоді $(ab)\cdot 1 = a\cdot(b\cdot 1) = ab$, тобто $1 \in M$.

Нехай твердження правильне для певного c, тобто $(ab)\cdot c = a\cdot(bc)$.

Доведемо, що воно правильне і для c', тобто $(ab)\cdot c' = a\cdot(bc')$.

$(ab)\cdot c' = (ab)\cdot(c+1) = (ab)\cdot c + ab = a\cdot(bc) + ab = a\cdot(bc+b) = a(b(c+1)) =$ $= a\cdot(bc')$, що і треба було довести. Тобто $c' \in M$ *і* M❖N.

5. *Виконується властивість монотонності,* тобто якщо $a > b$ і c певне натуральне число, то $ac > bc$. Аналогічно, якщо $a = b$, то $ac = bc$, і якщо $a < b$, то $ac < bc$.

Ми вже знаємо, що коли $a > b$, то існує таке число k, що $a = b + k$.

Нехай $a > b$, тоді $a = b + k$, тоді $ac = (b + k)\cdot c = bc + kc > bc$, оскільки сума більша за доданок. Що і треба було довести.

6. *Добуток будь-якого натурального числа на число "нуль" є число "нуль"*, тобто $a \cdot 0 = 0$. Це випливає з того, що сума a доданків, які дорівнюють 0 буде число 0, тобто $\underbrace{0+0+0+\ldots+0=0}_{a}$. За властивістю комутативності $a \cdot 0 = 0 \cdot a$.

7. *Добуток декількох чисел дорівнює "нулю", якщо хоч би одне з них дорівнює нулю*. Дійсно, нехай $ab = 0$, причому ні a, ні b не дорівнюють 0. Тоді існує таке число x, що $b = x'$. Тоді маємо:

$ab = a\,x' = a\,x + a$ ¤ a 🕓 0. Суперечність.

В п р а в и:

1. Обчислити раціональними методами значення виразів, пояснюючи кожний крок перетворення:

а) $4\cdot 17\cdot 25$; б) $(8\cdot 379)\cdot 125$; в) $24\cdot 19\cdot 25\cdot 5$; г) $(40\cdot 7\cdot 3)\cdot 25$; д) $126\cdot 24 + 126\cdot 6 + 126\cdot 10$

2. Доведіть, що для будь-яких натуральних чисел a, b і c справедливе твердження: якщо $a > b$, то $ac > bc$.

3. Не виконуючи множення, доведіть, що $842\cdot 58 < 842\cdot 61$.

4. Які перетворення виразів можна виконати на основі

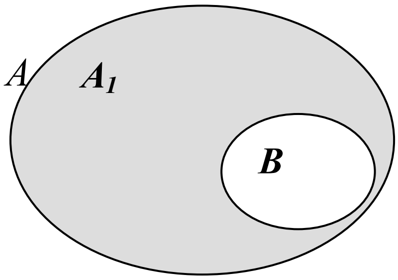
1) комутативного закону, 2) асоціативного закону,

3) дистрибутивного закону?

Віднімання

Розглянемо задачу. "Учень купив 9 зошитів у лінію та клітку. У лінію було 4 зошити. Скільки було зошитів у клітку?"

З діаграми видно, що множина зошитів у клітку є доповненням множини зошитів у лінію до всієї множини зошитів і $B \subset A$. Тому $A_1 = A \setminus B$. Позначимо чисельність множини A як $n(A) = a$, чисельність множини B як $n(B) = b$, а чисельність множини A_1 як $n(A_1) = c$. З іншого боку, $n(A_1) = n(A \setminus B)$.



A – загальна множина зошитів.

A_1 – множина зошитів у клітку.

B – множина зошитів у лінію.

Оскільки $n(A \setminus B)$ залежить від $n(A)$ і $n(B)$, запишемо $n(A \setminus B) = n(A) – n(B) = a – b$. А звідси можна записати, що $c = a – b$. Назвемо число c різницею чисел a і b. Число a назвемо зменшуваним, а число b – від'ємником. Отже, ***різницею цілих невід'ємних чисел a і b називається число c елементів у доповненні множини B до множини A , або c = a – b.***

У нашому прикладі в клітку було зошитів $9 – 4 = 5$.

Дію, за допомогою якої знаходять різницю $a – b$ називають *відніманням*.

Дія віднімання має безпосередній зв'язок із додаванням.

Якщо розглянути наведену задачу, то спираючись на відомі операції з множинами, можна записати, що $A = B \cup (A \setminus B)$, де $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$, звідки $n(A) = n\,(B \cup (A \setminus B)) = n(B) + n(A \setminus B) = b + (a – b)$.

Звідси маємо, що $a = b + (a – b)$, тобто різниця $a – b$ є таке число, сума якого з числом b дорівнює числу a.

<u>Означення</u>. ***Різницею цілих невід'ємних чисел a і b називається таке ціле невід'ємне число c, сума якого з числом b дорівнює a.***

Отже, $\boldsymbol{a – b = c \Leftrightarrow a = b + c}$.

Із цього випливає, що дія віднімання є дією, протилежною додаванню.

<u>Теорема</u>. ***Різниця цілих невід'ємних чисел a і b існує тоді і тільки тоді, коли b≤ a.***

Доведення. Якщо $a = b$, то $a = b + 0$, звідки $a - b = 0$, а звідси випливає, що різниця $a - b$ існує.

Якщо ж $b < a$, то за означенням відношення «менше» існує таке натуральне число c, що $a = b + c$. Тоді за означенням різниці $c = a - b$, тобто різниця $a - b$ існує.

Навпаки, якщо різниця $a - b$ існує, то значить існує невід'ємне число c, що $c = a - b$, а тоді за означенням різниці $a = b + c$. Якщо $c = 0$, то $a = b$; якщо $c > 0$, то $b < a$ за означенням відношення «менше».

<u>*Теорема.*</u> ***Якщо різниця цілих невід'ємних чисел a і b існує, то вона єдина.***

Доведення. Припустимо, що існують два значення різниці $a - b$: $a - b = c_1$ і $a - b = c_2$. Тоді за означенням різниці маємо: $a = b+c_1$ і $a = b + c_2$, звідки $b + c_1 = b + c_2$, а звідси за властивістю монотонності $c_1 = c_2$.

<u>*Теорема.*</u> ***Виконується дистрибутивний закон відносно віднімання: (a – b)·c = ac – bc.*** Дійсно, позначивши $a - b = k$, отримаємо $a=b+k$, а за властивістю монотонності додавання істинною буде рівність $ac = bc + kc$, або $kc = ac - bc$, звідки $(a - b)\cdot c = ac - bc$.

В п р а в и.

1. Дайте теоретико-множинне тлумачення рівностям:

1) $9 - 3 = 6$; 2) $7 - 7 = 0$; 3) $5 - 0 = 5$.

2. Поясніть, чому наведена нижче задача розв'язується за допомогою віднімання?

" У хлопчика було 5 горіхів. 3 горіхи він віддав товаришу. Скільки горіхів у нього залишилося.?".

3. Доведіть на основі теоретико-множинного підходу, що

а) $(a + b) - c = a + b - c$

б) $a - (b + c) = (a - b) - c$.

4. Доведіть, що а) якщо $a > b$, то $a - c > b - c$.

б) якщо $a > b$, то $c - a < c - b$.

в) якщо $a > b$ і $c < d$, то $a - c > b - d$.

5. Доведіть, що $a - 0 = a$ і $a - a = 0$.

Ділення

Нехай задана скінченна непорожня множина A, яка має чисельність $n(A)$. Розіб'ємо множину A на b рівнопотужних підмножин A_i, які між собою попарно не перетинаються. Оскільки підмножини рівнопотужні і скінченні, то вони мають однакову кількість елементів. Позначимо чисельність кожної підмножини A_i як $c = n(A_i)$. Назвемо операцію, за допомогою якої обчислюється чисельність (потужність) кожної підмножини *діленням,* а саму дію позначимо як " : ". Чисельність множини A (число a) назвемо *ділене*, число b (кількість підмножин) – *дільником*, а число c (чисельність підмножини) – *часткою* і запишемо операцію ділення у вигляді $c = a : b$.

<u>Означення</u>**. *Дія, за допомогою якої знаходиться чисельність підмножини при розбитті заданої множини на декілька рівнопотужних підмножин, називається діленням.***

Розглянемо взаємозв'язок між діленням і множенням.

Нехай задана множина A, яка розбита на b рівнопотужних підмножин $A_1, A_2, A_3, \ldots A_b$, які не перетинаються. І нехай $n(A) = a$. Тоді $c = a : b$ є кількість елементів у кожній такій підмножині, тобто $n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_b) = c$. Оскільки ж за умовою $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_b$, то $n(A) = n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_b)$, а оскільки множини A_i попарно не перетинаються, то за означенням суми $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_b) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_b) = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{b} = c \cdot b$, тобто $a = c \cdot b$.

<u>Означення.</u> ***Часткою цілого невід'ємного числа а при діленні його на натуральне число b називається таке невід'ємне ціле число с, добуток якого з числом b дорівнює числу а, тобто*** $\boldsymbol{a : b = c \Leftrightarrow a = c \cdot b}$

<u>Теорема</u>. ***Ділення в множині невід'ємних цілих чисел існує.***

Дійсно, для будь-яких невід'ємних цілих чисел $b \neq 0$ і c завжди існує таке ціле число a, що $a = b \cdot c$, а звідси за означенням $c = a : b$.

<u>Теорема</u>. ***Якщо натуральне число*** a ***ділиться на число*** b ***то,*** $b \leq a$.

Нехай ділення числа a на число b існує, тобто існує таке число c, що $a = b\cdot c$. Але для будь-якого натурального числа c виконується нерівність $1 \le c$. Помноживши обидві частини цієї нерівності на b, отримаємо нерівність $b \le b\cdot c$, або $b \le a$, що і треба було довести.

Теорема. ***Якщо*** $\boldsymbol{a}\cdot m = \boldsymbol{b}\cdot m$, ***то*** $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Дійсно, нехай $\boldsymbol{a}\cdot m = \boldsymbol{c}$, а значить і $\boldsymbol{b}\cdot m = \boldsymbol{c}$. Тоді за означенням операції ділення $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}:m$ і $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}:m$, звідки $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Теорема. ***Якщо частка від ділення числа a на число b у множині невід'ємних цілих чисел існує, то вона єдина.***

Розглянемо доведення від супротивного. Нехай в одному разі $a : b = c_1$, а в іншому $a : b = c_2$. Тоді за означенням ділення $a = b\cdot c_1$ і $a = b\cdot c_2$, або $b\cdot c_1 = b\cdot c_2$, звідки за попередньою теоремою $c_1 = c_2$. Що і треба було довести.

Теорема. ***Ділення на число нуль неможливе.***

Виконаємо доведення від супротивного. Нехай $a : 0 = b$, де $a \neq 0$ і b – будь-яке невід'ємне ціле число. Тоді за означенням $a = b \cdot 0$, звідки випливає, що $a = 0$, що не так. Протиріччя. Значить такого числа b не існує, а значить і ділення на нуль неможливе.

Наявні ще й такі властивості.

- $a : (b\cdot c) = (a : b) : c$. Дійсно, позначимо $a:(bc) = x$. Тоді $a = xbc$ або $x \cdot c = a:b$, $x = (a:b):c$.
- $(a+b):c = a:c + b:c$. Дійсно, $(a:c + b:c)\cdot c = a + b$, звідси, поділивши $a + b$ на c, отримаємо те, що треба було довести.
- Аналогічно, $(a - b):c = a:c - b:c$.
- $(a\cdot b):c = (a:c)\cdot b$. Дійсно, якщо $(a\cdot b):c = x$, то $a\cdot b = c\cdot x$ або $a = (c\cdot x):b$, а звідси $a:c = x:b$ або $x = (a:c)\cdot b$.

Якщо ж $a = 0$, то маємо ділення $0 : 0$. Часткою в цьому разі може бути будь-яке число. Дійсно, якщо $0 : 0 = c$, то правильним буде $0 = c \cdot 0$ і $0 : c = 0$ для будь-якого c. Таке явище в математиці називається *невизначеністю*.

Означення. ***Якщо задані два числа*** a ***і*** b ***такі, що*** $a = n(A)$ ***,*** $b = n(B)$***, і*** $a > b$***, і множину A можна розбити на*** c ***підмножин,***

рівнопотужних множині B, то говорять, що число a ***більше числа*** b ***у*** c ***разів, відповідно, число*** b ***менше числа*** a ***в*** c ***разів.***

Звідси випливає, що для того щоб установити, у скільки разів одне число більше або менше за інше, треба більше число поділити на менше.

В п р а в и.

Поясніть зміст вислову: 15 більше 3 у 5 разів.

2. Сформулюйте необхідні умови ділення одного числа на інше. Чи вони є достатніми?

3. Знайдіть помилку в судженні: “24 + 36 – 60 = 28 + 42 – 70 є правильна рівність. Її можна перетворити так: 6·(4+6–10) = 7·(4 + 6 – 10). Поділивши обидві частини числової рівності на 4 + 6 – 10, отримаємо рівність 6 = 7”.

4. Задана задача: “Мати поділила 12 яблук між дітьми по 4 яблука кожному. Скільки було дітей?” Поясніть, чому ця задача виконується діленням?

5. Поясніть смисл речення: 1) 12 більше 3 у 4 рази.
2) 7 у 3 рази менше, ніж 21.

6. Чи має операція ділення нейтральний елемент?

7. Чи операція ділення комутативна? Асоціативна?

Ділення з остачею

<u>*Означення.*</u> ***Діленням з остачею називається дія, за допомогою якої за двома числами a і b визначаються такі два числа q і r, що виконуються умови:*** **1)** $a = bq + r$**;** **2)** $r < b$**.**

Число a називається *діленим*, число b – *дільником*, число q – *часткою*, а число r – *остачею.*

<u>*Теорема.*</u> ***Операція ділення з остачею завжди виконувана.***

Доведення. Нехай маємо два числа a і b. Розглянемо існування чисел q і r для будь-яких випадків відношення чисел a і b. Розглянемо чотири можливі випадки $a < b$, $a = b$, $a > b = 1$, $a > b > 1$. Покажемо, що для будь-якого з цих випадків є числа q і r такі, що виконуються зазначені умови: $a = bq + r$; і $r < b$.

1. $a < b$. У цьому випадку є числа $q = 0$ і $r = a$, які задовольняють зазначеним умовам, тобто $a = b \cdot 0 + r$, звідки $a = r$. А оскільки $a < b$, то і $r < b$, що і треба було довести.

2. $a = b$. Для цього випадку є числа $q = 1$ і $r = 0$, які задовольняють зазначеним умовам: $a = b \cdot 1 + 0$, звідки $a = b$. А оскільки нуль найменше число, то правильним буде і те, що $r < b$.

3. $a > b = 1$. Для цього випадку є числа $q = a$ і $r = 0$, які задовольняють зазначеним умовам: $a = 1 \cdot a + 0$, рівність виконується. А оскільки $0 < 1$, то правильним буде і $r < b$.

4. $a > b > 1$. Розглянемо послідовність $b \cdot 1$, $b \cdot 2$, $b \cdot 3$ … У цій послідовності знайдеться таке число q, що добуток $b \cdot q \leq a$, а $b \cdot (q+1) > a$. Виходячи з нерівності $b \cdot q \leq a$, зазначаємо, що є число $r = a - b \cdot q$, а звідси $a = bq + r$. Виконується тут і друга нерівність $r < b$. Дійсно, $b \cdot (q+1) > a$ або $b \cdot q + b > a$ звідки $b \cdot q + b > bq + r$. Значить $r < b$. Що і треба було довести. Тобто ми і в цьому разі знайшли числа q і r такі, що задовольняють нашим умовам.

Отже, для усіх можливих співвідношень між a і b ми знайшли числа q і r, які задовольняють умовам теореми, тобто ділення з остачею завжди існує.

Теорема. ***Дія ділення з остачею однозначна.***

Доведення. Нехай це не так, тобто нехай існують не одна, а дві пари чисел (q_1, r_1) і (q_2, r_2) такі, що виконується рівність $a = bq_1 + r_1$ і $a = bq_2 + r_2$. Звідси $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$. Тут можливі різні варіанти співвідношень між числами r_1 і r_2, q_1 і q_2.

Нехай $r_1 > r_2$. Тоді $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$(*). Оскільки $0 < r_1 < b$ і $0 < r_2 < b$, то і їхня різниця $0 < r_1 - r_2 < b$. У лівій же частині можливі такі співвідношення між q_1 і q_2: $q_2 > q_1$; $q_2 < q_1$, $q_2 = q_1$. Розглянемо їх по порядку.

Нехай $q_2 > q_1$. Тоді $q_2 - q_1 > 1$ і $b(q_2 - q_1) > b$. Тобто виходить, що в лівій частині рівності (*) число менше за b, а в правій – більше за b, а цього бути не може. Значить припущення, що теж $q_2 > q_1$ хибне.

Нехай $q_2 < q_1$. Тоді $q_2 - q_1 < 0$ і виходить, що ліва частина рівності (*) $r_1 - r_2 > 0$, а права частина – $b(q_2 - q_1) < 0$. І це припущення хибне.

Нехай $\underline{q_2 = q_1.}$ Тоді $q_2 - q_1 = 0$ і виходить, що ліва частина рівності (*) $r_1 - r_2 > 0$, а права частина $- b(q_2 - q_1) = 0$. І це припущення хибне.

Із цих трьох випадків виходить, що припущення $r_1 > r_2$ взагалі хибне.

Аналогічний результат ми отримаємо і у випадку, коли $r_1 < r_2$ (доведення аналогічне).

У випадку ж, коли $r_1 = r_2$ рівність (*) виконується лише за умови $q_2 = q_1$, чим і доводиться, що результат ділення з остачею однозначний.

В п р а в и.

Знайдіть найменше з чисел, при діленні на яке заданого числа a отримується остача r.

а) $a = 120$, $r = 12$;
б) $a = 81$, $r = 9$;
в) $a = 230$, $r = 14$;
г) $a = 300$, $r = 12$;
д) $a = 40$, $r = 4$;
є) $a = 160$, $r = 16$;
ж) $a = 115$, $r = 7$;
з) $a = 163$, $r = 19$;
і) $a = 246$, $r = 30$;
к) $a = 310$, $r = 22$.

Зразок розв'язання: $a = 664$, $r = 34$. *Підставивши ці значення у формулу* $a = bq + r$, *отримаємо рівність* $664 = bq + 34$, *звідки* $bq = 664 - 34$ 630. *Розклавши число* 630 *на множники, отримаємо рівність* $630 = 2{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7$. *Спираючись на умову* $r < b$, *утворимо з отриманих множників число, найближче до числа* 34, *яке б задовольняло зазначеній умові*. Таким є $5{\cdot}7 = 35$. *Значить b=35, а тоді q= 18. Відповідь:* 35.

Арифметичні дії становлять основу курсу математики початкової школи. Програмою початкового курсу математики передбачається вивчення дій додавання, віднімання, множення, ділення, ділення з остачею, вивчення властивостей цих дій, взаємозв'язку між ними.

Розглянутий матеріал є теоретичною основою для розуміння суті арифметичних дій і їхніх властивостей. Розуміння цієї суті дає можливість учителю побудувати цілісну логічну методичну систему вивчення програмного матеріалу. Зокрема, це дії з нулем, усвідомлення додавання як основної арифметичної операції, визначення інших арифметичних операцій, як похідних від додавання: віднімання, як знаходження невідомого доданка, множення, як знаходження суми декількох однакових доданків, ділення, як знаходження кількості однакових від'ємників із заданого числа.

Теоретико-множинний підхід у розкритті суті зазначених операцій відіграє операційну роль, а аксіоматичний підхід забезпечує доказову базу.

Розділ II. Системи числення

1. Історична довідка

У процесі історичного розвитку кожний народ зіштовхувався з необхідністю рахувати і підрахунки фіксувати. Ця необхідність була об’єктивною і зумовлена соціальними та життєвими потребами. Але у зв’язку з роз’єднаністю народів, кожний з них утворював свою систему. Так світ пізнав різні системи числення, найбільш відомі з яких римська, єгипетська, грецька, вавилонська, арабська, майя та ін.

Під *системою числення* розуміється сукупність знаків і правил, за допомогою яких можна записати і прочитати довільне ціле невід’ємне число і яка відповідає таким умовам:

а) будь-яке число однозначно визначається в заданій системі;

б) числа заданої системи можна між собою порівнювати;

в) алгоритми операцій над числами в заданій системі взаємопов’язані між собою.

Усі наявні системи можна поділити на дві групи: позиційні і непозиційні.

Непозиційні – це такі, у яких значення цифри не залежить від місця, яке вона займає в запису числа. У непозиційній системі використовуються декілька знаків (цифр), які позначають певні числа і які мають відповідне позначення. За допомогою них і записується будь-яке число. Такі знаки-числа називаються *вузловими.*

Представником такої системи є, наприклад, римська система. Її основу складають знаки I, V, X, L, C, D, M, які є вузловими і які позначають відповідно числа 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Ця система була пов’язана з найбільш уживаним “інструментом” – рукою (I, V, X), з першими буквами латинських слів (centum – C, mille – 1000). Щоб записати число, римляни розбивали число на тисячі, півтисячі, сотні, півсотні, десятки, п’ятірки, одиниці. Наприклад, число 2868 записувалося MMDCCCLXVIII. До того ж у цій системі запис чисел спирався не тільки на символічні позначки, а й на дії між числами. Наприклад, якщо символ числа меншого значення ставився перед символом числа більшого значення, то записуване число утворювалося через віднімання попереднього від наступного, наприклад, XL (40), тобто L – X (50 – 10). А якщо символ числа меншого значення писався після символу числа більшого значення, то записуване число утворювалося через додавання попереднього до наступного, наприклад, LX (60), тобто L + X (50 + 10). Аналогічно і числа IV, VI, VII, … IX, XI і т.д. Але запис чисел у цій системі дуже громіздкий і створює значні труднощі при виконанні навіть простих арифметичних дій. З ускладненням математичних операцій потрібна була проста і зручна система числення. Тому римська система в певний період стала гальмувати розвиток математики і від неї наука відмовилась, хоча у деяких випадках ми ще використовуємо римські символи (наприклад, при нумерації розділів книги, століть тощо).

Непозиційною була і система числення у древніх греків. Числа від 1 до 9 вони позначали першими буквами алфавіту (α, β, γ, δ, …,θ). Для чисел 10, 20, 30, …, 80, 90 використовувалися наступні дев'ять літер (ι, κ, λ, μ, …, ς), а для чисел 100, 200, 300, … 900 – наступні дев'ять літер (ρ, ς, σ, …, ω).[1/] Так, число 423 записувалося як $\overline{\tau\kappa\gamma}$. Риска зверху ставилася, щоб відокремити число від слова. Ця система теж була дуже незручною. Наприклад, при порівнянні чисел неможливо побачити, що σ (300) у 10 разів більше за λ і у 100 разів більша за γ. Важко було і виконувати арифметичні дії. Наприклад, $\bar{\eta}(7) + \bar{\varepsilon}(5) = \overline{\iota\beta}(12)$. Були й інші недоліки, які гальмували розвиток обчислень і математики в цілому.

Разом із грецькими письменами та православною культурою така ж система перейшла і в нумерацію Русі, яка зберігалася майже до кінця XVII століття, хоч деякими деталями і відрізнялася від неї. Водночас уся Західна Європа давно вже користувалася більш зручною, так званою арабською десятковою системою. Причиною цього стало 240-річне татаро-монгольське панування. Після його розвалу вже наприкінці XVI

[1/] Зазначимо, що давньогрецький алфавіт відрізнявся від сучасного кількістю літер, їх було 27, нині ж – 25.

століття на Русі з’являються перші друковані книги. Запис чисел у них ще здійснювався в літерній (слов’янській) системі.

З розвитком стосунків між різними країнами, а також у зв’язку з бурхливим розвитком математичної науки виникла потреба заміни непозиційних систем більш зручними й уніфікованими системами. У цих пошуках математика звернулася до позиційних систем. Суть позиційної системи в тому, що один і той же знак (символ) може позначати різні числа залежно від місця цього знака (позиції) у запису числа. Місце, яке займає цифра в запису числа, називається розрядом. У позиційній системі кількість знаків обмежується певною кількістю. Порозрядний принцип запису числа означає, що якщо система базується на n знаках (цифрах), кожний з яких визначає певну кількість числових одиниць, то n одиниць певного розряду становлять одну одиницю наступного (вищого) розряду. Число n у цьому разі, називається *основою системи числення.*

Першою позиційною системою з відомих науці була шістдесяткова система, яку використовували в древньому Вавилоні. Вавилоняни використовували лише два клинописних знаки, один з яких позначав числа 1 і 60, а другий – 10 і 600. При запису чисел від 1 до 60 знаки для 1 до 10 повторювалися стільки разів, скільки в цьому числі одиниць та десятків, а числа кратні 60 від 60 до $59 \cdot 60$ позначали тими ж значками, які вказували лише множник біля 60.

Залишки шістдесяткової системи збереглися донині: 1 хвилина – 60 секунд, 1 година – 60 хвилин, $1^{\circ} = 60'$, $1' = 60''$ (для кутів).

Збереглися на сьогодні і залишки дванадцяткової системи числення, яка використовувалася певний час у стародавньому Єгипті: 12 місяців у році, $2 \cdot 12$ годин на добу. Число 12 називалося “дюжиною”.

Окрім основних видів (позиційної і непозиційної) систем, існує і так звана мішана система, яка містить у собі елементи декількох систем. Прикладом такої є система вимірювання часу. Століття – десяткова система; рік, доба – дванадцяткова; година, хвилина – шістдесяткова; долі секунди – десяткова.

Але найбільшого поширення здобула позиційна десяткова система числення. Своїм корінням вона поринає в далеку давнину. Ще видатний давньогрецький учений Архімед у III столітті до нашої ери розробив систему числення, яка ґрунтується на числі 10. Вона давала можливість за допомогою невеликої кількості знаків записувати будь-яке велике число.

У сучасному вигляді десяткова система склалася приблизно в VI столітті нашої ери в Індії. У цей час в Індії панували араби, тому цю десяткову систему часто називають арабською. Значним досягненням індійської математичної думки було введення спеціального знака для позначення нуля. Це внесло кардинальні зміни в запис числа і десяткова система остаточно сформувалася в такому вигляді, якою ми її знаємо сьогодні.

Важливим кроком у розвитку російської математичної науки було видання в Росії книжки Леонтія Магницького "Арифметика, сиречь наука числительная". Вона була видана в 1703 році слов'янською мовою, але розрахунки в ній виконувалися вже в позиційній десятковій системі. Тривалий час ця книга була настільною книгою всіх освічених людей Росії і стала причиною швидкого переходу математики в Росії на індійську десяткову систему числення.

На сьогодні, у зв'язку з розвитком технічних засобів обчислень, виникли й інші штучні системи числення. Однією з найуживаніших із них є двійкова система. Вона складається лише з двох цифр 0 і 1. Це зручно не лише з позицій економності (лише два знаки), але й тому, що відповідає технічним вимогам електронної обчислювальної техніки, яка живиться електричним струмом (струм іде – 1, струм не йде – 0). Теоретично в деяких розрахунках разом із двійковою системою використовується і вісімкова система, яка базується на 8 цифрах від 0 до 7. Взагалі ж основою позиційної системи числення може бути будь-яке число d. Знаки від 0 до числа d називаються цифрами заданої числової системи.

2. Алгоритми операцій із числами в різних числових системах

Одним із важливіших питань будь-якої системи числення є питання запису чисел. Розкриття його важливе не тільки з погляду запису числа як такого, але й з позицій порівняння чисел (причому як писемного, так і зорового), з позицій технології виконання дій тощо.

<u>*Означення 1.*</u> ***Запис виду*** $\boldsymbol{a_n \cdot d^n + a_{n-1} \cdot d^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot d^2 + a_1 \cdot d + a_o}$ ***будемо називати многочленом, розташованим за спадними степенями числа d.***

<u>*Теорема.*</u> ***Будь-яке натуральне число N можна представити у вигляді многочлена, розташованого за спадними степенями основи системи числення, коефіцієнтами якого є однозначні числа або нулі.***

Доведення. Нехай задані натуральне число N і основа системи числення число d. Розділимо число N на d з остачею. Отримаємо $N = q_1 d + r_1$ (**1**). Якщо $q_1 < d$, то представлення закінчене. Якщо ж $q_1 \geq d$, то знов поділимо q_1 на d з остачею. Одержимо $q_1 = q_2 d + r_2$, і підставимо у (**1**), отримаємо $N = (q_2 d + r_2)d + r_1 = q_2 d^2 + r_2 d + r_1$ (**2**). Якщо $q_2 < d$, то представлення закінчене. Якщо ж $q_1 \geq d$, то знов поділимо q_2 на d з остачею. Одержимо $q_2 = q_3 d + r_3$ і підставимо у (**2**). Одержимо: $N = (q_3 d + r_3)d^2 + r_2 d + r_1 = q_3 d^3 + r_3 d^2 + r_2 d + r_1$. І так доти, пір, поки q_n не стане менше за d. А це рано чи пізно станеться, тому що з кожним кроком число q_i зменшується, а, як відомо, натуральний ряд чисел обмежений знизу числом 1. У результаті будемо мати:

$$N = q_n d^n + r_n d^{n-1} + r_{n-1} d^{n-2} + \ldots + r_3 d^2 + r_2 d + r_1 \ (\mathbf{3}).$$

Числа q_n і r_i будуть однозначними, тому що згідно нашій умові $q_n < d$, а згідно з умовами ділення з остачею, остача менша за дільник, тобто $r_i < d$.

Виходячи з теореми, натуральне число в десятковій системі числення буде мати такий вигляд: $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + {} + a_1 \cdot 10 + a_o$; $a_i < 10$, $i = 1, 2, \ldots$ Але такий запис натуральних чисел дуже громіздкий. Спростити його дозволяє позиційність системи числення. Завдяки їй множник 10^k замінюється місцем у числі (позицією), яке посідає доданок $a_k \cdot 10^k$, замість доданка записується тільки коефіцієнт a_k. Місце, яке він посідає в числі, називається розрядом. Отже, натуральне число N записується у вигляді послідовно записаних коефіцієнтів $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_o$, що значно спрощує запис числа і виконання дій.

Доведена теорема до того ж дає ключ і до переведення чисел з одної системи числення в іншу. Наприклад, як перевести число 95 з десяткової системи у двійкову? Згідно з теоремою, виконаємо ділення числа 95 на 2 (основа системи числення є число 2). Одержимо: 93 = 46·2 + 1. Наступний крок: ділимо 46 на 2, одержимо: 46 =23·2+0. Аналогічно далі: 23 = 11·2 + 1, 11 = 5·2 +1, 5 = 2·2 + 1, 2 = 1·2 + 0. Остання частка q_n= 1, остання остача r_n = 0, передостання остача r_{n-1} = 1, їй передує – 1, перед нею – 1, перед нею – 0 і найперша остача – 1. Тоді натуральне число 93_{10} буде мати такий вигляд:

$$93_{10} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1,$$

або в спрощеній формі $93_{10}=1011101_2$. Наведемо ще один приклад, у формі практичного виконання ділення „драбинкою”:

$$\begin{array}{llllllll}
\underline{116} & | \underline{\quad 2} & & & & & & \\
\ \ 0 & \ \underline{58} & | \underline{\ \ 2} & & & & & \\
 & \ \ 0 & \ \underline{29} & | \underline{\ 2} & & & & \\
 & & \ \ 1 & \ \underline{14} & | \underline{\ 2} & & & \\
 & & & \ \ 0 & \ \underline{7} & | \underline{2} & & \\
 & & & & \ 1 & \ \underline{3} & | \underline{2} & \\
 & & & & & \ 1 & \ 1 &
\end{array}$$

тобто $116_{(10)} = 1110100_{(2)}$

Аналогічно переводяться числа в трійкову, п’ятіркову, вісімкову або будь-яку іншу систему числення. Щоб перевести число навпаки з будь-якої системи до десяткової, скористаємося тією ж теоремою. Наприклад, щоб перевести число 111000101 з двійкової системи до десяткової, запишемо його у вигляді многочлена $1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + \; + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 256 + 128 + 64 + 4 + 1 = 453$, тобто $111000101_2 = 453_{10}$

Покажемо, який вигляд мають числа деяких систем числення відносно десяткової? Вигляд цих чисел залежить від кількості використовуваних знаків.

Десяткова	двійкова	трійкова	вісімкова
0	0	0	0
1	1	1	1

2	10	2	2
3	11	10	3
4	100	11	4
5	101	12	5
6	110	20	6
7	111	21	7
8	1000	22	10
9	1001	100	11
10	1010	101	12
11...	1011 …	102…	13 …

Однією із складностей при переведенні чисел з будь-якої системи в десяткову є встановлення степеня n у першому доданку $a_n \cdot 10^n$. Найвищий степінь многочлена визначається за формулою $n = k - 1$, де k – кількість цифр у числі. Наприклад, у числі $1100011_{(2)}$ 7 розрядних знаків. Тому найвищий степінь n буде 6, тобто

$$1100011_{(2)} = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + \ldots + 1 = \ldots$$

Це зумовлене тим, що найменший степінь числа 2 тут є нуль.

У практичній обчислювальній роботі одне з головних місць посідають дії з числами. Смисл арифметичних операцій ми розглянули раніше.

Який же механізм цих операцій?

Розглянемо його в загальному вигляді з подальшою конкретизацією на прикладі.

Додавання

Нехай задані два натуральних числа з основою системи числення d: $\boldsymbol{a} = n_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$ і $\boldsymbol{b} = m_p \cdot d^p + m_{p-1} \cdot d^{p-1} + \ldots + m_1 \cdot d + m_0$. Тут можливі два випадки: коли $p = k$ і коли $p \neq k$. Наперед зазначимо, що випадок, коли $p \neq k$, легко ототожнюється з випадком, коли $p = k$. У цьому разі треба додати до числа з меншою кількістю одночленів одночлени, яких не вистачає з коефіцієнтами 0 зі степенями, яких у ньому немає, але є в числі з більшою кількістю одночленів. Тому будемо розглядати тільки випадок, коли $p = k$, тобто $\boldsymbol{b} = m_k \cdot d^k + m_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + m_1 \cdot d + m_0$. У ньому в так само можливі варіанти: 1) $n_i + m_i < d$ і 2) $n_i + m_i \geq d$.

Розглянемо перший випадок.

$\boldsymbol{a + b} = n_k\cdot d^k + n_{k-1}\cdot d^{k-1} + \ldots + n_1\cdot d + n_0 + m_k\cdot d^k + m_{k-1}\cdot d^{k-1} + \ldots + m_1\cdot d + + m_0 = (n_k + m_k)\cdot d^k + (n_{k-1} + m_{k-1})\cdot d^{k-1} + \ldots + (n_1 + m_1)\cdot d + (n_0 + m_0)$. Тобто, для того щоб додати два натуральних числа, треба додати числа їхніх відповідних розрядів. У десятковій системі це буде виглядати так: $\boldsymbol{a + b} = (n_k + m_k)\cdot 10^k + (n_{k-1} + m_{k-1})\cdot 10^{k-1} + \ldots + (n_1 + m_1)\cdot 10 + (n_0 + m_0)$.

Наприклад, 345 + 7253. Число 345 має на один розряд менше, ніж число 7253. Тому, щоб зрівняти кількість, розрядів запишемо його як 0345. Подамо це число у вигляді многочлена, тобто $0345 = 0\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 5$. Відповідно число 7253 подамо як $7\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + 3$. Згідно з отриманим алгоритмом сума $0345 + 7253 = (0+7)\cdot 10^3 + (3+2)\cdot 10^2 + (4+5)\cdot 10 + + (5+3) = 7\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + +9\cdot 10 + 8 = 7598$.

Дещо складніше виглядає додавання в другому варіанті, тобто коли $n_i + m_i \geq d$. Нехай $i = k - 2$, тоді наша сума $\boldsymbol{a + b}$ буде мати такий вигляд: $\boldsymbol{a + b} = n_k\cdot d^k + n_{k-1}\cdot d^{k-1} + n_{k-2}\cdot d^{k-2} + \ldots + n_1\cdot d + n_0 + m_k\cdot d^k + m_{k-1}\cdot d^{k-1} + m_{k-2}\cdot d^{k-2} + \ldots + m_1\cdot d + m_0 = (n_k + m_k)\cdot d^k + (n_{k-1} + m_{k-1})\cdot d^{k-1} + (n_{k-2} + m_{k-2})\cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 + m_1)\cdot d + (n_0 + m_0)$. Але $n_{k-2} + m_{k-2} \geq d$, тому її можна записати $n_{k-2} + m_{k-2} = d + r$, тому $(n_{k-2} + m_{k-2})\cdot d^{k-2} = (d + r)\cdot d^{k-2} = d^{k-1} + r\cdot d^{k-2}$. Підставивши отриманий вираз у попередній запис, отримаємо:
$\boldsymbol{a + b} = (n_k + m_k)\cdot d^k + (n_{k-1} + m_{k-1})\cdot d^{k-1} + d^{k-1} + r\cdot d^{k-2} + \ldots + (n_0 + m_0)$. Замінивши суми $n_i + m_i$ на r_i, отримаємо: $\boldsymbol{a + b} = r_k\cdot d^k + r_{k-1}\cdot d^{k-1} + d^{k-1} + r_{k-2}\cdot d^{k-2} + \ldots + r_1 d + r_0 = r_k\cdot d^k + (r_{k-1}\cdot d^{k-1} + d^{k-1}) + r_{k-2}\cdot d^{k-2} + r_1 d + r_0 = r_k\cdot d^k + (r_{k-1} + 1)\cdot d^{k-1} + r_{k-2}\cdot d^{k-2} + \ldots + r_1 d + r_0$. Як бачимо, у результаті додавання у цьому варіанті коефіцієнт попереднього одночлена $n_{k-1} + m_{k-1} = r_{k-1}$ збільшився на 1, а коефіцієнт наступного одночлена r_{k-2} виявився як різниця $(n_{k-2} + m_{k-2}) - d$. Отже, якщо в процесі додавання двох чисел сума деяких розрядів виявляється більша за основу системи числення, то сума сусідніх розрядів більшого порядку збільшується на 1, а число, яке відповідає цій сумі буде дорівнювати різниці цієї суми й основи системи числення. Наприклад, нехай треба додати числа 7348 і 581 у десятковій системі числення. Сума їх буде виглядати як $(7 + 0)\cdot 10^3 + (3 + 5)\cdot 10^2 + (4 + 8)\cdot 10 + \ldots + (8 + 1) = \ldots = 7\cdot 10^3 + 8\cdot 10^3 + +12\cdot 10 + 9$. Оскільки в розряді десятків сума розрядів склала число 12, що більше основи числення – числа 10, то коефіцієнт

попереднього розряду (сотень) збільшуємо на 1, а коефіцієнт розряду десятків буде дорівнювати різниці між сумою розрядів – числа 12 і основою системи числення – числом 10, тобто 12 – 10 = 2. Отже, отримане в результаті додавання число буде дорівнювати $7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 9$ або 7929.

Описаний механізм виконання операції додавання лежить і в основі одного з найбільш уживаних зручних способів додавання – додавання в стовпчик.

Аналогічно виконується додавання і в інших системах численнях. Але тут треба враховувати їхні особливості, для чого зручно мати перед очима невеличку табличку. Наприклад, для двійкової системи треба враховувати, що $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 10$, $1 + 1 + 1 = 11$, $1 + 1 + 1 + 1 = 100$ і т.д.

Наприклад, додамо числа 110010110 + 100111101.

$$\begin{array}{r} {}_{+}\,110010110 \\ \underline{\;100111101} \\ 1011010011 \end{array}$$

Аналогічно, виконуючи додавання, наприклад, у трійковій системі, треба знати, що $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 10$, $2 + 2 = 11$, $1 + 2 + 1 = 11$, $2 + 2 + 1 = 12$, $0 + 2 = 2$, ...

Віднімання

Нехай задані два натуральних числа $\boldsymbol{a} = n_k \prec d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$ і $\boldsymbol{b} = m_p \cdot d^p + m_{p-1} \cdot d^{p-1} + \ldots + m_1 \cdot d + m_0$. Відповідно до умови операції віднімання, різниця $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ можлива лише тоді, коли $\boldsymbol{a}$ ¤ $\boldsymbol{b}$. Але оскільки $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ є окремим випадком, зосередимося на випадку, коли $\boldsymbol{a}$ ¤ $\boldsymbol{b}$. Згідно з означенням, віднімання є дією, протилежною додаванню. Тому технологія виконання дії віднімання тісно пов'язана з технологією виконання дії додавання. У результаті аналогічних додаванню перетворень отримаємо такий вираз:

$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (n_k - m_k) \cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1}) \cdot d^{k-1} + (n_{k-2} - m_{k-2}) \cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 - m_1) \cdot d + (n_0 - m_0)$. Якщо n_i ¤ m_i для всіх i, то операція віднімання виконується просто: цифра кожного розряду числа $\boldsymbol{b}$ віднімається від відповідної цифри розряду числа $\boldsymbol{a}$ і різниця записується на відповідному місці результату.

Дещо складніше виконується ця дія, коли для якихось значень i $n_i < m_i$. У цьому разі зробимо так: нехай у різниці $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ $n_{k-2} < m_{k-2}$. Тоді маємо: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (n_k - m_k)\cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1})\cdot d^{k-1} + (n_{k-2} - m_{k-2})\cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 - m_1)\cdot d + (n_0 - m_0) = (n_k - m_k)\cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1})\cdot d^{k-1} - d^{k-1} + d^{k-1} + {} + (n_{k-2} - m_{k-2})\cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 - m_1)\cdot d + (n_0 - m_0) = (n_k - m_k)\cdot d^k + {} + [(n_{k-1} - m_{k-1})\cdot d^{k-1} - d^{k-1}] + [(n_{k-2} - m_{k-2})\cdot d^{k-2} + d^{k-1}] + \ldots + (n_1 - m_1)\cdot d + {} + (n_0 - m_0) = (n_k - m_k)\cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1} - 1)\cdot d^{k-1} + [(n_{k-2} - m_{k-2})\cdot d^{k-2} + \ldots + d\cdot d^{k-2}] + \ldots + (n_1 - m_1)\cdot d + (n_0 - m_0) = (n_k - m_k)\cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1} - 1)\cdot d^{k-1} + \ldots + (d + n_{k-2} - m_{k-2})\cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 - m_1)\cdot d + (n_0 - m_0)$. Оскільки ж $d > m_i$, будь-яка сума $d + n_i > m_i$. Тому різниця $d + n_i - m_i$ завжди існує, а оскільки $n_i < m_i$, то $d + n_i - m_i < d$, тобто отримане число вписується у нумерацію заданої системи числення.

Таким чином, щоб виконати віднімання в цьому разі, треба до n_i додати основу системи числення число d, відповідно зменшивши попереднє число n_{i+1} на одиницю. Якщо $n_{i+1} = 0$, то n_{i+2} треба зменшити на 1.

Наприклад, віднімемо в десятковій системі від числа 2748 число 583. Аналіз цих чисел показує, що у від'ємного числа 2748 розряд десятків менший за розряд десятків числа 583. Тоді, згідно з виведеним правилом віднімання, виконаємо так:
$2748 - 583 = (2 - 0)\cdot 10^3 + (7 - 5)\cdot 10^2 + (4 - 8)\cdot 10 + (8 - 3) = 2\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + (4 - 8)\cdot 10 + 5 = 2\cdot 10^3 + (2 - 1)\cdot 10^2 + +(10 + 4 - 8)\cdot 10 + 5 = 2\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 5 = 2165$. Віднімання в стовпчик виглядає так:

$$\begin{array}{r} -\,2748 \\ \underline{583} \\ 1165 \end{array}$$

Аналогічно виконується віднімання і в будь-якій системі числення. Наприклад, у двійковій. Нехай нам треба відняти 1100101110 – 10011010. Найбільш легко для розуміння проілюструвати це в стовпчик. Для цього треба знати, що $0 - 0 = 0$, $1 - 0 = 1$, $1 - 1 = 0$, $10 - 1 = 1$. $11 - 1 = 10$, $100 - 1 = 11$, $1000 - 1 = 111$, $10000 - 1 = 1111$.

$$\begin{array}{r} -\,1100101110 \\ \underline{10011010} \\ 1010010100 \end{array}$$

Або ще такий приклад:

$$\begin{array}{r} -\,110000111 \\ \underline{1110111} \\ 100010000 \end{array}$$

Аналогічно і для трійкової системи. Тут теж треба знати, що $0 - 0 = 0$, $1 - 0 = 1$, $1 - 1 = 0$, $2 - 1 = 1$, $2 - 2 = 0$, $10 - 1 = 2$, $10 - 2 = 1$, $11 - 2 = 2$, $20 - 1 = 12$, $20 - 2 = 11$, $100 - 1 = 22$, $100 - 2 = 21$, $100 - 10 = 20$. Це легко вивести з таблиці додавання, яку кожний може скласти сам.

Наведемо приклад. Нехай нам треба відняти в трійковій системі $221201 - 12012$. Найбільш зрозуміло це робити в стовпчик.

$$\begin{array}{r} \_\,221201 \\ \underline{12012} \\ 202112 \end{array}$$

Множення

Механізм виконання множення натуральних чисел дещо складніший, ніж додавання і віднімання, але він будується на тих же основах. Розглянемо його.

За одним із означень, за яким множення розглядається в початкових класах, ця операція представляється як процес знаходження суми декількох однакових доданків, тобто $n + n + \ldots + n$ з m доданків і записується $n{\cdot}m$. Для спрощення добутки однозначних чисел зібрані в спеціальній таблиці (*таблиці множення*). Спираючись на неї, розглянемо множення багатозначних чисел.

Нехай задані два натуральних числа:
$\boldsymbol{a} = n_k{\cdot} d^k + n_{k-1}{\cdot}d^{k-1} + \ldots + n_1{\cdot}d + n_0$ і $\boldsymbol{b} = m_p{\cdot}d^p + m_{p-1}{\cdot}d^{p-1} + \ldots + m_1{\cdot}d + m_0$.
Утворимо їх добуток $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (n_k{\cdot} d^k + n_{k-1}{\cdot}d^{k-1} + \ldots + n_1{\cdot}d + n_0){\cdot}(m_p{\cdot}d^p + m_{p-1}{\cdot}d^{p-1} + \ldots + m_1{\cdot}d + m_0) =$
$= n_k{\cdot}d^k{\cdot}m_p{\cdot}d^p + n_{k-1}{\cdot}d^{k-1}{\cdot}m_p{\cdot}d^p + \ldots + n_1{\cdot}d{\cdot}m_p{\cdot}d^p + n_0{\cdot}m_p{\cdot}d^p + n_k{\cdot}d^k{\cdot}m_{p-1}{\cdot}d^{p-1} +$
$+ n_{k-1}{\cdot}d^{k-1}{\cdot} m_{p-1}{\cdot}d^{p-1} + \ldots + n_1{\cdot}d{\cdot} m_{p-1}{\cdot}d^{p-1} + n_0{\cdot} m_{p-1}{\cdot}d^{p-1} + \ldots + n_k{\cdot} d^k{\cdot}m_1{\cdot}d +$
$+ n_{k-1}{\cdot}d^{k-1}{\cdot}m_1{\cdot}d + \ldots + n_1{\cdot}d{\cdot}m_1{\cdot}d + n_0{\cdot}m_1{\cdot}d + n_k{\cdot}d^k{\cdot}m_0 + n_{k-1}{\cdot}d^{k-1}{\cdot}m_0 + \ldots +$
$n_1{\cdot}d{\cdot}m_0 + + n_0{\cdot}m_0 = n_k {\cdot}m_p{\cdot}d^{k+p} + \ldots + n_{k-1}{\cdot}m_p{\cdot}d^{k+p-1} + \ldots + n_1{\cdot}m_p{\cdot}d^{p+1} + n_0{\cdot}m_p{\cdot}d^p +$
$n_k{\cdot}m_{p-1}{\cdot}d^{p+k-1} + \ldots + n_{k-1}{\cdot}m_{p-1}{\cdot}d^{p+k-2} + \ldots + n_1{\cdot}m_{p-1}{\cdot}d^p + n_0{\cdot}m_{p1}{\cdot}d^{p-1} + \ldots + n_k{\cdot}m_1{\cdot} d^{k+1}$
$+ n_{k-1} {\cdot}m_1{\cdot}d^k + \ldots + n_1{\cdot}m_1{\cdot}d^2 + n_0{\cdot}m_1{\cdot}d + n_k{\cdot}m_0{\cdot}d^k + n_{k-1}{\cdot}m_0{\cdot}d^{k-1} + \ldots +$
$n_1{\cdot}m_0{\cdot}d + n_0{\cdot}m_0 = n_k {\cdot}m_p{\cdot}d^{k+p} + (n_{k-1}{\cdot}m + n_k{\cdot}m_{p-1}){\cdot}d^{p+k-1} + (n_{k-1}{\cdot}m_{p-1} + +n_k{\cdot}m_{p-}$

$_2 + n_{k-2} \cdot m_p) \cdot d^{p+k-2} + \ldots + (n_0 \cdot m_p + n_1 \cdot m_{p-1}) \cdot d^p + (n_k \cdot m_0 + n_{k-1} \cdot m_1) \cdot d^k + \ldots + (n_0 \cdot m_1 + n_1 \cdot m_0) \cdot d + n_0 \cdot m_0.$

Утворений у результаті вказаних перетворень вираз і є алгоритмом операції множення. Розглянемо його на конкретному прикладі множення двох чисел у десятковій системі. Перемножимо числа 748 і 213. Для цього представимо їх у вигляді многочленів.

$748 = 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8,\qquad 213 = 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 3.$

$748 \cdot 213 = (7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8) \cdot (2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 3) = 14 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 21 \cdot 10^2 + + 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10 + 16 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 24.$

Перетворивши двозначні коефіцієнти многочлена в однозначні по типу $14 = 1 \cdot 10 + 4$, отримаємо такий многочлен:

$1 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 10^3 + + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 4 = 1 \cdot 10^5 + +4 \cdot 10^4 + (7+2+8+1) \cdot 10^3 + (1+4+1+6) \cdot 10^2 + (2+8+2) \cdot 10 + 4 = 1 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 18 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10 + + 4 = 1 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4 = \quad = 1 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4 = 159324.$

Але такий метод множення надто вже громіздкий. Тому на практиці користуються більш зручною формою множення “в стовпчик”. Суть його в тому, що співмножники записуються один над одним і по черзі відбувається множення кожного розряду одного числа на розряди іншого. При цьому, при переході множення з одного розряду на інший, добуток зміщується на один розряд вліво, що відповідає збільшенню степеня основи *d* на одиницю. Попередній приклад у цьому разі буде мати такий вигляд:

```
   748
   213
  ----
  2244
  748
 1496
------
159324
```

Зазначимо, що якщо якийсь співмножник закінчується числом 0, то множення на нього не виконується, бо буде в результаті нуль, тому множення відбувається незважаючи на нього, а в результаті він дописується в розряді одиниць.

Аналогічно виглядає множення і в інших системах числення. Наведемо приклад множення у двійковій системі чисел 10110110 і 1010111. Тут треба лише пам'ятати, що $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$ та таблицю додавання.

```
     ×10110110
       1010111
   -----------
      10110110
     10110110
    10110110
  10110110
10110110
--------------
11110111011010
```

Ділення

Операція ділення базується на загальному означенні і видається на практиці найбільш складною. Розглянемо її в декілька етапів.

1. *Ділення однозначного числа на однозначне.* Нехай задані два числа ***a*** і ***b***, і $a = \underbrace{b+b+..b}_{q}+r$. Тобто $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}q + r$. Це означає, що число ***b*** можна відняти від числа ***a*** q разів і при цьому залишиться остача $r < \boldsymbol{b}$. Дія, за допомогою якої ми встановлюємо, скільки разів можна відняти число ***b*** від числа ***a***, тобто скільки разів число ***b*** міститься в числі ***a*** – і є операцією ділення. При цьому, якщо число $r = 0$, то говорять, що число ***a*** ділиться на число ***b*** цілком, якщо ж $r \neq 0$, то говорять, що число ***a*** ділиться на число ***b*** з остачею.

2. *Ділення багатозначного числа на однозначне.* Нехай задано два числа ***a*** і ***b***, де число ***b*** однозначне, тобто $1 \leq b \leq d$, де

$$\boldsymbol{a} = n_k \cdot d^{k} + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \quad n_{k-1} \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0.$$

Розділимо число ***a*** на число ***b***, виходячи при цьому з властивості, "щоб розділити суму на число, треба розділити кожний доданок на це число". Окрім цього, ми знаємо, що ділення є дія, зворотна до множення. Оскільки множення ми виконуємо, починаючи з меншого розряду до більшого, то ділення будемо виконувати навпаки. Тобто спочатку розділимо на $\boldsymbol{b}$ розряд $n_k \cdot d^k$. Тут можливі три випадки: а) n_k ⌑ b, б) $n_k < b$ і в) $n_k \vdots b$.

Розглянемо спочатку випадок а) n_k ⌑ b. Тоді розділимо n_k на b з остачею: $n_k = bq_k + r_k$, тоді $\boldsymbol{a} = (bq_k + r_k) \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0 = bq_k \cdot d^k + r_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + n_{k-2} \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$. (*) Об'єднаємо в групу $r_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} = (r_k \cdot d + n_{k-1}) \cdot d^{k-1}$. Оскільки $r < b < d$, то $r_k \cdot d + n_{k-1} > b$. Розділимо це число на b з остачею. Отримаємо $r_k \cdot d + n_{k-1} = b \cdot q_{k-1} + r_{k-1}$. Підставимо цей вираз у (*). Отримаємо:

$\boldsymbol{a} = bq_k \cdot d^k + (b \cdot q_{k-1} + r_{k-1}) \cdot d^{k-1} + n_{k-2} \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0 = bq_k \cdot d^k + b \cdot q_{k-1} \cdot d^{k-1} + r_{k-1} \cdot d^{k-1} + n_{k-2} \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$. (**) Аналогічно об'єднаємо в групу наступну пару доданків $r_{k-1} \cdot d^{k-1} + n_{k-2} \cdot d^{k-2} = (r_{k-1} \cdot d + n_{k-2}) \cdot d^{k-2}$. І знов на тих же умовах $r_{k-1} \cdot d + n_{k-2} > b$. Розділимо його на b з остачею. Отримаємо: $r_{k-1} \cdot d + n_{k-2} = b \cdot q_{k-2} + r_{k-2}$. Підставимо його у (**) і отримаємо: $bq_k \cdot d^k + b \cdot q_{k-1} \cdot d^{k-1} + (r_{k-1} \cdot d + n_{k-2}) \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0 = bq_k \cdot d^k + b \cdot q_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + (b \cdot q_{k-2} + r_{k-2}) \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0 = bq_k \cdot d^k + b \cdot q_{k-1} \cdot d^{k-1} + b \cdot q_{k-2} \cdot d^{k-2} + r_{k-2} \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$. І так до останнього розряду. В остаточному вигляді цей многочлен буде мати вигляд $\boldsymbol{a} = b \cdot q_k \cdot d^k + b \cdot q_{k-1} \cdot d^{k-1} + b \cdot q_{k-2} \cdot d^{k-2} + b \cdot q_{k-3} \cdot d^{k-2} + \ldots + b \cdot q_1 \cdot d + bq_0 + r_0 = \boldsymbol{b} \cdot (q_k \cdot d^k + q_{k-1} \cdot d^{k-1} + q_{k-2} \cdot d^{k-2} + q_{k-3} \cdot d^{k-2} + \ldots + q_1 \cdot d + q_0) + r_0$, де $\boldsymbol{a}$ – ділене, $\boldsymbol{b}$ – дільник, $q_k \cdot d^k + q_{k-1} \cdot d^{k-1} + q_{k-2} \cdot d^{k-2} + q_{k-3} \cdot d^{k-2} + \ldots + q_1 \cdot d + q_0$ – частка і r_0 – остача. Якщо $r_0 \neq 0$, то маємо ділення з остачею, а якщо $r_0 = 0$, то маємо ділення без остачі, тобто

$$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = q_k \cdot d^k + q_{k-1} \cdot d^{k-1} + q_{k-2} \cdot d^{k-2} + q_{k-3} \cdot d^{k-2} + \ldots + q_1 \cdot d + q_0.$$

Тепер звернемося до випадку б) $n_k < b$. Об'єднаємо в групу перші два розряди $n_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} = (n_k \cdot d + n_{k-1}) \cdot d^{k-1}$. Оскільки $n_k < b < d$, то число $n_k \cdot d + n_{k-1} > b$, а тому розділимо його на $\boldsymbol{b}$ з остачею. Отримаємо: $n_k \cdot d + n_{k-1} = b \cdot q_{k-1} + r_{k-1}$. Підставивши в $\boldsymbol{a}$, одержимо:

$$\boldsymbol{a} = (bq_{k-1} + r_{k-1}) \cdot d^{k-1} + \ldots + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$$

і далі як у попередньому випадку.

У випадку ж в) низка відповідних перетворень приводить до випадку а) або випадку б).

Отриманий висновок дає нам алгоритм виконання ділення.

Розглянемо конкретний приклад у десятковій системі. Розділимо, наприклад, число 7344 на 6.

$7344 = 7\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 4\cdot10 + 4$. $7 = 6\cdot1 + 1$, тому $7344 = (6\cdot1 + 1)\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 4\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + (1\cdot10^3 + 3\cdot10^2) + 4\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + (1\cdot10 + 3)\cdot10^2 + 4\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 13\cdot10^2 + 4\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + (1\cdot10^2 + 4\cdot10) + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + 14\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + (6\cdot2 + 2)\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + 6\cdot2\cdot10 + (2\cdot10 + 4) = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + 6\cdot2\cdot10 + 24 = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + 6\cdot2\cdot10 + 6\cdot4 = 6\cdot(1\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 2\cdot10 + 4) = 6\cdot1224$.

Отже, $7344 : 6 = 1224$.

Така форма ділення надто громіздка, але вона визначає алгоритм значно простішої форми ділення “куточком”. Розглянемо той же приклад у такій формі ділення.

```
_7344 | 6
 6      1224
 --
_13
 12
 --
 _14
  12
  --
  _24
   24
   --
    0
```

Якщо ж число ***b*** багатозначне, то алгоритм виконання ділення такий же, як і для однозначного ***b***. Різниця лише в тому, що треба вибрати першу групу розрядів, яка буде найменшим діленим для числа ***b***. Наприклад, розділимо 13206 на 31.

```
_13206 | 31
 124     426
 ---
  _80
   62
   --
 _186
  186
  ---
    0
```

Аналогічно виконується ділення і в інших системах числення.

Покажемо це на прикладі ділення у двійковій системі числення.

Розділимо, наприклад, число 111101111 на 101101.

```
_111101111 | 101101
 101101      1011
  _01000011
     101101
   _0101101
     101101
        0
```

В п р а в и.

1. Перевести число 617 з десяткової системи у двійкову, трійкову та вісімкову системи.
2. Перевести числа а)11010011 б) 1000001101 в) 1010111111 з двійкової в десяткову систему.
3. Перевести число а) 122102 б) 10102 в) 21021 з трійкової до десяткової системи.
4. Перевести число 11100111001 з двійкової у п'ятіркову систему.
5. Перевести число 1021 з трійкової системи у двійкову.
6. Обчислити: а) 1101101 + 100011; б) 10111011 + 10001101;
   в) 10010101 – 11110101; г) 110100100 – 111011;
   д) 1001110 · 110111; є) 1011110 · 101101;
   ж) 10010000111 : 111101; з) 110111001 : 10101.
7. Обчислити: а) $10010110_2 + 2102_3 = x_8$ б) $127_8 + 112_3 = x_2$
   в) $1102_3 + 1011_3 = x_5$ г) $110100_2 - 222_3 = x_5$

Питання, розглянуті в розділі "Системи числення" забезпечують вчителю розуміння загального алгоритму виконання арифметичних дій і його використання в конкретних числових системах, зокрема, в десятковій. Окрім того цей матеріал має пряме відношення до математичних основ інформатики і забезпечує в ній розуміння математичної складової. Зокрема, усвідомлення алгоритму дій з числами у двійковій системі числення забезпечує розуміння операційної системи роботи комп'ютера.

Розділ III. Подільність невід’ємних цілих чисел

1. Відношення подільності

Як ми встановили раніше, віднімання є операцією, протилежною додаванню, а ділення – зворотною множенню. Але якщо для виконання віднімання числа $\boldsymbol{b}$ від числа $\boldsymbol{a}$ достатньо, щоб виконувалася умова $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$, то для ділення цього недостатньо. Для цього необхідно ще певні додаткові умови.

<u>*Означення.*</u> ***Якщо число*** *a* ***ділиться на число*** *b*, ***то відношення, у якому знаходяться ці числа, називається відношенням подільності.*** Вивчення відношення подільності, його властивостей та умов існування відіграє значну роль у теорії арифметики.

Вивчаючи операцію ділення в початкових класах, ми говоримо дітям, що число 8 на 4 ділиться, а на 5 не ділиться. Чому? Адже одна з умов, що 8 > 5, як і 8 > 4 виконується. Очевидно для пояснення цього факту умови “бути більше” замало. Треба ще якась умова. Вона легко випливає з означення операції множення і зворотної до неї – ділення.

<u>*Означення.*</u> ***Невід’ємне число*** *a* ***називається таким, що ділиться на натуральне число*** *b*, ***якщо існує таке невід’ємне число*** *q*, ***що*** $a = b \cdot q$. У цьому разі число a називається *діленим*, число b – *дільником*, а число q – *часткою*, і записується $a : b = q$.[1/]

Відношення подільності має такі властивості:

1. *Будь-яке натуральне число ділиться на 1.*

Для цього достатньо показати, що існує таке число q, що $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot q$. Дійсно, якщо $\boldsymbol{b} = 1$, а $q = \boldsymbol{a}$, то істинною буде рівність $\boldsymbol{a} = 1 \cdot \boldsymbol{a}$.

2. *Будь-яке натуральне число ділиться само на себе.*

Дійсно, якщо $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ і $q = 1$, то $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot 1$, і це істинно.

3. *Відношення подільності асиметричне, тобто* $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{a}$.

Дійсно, якщо $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, але тоді $\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a}$, тому $\boldsymbol{b}$ на $\boldsymbol{a}$ не ділиться, за винятком випадку, коли $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

4. *Відношення подільності транзитивне, тобто якщо* $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$ *і*

[1/] Якщо числа a і b знаходяться у відношенні подільності, то це записується $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$.

$b \vdots c$, *то* $a \vdots c$.

Дійсно, якщо $a \vdots b$, то існує q_1 таке, що $a = b \cdot q_1$. Якщо $b \vdots c$, то існує таке q_2, що $b = c \cdot q_2$. Підставивши цю рівність у попередню, отримаємо рівність $a = c(q_1 \cdot q_2)$. Замінивши добуток $q_1 \cdot q_2$ якимось числом p, отримаємо рівність $a = c \cdot p$, що означає, що $a \vdots c$.

5. *Якщо кожний доданок суми невід'ємних цілих чисел ділиться на одне і те ж натуральне число, то і вся сума ділиться на це натуральне число, тобто, якщо* $a \vdots d$, $b \vdots d$ *і* $c \vdots d$, *то і* $(a + b + c) \vdots d$.

Дійсно, якщо $a \vdots d$, то існує таке q_1, що $a = d \cdot q_1$; якщо $b \vdots d$, то існує таке q_2, що $b = d \cdot q_2$; якщо $c \vdots d$, то існує таке q_3, що $c = d \cdot q_3$. А звідси випливає, що $a + b + c = d \cdot q_1 + d \cdot q_2 + d \cdot q_3 = d \cdot (q_1 + q_2 + q_3) = d \cdot p$. А це означає, що $(a + b + c) \vdots d$.

6. *Якщо два невід'ємних цілих числа* a *і* b *діляться на натуральне число* d, *то і їхня різниця ділиться на це число* d.

Для визначеності приймемо, що $a > b$, тоді існує різниця $a - b$. Якщо $a \vdots d$, то існує таке q_1, що $a = d \cdot q_1$; якщо $b \vdots d$, то існує таке q_2, що $b = d \cdot q_2$. Тоді $a - b = d \cdot q_1 - d \cdot q_2 = d \cdot (q_1 - q_2) = d \cdot p$. Оскільки $a > b$, то $q_1 > q_2$, а тоді $q_1 - q_2 = p > 0$, тобто p – натуральне число. Значить означена різниця ділиться на число d.

7. *Властивість, обернена до властивостей 5 і 6, не виконується.*

8. *Якщо з декількох доданків невід'ємних цілих чисел один не ділиться на задане натуральне число, то і вся сума не буде ділитися на задане число.*

Дійсно, нехай невід'ємні цілі числа a і b діляться на натуральне число d, а число c не ділиться на число d. Тоді існують нату- ральні числа q_1 і q_2 такі, що $a = d \cdot q_1$ і $b = d \cdot q_2$. Припустимо, що $(a + b + c) \vdots d$, тоді виникає суперечність із властивістю 5. Тому наше припущення неправильне. Що і треба було довести.

Із цієї властивості випливає важливий наслідок: якщо $a = b \cdot q + r$, то $a \vdots b$ цілком тоді і тільки тоді, коли $r \vdots b$.

9. *Для того, щоб добуток декількох натуральних чисел ділився на задане натуральне число, достатньо, щоб хоч би один із*

співмножників ділився на це число.

Дійсно, нехай задані декілька натуральних чисел $\boldsymbol{a, b, c}, \dots, \boldsymbol{p}$. Одне з чисел, наприклад, $\boldsymbol{a}$ ділиться на натуральне число d. Тоді $\boldsymbol{a} = d \cdot q$, а значить $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \cdot \dots \cdot \boldsymbol{p} = d \cdot (q \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \cdot \dots \cdot \boldsymbol{p})$, що означає, що $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \cdot \dots \cdot \boldsymbol{p}) \vdots d$.

10. *Якщо добуток* $\boldsymbol{ac}$ *ділиться на добуток* $\boldsymbol{bc}$*, де* $\boldsymbol{c} \neq 0$*, то* $\boldsymbol{a}$ *ділиться на* $\boldsymbol{b}$.

Дійсно, за умовою знайдеться таке k, що $\boldsymbol{ac} = (\boldsymbol{bc}) \cdot k$, або $\boldsymbol{ac} = (k\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$. А звідси випливає, що $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$, тобто $\boldsymbol{a}$ ділиться на $\boldsymbol{b}$.

2. Чотири класи невід'ємних цілих чисел. Прості числа.

Нехай заданий ряд невід'ємних цілих чисел. Виходячи з властивостей 1 і 2, ми робимо висновок, що для будь-яких невід'ємних цілих чисел існують дільники. Розглянемо числа цього ряду з погляду кількості дільників. Для цього складемо невеличку таблицю:

Число	*Дільники*	*Кількість дільників*
0	Будь-яке натуральне число	Безліч
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3 і т.д.

Аналізуючи цю таблицю, приходимо до висновку, що всі натуральні числа можна розподілити на чотири класи відповідно кількості дільників.

1 *клас* – це числа, які мають безліч дільників. Цей клас складається з одного числа – числа 0.

2 *клас* – це числа, які мають один дільник. Цей клас теж складається з одного числа – числа 1.

3 *клас* – це числа, які мають два дільника. Такі числа називаються *простими*, а клас – *клас простих чисел.*

4 *клас* – це числа, які мають більше двох дільників. Такі числа називаються *складеними*, а клас – *клас складених чисел*.

Якщо проаналізувати всі класи з якісного погляду, то ми відмічаємо, що всі числа мають дільниками число 1 і само себе. Тому такі дільники посідають особливе місце в теорії подільності і мають назву *невласних дільників*. Усі інші дільники називаються *власними*.

В теорії подільності особливе місце посідають числа третього та четвертого класу. Важливим питанням тут є система розпізнавання класу числа. Тому ключове місце тут посідає теорема *про існування простого дільника в будь-якого натурального числа*.

<u>*Теорема 1.*</u> ***Найменший власний дільник будь-якого складеного числа є число просте, причому не більше кореня квадратного із заданого складеного числа.***

Доведення. Нехай $\boldsymbol{a}$ задане складене число, а p – його найменший власний дільник. Оскільки p – власний дільник, то $1 < p < \boldsymbol{a}$. Треба довести, що число p – просте. Оскільки число $p > 1$, то p або просте, або складене. Якщо б p було складеним, то воно б мало свій найменший власний дільник q такий, що $1 < q < p$. Оскільки ж $\boldsymbol{a} \vdots p$, а $p \vdots q$, то за властивістю транзитивності $\boldsymbol{a} \vdots q$. Але ж $q < p$, а ми виходили з того, що p – найменший. Суперечність. Значить наше припущення, що число p складене, хибне, тобто p – просте.

Тепер доведемо другу частину теореми, що цей найменший простий дільник не більше кореня квадратного від заданого складеного числа, тобто що $p \le \sqrt{a}$. Дійсно, оскільки p – дільник числа $\boldsymbol{a}$, то можна записати, що $\boldsymbol{a} = p \cdot b$. А оскільки дільник p – найменший, то $p \le b$. Помножимо обидві частини цієї нерівності на p, отримаємо $p \cdot p \le b \cdot p$, або $p^2 \le b \cdot p$, звідки $p \le \sqrt{a}$, що і треба було довести.

Ця теорема надає можливість практично розв'язати питання про належність заданого натурального числа до певного класу, тобто з'ясувати, задане натуральне число просте, чи складене. Механізм цього розв'язання розкривається такою теоремою:

<u>*Теорема 2.*</u> ***Якщо задане число*** n ***не ділиться ні на одне з простих чисел, не більших*** $\sqrt{n}$***, то саме число*** n ***– просте.***

Дійсно, нехай число n – складене. Тоді воно повинно мати власні дільники і серед них найменший простий p. Значить $n \vdots p$, де $p \le \sqrt{n}$. А це суперечить умові теореми, що n не ділиться ні на одне з простих чисел, не більших $\sqrt{n}$. Тому припущення, що число n складене – хибне.

<u>*Теорема 3.*</u> ***Якщо просте число*** p ***ділиться на деяке натуральне число*** $n \neq 1$, ***то воно співпадає з*** n.

Дійсно, якщо б $p \neq n$, то воно б мало окрім себе і 1 ще й третій дільник n, і було б складеним. А за умовою воно просте. Значить $p = n$.

<u>*Теорема 4.*</u> ***Будь-які два різні прості числа не можуть ділитися одне на одне***. Тобто якщо p і q два прості числа і, наприклад, $p > q$, то вони не діляться одне на одне.

Дійсно, q не ділиться на p, тому що воно менше за p, а p не ділиться на q тому, що p ділиться лише саме на себе і на 1, а $q \neq p$ і $p \neq 1$. Тому q не може бути дільником p. Що і треба було довести.

Питання встановлення класу числа в теорії арифметики посідає одне з головних місць. Тому вже на перших етапах розвитку математики вчені шукали способи встановлення класу числа, число ***a*** – просте чи складене. Одним із таких способів був спосіб, запропонований давньогрецьким математиком Ератосфеном ще в III столітті до нашої ери, що одержав назву "решето Ератосфена". Він полягає в тому, що треба "відсівати" з натурального ряду складені числа. Наприклад, щоб установити всі прості числа на відрізку натурального ряду від 1 до 200, треба виписати всі числа цього ряду по порядку, визначити найменше просте число 2 і далі викреслити в усьому відрізку всі числа кратні 2. Наступне в ряду число буде 3. Воно просте, тому залишивши його, викреслимо всі числа, кратні 3. Наступне залишилося невикресленим число 5. Воно просте. Залишивши його, викреслимо всі числа кратні 5. І так далі. У результаті такого "просіювання" невикресленими залишаться тільки прості числа цього числового відрізка.

Але цей спосіб дуже громіздкий і обмежений. Математика користується більш придатними для практики способами, які випливають із доведених вище теорем, тобто основаних на встановленні подільності заданого числа на просте число. Але тут одним із ключових постає питання: як без зайвих, часто громіздких обчислень встановити, чи ділиться задане число на певне просте число, чи ні?

Відповідь на це питання міститься у відповідних правилах, так званих *ознаках подільності*, за допомогою яких можна легко встановити подільність.

3. Ознаки подільності. Властивості простих чисел

Значна кількість ознак подільності випливає з так званої "загальної ознаки подільності", виведеної в XVII столітті французьким математиком Б. Паскалем, і яка у зв'язку з цим отримала назву "*загальної ознаки подільності Паскаля*". У чому ж її суть?

Нехай задане натуральне число

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a_n}\cdot 10^n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot 10^{n-1} + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot 10^{n-2} + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot 10 + \boldsymbol{a_0}$$

і якесь натуральне число d. Щоб відповісти на питання, чи ділиться задане число $\boldsymbol{n}$ на число d, виконаємо такі перетворення. Розділимо кожний степінь числа 10 на d з остачею. Отримаємо:

$10^n = dq_n + r_n$; $10^{n-1} = dq_{n-1} + r_{n-1}$; $10^{n-2} = dq_{n-2} + r_{n-2}$; … $10^1 = dq_1 + r_1$.

Отримані вирази підставимо у запис числа $\boldsymbol{n}$. Одержимо вираз:

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a_n}\cdot(dq_n + r_n) + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot(dq_{n-1} + r_{n-1}) + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot(dq_{n-2} + r_{n-2}) + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot(dq_1 + r_1) + \boldsymbol{a_0} =$
$= \boldsymbol{a_n}\cdot dq_n + \boldsymbol{a_n}\cdot r_n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot dq_{n-1} + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot r_{n-1} + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot dq_{n-2} + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot r_{n-2} + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot dq_1 + +\boldsymbol{a_1}\cdot r_1$
$+ \boldsymbol{a_0} = d\cdot(\boldsymbol{a_n}\cdot q_n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot q_{n-1} + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot q_{n-2} + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot q_1) + (\boldsymbol{a_n}\cdot r_n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot r_{n-1} + \quad +\boldsymbol{a_{n-2}}\cdot r_{n-2}$
$+ \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot r_1 + \boldsymbol{a_0})$.(**)

Виконавши дії в перших дужках, отримаємо, скажімо, число $\boldsymbol{Q}$, а в других дужках отримаємо число $\boldsymbol{R}$. Підставивши їх у попередній вираз, одержимо $\boldsymbol{n} = d\cdot\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R}$. Звідси випливає, що оскільки доданок $d\cdot\boldsymbol{Q}$ завжди ділиться на d, то число $\boldsymbol{n} \vdots d$ у тому і тільки в тому випадку, коли $\boldsymbol{R} \vdots d$. Тобто подільність числа $\boldsymbol{a}$ на задане число d зводиться до подільності числа $\boldsymbol{R}$ на число d, де r_i є остачі від ділення числа 10^i на число d. Це і є загальна ознака подільності Паскаля.

Приклад: Чи ділиться число 235634 на число 7? Запишемо число 235634 у вигляді многочлена, розташованого за спадними степенями числа 10. $235634 = 2\cdot10^5 + 3\cdot10^4 + 5\cdot10^2 + 6\cdot10^2 + 3\cdot10 + 4$. Тепер розділимо кожний степінь 10 на 7 з остачею: $10^5 = 14285\cdot7 + 5$; $10^4 = 1428\cdot7 + 4$; $10^3 = 142\cdot7 + 6$; $10^2 = 14\cdot7 + 2$; $10 = 1\cdot7 + 3$. Тоді $\boldsymbol{R} = 2\cdot5 + 3\cdot4 + 5\cdot6 + 6\cdot2 + 3\cdot3 + 4 = 77$. Число 77 ділиться на 7, тому і $235634 \vdots 7$.

Розглянемо тепер деякі найбільш уживані ознаки подільності.

Ознака подільності на 2. ***Будь-яке число** n **ділиться на 2 тоді і тільки тоді, коли розряд одиниць числа** n **є парне число або 0.***

Дійсно, нехай $\boldsymbol{a_0}$ (розряд одиниць числа $\boldsymbol{n}$) ділиться на 2. Оскільки всі остачі при діленні будь-якого степеня числа 10 на 2 дорівнюють 0, то $r_n = r_{n-1} = \ldots = r_1 = 0$, і $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a}_0$. А оскільки $\boldsymbol{a_0}$ ділиться на 2**,** то і саме число $\boldsymbol{n}$ ділиться на 2.

Навпаки, нехай число $\boldsymbol{n}$ ділиться на 2 ($d = 2$). Представимо число $\boldsymbol{n}$ у вигляді (**) (Див. попередню стор.). Цей вираз ділиться на 2. Тоді і вираз $(\boldsymbol{a_n}\cdot r_n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot r_{n-1} + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot r_{n-2} + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot r_1 + \boldsymbol{a_0}) \vdots 2$. Але оскільки всі $r_i = 0$, то цей вираз перетвориться в $\boldsymbol{a_0}$. Тобто $\boldsymbol{a_0}$ теж буде ділитися на 2.

Ознака подільності на 3. ***Будь-яке число п діляться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума цифр цього числа ділиться на 3.***

Дійсно, нехай сума цифр числа $\boldsymbol{n}$ ділиться на 3. Оскільки всі остачі при діленні будь-якого степеня числа 10 на 3 дорівнюють 1, то $r_n = r_{n-1} = \ldots = r_1 = 1$, і тоді $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a_n}\cdot1 + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot1 + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot1 + \boldsymbol{a}_0$, або $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{a_{n-1}} + \ldots + \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a}_0$, яке за умовою ділиться на 3. А оскільки і вираз $3\cdot(\boldsymbol{a_n}\cdot q_n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot q_{n-1} + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot q_{n-2} + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot q_1)$ ділиться на 3, то з цього випливає, що й саме число $\boldsymbol{n}$ ділиться на 3.

Навпаки, нехай задане число $\boldsymbol{n}$ ділиться на 3. Доведемо, що й сума цифр числа $\boldsymbol{n}$ ділиться на 3. Представимо число $\boldsymbol{n}$ у вигляді (**)**.** У цьому виразі $d = 3$. Тоді очевидно, що $3\cdot(\boldsymbol{a_n}\cdot q_n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot q_{n-1} + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot q_{n-2} + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot q_1) \vdots 3$, а тоді й $(\boldsymbol{a_n}\cdot r_n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot r_{n-1} + \boldsymbol{a_{n-2}}\cdot r_{n-2} + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot r_1 + \boldsymbol{a_0})$ повинно ділитися на 3. А оскільки при $d = 3$ усі $r_i = 1$, то вираз $(\boldsymbol{a_n}\cdot r_n + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot r_{n-1} + +\boldsymbol{a_{n-2}}\cdot r_{n-2} + \ldots$

$+ \boldsymbol{a_1}\cdot r_1 + \boldsymbol{a_0})$ набуває вигляду $\boldsymbol{a_n}\cdot 1 + \boldsymbol{a_{n-1}}\cdot 1 + \ldots + \boldsymbol{a_1}\cdot 1 + \boldsymbol{a_0} = \quad = \boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{a_{n-1}} + \ldots + \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_0}$, який ділиться на 3.

Аналогічна й ознака подільності на 9. Доведення теж аналогічне.

<u>*Аналогічно доводиться,*</u> що ***на 4 діляться числа, у яких подвоєний розряд десятків плюс розряд одиниць ділиться на 4.*** Звідси ж можна зробити й інший висновок: ***на 4 діляться числа, у яких число, що складається з розрядів десятків і одиниць, ділиться на 4.***

<u>*Так само доводиться й те, що*</u> ***на 5 діляться числа, у яких розряд одиниць є число 5 або 0.*** А ***на 25 діляться числа, які закінчуються на 00, 25, 50, 75.***

Як бачимо, встановлення подільності на числа 2, 3, 4, 5, 9, 25 досить просте. Проте, для інших чисел встановлення подільності буває таким громіздким, що легше просто розділити одне на інше, ніж виконати всю множину дій для обчислення $\boldsymbol{R}$. Ми це бачили на прикладі встановлення подільності числа 235634 на число 7. Щоб спростити цю процедуру, скористаємося дещо іншим підходом до встановлення подільності.

Нехай нам задано певне натуральне число $\boldsymbol{n}$. (Природно, що це число не менше, ніж двоцифрове, тобто $\boldsymbol{n} > 10$). Тому будь-яке з таких чисел можна представити у вигляді $\boldsymbol{n} = 10\cdot D + b$. (Наприклад, $2358 = 235\cdot 10 + 8$. Тут $D = 235$, $b = 8$). Виведемо ознаки подільності на прості числа 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31… Розв'язання цього питання з одного боку важливе тим, що воно необхідне для встановлення класу певного натурального числа $\boldsymbol{n}$, – воно просте, чи складене? А з іншого – подільність на складені числа випливає знову ж із подільності на прості.

<u>*Ознака подільності на 7.*</u> Нехай нам задане певне натуральне число $\boldsymbol{n}$. Представимо його у вигляді $\boldsymbol{n} = 10\cdot D + b$. Виконаємо такі перетворення: $\boldsymbol{n} = 10\cdot D + b = 7D + 3D + 6b + b - 6b = (7D + 7b) + +(3D - 6b) = 7(D + b) + 3(D - 2b)$. Доданок $7(D + b)$ завжди ділиться на 7. Значить подільність числа $\boldsymbol{n}$ на число 7 залежить від подільності числа $D - 2b$, де D – число десятків числа $\boldsymbol{n}$, а b – кількість одиниць. Отже, *натуральне число* $\boldsymbol{n}$ *ділиться на 7, якщо його кількість десятків мінус подвоєне число одиниць ділиться на 7*, тобто $(D - 2b) \vdots 7$. Наприклад, чи

ділиться на 7 число 623? $623 = 62\cdot10 + 3$. Значить $D = 62$, $b = 3$. Обчислимо: $62 - 2\cdot3 = 62 - 6 = 56$. $56 \vdots 7$, значить і $623 \vdots 7$.

У цьому прикладі ми встановили подільність на 7 відносно невеликого числа. А як же бути з великими числами, коли після виконання обчислення ми знов отримуємо число, за яким не можемо одразу встановити подільність? Цей спосіб і тут нам допомагає. Просто процедуру треба повторити. Наприклад, встановимо подільність на 7 числа 32081. $D = 3208$, $b= 1$. $3208 - 2\cdot1 = 3206 \Rightarrow 320 - 2\cdot6 = 308 \Rightarrow 30 - 2\cdot8 = 14$. $14 \vdots 7$, значить і $308 \vdots 7$, а звідси випливає, що і $3206 \vdots 7$, а тоді і $32081 \vdots 7$.

Отже, ознака подільності на 7 є $(D - 2b) \vdots 7$.

<u>*Ознака подільності на 11.*</u> Нехай задане число $\boldsymbol{n} = 10\cdot D + b$. Тоді $\boldsymbol{n} = 10\cdot D + b = 10\cdot D + D - D + b= 11\cdot D - (D - b)$. Звідси випливає, що *число* $\boldsymbol{n}$ *ділиться на 11, якщо* $(D - b) \vdots 11$. Наприклад, чи ділиться на 11 число 1023? $1023 \Rightarrow 102 - 3 = 99$. $99 \vdots 11$, значить і $1023 \vdots 11$.

<u>*Ознака подільності на 13.*</u> Нехай задане число $\boldsymbol{n} = 10\cdot D + b$. Будемо виходити з того, що якщо $\boldsymbol{n} \vdots 13$, то і $4\cdot\boldsymbol{n} \vdots 13$.

Тоді $4\cdot\boldsymbol{n} = 40\cdot D + +4b = 39\cdot D +D+ 4b = 39\cdot D + (D + 4b)$.

$39\cdot D$ завжди ділиться на 13. Звідси випливає, що *число* $\boldsymbol{n}$ *ділиться на 13, якщо* $(D + 4b) \vdots 13$. Наприклад, чи ділиться число 533 на 13? $533 \Rightarrow 53 +12 = 65$. $65 \vdots 13$, значить і $533 \vdots 13$.

<u>*Ознака подільності на 17.*</u> Нехай задане число $\boldsymbol{n} = 10\cdot D + b$. Будемо виходити з того, що якщо $\boldsymbol{n} \vdots 17$, то і $5\cdot\boldsymbol{n} \vdots 17$. Тоді $5\cdot\boldsymbol{n} = 50\cdot D + 5b = 50\cdot D + D - D + 5b= 51\cdot D - (D - 5b)$. $51\cdot D$ завжди ділиться на 17. Звідси випливає, що *число* $\boldsymbol{n}$ *ділиться на 17, якщо* $(D - 5b) \vdots 17$. Наприклад, чи ділиться число 612 на 17? $612 \Rightarrow 61 - 5\cdot2 = 51$. $51 \vdots 17$, значить і $612 \vdots 17$.

<u>*Ознака подільності на 19.*</u> Нехай задане число $\boldsymbol{n} = 10\cdot D + b$. Будемо виходити з того, що якщо $\boldsymbol{n} \vdots 19$, то і $2\cdot\boldsymbol{n} \vdots 19$. Тоді $2\cdot\boldsymbol{n} = 20\cdot D + 2b = 19\cdot D + D + 2b = 19\cdot D + (D + 2b)$. $19\cdot D$ завжди ділиться на 19. Звідси випливає, що *число* $\boldsymbol{n}$ *ділиться на 19, якщо* $(D + 2b) \vdots 19$. Наприклад, чи ділиться число 494 на 19?

$494 \Rightarrow 49 +2\cdot4 = 57$. $57 \vdots 19$, значить і $494 \vdots 19$.

Аналогічно виводяться ознаки подільності на: 23 $(7\cdot\boldsymbol{n}) \Rightarrow D + 7b$

$29\ (3\cdot \boldsymbol{n}) \vdots D + 3b$
$31\ (3\cdot \boldsymbol{n}) \vdots D - 3b$
$37\ (11\cdot \boldsymbol{n}) \vdots D - 11b$
$41\ (4\cdot \boldsymbol{n}) \vdots D - 4b$
і т.д.

Виведені ознаки подільності на основі теореми про визначення простого числа дають нам можливість легко встановити клас будь-якого натурального числа. Наприклад, число 617 просте чи складене? На основі теореми про існування простого дільника в будь-якого складеного числа ми визначаємо, що якщо це число складене, то його найменший простий дільник не більше $\sqrt{617} \approx 24$. Значить треба перевірити подільність цього числа на всі прості числа від 2 до 23. На основі ознак подільності встановлюємо, що 617 не ділиться ні на одне з простих чисел (ані на 2, ані на 3, ані на 5, ані на 7, ані на 11, ані на 13, ані на 17, ані на 19, ані на 23. Значить число 617 просте.

В п р а в и.

1. Використовуючи ознаки подільності, встановити, які з чисел діляться на 2, 3, 4, 5, 9, 25.

11220	125172	81765	136275	444444	36694
10044	113850	67032	121212	123123	36252
10008	765453	83172	121104	121134	85825
11344	140014	17017	201015	380128	91113

2. На які прості числа діляться числа: 399, 527, 1001,
713, 651, 2023,
493, 1771, 3367,
646, 3157, 697,
663, 663, 1045,
391, 1463, 53599.

3. Встановити клас указаних чисел:

317	831	612	527	611	621	1573	3698	59299
713	409	413	419	651	671	5681	4433	4669

911	913	919	459	479	499	901	1013	12111
439	449	459	677	679	697	811	1051	1271
757	857	957	673	773	873	313	831	481

Оскільки будь-яке складене число має прості дільники, то постає необхідність встановлення взаємозв'язку цих дільників з даним числом. Для цього розглянемо низку означень і теорем, які глибше розкривають деякі властивості простих чисел.

Означення. *Якщо число* ***a*** *ділиться на число* ***q*** *і число* ***b*** *ділиться на число* ***q****, то говорять, що число* ***q*** *є спільним дільником чисел* ***a*** і ***b***.

Означення. *Якщо числа* ***a*** *і* ***b*** *не мають спільних дільників, окрім 1, то вони називаються взаємно простими.*

Теорема 1. *Якщо натуральне число* ***a*** *не ділиться на просте число* ***p****, то числа* ***a*** *і* ***p*** *взаємно прості.*

Дійсно, нехай числа a і p окрім 1 мають ще спільний дільник q. Тоді $p \vdots q$. Але просте число p має лише два дільники 1 і p. Тому або $q = p$, або $q = 1$. Якщо б $q = p$, то і $a \vdots p$, що суперечить умові. Значить $q = 1$, тобто a і p взаємно прості.

Теорема 2. *Якщо добуток* ***ab*** *натуральних чисел* ***a*** *і* ***b*** *ділиться на натуральне число* ***m****, яке взаємно просте з* ***a****, то* ***b*** *ділиться на* ***m***.

Дійсно, оскільки ***ab*** ділиться на ***a*** і на ***m***, і ***a*** з ***m*** взаємно прості, то ***ab*** ділиться на ***am*** (згідно із властивістю відношення подільності 10, с. 39), а значить ***b*** ділиться на ***m***.

Теорема 3. *Якщо добуток двох натуральних чисел* ***a*** і ***b*** *ділиться на просте число* ***p****, то хоч би одне з них ділиться на* ***p***.

Оскільки добуток $\boldsymbol{a \cdot b}$ ділиться на ***p***, то ***p*** є спільним дільником числа $\boldsymbol{c = a \cdot b}$ і числа ***p***.

Припустимо, що число ***a*** не ділиться на ***p***. Тоді за теоремою (1) числа ***a*** і ***p*** взаємно прості. Згідно ж із попередньою теоремою (2), якщо ab ділиться на a і на p, а a з p взаємно прості, то b ділиться на p.

Теорема 4. *Якщо добуток декількох простих чисел ділиться на просте число, то це просте число дорівнює одному з співмножників діленого.*

Дійсно, нехай $M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$, де p_i – прості числа, і нехай $M \vdots q$, де q – теж просте число. Доведемо, що q – збігається з одним із співмножників p_i. Згідно з теоремою (3) хоч би одне з чисел p_1, p_2, p_3, …, p_n повинно ділитися на число q. Але ж усі p_i є прості числа, тобто такі, що діляться лише самі на себе і на 1. Оскільки ж $q \neq 1$ (бо воно просте), значить q збігається з якимось p_i.

<u>*Теорема 5.*</u> ***Будь-яке складене число можна представити у вигляді добутку простих множників, причому єдиним способом (не враховуючи порядку співмножників).***

Доведення цієї теореми передбачає дві частини: можливості представлення й одиничності.

Доведемо можливість. Нехай $\boldsymbol{n}$ – складене натуральне число. Тоді воно має власні дільники, і серед них найменший простий $\boldsymbol{p_1}$. Тоді $\boldsymbol{n = p_1 \cdot q_1}$. Якщо $\boldsymbol{q_1}$ – просте, то розклад числа закінчено. Якщо ж $\boldsymbol{q_1}$ складене, то воно так само має найменший простий дільник $\boldsymbol{p_2}$ такий, що $\boldsymbol{q_1 = p_2 \cdot q_2}$. Підставивши $\boldsymbol{q_1}$ в попередній вираз, отримаємо $\boldsymbol{n = p_1 \cdot p_2 \cdot q_2}$. Якщо $\boldsymbol{q_2}$ просте, то розкладання закінчене, якщо ж складене, то процес повториться знов і так доки число $\boldsymbol{q_n}$ не стане простим. А це буде обов'язково, бо з кожним наступним кроком число $\boldsymbol{q_i}$ буде зменшуватися, а натуральний ряд чисел обмежений знизу. Отже, число $\boldsymbol{n}$ буде мати вигляд $\boldsymbol{n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_n \cdot q_n}$, тобто число $\boldsymbol{n}$ представлене у вигляді добутку простих чисел.

Доведемо тепер, що розкласти на множники складене число $\boldsymbol{n}$ можна лише одним способом, якщо не враховувати порядок співмножників.

Виділимо в множині натуральних чисел підмножину таких складених чисел, які можна розкласти на прості множники декількома способами. Виберемо серед них *найменше* $\boldsymbol{n}$. Нехай це натуральне число $\boldsymbol{n}$ можна розкласти двома способами, тобто $\boldsymbol{n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m}$ і $\boldsymbol{n = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_k}$. Тоді $\boldsymbol{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_k}$. Права частина ділиться на просте число $\boldsymbol{q_1}$, значить і ліва повинна ділитися на $\boldsymbol{q_1}$. Тоді за теоремою, згідно з якою *якщо просте число* $\boldsymbol{p}$ *ділиться на деяке натуральне число* $n \neq 1$, *то воно збігається з* $\boldsymbol{n}$ (стор. 64), якесь $\boldsymbol{p_i}$ повинно ділитися на $\boldsymbol{q_1}$, а оскільки всі множники $\boldsymbol{p_i}$ прості, то $\boldsymbol{q_1}$ повинне збігатися з якимось p_i. Для визначеності нехай цим p_i буде p_1, тобто $p_1 = q_1$. Скоротимо обидві частини рівності добутків на p_1. Отримаємо рівність $p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m = q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_k$. Продовжуючи такі ж міркування й надалі, звільнимося від рівних співмножників і дійдемо стану, коли залишаться різні співмножники. Нехай це станеться на l-тому кроці. Тобто залишиться рівність $p_l \cdot \ldots \cdot p_m = q_l \cdot \ldots \cdot q_k = c$. Позначимо добуток $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{l-1} = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_l = d$. Тоді отримаємо рівність $c = n : d$, де $c < n$, оскільки число c є добутком лише частини співмножників числа n. Виходить, що число c є теж таким, що має різне розкладення, і воно менше за n, а ми виходили з того, що n – найменше. Протиріччя. Значить число c може мати лише одне розкладання на прості множники. А значить добуток числа c на число d, який дорівнює числу n, дає лише одне розкладання. Різниця може бути лише в порядку співмножників, але за комутативною властивістю множення це несуттєво.

Здебільшого в розкладанні складених чисел прості співмножники записуються в порядку збільшення. Такий запис $a = p_1^{\alpha} \cdot p_2^{\beta} \cdot \ldots \cdot p_n^{\omega}$, де $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$, називається *канонічним розкладанням числа* a.

Значення цієї теореми настільки велике, що вона отримала назву ***основної теореми арифметики.***

Аналізуючи натуральний ряд чисел з позицій приналежності їх до того чи іншого класу, ми відмічаємо, що в першому десятку налічується 4 простих числа: 2, 3, 5, 7. У другому десятку – теж чотири: 11, 13, 17, 19. У третьому десятку – вже два: 23 і 29. У четвертому – теж два: 31 і 37 і так далі. Чим далі ми будемо віддалятися від початку натурального ряду, тим рідше будемо натрапляти на прості числа. Так може наступити такий момент, що прості числа на якомусь закінчаться і далі вже будуть тільки складені? Відповідь на це питання досить важлива і до неї зверталися навіть у сиву давнину. Його закрив відомий давньогрецький математик і філософ Евклід, довівши наступну теорему.

Теорема (Евкліда). ***Множина простих чисел нескінченна.***

Щоб довести цю теорему, треба упевнитися, що скільки б простих чисел ми не взяли, завжди знайдеться ще одне просте число, яке відрізняється від усіх тих, які ми взяли.

Дійсно, візьмемо будь-яку кількість простих чисел 2, 3, 5, 7, … p і утворимо з них добуток $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot p$. Із цим добутком утворимо число $P = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot p + 1$. Якщо число P просте, то теорема доведена, оскільки ми знайшли ще одне просте число, яке відрізняється від усіх уже нам відомих. Якщо ж число $\boldsymbol{P}$ складене, то воно має найменший власний простий дільник $\boldsymbol{q}$. Доведемо, що цей простий дільник $\boldsymbol{q}$ не збігається з жодним із уже відомих нам простих чисел $\boldsymbol{p_i}$. Дійсно, якщо б цей дільник q збігався хоч би з одним з $\boldsymbol{p_i}$, то вийшло б, що $\boldsymbol{P} \vdots \boldsymbol{q}$, $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot p \vdots q$, тоді і число 1 повинно ділитися на $\boldsymbol{q}$. Але ж 1 не ділиться ні на яке число окрім себе. Суперечність. Значить число $\boldsymbol{q}$ не збігається з жодним із відомих простих чисел, тобто це нове просте число. Значить множина простих чисел нескінчена.

В п р а в и.

1. Довести, що різниця між квадратом числа, що не ділиться на 3, і одиницею ділиться на 3.
2. Довести, що якщо число не ділиться на 5, то його квадрат, збільшений або зменшений на 1, ділиться на 5.
3. Довести, що квадрат цілого числа або ділиться на 4, або при діленні на 4 дає в остачі 1.
4. Довести, що якщо кожне з двох натуральних чисел при діленні на 3 дає в остачі 1, то їхній добуток при діленні на 3 дає теж остачу 1.
5. Довести, що якщо одне з двох натуральних чисел при діленні на 3 дає остачу 1, а друге – остачу 2, то їхній добуток при діленні на 3 дає остачу 2.
6. Довести, що число, яке є квадратом натурального числа, або ділиться на 3, або при діленні на 3 дає остачу 1.
7. Довести, що якщо кожне з двох натуральних чисел при діленні на 4 дає остачу 1, то їхній добуток при діленні на 4 теж дає остачу 1.
8. Довести, що при будь-якому натуральному n виконується подільність:

а) $n^3 + 5n + 12 \vdots 6;$ є) $(2n-1)^3 - (2n-1) \vdots 24;$

б) $n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 24;$ ж) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \vdots 3$

в) $(2n-1)^2 - 1 \vdots 8;$ з) $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} \vdots 14;$

г) $n(n+1)^2 \vdots 12;$ і) $(2n+1)^2 - (2n-1)^2 \vdots 8;$

д) $n(n+1)(n+2) \vdots 6;$ к) $n^3 + 11n + 6 \vdots 6.$

4. Найменше спільне кратне

При розв'язанні багатьох задач, особливо в курсі математики середньої та старшої ланки школи, виникає необхідність знаходження чисел, які б ділилися на всі задані числа. Наприклад, при знаходженні спільного знаменника під час виконання додавання або віднімання звичайних дробів. Це питання розв'язується за допомогою такого поняття, як *найменше спільне кратне.*

Нехай задані два числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$. Якщо число $\boldsymbol{a}$ ділиться на число $\boldsymbol{b}$, то говорять, що $\boldsymbol{a}$ кратне $\boldsymbol{b}$, а число $\boldsymbol{b}$ – дільник числа $\boldsymbol{a}$. Так, оскільки число 0 ділиться на всі числа, то кажуть, що число 0 кратне будь-якому натуральному числу. Знайти число кратне $\boldsymbol{b}$, значить знайти число, яке ділиться на $\boldsymbol{b}$. Наприклад, для числа 4 кратними будуть 8, 12, 16, 20, …, тобто будь-яке число $4n$. А оскільки $\boldsymbol{n}$ може приймати безліч значень, то і число 4 має безліч кратних. Звичайно, це стосується не лише числа 4, а й будь-якого натурального числа.

Розглянемо ще один приклад. Визначимо кілька кратних для чисел 4 і 3. Для числа 4 кратними будуть 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, … Для числа 3 кратними будуть 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, … Аналізуючи ці два ряди кратних, ми стикаємося з фактом, що в обох рядах трапляються однакові числа: 12, 24, 36, … Ці числа є кратними і для 3, і для 4, тобто є спільними. Значить виходить, що для різних чисел має місце факт, що вони мають однакові, тобто спільні кратні. До того ж, оскільки ці множини нескінченні, і ми бачимо, що спільне кратне теж не одне, то є сенс уважати, що множина спільних кратних теж нескінченна, тобто не має смислу говорити про найбільше спільне кратне. Знизу ж ці обидві множини обмежені. Тому і множина спільних кратних обмежена знизу (див. аксіому найменшого числа). Тому обидва числа мають найменше спільне кратне.

Яке ж воно? Як його знаходити? Які його властивості? Де воно використовується? Усі ці запитання викликають певну зацікавленість, тому є смисл його і розглядати.

<u>*Означення.*</u> ***Найменшим спільним кратним декількох чисел називається число, яке ділиться на всі задані числа.*** Найменше спільне кратне (НСК) чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ позначають $K[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$. Наприклад, $K[3;4] = 12$.

Найменше спільне кратне декількох заданих чисел має такі властивості:

1. *Які б не були натуральні числа* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \ldots \boldsymbol{n}$, *завжди існує їхнє спільне кратне.*

Дійсно, найпростішим випадком тут може бути добуток цих чисел. Тоді за теоремою, яка наслідує основну теорему арифметики, випливає, що цей добуток ділиться на кожне з цих заданих чисел, а тому є їхнім спільним кратним.

2. *Якщо число* K *є спільним кратним чисел* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \ldots \boldsymbol{n}$, *то і добуток числа* K *на будь-яке натуральне число* p *буде спільним кратним цих чисел.*

Дійсно, якщо K – спільне кратне чисел $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \ldots \boldsymbol{n}$, то $K \vdots \boldsymbol{a}$, $K \vdots \boldsymbol{b}$, $K \vdots \boldsymbol{c}$, …, а тоді і $pK \vdots \boldsymbol{a}$, $pK \vdots \boldsymbol{b}$, $pK \vdots \boldsymbol{c}$, … Що і треба було довести. Звідси і випливає, що будь-які дані числа мають безліч спільних кратних. А за аксіомою найменшого числа серед них завжди є найменше. Ця властивість приводить до висновку про існування НСК для будь-якої кількості натуральних чисел.

3. *Будь-яке спільне кратне заданих чисел (у тому числі і НСК) не менше за найбільше з них.*

Дійсно, якщо задані числа $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, і при цьому $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{c}$, то і їх спільне кратне $K \geq \boldsymbol{a}$, оскільки $K \vdots \boldsymbol{a}$.

4. *Якщо одне з заданих чисел кратне всім іншим, то воно є НСК усіх цих чисел.* Тобто, якщо $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{d}$, то і $K[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}] = \boldsymbol{a}$.

Дійсно, оскільки $\boldsymbol{a}$ кратне чисел $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{d}$ і кратне самому собі, то воно є спільним кратним усіх цих чисел, а на основі попередньої властивості, виходячи з того, що $\boldsymbol{a}$ – найбільше із заданих чисел, то $\boldsymbol{a}$ є їхнє НСК.

5. *Будь-яке спільне кратне заданих чисел кратне і їхньому НСК.*

Нехай K – спільне кратне чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{k}$ – їхнє спільне кратне, а $\boldsymbol{q}$ – найменше спільне кратне. Необхідно довести, що $\boldsymbol{k} \vdots \boldsymbol{q}$**.** Припустимо, що це не так. Оскільки $\boldsymbol{q}$ – найменше спільне кратне, то $\boldsymbol{q \le k}$**.** Тоді розділимо $\boldsymbol{k}$ на $\boldsymbol{q}$ з остачею. Отримаємо $\boldsymbol{k = qm + r}$, де $\boldsymbol{r < q}$. Оскільки $k \vdots \boldsymbol{a}$ і $q \vdots \boldsymbol{a}$, то і $r \vdots \boldsymbol{a}$. Аналогічно $r \vdots \boldsymbol{b}$ і $r \vdots \boldsymbol{c}$. А значить $\boldsymbol{r}$ – спільне кратне цих чисел. А оскільки $r < q$, а q – найменше спільне кратне, то виходить, що $\boldsymbol{r}$ – кратне, менше за найменше, чого бути не може. Протиріччя. Значить наше припущення, що $\boldsymbol{k}$ не ділиться на $\boldsymbol{q}$ хибне, тобто $\boldsymbol{k} \vdots \boldsymbol{q}$**.** Що і треба було довести.

6. *Якщо кожне із заданих чисел збільшити в одну й ту ж кількість разів, то і їхнє НСК збільшиться у стільки ж разів.*

Нехай $K[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = q$. Тоді $q \vdots \boldsymbol{a}$. Помноживши обидва ці числа на якесь число p, отримаємо на основі властивості 2, що $pq \vdots p\boldsymbol{a}$. Аналогічно $pq \vdots p\boldsymbol{b}$ і $pq \vdots p\boldsymbol{c}$, тобто pq є спільне кратне чисел $p\boldsymbol{a}$, $p\boldsymbol{b}$ і $p\boldsymbol{c}$. Нехай $K[p\boldsymbol{a}, p\boldsymbol{b}, p\boldsymbol{c}] = k$. Тоді за властивістю 5 $pq \vdots k$. Нехай $pq : k = g$, тобто $pq = kg$. Водночас $k \vdots p\boldsymbol{a}$, значить $k = (p\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a_1}$. Підставивши значення k у рівність $pq = kg$, отримаємо

$$pq = g\cdot(p\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a_1} = (p\boldsymbol{a})\cdot(g\cdot\boldsymbol{a_1}).$$

Звідси $q = \boldsymbol{a}\cdot(g\cdot\boldsymbol{a_1})$. Аналогічно знайдемо, що $q = \boldsymbol{b}\cdot(g\cdot\boldsymbol{b_1})$ і $q = \boldsymbol{c}\cdot(g\cdot\boldsymbol{c_1})$. А тоді $g\cdot\boldsymbol{a_1}$, $g\cdot\boldsymbol{b_1}$ і $g\cdot\boldsymbol{c_1}$, які є частками від ділення НСК (числа q) чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ на кожне з них, не мають більше спільних дільників, тобто $g = 1$. А це означає, що $k = pq$, і $K[p\boldsymbol{a}, p\boldsymbol{b}, p\boldsymbol{c}] = pq$. Що й треба було довести.

7. *НСК декількох заданих чисел не зміниться, якщо частину з них замінити їхнім НСК.*

Дійсно, нехай $K[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}] = q$ і нехай $K[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = k$. Доведемо, що $K[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}] = K[k, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}]$. Оскільки q є спільним кратним чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, то відповідно до властивості 5 q кратне і k. Звідси випливає, що число q є спільним кратним і чисел k, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$.

***Спосіб обчислення НСК*.**

Один із найпоширеніших способів обчислення НСК ґрунтується на канонічному розкладанні заданих чисел на прості множники.

Нехай задані два натуральних числа $\boldsymbol{a} = p_n^{\alpha}\cdot p_{n-1}^{\beta}\cdot p_{n-2}^{\gamma}\cdot\ldots\cdot p_1^{\mu}$ і $\boldsymbol{b} = p_n^{\delta}\cdot p_{n-1}^{\lambda}\cdot p_{n-2}^{\kappa}\cdot\ldots\cdot p_1^{\nu}\cdot q_r^{\sigma}$, які мають однакові множники p_i. Для визначеності приймемо, що ♋ > ♎, ♌ < ●, ♑ > &, ❍ = ■. Нехай K[***a*,*b***] = P. Щоб P ділилося на число ***a***, необхідно, щоб його розклад містив у собі всі множники числа ***a***, а щоб P ділилося на число ***b***, необхідно, щоб його розклад містив у собі всі множники числа ***b*, тобто** однакові множники p_n повинні увійти у розклад числа P у степені ♋, p_{n-1} – у степені ●, p_{n-2} – у степені ♑,…, p_1 – у степені ❍. Окрім них, щоб число P ділилося на число ***b***, треба щоб у розклад його входили і множники q. Звідси випливає, що для того, щоб знайти НСК декількох чисел, треба утворити добуток із спільних співмножників, узятих у найбільшому степені, і множників, які входять у розклад лише одного з чисел. Наприклад, нехай треба знайти НСК чисел 72, 180 і 378. Утворимо їхній канонічний розклад: $72 = 2^3\cdot 3^2$, $180 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5$; $378 = 2\cdot 3^3\cdot 7$. Очевидно, що канонічний розклад НСК цих чисел повинен складатися з множників, які входять у розкладання кожного з цих чисел. Тобто, щоб НСК ділилося, скажімо, на 180, треба, щоб воно містило 2^2, 3^2 і число 5. А щоб воно ділилося на 72, воно повинно мати множник 2 в степені 3. Отже, множник 2 повинен увійти в НСК у степені 3. Якщо це буде так, то на 2^2 і на 2^1 він завжди розділиться. Аналогічно при діленні на 378 число 3 повинно увійти в третьому степені, і ще один множник – число 7. Отже, $K[72, 180, 378] = 2^3\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$.

Цей процес можна подати і в дещо іншому вигляді. Представимо задані числа в *однаковому складовому вигляді*, тобто у вигляді добутку однакових співмножників: $72 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^0\cdot 7^0$; $180 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^0$; $378 = 2^1\cdot 3^3\cdot 5^0\cdot 7^1$. Порівнявши їх з НСК, відмічаємо, що в його розкладання входять спільні співмножники в найбільшому степені.

Отже, *щоб обчислити НСК декількох чисел, треба розкласти їх на множники і, представивши їх в однаковому складовому вигляді, утворити добуток спільних співмножників, узятих у найбільшому степені.*

5. Найбільший спільний дільник.

Нехай задані два числа: 24 і 40. Визначимо дільники цих чисел:

24: дільники – 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

40: дільники – 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

Аналізуючи склад дільників цих чисел, ми відмічаємо, що серед них є спільні: 1, 2, 4, 8. Тобто це такі числа, на які діляться усі задані числа. До того ж, виходячи з 1-ої властивості подільності, ми знаємо, що число 1 є найменшим дільником кожного натурального числа. З цього ж числа починається і ряд дільників кожного числа. А от завершується цей ряд спільних дільників цілком конкретним числом. Для дільників кожного числа – це один із його дільників, а в ряду спільних дільників він є найбільшим. Знаходження спільних дільників необхідне, наприклад, при скороченні дробів. Причому елементи скороченого дробу будуть найменшими, якщо скорочення відбудеться на число, яке є найбільшим спільним дільником. Тобто серед усіх спільних дільників найбільшу цікавість викликає *найбільший спільний дільник.*

Означення. ***Найбільшим спільним дільником декількох натуральних чисел називається найбільше число, на яке діляться всі задані числа.***

Найбільший спільний дільник (НСД) чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, …, $\boldsymbol{k}$ позначається $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{k})$, або для спрощення запису просто $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{k})$.

Виходячи з означення, визначимо основні властивості НСД.

1. *Які б не були задані натуральні числа, завжди існує їхнє НСД.*

Дійсно, усі натуральні числа мають спільним дільником число 1. І якщо інших спільних дільників немає, то число 1 буде і їхнє НСД.

Означення. ***Числа, у яких НСД дорівнює 1, називаються взаємно простими.***

2. *Найбільший спільний дільник декількох чисел не більше найменшого з заданих чисел.*

Дійсно, нехай задані числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ і нехай $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b} \le \boldsymbol{c}$, тобто число $\boldsymbol{a}$ – найменше з них. І нехай $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{k}) = d$. Оскільки кожне з них повинно ділитися на d, то разом з усіма і найменше число $\boldsymbol{a}$ повинно ділитися на d, а значить $d \leq$ $\boldsymbol{a}$, тобто d не більше найменшого із заданих чисел.

3. *Якщо одне із заданих чисел є дільником інших, то воно є і НСД заданих чисел.*

Дійсно, нехай задані натуральні числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ і нехай $\boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{c} \vdots \boldsymbol{a}$. Значить $\boldsymbol{a}$ є спільним дільником чисел $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$. А оскільки і $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{a}$, то число $\boldsymbol{a}$ є і найбільшим спільним дільником заданих чисел.

Перш ніж говорити про інші властивості НСД, розглянемо спосіб його знаходження способом розкладення на множники. Розглянемо це на числовому прикладі. Нехай задані числа 1080, 1440 і 2520. Розкладемо їх на прості множники і запишемо у вигляді добутку: $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$, $1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$, $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Згідно з означенням спільний дільник повинен ділити всі ці числа, тобто складатися з добутку спільних множників. Такими є 2^3, 3^2 і 5, значить $D(1080, 1440, 2520) =$ $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Як бачимо, до складу НСД входять спільні співмножники, узяті в найменшому степені.

Очевидно, що цей спосіб може бути використаний для будь-яких чисел, тому правило знаходження найбільшого спільного дільника таким способом можна сформулювати так:

Правило. ***Щоб знайти найбільший спільний дільник декількох натуральних чисел, треба розкласти їх на прості множники й утворити добуток спільних множників, взятих у найменшому степені***.

4. *Будь-який спільний дільник заданих чисел є водночас і дільником їхнього найбільшого спільного дільника*.

Дійсно, якщо d є який-небудь спільний дільник чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, то він складається із певних спільних дільників даних чисел. НСД також складається із спільних дільників цих чисел. Тому множники, які входять в розкладання спільного дільника d, входять і до розкладання найбільшого спільного дільника. Але НСД більший за d, тому множники d входять до множини множників НСД як підмножина. Тому НСД заданих чисел ділиться на d.

5. *Якщо всі задані числа помножити на те саме число, то і їхній НСД збільшиться в стільки ж разів.*

Тобто треба довести, що якщо $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = d$, то $(\boldsymbol{a}k, \boldsymbol{b}k, \boldsymbol{c}k) = dk$.

Дійсно, якщо $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = d$, то множники, з яких складається d, є спільними для цих чисел. А тоді числа $\boldsymbol{a}k$, $\boldsymbol{b}k$ і $\boldsymbol{c}k$ окрім цих спільних множників будуть мати і спільний множник k. Але ж оскільки він буде спільним, то він повинен входити окрім усіх множників d і в НСД, тобто НСД чисел $\boldsymbol{a}k$, $\boldsymbol{b}k$ і $\boldsymbol{c}k$ буде dk, що і треба було довести.

6. *Якщо добуток двох чисел ділиться на число, взаємно просте із одним з співмножників, то другий співмножник ділиться на це число*, тобто якщо $\boldsymbol{ab} \vdots \boldsymbol{c}$ і $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 1$, то $\boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{c}$.

Нехай задані числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, які задовольняють зазначеним умовам. Збільшимо числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{c}$ в $\boldsymbol{b}$ разів. Тоді, оскільки $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 1$, то на основі попередньої властивості будемо мати $(\boldsymbol{ab}, \boldsymbol{cb}) = \boldsymbol{b}$. Але $\boldsymbol{ab} \vdots \boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{cb} \vdots \boldsymbol{c}$, тоді $\boldsymbol{c}$ є спільний дільник чисел $\boldsymbol{ab}$ і $\boldsymbol{cb}$. Значить $\boldsymbol{c}$ повинно бути дільником і НСД цих чисел, тобто дільником числа $\boldsymbol{b}$, тобто $\boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{c}$, що і треба було довести.

7. *(Основна властивість НСД). Якщо декілька з даних чисел мають спільний дільник взаємно простий з іншими заданими числами, то НСД усіх заданих чисел не зміниться, якщо ці перші дані числа розділити на їхній НСД.*

Наприклад, нехай задані числа 60, 40, 24,16. Тоді (60,40,24,16) = 4. Число 5 – спільний дільник чисел 60 і 40. Окрім цього (5, 24) = 1 і (5, 16) = 1. Тоді, розділивши 60 і 40 на 5, отримаємо множину чисел 12, 8, 24, 16, для яких (12, 8, 24, 16) = 4.

Отже, нехай задані числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{d}$, і число k – спільний дільник чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$. При цьому $(\boldsymbol{c}, k) = 1$ і $(\boldsymbol{d}, k) = 1$. Оскільки $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ діляться на k, то позначимо $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a} : k$ і $\boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{b} : k$. Доведемо, що

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}).$$

Нехай p – спільний дільник усіх заданих чисел. Оскільки $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_1} \cdot k$ і $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b_1} \cdot k$, то $\boldsymbol{a_1} \cdot k \vdots p$ і $\boldsymbol{b_1} \cdot k \vdots p$. За умовою $(k, \boldsymbol{c}) = 1$, тобто k і $\boldsymbol{c}$ не мають спільних дільників, а p – є дільник числа $\boldsymbol{c}$, то звідси випливає, що $(k, p) = 1$. Виходячи із цього, а також з того, що $\boldsymbol{a_1} \cdot k \vdots p$ і $\boldsymbol{b_1} \cdot k \vdots p$, на основі властивості 6 робимо висновок, що $\boldsymbol{a_1} \vdots p$ і $\boldsymbol{b_1} \vdots p$, тобто число p є спільним дільником чисел $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{d}$. НСД же цих чисел є одним із спільних дільників. Отже, теорема доведена.

8. *НСД декількох чисел не зміниться, якщо будь-яку пару цих чисел замінити їхнім НСД.*

Із цього твердження випливає, якщо задані числа $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ і $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = k$, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = (k, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$. Доведемо це.

Нехай m – спільний дільник заданих чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Тоді він буде складатися з усіх спільних дільників цих чисел, зокрема і з спільних дільників чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$. А це означає, що $k \vdots m$. Оскільки ж m є будь-який дільник заданих чисел, то серед цих дільників буде і НСД заданих чисел. Значить k буде ділитися і на НСД заданих чисел, тобто $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = (k, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$.

Навпаки, нехай p – спільний дільник чисел k, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Тоді p буде і спільним дільником чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, а значить і чисел $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$. Що і треба було довести.

На цій властивості будується ще один спосіб обчислення НСД декількох чисел. Наприклад, нехай задані числа 724, 176, 288 і 224. Знайдемо НСД цих чисел, замінюючи поступово групи чисел їхніми спільними дільниками:

$$(72, 68, 88, 32) = (4, 88, 32) = (4, 8) = 4.$$

9. *Будь-який спільний дільник двох чисел буде найбільшим у тому випадку, якщо частки від ділення заданих чисел на цей спільний дільник будуть взаємно простими.*

Нехай задані числа $\boldsymbol{a}$, і $\boldsymbol{b}$, і $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = d$. Тоді $\boldsymbol{a} : d = \boldsymbol{a_1}$ і $\boldsymbol{b} : d = \boldsymbol{b_1}$. Доведемо, що $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}) = 1$.

Нехай $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}) = p$. Тоді $\boldsymbol{a_1} = p \cdot \boldsymbol{a_2}$ і $\boldsymbol{b_1} = p \cdot \boldsymbol{b_2}$. Але ж $\boldsymbol{a} : d = \boldsymbol{a_1}$ і $\boldsymbol{b} : d = \boldsymbol{b_1}$, значить $\boldsymbol{a} = dp\boldsymbol{a_2}$ і $\boldsymbol{b} = dp\boldsymbol{b_2}$. Виходить, що НСД чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ буде число dp, а ми виходили з того, що НСД цих чисел є число d. Протиріччя. Значить наше припущення, що $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}) = p$, хибне, тобто $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}) = 1$.

10. *Якщо деяке число ділиться на два взаємно простих числа, то воно ділиться і на їхній добуток.* Тобто, якщо $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{c}$, де $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 1$, то $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{bc}$.

Дійсно, нехай $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot p$. Оскільки $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{b}p \vdots \boldsymbol{c}$. Але $\boldsymbol{b}$ не ділиться на $\boldsymbol{c}$, тоді за властивістю 6 $p \vdots \boldsymbol{c}$. Нехай $p = \boldsymbol{c}k$. Підставивши p у рівність $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}p$, отримаємо $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bc}k$, а це означає, що $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{bc}$. Що і треба було довести.

Із цієї властивості випливає ознака подільності на складне число:

Щоб число $\boldsymbol{n}$ *ділилося на число* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bc}$, *де* $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 1$, *необхідно, щоб* $\boldsymbol{n} \vdots \boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{n} \vdots \boldsymbol{c}$. Наприклад, $6 = 2 \cdot 3$. Значить, на 6 ділиться будь-яке парне число, сума цифр якого ділиться на 3.

Алгоритм Евкліда

Способи обчислення НСД, які ми розглянули вище, досить прості і зручні для невеликих чисел. Коли ж постає задача обчислити НСД для великих чисел, то їх використання стає надто громіздким, особливо, коли в розкладання цих чисел входять великі прості числа, які ми одразу не можемо визначити наочно, що вони прості. Це питання постало перед арифметикою вже на зорі розвитку математики і було успішно розв'язане відомим грецьким ученим Евклідом. Тому і метод, яким воно розв'язувалося отримав назву *алгоритм Евкліда.*

Цей спосіб ґрунтується на 3-й властивості найбільшого спільного дільника, яка свідчить, що *якщо одне із заданих чисел є дільником інших, то воно є і НСД заданих чисел,* а також на такій лемі[1]:

Лема. ***Якщо*** $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq} + \boldsymbol{r}$, ***то*** $D(a, b) = D(b, r)$.

Дійсно, нехай $\boldsymbol{d}$ – якийсь спільний дільник чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, тобто $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{d}$ і $\boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{d}$. А тоді на основі властивості подільності 6 і $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bq}$ ділиться на $\boldsymbol{d}$.

Навпаки, нехай $\boldsymbol{p}$ – якийсь спільний дільник чисел $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{r}$. Тоді на основі властивості подільності 5 і $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq} + \boldsymbol{r}$ буде ділитися на $\boldsymbol{p}$. І це, як бачимо, стосується всіх спільних дільників цих чисел. А оскільки їх множина обмежена, то серед них буде найбільший, який теж задовольняє цим умовам, тобто $D(a, b) = D(b, r)$, що і треба було довести.

Алгоритм Евкліда. Нехай задані числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ і нехай $\boldsymbol{a}$ ¤ $\boldsymbol{b}$. Розділимо $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$ з остачею, тобто $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{r_1}$, де $\boldsymbol{r_1} < \boldsymbol{b}$. Нехай d

[1] Лема – допоміжна теорема.

– найбільший спільний дільник чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, тобто $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = d$. Але за нашою лемою $d = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r_1})$. Оскільки $\boldsymbol{r_1} < \boldsymbol{b}$, розділимо $\boldsymbol{b}$ на $\boldsymbol{r_1}$ з остачею, тобто $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r_1}q_2 + \boldsymbol{r_2}$. Тоді $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r_1}) = (\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2})$. І так далі. У цьому процесі кожна наступна остача буде меншою за попередню, тобто отримаємо ряд, у якому $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b} > \boldsymbol{r_1} > \boldsymbol{r_2} > \ldots > \boldsymbol{r_{n-1}} > \boldsymbol{r_n}$. Остачі монотонно зменшуються, тому згідно з властивістю 6 ряду натуральних чисел, процес ділення повинен завершитися. А завершиться він тоді, коли остання остача буде дорівнювати нулю. Саме нулю, оскільки якщо остача буде не нуль, то на неї ще можна буде ділити, ми ж розглядаємо крок, на якому процес ділення завершено, тобто далі ділення неможливе, а неможливе воно тільки на нуль. Звідси завершальний етап буде виглядати так: $\boldsymbol{r_{n-1}} = \boldsymbol{r_n}\, q_{n-1} + \boldsymbol{r_{n+1}}$. Тоді $(\boldsymbol{r_{n-1}}, \boldsymbol{r_n}) = (\boldsymbol{r_n}, \boldsymbol{r_{n+1}}) = d$. Останній же крок $\boldsymbol{r_n} = \boldsymbol{r_{n+1}}\, q_n + 0$, тобто $\boldsymbol{r_n}$ ділиться на $\boldsymbol{r_{n+1}}$ цілком. Оскільки ж $(\boldsymbol{r_n}, \boldsymbol{r_{n+1}}) = d$ і $\boldsymbol{r_n} \vdots \boldsymbol{r_{n+1}}$, то за властивістю 3 найбільшого спільного дільника $\boldsymbol{r_{n+1}} = d$. Отже, отримаємо послідовність рівностей $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r_1}) = (\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}) = (\boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_3}) = \ldots = (\boldsymbol{r_{n-1}}, \boldsymbol{r_n}) = (\boldsymbol{r_n}, d) = d$.

Приклад. Знайти НСД чисел 1092 і 2244. Розділимо 2244 на 1092 з остачею. Отримаємо: $2244 = 1092 \cdot 2 + 60$. Тепер розділимо 1092 на 60, отримаємо: $1092 = 60 \cdot 18 + 12$. Тепер розділимо 60 на 12, отримаємо: $60 = 12 \cdot 5$. Остання остача була 12. Значить $(1092; 2244) = 12$.

Тепер, коли ми знаємо, як знаходити НСД двох чисел, можна знайти НСД і для будь-якої кількості чисел.

Вправи.

1. Знайти найменше спільне кратне чисел:

708 і 370	228 і 280	616 і 440
925 і 205	835 і 116	356 і 576
486 і 292	339 і 333	120 і 106

2. Обчислити найбільший спільний дільник за методом розкладання на множники:

7084 і 6370	2280 і 2772	5616 і 4400
1925 і 2205	2835 і 4116	4356 і 4576
4860 і 5292	3393 і 2584	2106 і 6120

3. Обчислити найбільший спільний дільник за допомогою алгоритму Евкліда:

6370 і 84	2835 і 108	5616 і 1006
52025 і 1925	4348 і 144	4356 і 2106
5292 і 480	3344 і 512	4400 і 252

4. Довести, що а) якщо $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = 1$, то $(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2) = 1$;

б) якщо $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = 1$, то $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 1$ і $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 1$;

в) якщо $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = 1$, то $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}; \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}) = 1$;

г) якщо $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = 1$, то $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}; \ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 1$;

д) якщо $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = 1$, то $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}; \ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}; \boldsymbol{c})$.

5. На основі відомих ознак подільності на 2, 3, 4, 5, 9, 11 сформулюйте:

а) ознаку подільності на 6; б)ознаку подільності на 12;
в) ознаку подільності на 15; г) ознаку подільності на 30;
д) ознаку подільності на 18; е) ознаку подільності на 27;
є) ознаку подільності на 33; ж) ознаку подільності на 22;
з) ознаку подільності на 55; і) ознаку подільності на 45;
к) ознаку подільності на 10; л) ознаку подільності на 6
м) ознаку подільності на 60; н) ознаку подільності на 66.

Питання, що розглянуті в розділі, є фундаментальними для усвідомлення основних числових властивостей і відношень, які закладені в програмі і підручниках з математики в початковій школі. Вони дають ключ до розуміння таких математичних явищ, як ділення взагалі, ділення з остачею, ознак подільності, принципів класифікації чисел, основної теореми арифметики, таких важливих для наступних розділів математики понять, як найменше спільне кратне і найбільший спільний дільник, їхніх властивостей та алгоритмів знаходження.

Глибоке усвідомлення обґрунтованості цих понять дає вчителю ключ до побудови методичної системи для вивчення практично всіх тем розділу арифметики невід'ємних цілих чисел початкового курсу математики.

РОЗШИРЕННЯ ПОНЯТТЯ ПРО ЧИСЛО

Як свідчить практика, натуральні числа не забезпечують повною мірою вимірювальні й обчислювальні потреби як у розв'язанні суто математичних задач, так і в практичній діяльності.

Так, скажімо в процесі вимірювань дуже рідко результат отримують у вигляді цілого числа. Здебільшого, в процесі вимірювань отримують або остачу, або надлишок. Скажімо, у практичній діяльності фінансист витратив більше, ніж заробив, то яке в нього буде сальдо? Або треба три кілограми борошна висипати порівну у два мішечки. То ж по скільки кілограмів буде в кожному мішечку? У множині невід'ємних цілих чисел перша задача не має розв'язання. А друга задача не має розв'язання взагалі в множині цілих чисел. Тому перед математикою постає задача розширення числової множини до таких меж, щоб можна було б розв'язувати відповідний тип задач як у теоретичній, так і в практичній площині.

Розділ І. Множина цілих чисел

Відповідно до програми з математики на факультетах підготовки вчителів початкових класів не передбачено вивчення першого розширення поняття про число – множини цілих чисел, яка передбачає як складову вивчення множини від'ємних цілих чисел. Проте ми вважаємо за необхідне ввести для розгляду множину від'ємних цілих чисел у наслідок таких міркувань:

по-перше, розгляд множини цілих чисел логічно поєднує розірваний ланцюг розширення між множиною цілих і раціональних чисел, як це передбачено програмою;

по-друге, уведення до розгляду множини цілих чисел формує в майбутніх учителів початкових класів цілісне уявлення про число, що допоможе глибше усвідомити сутність не тільки поняття невід'ємного цілого числа, а й поняття числа взагалі;

по-третє, у початкових класах розв'язують значну кількість задач на збільшення або зменшення тієї чи іншої величини. Усі вони перетворюються у вигляд, можливий для розв'язання в межах *множини невід'ємних цілих чисел. Уведення до розгляду від'ємних цілих чисел дозволяє вчителю по-іншому поглянути на поняття результатів збільшення або зменшення певної величини без попереднього логічного перетворення;*

по-четверте, і це можливо найголовніше, у початковій школі розв'язують задачі як на скалярні, так і на векторні величини. Якщо зі скалярними величинами все більш-менш ясно, то усвідомлення векторності певних величин, за нашими спостереженнями, викликає утруднення і в учителів початкових класів, і, відповідно, в учнів. Однією з таких величин є швидкість. Швидкість вивчається, але усвідомлення її суті надто поверхове.

У початкових класах у курсі математики передбачено розв'язання цілого класу задач на рух: рух в одному напрямку, рух на зближення, рух на віддалення, рух за течією, рух супроти течії. Щоб пояснити учню, що при русі об'єкта за течією швидкості додаються, а супроти течії – віднімаються, учитель сам повинен добре в цьому розумітися, а саме, знати математичну основу цього явища. І з цих позицій знання розширення поняття про число до множини цілих чисел, на наш погляд, конче необхідне.

Ураховуючи відсутність цього розділу в навчальній програмі з математики при підготовці майбутніх учителів початкових класів, ми подаємо цей матеріал в оглядовому порядку, який, між іншим, закриває той логічний розрив, який нині наявний у підручниках з математики для факультетів підготовки вчителів початкових класів.

1. Поняття від'ємного числа

Розглянемо перше розширення числової множини до меж, у яких дія віднімання виконується завжди. Як ми вже знаємо, множину невід'ємних цілих чисел складають цілі додатні числа і число нуль. У цій множині віднімання, як дія похідна від додавання, дає результатом ціле число, при цьому віднімання $a – b$ можливе лише за умови, що $a \geq b$. При цьому $a – b = c$ і всі три числа цілі. Очевидно, що й у випадку коли буде $a \leq b$, результат $a – b = c$ також буде цілим числом. Але в задачі, яка розв'язується за цією формулою, відповідь буде мати інший смисл, ніж коли $a \geq b$. Наприклад, якщо задача розглядає співвідношення між прибутком і видатками, де a – прибуток, а b – видатки, то при $a \geq b$ $a - b = c$ буде відображати прибуток, а у випадку $a \leq b$ – збиток.

Задач, які окрім абсолютного числового значення потребують ще одну або більше умов, незліченна кількість. Так, при підрахунку прибутків і витрат у фінансовій сфері отриманий результат, наприклад, 1 000 грн., ще ні про що не говорить. До нього потрібне пояснення – це прибуток чи збиток? При вимірюванні температури показник у 15° потребує пояснення – тепла чи морозу? Не менш важливим є й факт з арифметичної теорії, згідно з яким дія віднімання в множині невід'ємних цілих чисел не завжди виконується. Уже навіть цих прикладів достатньо, щоб показати необхідність розширення множини невід'ємних цілих чисел, уведення нових чисел, які б дозволяли не лише пояснювати фінансові, фізичні, часові показники, а й завжди виконувати дію віднімання. До речі остання причина була основною в історичній еволюції поняття числа, яка привела до поняття від'ємного числа.

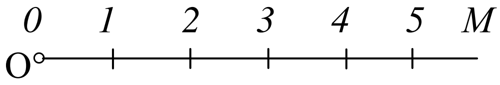
Між іншим, від'ємні числа використовувалися математиками досить давно. Перші згадки про них історики відзначають в роботах математиків Древнього Китаю ще в II ст. до н. е., пізніше (приблизно в VII столітті) і в Індії, а в III ст. н.е. відомості про них з'являються у грецьких математиків, зокрема, в роботах Д і о ф а н т а. Спочатку від'ємні числа трактувалися втрата, нестача, борг, а потім (у Греції) їх використовували лише в проміжних обчисленнях, які встановлювали залежність між додатними числами.

У Європі від'ємними числами математики почали користуватися майже на тисячу років пізніше. Уперше вони стрічаються в роботі Леонарда Пізанського "Книга абака" на початку 13-го століття у трактуванні їх як позначення боргу.

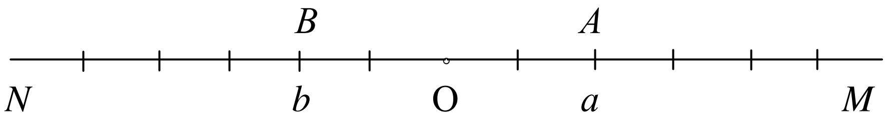
З XVI століття значення від'ємних чисел стає незаперечним. Це пов'язано з бурхливим на той час розвитком алгебри, зокрема завдяки роботам С.Ф е р р о, Н.Т а р т а л л я, Дж.К а р д а н о, Л.Ф е р р а р і та ін. Італійські математики вже повною мірою використовували дії з від'ємними числами. Але лише в XIX столітті теорія від'ємних чисел отримала формальне обґрунтування і переважно завдяки роботам видатного німецького математика К.Г а у с с а.

У чому ж їхня суть?

Спочатку визначимо сутність від'ємного цілого числа. Як наочну модель розглянемо числовий промінь *OM*.



На цьому промені числове позначення кожної точки визначає її відстань від точки O. Доповнимо цей промінь іншим числовим променем *ON*, але в протилежному напрямку.



Отримаємо пряму лінію з позначеними точками на ній. Виберемо дві точки *A* і *B*, які знаходяться на однаковій відстані a і b від точки O. Нехай точки *A* і *B* знаходяться в стані рівномірного руху. Розглянемо задачу: "Відстань між точками *A* і *B* 4 одиниці. Яка буде відстань між цими точками, якщо кожна з них, рухаючись з однаковою швидкістю, пройшла 2 одиниці шляху?". Аналіз цієї задачі засвідчує, що задача не має однозначної відповіді, оскільки не визначений напрямок руху. Тут можливі два випадки: точки рухаються в одному напрямку і точки рухаються в протилежних напрямках.

У випадку, коли точки рухаються в одному напрямку, відстань між ними не зміниться.

У випадку, коли точки рухаються в різних напрямках, знов потрібне уточнення: точки рухаються назустріч одна одній чи віддаляються одна від одної. У будь-якому з цих випадків точки рухаються в протилежних напрямках.

Розглянемо випадок, коли точки a і b рухаються назустріч одна одній з однаковою швидкістю. У цьому разі вони проходять однакову відстань і зустрічаються в одній точці – точці O. У момент зустрічі відстань між ними буде дорівнювати нулю. Тобто, загальна відстань, яку проходять точки, дорівнює $a + b$, а відстань між ним буде 0.

У змісті такої задачі наявні два основних параметри: відстань точок a і b від точки О і напрямок руху. Відстань позначається додатним числом, а напрямок позначається знаком " + " (плюс) для однієї точки і знаком " – " (мінус) для іншої. Умовно прийнято у світовій математичний практиці правий напрямок уважати додатним, а лівий – від’ємним. Відповідно до цього розв’язання задачі при русі точок у протилежних напрямках у вигляді, який ураховує обидва параметри є таким: підсумкова відстань між точками в разі наближення однієї точки до іншої обчислюється як $a + (-b) = a - b = 0$. Знаком " + " позначається стан наближення. Тоді стан віддалення точок одна від одної позначається знаком " –", а розв’язання задачі має вигляд $a - (-b)$. $(-b)$ означає "протилежний додатному b", а – $(-b)$ означає "протилежний протилежному додатного b", тобто просто "додатне b". Із цього $a - (-b) = a + b$, тобто відстань збільшується.

Випадок зустрічного руху має особливе значення, оскільки стосується всіх процесів, які відбуваються в середині системи. Зокрема, на його основі можна визначити поняття протилежності чисел, а саме: "Числа a і b називаються протилежними, якщо $a + b = 0$. У цьому разі записують: $a = (-b)$. Точка 0 у цьому випадку "врівноважує" значення величин, які виражаються числами a і b, і називається нейтральним числом. Числа ж a і b відносно до числа 0 називаються *симетричними.*

Нейтральний стан є пограничним не тільки у фізичному русі. Він стосується і будь-яких інших явищ. Зокрема "прибуток і збиток", "збільшення і зменшення ", "прискорення і гальмування", "розвиток і руйнація", "потепління і похолодання" і т.д.

Із суто математичних позицій уведення від’ємних чисел пов’язане з неможливістю розв’язання рівняння $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, якщо $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$.

Розглядаючи арифметичні операції в множині невід’ємних цілих чисел, ми зауважили, що рівняння $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ має розв’язання лише для випадку, коли $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$. У цьому разі розв’язанням його буде невід’ємне ціле число $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Проте, як у математичній, так і у виробничій практиці наявні випадки, коли $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, наприклад, якщо $\boldsymbol{a}$ – це прибутки, а $\boldsymbol{b}$ – це видатки. То якщо видатки перебільшують прибутки, різниця $\boldsymbol{a}$ –

$\boldsymbol{b}$ не є додатною. У цьому разі рівняння $\boldsymbol{x = a - b}$ не має розв'язання в множині невід'ємних цілих чисел. Тому виникає необхідність в уведенні нової множини чисел, яка б відображала як стан практичних речей (прибутки чи збитки), так і надавала можливість розв'язання цього рівняння.

Виходячи з модельної побудови числа, утворимо двохелементну множину $G = \{- ; +\}$, де значок "+" (назвемо його *плюс*) поставимо у відповідність до розв'язання рівняння $\boldsymbol{b + x = a}$ за умовою, коли $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$, а значок " – " (назвемо його *мінус*), коли $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$. Утворимо декартовий добуток множини G з множиною натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, 4,\ldots\}$. Отримаємо нову множину (позначимо її Z): $Z = G$ ⟐ $N = \{(-, 1); (+, 1); (-, 2); (+, 2); (-, 3); (+, 3); \ldots\}$. Виділимо у цій множині дві підмножини $Z_+ = \{(+, 1); (+, 2); (+, 3); \ldots\}$, і $Z_- = \{(-, 1); (-, 2); (-, 3); \ldots\}$. Надалі, будемо записувати елементи множини Z_- у спрощеному вигляді як $-1, -2, -3, \ldots$ і будемо називати їх *від'ємними цілими числами*, а множину Z_- будемо називати *множиною від'ємних цілих чисел*. Елементи множини Z_+ будемо записувати $+1, +2, +3, \ldots$ і будемо називати їх *додатними цілими числами,* а множину Z_+ множиною *додатних цілих чисел*. Для спрощення запису додатних цілих чисел будемо їх записувати просто 1, 2, 3, ...

Оскільки підраховуючи елементи будь-якої множини, ми маємо справу з елементами, які є в наявності, то прийнято позначати їх додатними числами.

Отже, в системі модельної побудови натуральні числа збігаються з цілими додатними числами, тобто являють собою підмножину декартового добутку Z_+ ⟐ Z, що складається з пар виду $(+, n)$ і є розв'язанням рівняння $\boldsymbol{b + x = a,}$ коли $\boldsymbol{a > b}$. Тоді пари виду $(-, n)$, що складають множину Z_-, які ми вище назвали від'ємними, складають множину чисел, які є розв'язанням цього рівняння, коли $\boldsymbol{a < b}$.

Поширивши декартовий добуток на множину невід'ємних цілих чисел, до отриманих пар виду $(+, n)$ і $(-, n)$ добавимо пари $(+, 0)$ і $(-, 0)$. Оскільки число "нуль" у теоретико-множинному значенні являє собою кількісну характеристику порожньої множини і має властивості, яких не мають інші числа, тобто $\boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{a} - 0 = \boldsymbol{a}$, то звідси випливає, що пари (+, 0) і (–, 0) еквівалентні, отже (+, 0) $\sim$ (–, 0). Тобто множина {–0; +0} складає самостійну множину, яку просто будемо позначати {0}.

У наведеній моделі число “нуль” свідчить про нейтральний стан. Наприклад, в економіці – немає ані прибутку, ані збитку; у механіці – тіло не рухається ні в якому напрямку і т.д. Тому число “нуль” за нашим припущенням не має знака і займає граничне місце між додатними та від’ємними числами.

Отже, ***множина цілих чисел представляється як об’єднання множини додатних цілих чисел з від’ємними і з множиною нулів, тобто*** $\boldsymbol{Z = Z_+ \cup Z_- \cup \{0\}}$.

Визначене поняття дає можливість, з однієї сторони, розкрити суть поняття невід’ємного цілого числа як моделі другого порядку, тобто модель невід’ємного цілого числа випливає з моделі цілого числа, а з іншої – розв’язати дуже принципове питання, яке не розв’язується в множині натуральних чисел – визначити корінь рівняння $\boldsymbol{b + x = a}$, коли $\boldsymbol{a < b}$.

Для розв’язання цього питання в множині цілих чисел розглянемо деякі поняття й операції.

Насамперед уведемо поняття модулю числа.

<u>Означення.</u> ***Модулем цілого числа*** *а* ***називається число*** $|x|$, ***яке відповідає таким умовам:***

$$|x| = \begin{cases} x, & якщо\ x > 0 \\ -x, & якщо\ x < 0 \\ 0, & якщо\ x = 0 \end{cases}$$

Це означає, що модулем додатного цілого числа *x* і числа нуль є те саме число, а модулем від’ємного цілого числа *–x* є додатне число *x*.

Виходячи з моделі множини цілих чисел, побудуємо її геометричну інтерпретацію і визначимо певні властивості цілого числа, що надасть нам можливість визначити й основні правила операцій над ними.

Для побудови геометричної інтерпретації множини цілих чисел візьмемо пряму лінію і виберемо певний відрізок, якому поставимо у відповідність число 1. На прямій відмітимо точку, якій поставимо у відповідність число 0. Будемо відкладати цей відрізок від нуля вправо і вліво, позначаючи кінцеві точки

… -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 …

справа від нуля додатними числами +1, +2, +3, …, а зліва – від'ємними -1, -2, -3, … Отримаємо числову пряму, на якій кожному цілому числу буде відповідати певна єдина точка прямої. Як бачимо, числа –1 і +1 знаходяться на протилежних напівпрямих і симетричні відносно до числа "нуль". Аналогічно й усі інші: –2 і +2, –3 і +3 і т.д. На основі викладеного можна сказати, що *від'ємні цілі числа є числа, протилежні відповідним цілим додатним числам*, тобто *протилежні числа є такі, які мають однаковий модуль і різні знаки.*

Звідси випливає одне з досить важливих тверджень: оскільки число $-a$ протилежне до числа $+a$, то число $-(-a)$ є число, протилежне до $-a$, тобто $+a$. Або $-(-a) = +a$

Відповідно до моделі множини цілих чисел Z будь-яке ціле число $a \neq 0$ може бути представлене у вигляді $a = +n$ або $a = -n$, де $n \in N$.

2. Арифметика цілих чисел

Для визначення операцій із цілими числами і їхніх властивостей за основу приймемо операцію ***додавання***, яка в множині Z розглядається так: [7, с.72].

Додавання

Означення. ***Для будь-яких чисел a і b з множини Z сума a + b визначається згідно з правилами:***

1) *якщо* $\boldsymbol{a, b} \in Z_+$, *то* $\boldsymbol{a + b}$ *в* Z *збігається з сумою чисел* $\boldsymbol{a}$ *і* $\boldsymbol{b}$, *визначеною у множині* N;

2) $\boldsymbol{a} + 0 = 0 + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$;

3) *якщо* $\boldsymbol{a, b} \in Z_-$, *то* $\boldsymbol{a + b} = -(|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|)$;

4) *якщо ж* $\boldsymbol{a} \in Z_+$, *а* $\boldsymbol{b} \in Z_-$, *то для* $|\boldsymbol{a}| > |\boldsymbol{b}|$ *буде* $\boldsymbol{a + b} = \boldsymbol{b + a} = |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$, *для* $|\boldsymbol{a}| < |\boldsymbol{b}|$ *буде* $\boldsymbol{a + b} = \boldsymbol{b + a} = -(|\boldsymbol{b}| - |\boldsymbol{a}|)$, *для* $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ *буде істинним* $\boldsymbol{a + b} = \boldsymbol{b + a} = 0$.

Отже, у цьому означенні відображений принцип узгодженості дій додавання і множення, а також порівняння при розширенні числових областей: сума натуральних чисел, яка визначена за правилом додавання в Z_+, збігається із сумою цих же чисел в N.

Для доведення основних властивостей додавання попередньо слід розглянути дві допоміжні властивості.

1. Для будь-яких $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in Z$ і будь-якого $n \in Z_+$, такого, що $n > |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$, виконується рівність: $n + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (n + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}$

Дійсно, якщо $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in Z_+$, то рівність справедлива, оскільки збігається з властивістю асоціативності додавання в множині N.

Якщо ж $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in Z_-$, то виконується наступне:
$n + (a + b) = n + [-(|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|] = n - (|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|) = (n - |\boldsymbol{a}|) - |\boldsymbol{b}| = (n + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}$; якщо $\boldsymbol{a} \in Z_+$, а $\boldsymbol{b} \in Z_-$, то при $|\boldsymbol{a}| > |\boldsymbol{b}|$ виконується: $n + (a + b) = n + (|\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|) = (n + |\boldsymbol{a}|) - |\boldsymbol{b}| = (n + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}$;

при $|\boldsymbol{a}| < |\boldsymbol{b}|$ виконується:
$n + (a + b) = n - (|\boldsymbol{b}| - |\boldsymbol{a}|)] = n - (|\boldsymbol{b}| - |\boldsymbol{a}|) = (n + |\boldsymbol{a}|) - |\boldsymbol{b}| = (n + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}$;

при $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ виконується:
$n + (a + b) = n + 0 = n = (n + |\boldsymbol{a}|) - |\boldsymbol{a}| = (n + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}$. Аналогічно розглядається і випадок, коли $\boldsymbol{a} \in Z_-$, а $\boldsymbol{b} \in Z_+$

2. Для будь-яких $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in Z$ і будь-якого $n \in Z_+$, такого, що $n > |\boldsymbol{a}|$, $n > |\boldsymbol{b}|$, з рівності $n + a = n + b$ випливає $a = b$.

Ці властивості дають змогу довести три основні властивості додавання:

<u>*Теорема 1.*</u> ***Дія додавання в множині Z комутативна.*.**
Ця властивість випливає безпосередньо з властивості комутативності в множині N та сформульованого вище означення додавання.

<u>*Теорема 2.*</u> ***Дія додавання в множині Z асоціативна,*** *тобто*

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}.$$

Нехай числа $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ належать множині $\boldsymbol{Z}$ і не дорівнюють нулю, оскільки при рівності нулю хоч би одного з них рівність $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ очевидна.

Виберемо число $\boldsymbol{n} \in N$ таке, щоб $\boldsymbol{n} > |\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})|$ і $\boldsymbol{n} > |(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}|$.

Згідно з доведеним вище допоміжним твердженням 1,

$\boldsymbol{n} + [\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})] = (\boldsymbol{n} + \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = [(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}] + \boldsymbol{c}$ і

$\boldsymbol{n} + [(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})] + \boldsymbol{c} = [(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}] + \boldsymbol{c}$, тобто

$\boldsymbol{n} + [\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})] = \boldsymbol{n} + [(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}]$ і згідно з допоміжним твердженням 2 $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$.

Як ми вже зазначали вище, одним з головних факторів уведення від'ємних чисел є розв'язання рівняння $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, коли $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, тобто $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

Розглянемо випадок, коли $\boldsymbol{a} = 0$. Тоді розв'язання рівняння має вигляд $\boldsymbol{x} = 0 - \boldsymbol{b}$, або $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{b}$. Підставивши це значення $\boldsymbol{x}$ у вихідне рівняння, отримаємо досить важливий висновок:

$$\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{b}) = 0$$

тобто *від'ємне число* $-\boldsymbol{b}$ *є симетричним додатному числу* $\boldsymbol{b}$.

Якщо ж $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, наше рівняння має розв'язок $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} = 0$. Тобто $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = 0$.

Порівняння отриманого результату з попереднім висновком приводить до наступного твердження: $\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}$.

Цей висновок з одного боку визначає зв'язок знака числа з дією з цим числом, а з іншого – встановлює зв'язок дії додавання в множині цілих чисел з операціями додавання і віднімання в множині невід'ємних цілих чисел. Тому, поширюючи це визначення на всю множину чисел, отримаємо висновок:

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$$

Теорема 3. ***Для будь-яких чисел a і b з множини Z існує таке ціле число x, що b + x = a.***

Дійсно, як таке число $\boldsymbol{x}$, наприклад, може виступати число $(-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}$. Підставимо це число в суму $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x}$ замість $\boldsymbol{x}$, отримаємо наступне:

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + [(-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{b})] + \boldsymbol{a} = 0 + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}.$$

Це число $\boldsymbol{x}$ *визначається як* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ *і називається різницею чисел* $\boldsymbol{a}$ *і* $\boldsymbol{b}$*; число* $\boldsymbol{a}$ *називається від'ємним, а число* $\boldsymbol{b}$ *– від'ємником.* Звідси випливає, що $\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$, або $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.

Доведення цієї теореми дає можливість зробити висновок, що *дія віднімання в множині Z завжди виконується.*

За допомогою віднімання можна задавати число, протилежне даному. Дійсно, з того, що $\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{b}) = 0$, випливає $-\boldsymbol{b} = 0 - \boldsymbol{b}$

Звідси випливає досить важливий висновок, що $(-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$. Дійсно, виходячи з п.1 означення додавання $(+\boldsymbol{a}) + (+\boldsymbol{b}) = +(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$. Додамо до правої частини цієї рівності суму $(-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b})$. Отримаємо: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + [(-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b})] =(+\boldsymbol{a})+(+\boldsymbol{b}) + (-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{b}) = =(+\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{a}) + (+\boldsymbol{b}) + (-\boldsymbol{b}) = 0$. Але ж і $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + [-(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})] = 0$. Тому з цих двох випадків і випливає, що $(-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$. Тобто, ***щоб додати два від'ємних числа, треба додати їхні модулі і поставити перед результатом знак мінус.***

Розглянемо випадок, коли одне число додатне, а друге від'ємне. Доведені властивості дають змогу в цьому разі спрощувати дію додавання від'ємного числа, замінюючи додавання цього числа його відніманням.

Дійсно, нехай задані два цілих числа: додатне $+\boldsymbol{a}$ і від'ємне $-\boldsymbol{b}$. Утворимо їхню суму: $(+\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b})$. Виходячи з того, що $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, додавання чисел з різними знаками зводиться до віднімання цих чисел. Тут можливі два варіанти.

1. Якщо $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$ (нагадаємо, що числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ додатні), то додавання $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ збігається з відніманням в множині невід'ємних цілих чисел. Тобто $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} > 0$. Наприклад, $5 + (-3) = 5 - 3 = 2$.

2. Якщо ж $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ (нагадаємо, що числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ додатні), то виконаємо такі перетворення. У множині невід'ємних цілих чисел відома властивість, що якщо $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, то існує таке число $\boldsymbol{c}$, що $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$. Це число $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Тоді $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} + [-(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})] = = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{c}) = 0 + (-\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{c}$. Але ж $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Тоді за принципом протилежності $-\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$. А з наших обчислень випливає, що $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}$. Із цих двох посилок випливає досить важливий висновок

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

З цих двох випадків випливає правило:

Щоб додати два числа з різними знаками, треба від числа з більшим модулем відняти число з меншим модулем і перед результатом поставити знак числа з більшим модулем.

Приклад: $(+4) + (-9) = -(9-4) = -5$. Оскільки $(+4) + (-9)$ можна записати як $4-9$, то приклад набуває вигляду: $4-9 = -(9-4) = -5$.

Другий випадок, який ми щойно розглянули, власне і визначає смисл від'ємних чисел. Він надає можливість розв'язання рівняння $\boldsymbol{b + x = a}$, де $\boldsymbol{a < b}$ і цим дозволяє визначити поняття від'ємного числа так:

<u>*Означення.*</u> ***Від'ємними числами називаються елементи множини Z_-, які є розв'язанням рівняння $b + x = a$***, коли $\boldsymbol{a < b}$.

З усього вищевикладеного випливає один з найважливіших висновків: ***дія додавання в множині цілих чисел завжди виконується.***

Доведемо, що ця дія однозначна. Дійсно, оскільки додавання в множині цілих чисел зводиться до додавання та віднімання у множині невід'ємних цілих чисел, у якій ці дії однозначні, то і в множині цілих чисел *дія додавання однозначна.*

Поняття "дорівнює", "більше" і "менше" на множині від'ємних цілих чисел

Тепер визначимо поняття *"дорівнює", "більше" і "менше"* на множині від'ємних цілих чисел".
Нехай задані два від'ємних цілих числа $-\boldsymbol{a}$ і $-\boldsymbol{b}$. Модулями цих чисел будуть числа, їм протилежні, тобто $+\boldsymbol{a}$ і $+\boldsymbol{b}$. Якщо ж $(+\boldsymbol{a}) = (+\boldsymbol{b})$, то числам $-\boldsymbol{a}$ і $-\boldsymbol{b}$ відповідає одне й те протилежне число, значить $(-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{b})$. Тобто ***два від'ємних числа рівні, якщо рівні їхні модулі.***

Із розділу невід'ємних цілих чисел ми знаємо, що будь-яке натуральне число додатне, тобто більше нуля. Нехай задане число $\boldsymbol{a} > 0$. Йому симетричним є від'ємне число $-\boldsymbol{a}$. Доведемо, що $-\boldsymbol{a} < 0$. Дійсно, якби було $-\boldsymbol{a} > 0$, то воно б було додатним, що не так. Значить $0 > -\boldsymbol{a}$, або $-\boldsymbol{a} < 0$. Із цього на основі властивості транзитивності випливає висновок, що ***будь-яке додатне число завжди більше будь-якого від'ємного.***

Визначимо відношення "більше" між від'ємними цілими числами.

<u>*Означення.*</u> Уважається, що ***число*** m ***з множини Z "більше" числа*** n ***з тієї ж множини, якщо існує таке число*** p***, що*** $m = n + p$ ***і записується*** $m>n$. Тоді ***відношення*** $n < m$ ***уважається протилежним***

до відношення "більше" і називається відношенням "менше".[1] Тоді, виходячи з попереднього висновку можна записати, що якщо $\boldsymbol{a} > 0$, то $-\boldsymbol{a} < 0$.

<u>*Теорема 4.*</u> ***У множині цілих чисел виконується властивість монотонності додавання***.

Дійсно, якщо числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ додатні, то це випливає з попереднього розділу для будь-якого $\boldsymbol{c}$. Якщо ж числа $-\boldsymbol{a}$ і $-\boldsymbol{b}$ від'ємні, то цікавим є випадок, коли до обох частин будемо додавати від'ємне число $-\boldsymbol{c}$.

Нехай задані додатні числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ і нехай $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$, тоді, як відомо з розділу невід'ємних цілих чисел, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} > 0$, або $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) > 0$. На основі теореми 3 додамо і віднімемо в лівій частині число $(-\boldsymbol{c})$. Отримаємо нерівність $(+\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{c}) + (-\boldsymbol{b}) - (-\boldsymbol{c}) > 0$. Виконаємо в лівій частині перетворення:

$$(+\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{c}) + (-\boldsymbol{b}) - (-\boldsymbol{c}) = (+\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{c}) + (-\boldsymbol{b}) + (-(-\boldsymbol{c})) =$$

$$= (+\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{c}) + (-((+\boldsymbol{b}) + (-\boldsymbol{c}))) = ((+\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{c})) - ((+\boldsymbol{b}) + (-\boldsymbol{c})) > 0.$$

Тобто $(+\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{c}) > (+\boldsymbol{b}) + (-\boldsymbol{c})$. Отже, від того, що ми до обох частин нерівності додали те саме від'ємне число $(-\boldsymbol{c})$ знак нерівності не змінився.

Нехай задані від'ємні числа $-\boldsymbol{a}$ і $-\boldsymbol{b}$ і нехай $-\boldsymbol{a} > -\boldsymbol{b}$. Тоді $(-\boldsymbol{a}) - (-\boldsymbol{b}) > 0$ Виконавши ту саму систему перетворень, що і в попередньому випадку, отримаємо такий же результат. Аналогічно і для знака "менше"[2].

З останнього означення і властивості монотонності випливають дві дуже важливі властивості:

1. Нехай задані два натуральних числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ і нехай $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$. Тоді $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} > 0$. Але ж тоді число $-(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) < 0$, або $-(\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})) = -\boldsymbol{a} + (-(-\boldsymbol{b}))=$ $= -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} < 0$, звідки $-\boldsymbol{a} < 0 -\boldsymbol{b}$, тобто $-\boldsymbol{a} < 0 + (-\boldsymbol{b})$, або $-\boldsymbol{a} < -\boldsymbol{b}$. Тобто, якщо $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$, то $-\boldsymbol{a} < -\boldsymbol{b}$ $^{(*)}$

Отже, ***з двох від'ємних чисел те більше, у якого модуль менший.***

2. Нехай задані два від'ємні числа $-\boldsymbol{a}$ і $-\boldsymbol{b}$. Тоді $(-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b}) < 0$. Додамо до обох частин нерівності число $(+\boldsymbol{b})$. Отримаємо:

[1/] Повне означення відношення "менше" дамо пізніше, коли будемо розглядати дію віднімання.

[2/] Пропонується виконати доведення самостійно.

$$(-a) + (-b) + (+b) < 0 + (+b), \text{ або } (-a) < (+b).$$

Тобто ***числа можна переносити з однієї частини нерівності в іншу, змінивши їхній знак на протилежний.*** Це ж стосується і числових рівностей, що пропонується довести самостійно.

Доведемо, що на множині $\boldsymbol{Z}$ відношення *більше* буде відношенням порядку, тобто на ньому будуть виконуватись властивості *асиметричності* і *транзитивності*.

Теорема. ***На множині цілих чисел існує відношення строгого порядку***.

Якщо числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ невід'ємні, то цей висновок збігається з аналогічним висновком у множині невід'ємних цілих чисел.

Якщо ж обидва вони від'ємні, то виконаємо наступне: доведемо, що відношення "більше" асиметричне і транзитивне. Спочатку доведемо, що це відношення *транзитивне*.

Дійсно, якщо $(-a) > (-b)$, то існує таке m, що $(-a) = (-b) + m$. Якщо $(-b) > (-c)$, то існує таке n, що $(-b) = (-c) + n$. Підставимо останній вираз $(-b)$ у попередній, отримаємо $(-a) = (-c) + m + n$, що означає, що $(-a) > (-c)$.

Тепер доведемо, що це відношення *асиметричне*, тобто, якщо $(-a) > (-b)$, то неправильно, що $(-b) > (-a)$.

Нехай задані від'ємні числа $-a$ і $-b$ і $(-a) > (-b)$. Якщо б виконувалася нерівність $(-b) > (-a)$, то за властивістю транзитивності виплило б, що $(-a) > (-a)$, що хибно.

Якщо ж одне із заданих чисел буде від'ємне, то висновок буде таким же [/1].

Із усього викладеного випливає, що *на множині цілих чисел установлене відношення строгого порядку.*

З'ясуємо, як змінюється будь-яке ціле число, якщо до нього додати інше від'ємне число.

Нехай задане додатне число $\boldsymbol{a}$. Додамо до нього від'ємне число $(-b)$. Отримаємо запис $a + (-b)$. Якщо ✿ ***a*** ✿ > ✿ ***b*** ✿, то $a + (-b) = a - b = c$, звідки $a > c$, тобто в цьому випадку додавання до додатного числа $\boldsymbol{a}$ від'ємного числа $(-b)$ дає в результаті число, менше за доданок $\boldsymbol{a}$.

[1/] Рекомендуємо доведення виконати самостійно.

Якщо ж ❁ $\boldsymbol{a}$ ❁ < ❁ $\boldsymbol{b}$ ❁, то $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) < 0$, що теж менше за $\boldsymbol{a}$, оскільки $\boldsymbol{a}$ – додатне. Отже, додавання від'ємного числа до додатного дає результат менший, за доданок $\boldsymbol{a}$.

Нехай задано від'ємне число $-\boldsymbol{a}$. Ми знаємо, що $-\boldsymbol{a} < 0$. Додамо до обох частин нерівності від'ємне число $-\boldsymbol{b}$. Отримаємо:

$$(-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b}) < 0 + (-\boldsymbol{b}), \text{ або } \quad (-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b}) < (-\boldsymbol{b}), \text{ або } -(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) < (-\boldsymbol{b}).$$

Аналогічно $(-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b}) < (-\boldsymbol{a})$ і $-(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) < (-\boldsymbol{a})$. Тобто і в цьому випадку, якщо до від'ємного числа додати від'ємне, то результат буде менший за суму. Наприклад, $(-4) + (-1) = (-5)$. Тоді за отриманим висновком $-5 < -4$.

Віднімання

Означення. ***Відніманням називається дія, за допомогою якої за двома цілими числами*** a ***і*** b ***знаходиться таке третє ціле число*** c, ***що*** $a + c = b$ ***і записується*** $c = a - b$ ***і при цьому виконуються умови:***

1) $a - 0 = a;$
2) $a - b = a + (-b)$.

Число a називається *від'ємним,* число b – *від'ємником,* а число c – *різницею* чисел a і b.

Віднімання у множині цілих чисел має наступні властивості.

1. *Віднімання в множині цілих чисел завжди існує.*

Дійсно, оскільки будь-яку різницю $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ можна представити у вигляді $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$, а дія додавання завжди існує, то і дія віднімання завжди існує, тобто для будь-яких цілих чисел $\boldsymbol{a}$ *і* $\boldsymbol{b}$ завжди існує таке $\boldsymbol{c}$, що $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.

2. *Дія віднімання одинична.*

Дійсно, оскільки дія додавання одинична, то згідно з попередньою умовою існує тільки одне число $\boldsymbol{c}$, таке, що $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

Виходячи з другої умови означення, дію віднімання можна представити як додавання числа, протилежного до даного, тому всі властивості дії віднімання в множині цілих чисел збігаються з властивостями додавання, в тому числі й з властивістю одиничності.

Множення

Множення в множині цілих чисел відрізняється від множення в множині невід'ємних цілих чисел насамперед тим, що числа тут можуть бути як додатними, так і від'ємними. Тому, передусім, треба визначитися щодо дій зі знаками. Для узагальнення дій зі знаками позначимо один з них символом σ_1, а другий символом σ_2. У цьому питанні будемо виходити з того, що $\sigma_1 \cdot \sigma_1 = \sigma_2 \cdot \sigma_2 = +$, а $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_2 \cdot \sigma_1 = -$, а також, що $\sigma(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \sigma\boldsymbol{a} + \sigma\boldsymbol{b}$. Останнє узгоджується з доведеним вище твердженням, що $(-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$. Оскільки знаки + і – суть протилежні, то $\sigma_1 = -\sigma_2$,

Звідси легко зробити два висновки:

1) дія зі знаками комутативна й асоціативна[1/].

Комутативність дії множення з однаковими знаками очевидна, а комутативність дії множення з різними знаками випливає з нашого припущення, що $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_2 \cdot \sigma_1$. Із асоціативності множення знаків випливає, що добуток декількох знаків буде додатним лише тоді, коли або всі вони додатні, або кількість від'ємних знаків парна;

2) $\sigma_1 \cdot (\sigma_2 \boldsymbol{a}) = (\sigma_1 \cdot \sigma_2)\boldsymbol{a}$

Ці вступні настанови надають нам змогу визначити дію множення в множині Z.

У множині цілих чисел (Z) дія множення вводиться так.

<u>*Означення.*</u> ***Для будь-яких цілих чисел*** *a* ***і*** *b* ***добуток*** $a \prec b$ ***визначається так****:*

1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$

2) $a \cdot b = \sigma_a \cdot \sigma_b$ (✿***a***✿ · ✿***b***✿).

Із цього означення випливає, що операція множення в множині цілих чисел і в множині N узгоджені: тобто добутки натуральних чисел в N і в Z збігаються.

Із означення випливають три найважливіші властивості:

1. *Дія множення в Z комутативна.*

[1/] Пропонуємо читачу асоціативність довести самостійно.

Дійсно, нехай задані два цілих числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$. Згідно з умовою (2) означення $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\sigma_a \cdot \sigma_b)$(✿***a***✿ · ✿***b***✿), а $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = (\sigma_b \cdot \sigma_a)$(✿***b***✿ · ✿***a***✿). Оскільки ж
$\sigma_a \cdot \sigma_b = \sigma_b \cdot \sigma_a$ і ✿***a***✿ · ✿***b***✿ = ✿***b***✿ · ✿***a***✿ як добуток натуральних чисел, то $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$.

2. *Дія множення в Z асоціативна* [1/].

За допомогою аналогічних посилань маємо:

a · (***b*** · ***c***) = [$\sigma_a \cdot (\sigma_b \cdot \sigma_c)$][✿ ***a*** ✿ · (✿ ***b*** ✿ · ✿ ***c*** ✿)],

і (***a*** · ***b***) · ***c*** = [$(\sigma_a \cdot \sigma_b) \cdot \sigma_c$][(✿ ***a*** ✿ · ✿ ***b*** ✿) · ✿ ***c*** ✿].

Оскільки ж множення знаків асоціативне, а множення модулів є дія з натуральними числами, для яких асоціативний закон виконується, то випливає загальний висновок, що $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$.

Зазначимо, що в обох властивостях, якщо хоч би один із співмножників дорівнює нулю, то на основі умови 1 означення увесь добуток дорівнює нулю, і в цьому випадку твердження теж істинні.

3. *У множині Z додавання і множення пов'язані дистрибутивним законом, тобто* $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$.

Згідно з 1-ю умовою означення, якщо $\boldsymbol{c} = 0$, або $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = 0$, то твердження істинне, оскільки обидві частини будуть рівні нулю. Тому розглянемо випадок, коли ці умови не мають місця.

Нехай задані довільні числа $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in Z$.

Якщо всі вони додатні, то твердження істинне, оскільки воно збігається з аналогічним твердженням у множині N.

Якщо ж при цьому $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$, то різниця $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} > 0$ і справедливим буде твердження, що $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bc}$, оскільки воно існує в множині натуральних чисел.

Розглянемо випадок, коли хоч би одне з цих чисел від'ємне. Тут маємо такі варіанти:

а) $\sigma_a = \sigma_b$. Тоді (***a*** + ***b***)·***c*** = (σ_a· ✿ ***a*** ✿ + σ_a·✿ ***b*** ✿)·(σ_c ·✿ ***c*** ✿) = = ($\sigma_a \cdot \sigma_c$)[(✿ ***a*** ✿ + ✿ ***b*** ✿) ·✿ ***c*** ✿] = ($\sigma_a \cdot \sigma_c$)(✿ ***a*** ✿ ·✿ ***c*** ✿ + ✿ ***b*** ✿ ·✿ ***c*** ✿) = ($\sigma_a \cdot \sigma_c$)· ✿ ***a*** ✿ · ✿ ***c*** ✿ = = + ($\sigma_b \cdot \sigma_c$)·✿***b***✿ ·✿***c***✿ = ***ac*** + ***bc***.

[1/] Пропонуємо читачу докладно розглянути це питання самостійно.

б) $\sigma_b = -\sigma_a$. Тоді $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{c} = (\sigma_a\cdot |\boldsymbol{a}| - \sigma_a\cdot |\boldsymbol{b}|)\cdot(\sigma_c \cdot |\boldsymbol{c}|) = (\sigma_a \cdot\sigma_c)[(|\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|) \cdot |\boldsymbol{c}|] = (\sigma_a \cdot\sigma_c)(|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{c}| - |\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}|) = (\sigma_a\cdot \sigma_c)\cdot |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{c}| + + (\sigma_b\cdot\sigma_c)\cdot |\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$.

З цього випливає, що в множині Z справедливим буде $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bc}$ для будь-яких чисел ***a, b*** і ***c.***

Ділення

Виходячи із означення ділення як дії, за допомогою якої за добутком і одним співмножником знаходиться другий співмножник, неважко визначити і правила ділення в множині цілих чисел ***Z***.

Нехай задані два цілих числа ***a*** і ***b***. Для визначеності припустимо, що $|\boldsymbol{a}| > |\boldsymbol{b}|$. *Якщо існує таке третє ціле число* ***c****, що* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$, *то говорять, що число* ***a*** *ділиться на число* ***b***. При цьому число ***a*** називають діленим, число ***b*** – дільником, а число ***c*** – часткою і записують $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.

Розглядаючи складові підмножини множини Z, можна ствердити, що якщо числа ***a*** і ***b*** додатні, то ділення в множині ***Z*** збігається з діленням у множині невід'ємних цілих чисел.

Якщо ж одне з чисел від'ємне, а друге додатне, то маємо наступне.

Нехай задані два числа, які мають різні знаки, тобто $\boldsymbol{a} = \sigma_a\cdot |\boldsymbol{a}|$ і $\boldsymbol{b} = \sigma_b\cdot |\boldsymbol{b}|$ і ***a*** ділиться на ***b***. Тоді існує таке $\boldsymbol{c} = \sigma_c \cdot |\boldsymbol{c}|$, що $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$,
тобто $\sigma_a\cdot |\boldsymbol{a}| = (\sigma_b\cdot |\boldsymbol{b}|) \cdot (\sigma_c \cdot |\boldsymbol{c}|)$ або $\sigma_a\cdot |\boldsymbol{a}| = (\sigma_b\cdot \sigma_c)\cdot(|\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}|)$. Звідси $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}|$, а $\sigma_a = \sigma_b\cdot \sigma_c$. З умови, що $\sigma_b = -\sigma_a$. випливає, що $\sigma_a\cdot |\boldsymbol{a}| = (-\sigma_a\cdot \sigma_c)\cdot(|\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}|)$ або $\sigma_a = (-\sigma_a)\cdot \sigma_c$. Звідси випливає, що якщо σ_a є „плюс", то σ_c буде „мінус", якщо ж σ_a є „мінус", то $(-\sigma_a)$ є „плюс", а σ_c буде „мінус", тобто в будь-якому разі σ_c є від'ємним. Згідно з означенням подільності $\sigma_c\cdot |\boldsymbol{c}| = (\sigma_a\cdot |\boldsymbol{a}|) : (\sigma_b\cdot |\boldsymbol{b}|)$. З умови, що $\sigma_a = \sigma_b\cdot \sigma_c$ випливає, що $\sigma_c. = \sigma_a : \sigma_b$, тоді $\sigma_c\cdot |\boldsymbol{c}| = (\sigma_a:\sigma_b)\cdot(|\boldsymbol{a}|:|\boldsymbol{b}|)$. А оскільки σ_c у такому розкладі знаків завжди є від'ємним, то $\sigma_c\cdot |\boldsymbol{c}| = -(|\boldsymbol{a}|:|\boldsymbol{b}|)$. Тобто при діленні чисел з різними знаками в результаті отримуємо завжди від'ємне число.

Аналогічно доводиться, що при діленні двох від'ємних чисел в результаті отримуємо додатне число.[1/]

Виходячи з того, що ✿ ***c*** ✿ = ✿ ***a*** ✿:✿ ***b*** ✿, можна зробити висновок, що множині цілих чисел, як і у множині натуральних чисел ділення не завжди виконується.

Окрім цього зазначимо, що ***якщо ж ділення виконується, то воно однозначне.***

Дійсно, нехай це не так, тобто існують два таких значення $\boldsymbol{c_1}$ і $\boldsymbol{c_2}$ такі, що для цілих чисел $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b} \neq 0$ виконується $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c_1}$ і $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_2$. Тоді $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c_1}$ і $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c_2}$**.** Тобто $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c_1} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c_2}$ або ж $\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{c_1} - \boldsymbol{c_2}) = 0$, звідки випливає, що $\boldsymbol{c_1} = \boldsymbol{c_2}$.

З однозначності ділення випливає і властивість *скорочуваності* у множині *Z*, тобто, якщо $\boldsymbol{ac} = \boldsymbol{bc}$ і $\boldsymbol{c} \neq 0$, то $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Оскільки система дій у множині *Z* відрізняється від системи дій у множині невід'ємних цілих чисел лише системою дій зі знаками, то всі правила і властивості цих дій у множині *Z* збігаються з правилами і властивостями в множині невід'ємних цілих чисел. Властивості ж, пов'язані зі знаками, ми розглянули.

[1/] Це твердження пропонуємо читачу довести самостійно.

Розділ II.   Величини

1. Загальне поняття величини. Властивості величин.

Здебільшого використання математики передбачає виконання двох основних завдань: обчислення кількості елементів скінченної множини та вимірювання величин. При переліку елементів скінченних множин результат виражається натуральним числом, наприклад, чотири тюки матерії. Але тут не звертається увага на те, чи достатньо цієї матерії на 20 костюмів. Щоб відповісти на це запитання, треба *виміряти* довжину кожного тюка.

Що ж таке вимірювання?

Вимірювання – це сукупність дій, які виконуються за допомогою засобів порівняння заданого об’єкта з якимось іншим об’єктом з тієї ж множини, який ми умовно приймаємо за одиницю виміру, для визначення числового значення вимірюваного об’єкта у визначених одиницях виміру. Під *одиницею виміру* ми розуміємо умовно вибраний об’єкт, якому у відповідність ставимо число 1. Тобто в процесі такого порівняння встановлюється відповідність між вимірюваними об’єктами та множиною чисел.

Якщо одиниця виміру "вміститься" в заданому об’єкті цілу кількість разів, то результат виміру (міра) буде виражений цілим числом. Якщо ж одиниця виміру "не вміщується" в обраному об’єкті цілу кількість разів, то для вираження результату вимірювання треба розширити запас чисел, тобто ввести числа, відмінні від натуральних.

В якості вимірюваних можуть виступати об’єкти різного походження: геометричного, фізичного, хімічного, мовного та ін. Серед найбільш часто вимірюваних об’єктів геометричної природи можна назвати відрізок, поверхню, тіло; фізичної – масу, швидкість, час, напругу, силу, потужність; хімічної – реакційну активність, насиченість і т.д.

Нехай P – певна множина, у якій визначено відношення *еквівалентності* (a ” b) і відношення *“складатися з”* ($a = b$ ⊕ c). Говорять, що *на множині P визначена величина, якщо на цій множині можна встановити систему вимірювання,* тобто кожному елементу a

цієї множини можна поставити у відповідність певне число *f(a)* таке, що виконуються умови:

1) *якщо* a ” b, *то* $f(a)= f(b)$;

2) *якщо* $a = b$ ⮨ c, *то* $f(a)= f(b) + f(c))$;

3) *певному елементу* ***e*** *множини P відповідає число* 1*;*

4) *якщо в множині P встановлені дві системи вимірювання, які задовольняють умовам* 1–3*, тобто довільному елементу* ***a*** *з множини P відповідає число f(a) в першій системі вимірювання і число* $f_1(a)$ *в другій, то існує таке додатне число* ***k****, що* $f_1(a) = \boldsymbol{k}\cdot f(a)$*.* Із цих умов випливає наслідок: нехай у певній системі вимірювання двом різним елементам *a* і *b* з множини *P* відповідає те саме число, тобто $f(a) = f(b)$. (*) Розглянемо іншу систему вимірювання, яка задовольняє тим же умовам, у якій елементам *a* і *b* відповідають числа $f_1(a)$ і $f_1(b)$. Тоді існує додатне число *k* таке, що $f_1(a) = \boldsymbol{k}\cdot f(a)$ і $f_1(b) = \boldsymbol{k}\cdot f(b)$. З отриманої рівності, а також з рівності(*) випливає, що $f_1(a) = f_1(b)$.Тобто, якщо в певній системі вимірювання, яка задовольняє умовам 1 – 4, двом різним елементам *a* і *b* відповідає те саме число, то те ж число буде їм відповідати і в будь-якій системі вимірювання, що відповідає зазначеним умовам [21]. Такі елементи називаються *рівновеликими.* Відношення *рівновеликості є* відношенням *еквівалентності* [1/].

Математика початкових класів базується переважно на вимірюванні об'єктів геометричної та фізичної природи. Тому, виходячи з характеру нашої дисципліни, зосередимо увагу на цих об'єктах.

Узявши, наприклад, сукупність відрізків **Ω** та порівнюючи їх з геометричними об'єктами якоїсь іншої сукупності, ми відмічаємо загальну властивість відрізків, відмінну від властивостей інших геометричних об'єктів – усі відрізки мають подовженість. Але вони не мають поверхні, об’єму, маси і т.д. Аналогічно, розглянувши сукупність площинних об'єктів, ми відмічаємо, що всі вони мають поверхню і не мають властивостей, які притаманні відрізкам або просторовим тілам. Усі тіла мають об'єм, масу і т.д. Але розглядаючи елементи однієї множини, наприклад, відрізки, ми можемо сказати, що кожні два

[1/] Пропонуємо це твердження довести самостійно.

відрізка (аналогічно і поверхні, і об’ємні тіла тощо) або рівні між собою, або нерівні, тобто при накладанні один на другий вони збігаються, або не збігаються. Якщо ж не збігаються, то один буде більший за інший, а другий буде менший. Згідно із зазначеними вище умовами, скажімо, довшому відрізку буде відповідати і більше число. Тобто елементи певної множини можна порівнювати. Завдяки встановленню взаємно-однозначної відповідності між елементами множини і множиною чисел таке порівняння можна виконувати і не накладаючи один елемент на інший, тим більше, що таку операцію в більшості випадків неможливо виконати. Достатньо порівняти числа, що відповідають цим елементам. Тобто, елементи заданої множини можна порівнювати. Отже, елементи кожної із зазначених множин мають певну загальну властивість і за цією властивістю їх можна порівнювати. Ця загальна властивість елементів заданої множини називається *величиною.*

Взагалі ж математика якогось чіткого означення поняття величини не дає. У математичній енциклопедії вона представлена як одне з основних математичних понять, смисл якого з розвитком математики зазнав певних узагальнень. У словнику С.І.Ожегова величина – це те, що можна вимірювати. У тлумачному словнику Т. Ф. Єфремової величина представляється як "одне з основних математичних понять, яке відображає ідею вимірювання об’єктів, що змінюються". Н.Я Віленкин описує величину, як властивість певної множини об’єктів, на якій визначена операція вимірювання.

Узагальнюючи всі згадані характеристики, поняття величини можна визначити так:

Величиною називається загальна властивість елементів певної множини M = {a,b,c...n}, між якими існує відношення рівності і нерівності.

Розглядаючи різні множини, ми стикаємося з випадками, коли для характеристики елементів цілком достатньо їхнього чисельного значення. Це такі елементи як відрізки, поверхні, тіла тощо. Величини, таких елементів (довжина, площа, об’єм, маса, робота, ціна, вартість тощо) повністю характеризуються числами. В інших же випадках чисельної характеристики величин недостатньо, оскільки істотним параметром для них є ще і напрям їх у просторі або на площині. Це такі величини як швидкість, прискорення, сила та ін. Перша група величин називається *скалярними величинами,* а друга *векторними*. Математика початкової школи розглядає множини об'єктів, що характеризуються і як скалярні величини (відрізки, поверхні, ємності та ін.), і як векторні (швидкість).

Розглянемо групу *скалярних величин.*

Скалярними величинами називаються такі, які характеризуються тільки числовим значенням. Наприклад, довжина, площа, маса, температура, час, вартість та ін. Розглянемо поняття скалярних величин та їхні властивості дещо докладніше.

Нехай задана певна множина $M = \{a,b,c...n\}$, елементи якої мають величину A. Виберемо довільний елемент $\boldsymbol{e}$ цієї множини і назвемо його *одиничним відрізком,* тобто поставимо йому у відповідність число 1. Якщо при порівнянні елемента $\boldsymbol{e}$ з будь-яким елементом $\boldsymbol{a}$ виявиться, що він буде в $\boldsymbol{n}$ разів більший за одиничний елемент, то це число $\boldsymbol{n}$ будемо називати *мірою елемента* $\boldsymbol{a}$. Позначимо її $n = me(\boldsymbol{a})$, або просто $n = m(\boldsymbol{a})$. Тут необхідно мати на увазі, що при переході до іншої одиниці виміру, тобто якщо за одиничний елемент прийняти якийсь інший елемент, зміниться число $m(\boldsymbol{a})$, хоча сам елемент залишається незмінним. Очевидним є, що якщо $\boldsymbol{a} = m\ \boldsymbol{e}$, і $\boldsymbol{a} = n\boldsymbol{e}$, то $m = n$, тобто один і той же елемент не може мати різних мір при заданій одній одиниці виміру.

Друга властивість пов'язана з переходом від однієї одиниці виміру до іншої. Ми знаємо, якщо при вимірюванні, наприклад, відрізка метрами ми отримали число p, то при вимірюванні його сантиметрами ми отримаємо число $100p$. Як же це буде виглядати узагальнено?

Нехай $\boldsymbol{e}_1$ *і* $\boldsymbol{e}_2$ – дві одиниці виміру певної величини, причому $\boldsymbol{e}_1 = n(\boldsymbol{e}_2)$, де n - натуральне число. Якщо при вимірюванні елемента $\boldsymbol{a}$ одиницею $\boldsymbol{e}_1$ ми отримали число p, тобто $\boldsymbol{a} = p\boldsymbol{e}_1$, то при вимірюванні того ж елемента одиницею $\boldsymbol{e}_2$ ми отримаємо число pn, тобто $\boldsymbol{a} = pn\boldsymbol{e}_2$. Позначимо міру елемента $\boldsymbol{a}$ при вимірюванні одиничним елементом $\boldsymbol{e}_1$ через $m_1(\boldsymbol{a})$, а міру того ж елемента при вимірюванні елементом $\boldsymbol{e}_2$ – через $m_2(\boldsymbol{a})$. Тоді $m_1(\boldsymbol{a}) = p$ і $m_2(\boldsymbol{a}) = pn$. Враховуючи, що міра відрізка $\boldsymbol{e}_1$

при вимірюванні елементом $\boldsymbol{e_2}$ дорівнює *n,* тобто $m_2(\boldsymbol{e}_1) = n$, рівність $m_2(\boldsymbol{a}) = pn$ можна записати так: $m_2(\boldsymbol{a}) = m_1(a)\cdot m_2(\boldsymbol{e_1})$.

Отже, ми показали, *якщо елемент* ***a*** *кратний елементу* $\boldsymbol{e_1}$*, а елемент* $\boldsymbol{e_1}$ *кратний елементу* $\boldsymbol{e}_2$*, то елемент* ***a*** *кратний елементу* $\boldsymbol{e_2}$ і при цьому виконується рівність $m_2(\boldsymbol{a}) = m_1(a)\cdot m_2(\boldsymbol{e_1})$... Ця властивість називається *мультиплікативністю.*

<u>*Означення.*</u> ***Якщо для елементів a і b існує такий елемент х, що міститься в них цілу кількість разів, то елементи a і b називаються сумірними. Якщо ж такого елементу х не існує, то елементи a і b називаються несумірними.***

Якщо будь-який елемент ***a*** сумірний з одиничним відрізком, то його міра буде виражатися цілим числом. Але може статися, що в елементі ***a*** цілу кількість разів міститься не весь одиничний елемент, а його якась частина. У цьому разі постає задача розбиття одиниці виміру, і міра елементу ***a*** буде виражена вже не цілим числом, а числом іншого виду, так званими *дробами.*

Виходячи з викладеного, можна сформулювати означення деяких величин так:

Довжиною називається міра відрізка.

Площею називається міра поверхні.

Об'ємом називається міра місткості.

Масою називається міра інертності тіла і т. д.

У початкових класах, окрім зазначених, вивчають ще такі скалярні величини, як час, ціна, вартість, кількість та ін.

Величини мають такі властивості.

1. *Які б не були два елементи* ***a*** *і* ***b*** *з множини* ***M,*** *що мають величину* ***A,*** *між ними можна встановити одне з трьох відношень:* $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ *або* $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$.

Порівняння величин має такі властивості:

а) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ – *рефлективність рівності;*

б) *невірно, що* $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{a}$ – *антирефлексивність нерівності:*

в) *якщо* $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$*, то* $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$ – *асиметричність нерівності;*

г) *якщо* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$*, то* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ – *симетричність рівності;*

д) якщо $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ *і* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$*, то* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$ – *транзитивність рівності;*

є) якщо $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$ *і* $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}$*, то* $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{c}$ *– транзитивність нерівності.*

2. Якщо елементи множини М мають величину А, то над ними можна виконувати операцію додавання.

Будемо вважати, що *відрізок* $\boldsymbol{a}$ *розбитий на відрізки* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, *якщо він є їхнім об'єднанням, причому ніякі два з них не мають спільних внутрішніх точок.* У цьому разі відрізок $\boldsymbol{a}$ будемо називати *сумою* відрізків $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ і записувати $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n$ (**). Властивість відрізка представлятися у вигляді суми декількох відрізків називається *адитивністю.* Вона розуміється так: якщо якийсь елемент $\boldsymbol{c}$ з множини *М* може бути складений з елементів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ з тієї ж множини, то говорять, що величина *А* елемента $\boldsymbol{c}$ є *сума* величин елементів $\boldsymbol{a}$ *і* $\boldsymbol{b}$, тобто, якщо елемент $\boldsymbol{a}$ має величину *a,* а елемент $\boldsymbol{b}$ має величину *b* того ж порядку, то сума елементів $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ має відповідно величину $c = a + b$. Згідно з умовою 2 вимірювання величин (*якщо* $a = b \oplus c$, *то* $f(a) = f(b) + f(c)$) сума відрізків (**) характеризується сумою чисел, що відповідають цим відрізкам, тобто $f(a) = f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)$, тому далі говорячи про операції зі скалярними з величинами, ми будемо виконувати операції з числами, що їм відповідають.

Ця властивість дає нам можливість дещо по іншому сформулювати поняття рівноскладених і рівновеликих фігур:

Означення 1. Рівноскладеними фігурами називаються фігури, які можна розрізати на однакову кількість відповідно рівних частин.

Означення 2. Рівновеликими фігурами називаються такі, які мають однакову площу (довжину, об'єм).

Логічним висновком з цих означень є твердження, що *рівноскладені фігури завжди рівновеликі.*

Додавання величин має такі властивості:

а) *які б не були елементи* $\boldsymbol{a}$ *і* $\boldsymbol{b}$*, що мають величину* ***А,*** *завжди існує їхня єдина сума* $\boldsymbol{c} = \mathbf{a} + \boldsymbol{b}$*, яка має теж величину* ***А****;*

б) *має місце комутативний закон:* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$*;*

в) *виконується асоціативний закон:* $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$;

г) *виконується властивість монотонності, тобто якщо* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$*, і* $\boldsymbol{c}$ *– певний елемент, з тієї ж множини, то* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$*, якщо ж* $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$*, то* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} > \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$*, якщо ж* $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$*, то* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c} < \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$;

д) *якщо* $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$*, то існує єдиний елемент* $\boldsymbol{c}$ *такий, що* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$*. У цьому разі елемент* $\boldsymbol{c}$ *називається різницею елементів* $\boldsymbol{a}$ *і* $\boldsymbol{b}$ і записується $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

3. *Виконується дія множення*. Причому, при множенні елемента $\boldsymbol{a}$ з множини M, що має величину $\boldsymbol{A}$, на певне натуральне число n, отримується елемент $\boldsymbol{b}$ з тієї ж множини, тобто такий, що теж має величину $\boldsymbol{A}$. Він представляється як сума $\boldsymbol{b} = a + a + \ldots + a = n \cdot \boldsymbol{a}$. Це випливає з попередньої властивості. Наприклад, якщо відрізок $\boldsymbol{a}$ помножити на число n, то і його довжина множиться на число n і в результаті отримаємо теж довжину (аналогічно площу, масу, ціну і т.д.). Тобто, якщо величину помножити на число, то отримаємо величину того ж порядку.

Якщо ж помножити елемент $\boldsymbol{a}$, що має величину $\boldsymbol{A}$, на елемент $\boldsymbol{b}$, що має величину $\boldsymbol{B}$ (при цьому не має значення $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, чи $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$), то в результаті отримаємо елемент $\boldsymbol{c}$, який має величину $\boldsymbol{C}$, що відрізняється від величин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Ця операція не підпадає під властивість 2. Наприклад, якщо довжину помножити на довжину ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$), то в результаті отримаємо площу; якщо ціну помножимо на кількість ($\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$), то отримаємо вартість, якщо площу помножимо на довжину ($\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$), отримаємо об'єм.

4. *Виконується властивість необмеженого дроблення*. Тобто для кожного елемента $\boldsymbol{a}$, що має величину $\boldsymbol{A}$ і будь-якого натурального m завжди знайдеться такий елемент $\boldsymbol{b}$ з тієї ж множини, що $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{b}$. У цьому разі елемент $\boldsymbol{b}$ називають m - ною частиною елемента $\boldsymbol{a}$, тобто $\boldsymbol{b} = \frac{1}{m}\boldsymbol{a}$.

5. *Аксіома Архімеда.* Нехай $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ – два елементи множини $\boldsymbol{M}$, що мають величину $\boldsymbol{A}$, і нехай $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$. Тоді завжди знайдеться таке натуральне число n, що $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}n$.

Як ми зазначали раніше, якщо в певній системі вимірювання величин двом різним елементам a і b з множини P відповідає одне і те саме число, то ці елементи називаються *рівновеликими*. Можливе й інше. Два різні елементи з множини P, які мають величину $\boldsymbol{A}$, можуть бути розкладені на рівні між собою частини. Такі елементи називаються *рівноскладеними.* На основі властивості додавання величин (власт. 2) можна легко довести, що *рівноскладені елементи множини P, що мають величину* ***A****, завжди будуть рівновеликими.* Зворотне ж твердження взагалі хибне.

Тепер розглянемо *векторну група величин.*

До векторних величин належать такі, які характеризуються не тільки числовим значенням, а й напрямом. До них належать: швидкість, прискорення, сила та ін. У початковій школі вивчається одна векторна величина – швидкість, тому розглянемо поняття та властивості векторної величини саме на прикладі швидкості.

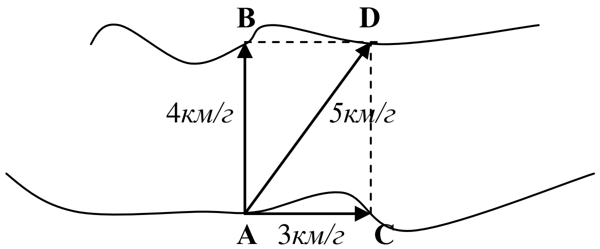
Швидкість – величина двопорядкова, оскільки вона визначається через дві величини – довжину і час. Конкретно: *швидкість вимірюється довжиною шляху, яку пройшло тіло за одиницю часу.* Якщо пройдений тілом шлях позначити буквою *S,* а час, за який тіло пройшло цей шлях, буквою *t,* то швидкість (позначимо її буквою *V*) вимірюється за формулою: $V = \frac{S}{t}$. Шлях, який проходить тіло, може бути прямолінійним, тобто по прямій лінії, і криволінійним, тобто по кривій лінії.

Орієнтуючись на зміст програми початкової школи, розглянемо поняття і властивості швидкості при прямолінійному русі.

Розглядаючи рух тіла, ми фіксуємо два параметри – число і напрям руху. Число характеризує довжину шляху, яке пройшло тіло за одиницю часу, а напрямок – орієнтацію руху тіла. Орієнтація позначається *вектором.* Графічно – *це стрілка,* довжина якої відповідає числовому значенню довжини шляху (у певних довільних одиницях довжини), а напрям показує напрямок руху. Скалярні величини обчислюються алгебраїчно, а векторні – геометрично (за правилом паралелограма. Покажемо це на прикладі.

Нехай човен перепливає через річку. Його швидкість – 4 *км/год*, а швидкість течії – 3 *км/год*. Який шлях проходить човен і з якою швидкістю він його долає?

Намалюємо векторну схему руху.



Коли човен перепливає річку по вектору $\overline{AB}$, він відноситься течією річки з її власною швидкістю по вектору $\overline{AC}$. У результаті човен проходить шлях по вектору $\overline{AD}$, який як за напрямком, так і за довжиною відмінний від інших. Між іншим, час, який витратив човен на проходження цієї відстані такий же, як і якщо б він плив у стоячій воді. Але ж шлях $|AD|$ більший, ніж шлях $|AB|$, значить і швидкість човна стала більшою за рахунок течії. Обчисливши за теоремою Піфагора довжину вектора $\overline{AD}$, ми отримаємо значення швидкості пересування човна 5 *км/год.*

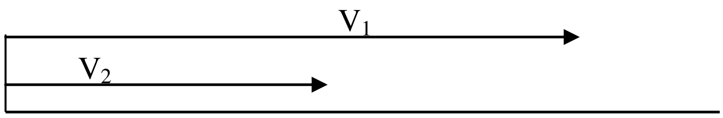
За правилом паралелограма, вектор $\overline{AD}$ називають результуючим векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.

У початковій школі розв'язуються задачі на прямолінійний рух в одному напрямку і рух у протилежних напрямках. Задачі на рух у протилежних напрямках поділяються на рух на зближення і на віддалення. Геометрична схема цих задач базується на колінеарних векторах (векторах, які лежать на одній або на паралельних прямих).

Розглянемо схему розв'язання задач на рух в одному напрямку.

Задача 1. *Два автомобілі вирушили одночасно в дорогу з одного місця в одному напрямку. Один автомобіль рухався зі швидкістю 80 км/год, а другий – 60 км/год. З якою швидкістю віддалявся перший автомобіль від другого?*

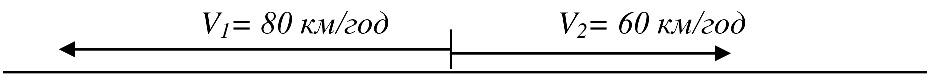
Схема задачі така:



Ця задача розв'язується за формулою $V_{віддал} = V_1 - V_2$.

Тепер розглянемо задачі на рух у протилежних напрямках.

<u>Задача 2.</u> *Два автомобілі одночасно вирушили в дорогу з одного місця, але в протилежних напрямках. Один автомобіль рухався зі швидкістю 80 км/год, а другий – 60 км/год. З якою швидкістю віддалявся перший автомобіль від другого?*



Формула розв'язання та ж сама: $V_{віддал} = V_1 - V_2$. Але оскільки рух відбувається у протилежних напрямках, то вектори V_1 і V_2 мають протилежні знаки, тобто якщо, скажімо, напрям вектора V_1 ми приймемо за додатний, то напрямок вектора V_2 буде від'ємний. Тобто в цьому разі задача має розв'язання

$$V_{віддал} = 80 - (-60) = 80 + 60 = 140 \text{ (км/год)}.$$

Аналогічно розв'язуються і задачі на зближення.

У початкових класах такі задачі розв'язуються на рівні логіки і здорового глузду, але вчитель повинен знати й суто математичний зміст задач такого типу.

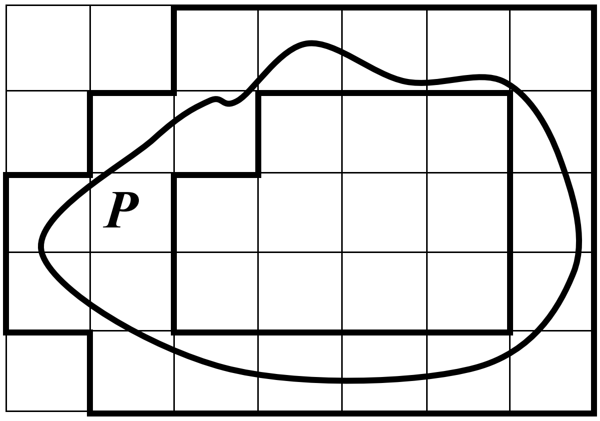
2. Вимірювання величин

У загальному вигляді питання вимірювання величин ми представили на початку розділу. Розглянемо тепер це питання в конкретному представленні на прикладі вимірювання площі.

Як ми вже визначили, *площа* – це міра поверхні. *Вимірювання* – це порівняння двох елементів однієї множини, одному з яких ми за домовленістю ставимо у відповідність число 1. Цей елемент називається *одиницею вимірювання.*

Тепер конкретно.

Нехай задана певна поверхня *P*.



Виберемо одиницею вимірювання іншу поверхню – довільний квадрат, кожній стороні якого ми поставимо у відповідність число 1. Цьому квадрату ми поставимо у відповідність також число 1. Утворимо мережу, чарунками якої є визначені нами одиничні квадрати. Накладемо цю мережу на вимірювану поверхню і виконаємо два підрахунки: 1) підрахуємо всі квадрати, які повністю складаються з точок поверхні *P*; 2) підрахуємо всі квадрати, які частково містять у собі точки поверхні *P*. Підрахувавши всі квадрати в першому випадку, ми визначимо число, яке виражає міру заданої поверхні (площу) з нестачею, оскільки залишаться не врахованими квадрати, у яких є хоч би одна точка, яка не належить поверхні *P*. Позначимо цю площу як S_1^- Підрахувавши всі квадрати, у яких є хоч би одна точка, яка не належить поверхні *P*, отримаємо інше число, яке виражає міру заданої поверхні (площу), але з надлишком, оскільки отримана ступінчата фігура містить у собі значно більше точок, ніж вимірювана фігура. Цю площу позначимо як S_1^+. Очевидно, що $S_1^- < S_1^+$. оскільки перша ступінчата фігура повністю лежить усередині іншої. Похибка в цих випадках досить значна, оскільки обчислення виконане з точністю до цілих одиниць вимірювання.

Для зменшення похибки розділимо кожний одиничний квадрат на 100 частин (через розділення кожної з сторін на 10 рівних частин) і на неврахованну частину поверхні *P* при обчисленні S_1^- накладемо сітку з клітинками в $\frac{1}{100}$ одиниці виміру. Підрахувавши їх так само, як і в попередньому випадку, і додавши до S_1^-, отримаємо більш точне значення площі поверхні *P*: S_2^- з нестачею і S_2^+ з надлишком, але вже з точністю до $\frac{1}{100}$. Очевидно, що і в цьому випадку $S_2^- < S_2^+$. При цьому $S_1^- < S_2^-$ і $S_2^+ < S_1^+$. Продовжуючи цей процес, будемо отримувати все більш точне значення площі поверхні *P* як з нестачею, так і з надлишком. У результаті отримаємо дві послідовності: одна монотонно висхідна $S_1^- < S_2^- < S_3^- < ... < S_n^-$, друга – монотонно спадна $S_1^+ < S_2^+ < S_3^+ < ... < S_n^+$. При $n \to \infty$ ці дві послідовності зійдуться в одному числовому значенні. Спільна границя цих послідовностей і є абсолютним значенням площі поверхні *P*, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^- = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^+ = S$.

Аналогічно вимірюються й інші величини.

Поняття „число” і „величина” є основними, базовими поняттями курсу математики початкової школи. Це визначається їхнім винятковим значенням під час формування як найважливіших теоретичних закономірностей, так і практичних дій.

У початкових класах учні ознайомлюються з такими величинами, як довжина, маса, місткість, час, площа, швидкість, вартість та ін. Усі ці величини вивчаються у тісному зв'язку з формуванням поняття натурального числа, з вивченням арифметичних дій над числами, з формуванням поняття "геометрична фігура". Молодші школярі набувають деяких практичних навичок вимірювання величин, вчаться використовувати співвідношення між величинами під час розв'язування задач. Окремою групою при цьому виступають задачі з величинами: ціна, кількість, вартість; час, швидкість, відстань; довжина, ширина, площа. Ці задачі сприяють усвідомленню пропорційної залежності між величинами, розширюють пізнавальний досвід дітей, допомагають застосувати здобуті знання в практичній діяльності.

Учитель під час формування в учнів уявлення про величину та технологію її вимірювання, повинен виходити з наукової бази з теорії величин, чітко уявляти, що таке величина і які основні властивості цього поняття він повинен формувати в учнів початкових класів.

Достатньо висока професійна підготовка вчителя дозволить йому сформулювати і сформувати у свідомості учня поняття величини на науковій основі, допоможе підвищити математичну культуру учнів та їхню математичну компетентність. Учитель, який володіє *математичними знаннями, під час формування в учнів уявлення про величини та їх вимірювання повинен виходити із наукової теорії величин і чітко уявляти, що таке величина і які основні властивості цього поняття він повинен формувати в учнів початкових класів.*

На жаль, можна твердити, що значна кількість понять у темі „Величини" в початковій школі вводиться на демонстраційному рівні, їхній зміст не розкривається, визначення не формулюється. А це призводить до формального засвоєння знань. Наприклад, при вивченні поняття площі в підручниках з математики початкової школі ані словом не згадується носій площі – поверхня. Аналогічно й щодо інших понять. Отже, ці поняття не мають ґрунту їхньому викладенні в підручниках, а тому й багато в чому спричиняють утруднення в їхньому засвоєнні учнями.

В п р а в и.

1. Ділянка землі має площу 12 *га*. Скільки це $м^2$?, $см^2$?, $дм^2$?, $км^2$?
2. Ділянка землі має форму прямокутника, одна сторона якого 170 *м*, а друга 150 *м*. Яка площа ділянки в гектарах?, у $км^2$?, в *арах*?
3. Автомобіль їхав по дорозі зі швидкістю 72 *км/год.* Яка швидкість автомобіля в *м/сек.*?, *м/хвил*?
4. Літак пролітає за 5 *хвил.* 45 *км*. Яка його швидкість у *км/год*? *м/сек.*?
5. У одному тюку матерії 120 *ярдів*. Скільки це *метрів*? (1 *ярд* = 90,6 *см*).
6. Ставок прямокутної форми має середні розміри: 720 *м* довжини, 70 *м* ширини і 250 *см* глибини. Скільки в ньому *літрів* води?
7. Футбольне поле має площу 0,6 *га.* Його засіяли травою. Скільки кілограмів насіння було витрачено, якщо на 1 $дм^2$ їх витрачалося 4 *г*?
8. У ємності було 3 $м^3$ 225 $дм^3$ 65 $см^3$ води. З неї вилили 1 $м^3$ 640 $дм^3$ 912 $см^3$ води. Скільки води залишилося в ємності?
9. Видатний російський математик М.І.Лобачевский народився 1 грудня 1792 р., а помер 24 лютого 1856 року. Скільки років, місяців і днів прожив М.І.Лобачевский? Скільки він прожив днів?

10. За першим разом автомобіль вивіз зі складу 3 *т* 2 *ц* 45 *кг* зерна, а за другим – на 9*ц* 89 *кг* зерна більше. Скільки зерна перевіз автомобіль за два рази?
11. Один світовий рік – це відстань, яку проходить світло за рік. Яка відстань від нас до найближчої зірки ♋ із сузір'я Центавра, якщо світло до нас від неї доходить за 4 роки 229 днів 14 годин 17 хвилин. (Швидкість світла приблизно дорівнює 300 000 *км/сек.*).

Розділ III. Множина раціональних чисел

1. Поняття раціонального числа

Як свідчить історія, натуральні числа утворилися внаслідок потреби рахувати, визначати чисельність множини, а дроби утворилися внаслідок вимірювання величин.

Нагадаємо, що *вимірюванням* називається сукупність дій, які виконуються за допомогою засобів порівняння заданого об'єкта з якимось іншим об'єктом з тієї ж множини, який ми приймаємо за одиницю виміру, для визначення числового значення вимірюваного об'єкта у визначених одиницях виміру. Під *одиницею виміру* ми розуміємо умовно вибраний об'єкт, якому у відповідність ставимо число 1. При цьому, як було зазначено, якщо одиниця виміру "вміщується" в заданому об'єкті цілу кількість разів, то результат виміру (міра) буде виражений цілим числом. Якщо ж одиниця виміру "не вміщується" цілком в обраному об'єкті цілу кількість разів, то для вираження результату вимірювання треба розширити запас чисел, тобто ввести числа, відмінні від натуральних.

Відношення заданої конкретної величини до одиниці вимірювання дає нам певне число, яке називається *значенням* вимірювальної величини. Відкидаючи в конкретних величинах їх індивідуальні особливості і беручи до уваги лише їх спільну властивість (їх значення) дістанемо величину взагалі (без конкретного змісту), яка може набувати довільних числових значень. Таку величину називають *числовою* або *математичною* величиною.

Нагадаємо, що якщо для елементів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ з множини P існує такий елемент $\boldsymbol{m}$, що $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{m}$, а $\boldsymbol{b} = l\boldsymbol{m}$, то елементи $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ називаються *сумірними*. Якщо ж такого елементу $\boldsymbol{m}$ не існує, то відрізки називаються *несумірними*. В цьому разі елемент $\boldsymbol{m}$ називається *спільною мірою* елементів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$.

Нехай у множині P елементу $\boldsymbol{e}$ поставимо у відповідність число 1. Тоді, якщо елемент $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{e}$, то міра елементів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ буде виражена цілим числом ($\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b} = l\boldsymbol{e}$). Якщо ж $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{e}$, тобто в елементах $\boldsymbol{a}$ (або $\boldsymbol{b}$) цілу кількість разів вміщується не весь одиничний елемент $\boldsymbol{e}$, а його якась частина, то в цьому випадку постає задача розбиття одиниці виміру на менші частини, і міра даних елементів буде виражатися вже не цілими числами, а числами іншого виду, так званими ***дробами.***

У чому ж їхня суть? Розглянемо це питання на прикладі вимірювання відрізків, хоч це можуть бути й елементи будь-якої іншої множини (поверхні, тіла ...).

Нехай задана властивість $\boldsymbol{A}$ (довжина), яку мають елементи ***a, b, c, ...*** деякої множини відрізків $\boldsymbol{M}$. Виберемо за одиницю виміру відрізок $\boldsymbol{e}$, тобто поставимо у відповідність відрізку $\boldsymbol{e}$ число 1. Виберемо з множини $\boldsymbol{M}$ якийсь відрізок $\boldsymbol{a}$ і встановимо відповідність між цим відрізком і одиничним відрізком $\boldsymbol{e}$, тобто встановимо міру відрізка $\boldsymbol{a}$. Тут можливі два варіанти: відрізки $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{e}$ *сумірні* або *несумірні.*

<u>Розглянемо варіант, коли відрізки $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{e}$ ***сумірні.***</u> Тоді існує такий третій відрізок $\boldsymbol{x}$, який міститься у відрізку $\boldsymbol{a}$ m разів, а у відрізку $\boldsymbol{e}$ – n разів, тобто $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{e} = n\boldsymbol{x}$. Тобто в цьому випадку відрізок $\boldsymbol{x}$ буде *спільною мірою* відрізків $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{e}$. Тут можливі два випадки:

1) $n = 1$. Тоді $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{e}$, тобто одиниця виміру міститься у відрізку $\boldsymbol{a}$ цілу кількість разів, і довжина відрізка буде виражена цілим числом;

2) $\boldsymbol{n} \neq 1$. Тоді $\boldsymbol{x} = \frac{e}{n}$ і $\boldsymbol{a} = \frac{m}{n}\boldsymbol{e}$. Із цього ясно, що елемент $\boldsymbol{a}$ містить у собі n елементів $\boldsymbol{x}$, кожний із яких складає $\frac{1}{n}$ частину $\boldsymbol{e}$. Тут вимірювання характеризується двома натуральними числами $\boldsymbol{m}$ і $\boldsymbol{n}$. Число $\boldsymbol{n}$ визначає, на скільки рівних частин розділена одиниця виміру відрізка $\boldsymbol{e}$, а число $\boldsymbol{m}$ визначає, скільки разів $\frac{1}{n}$ частина одиниці міститься в заданому відрізку $\boldsymbol{a}$. Вираз $\frac{m}{n}$ називається ***звичайним дробом.***

<u>*Означення.*</u> ***Звичайним дробом називається пара цілих чисел*** m ***і*** n***, записаних у вигляді*** $\frac{m}{n}$***, де*** n ***показує, на скільки частин розбита одиниця виміру заданої величини, а*** m ***показує, скільки таких частин у цій величині міститься.***

Число $\boldsymbol{m}$ називається *чисельником*, а число $\boldsymbol{n}$ – *знаменником*.

Отже, оскільки одиниця виміру $\boldsymbol{e}$ не вміщується у відрізку $\boldsymbol{a}$ цілу кількість разів, то ми фактично переходимо до іншої одиниці $\boldsymbol{x}$, яка в $\boldsymbol{n}$ разів менша за $\boldsymbol{e}$.

Дріб, у якому чисельник менший за знаменник, зветься *правильним*, якщо ж навпаки, то неправильним.

Запис, що складається із цілого числа і дробу, називається *мішаним числом*.

Величина того самого елемента заданої множини $\boldsymbol{a}$ при заданому одиничному елементу $\boldsymbol{e}$ може бути виражена різними дробами.

<u>*Означення.*</u> ***Дроби, які виражають міру того самого об'єкту, називаються еквівалентними (рівносильними).***

Якщо мірку $\boldsymbol{x}$ розбити на k частин, кожна з яких буде мати міру $\boldsymbol{p}$, тобто $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{p}$, то буде: $\boldsymbol{e} = kn\boldsymbol{p}$, а $\boldsymbol{a} = km\boldsymbol{p}$. Тоді міра того самого елементу $\boldsymbol{a}$ буде виражена дробом $\frac{km}{kn}$. Звідси випливає властивість, яка одержала назву *основної властивості дробу*. "***Якщо чисельник і знаменник дробу помножити*** *(або поділити)* ***на будь-яке натуральне число, то одержимо дріб, рівносильний даному.*** *Тобто* $\frac{m}{n} \sim \frac{km}{kn}$.

Ця властивість лежить в основі такого перетворення, як скорочення дробів. В цьому разі в чисельнику і знаменнику виділяють найбільший спільний дільник і на нього ділять чисельник і знаменник.

<u>*Теорема.*</u> ***Дроби*** $\frac{m}{n}$ ***і*** $\frac{k}{p}$ ***будуть рівносильні, якщо*** $\boldsymbol{mp = nk}$. Дійсно, нехай $\boldsymbol{mp = nk}$. Поділивши обидві частини цієї рівності на добуток $\boldsymbol{np}$, отримаємо рівність $\frac{m}{n} = \frac{k}{p}$. Оскільки вони рівні, то відображають міру того ж елементу, тобто можна записати $\frac{m}{n} \sim \frac{k}{p}$.

Навпаки, якщо $\frac{m}{n} \sim \frac{k}{p}$, то вони відображають міру того ж елементу. Помноживши чисельник і знаменник першого дробу на p, а другого на n, отримаємо $\frac{mp}{np} \sim \frac{nk}{np}$. Оскільки ці дроби мають однакові знаменники, то еквівалентні вирази $\frac{mp}{np}$ і $\frac{nk}{np}$ можуть виражати міру того самого елементу тільки в тому разі, якщо $\boldsymbol{mp = nk}$. Що і треба було довести.

Звідси дуже легко зробити висновок, що $\frac{m}{n} > \frac{k}{p}$, якщо $\boldsymbol{mp > nk}$ і $\frac{m}{n} < \frac{k}{p}$, якщо $\boldsymbol{mp < nk}$.

Оскільки міра елемента повинна виражатися одним додатним числом, то еквівалентні дроби є різними представниками того самого числа. *Додатні числа, які можна представити у вигляді* $\frac{m}{n}$*, називаються* ***додатними раціональними числами.*** Інакше можна сказати, що раціональним числом називається множина еквівалентних дробів виду $\frac{m}{n}$. Отже, множина дробів $\{\frac{3}{5}; \frac{6}{10}; \frac{9}{15}; \frac{12}{15}; \ldots ; \frac{3n}{5n};\ldots\}$ є додатним раціональним числом. Серед цієї множини є дріб, у якого чисельник і знаменник взаємно прості. Такий дріб називається нескорочуваним. Він є головним представником множини зазначених еквівалентних дробів. Таким чином, раціональні числа (як множини еквівалентних дробів) мають властивість, що *для будь-якої множини еквівалентних дробів існує один і тільки один дріб, чисельник і знаменник якого взаємно прості.*

В п р а в и.

1. Які з висловлень правильні:

$(\forall \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N}) \Rightarrow (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}_+)$; $(\forall \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}_+) \Rightarrow (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N})$;

$(\forall \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}_0) \Rightarrow (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Z}_0)$; $(\forall \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Z}_0) \Rightarrow (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}_0)$?

2. Доведіть властивості адитивності та мультиплікативності для площ фігур, які можна розбити на одиничні квадрати.
3. Доведіть властивості адитивності та мультиплікативності для величин кутів.
4. Чи еквівалентні на множині кутів твердження “кути А і В суміжні” та “кути А і В у сумі складають 180^0".
5. Виберіть одиничний відрізок $\boldsymbol{e}$ і побудуйте відрізок, довжина якого складає $\frac{8}{2}\boldsymbol{e}$; $\frac{5}{2}\boldsymbol{e}$; $\frac{3}{4}\boldsymbol{e}$; $3\frac{3}{4}\boldsymbol{e}$.
6. Знайдіть спільну міру відрізків довжиною 3*м* 42*см* і 60*см*; 21*м* 06*см* і 6*м* 12*см* ; 409*см* і 41*мм*; 4*м* 13*см* і 419*см*;
спільну міру тіл, масою у 720*г* і 325*г*; 28*кг* 35*г* і 41*кг* 16*г*;
спільну міру часу; 7*год* і 12*хв*; 35*хв* і 1*год* 20*хв*;
2*год* 24*хв* і 36*хв*; 1*год* і 13*сек*; 41*хв* і 35*сек.*

7. Утворіть множини дробів, еквівалентних дробам $\frac{5}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{8}{2}$.

8. На множині дробів $\left\{\frac{5}{7}, \frac{12}{21}, \frac{1}{7}, \frac{25}{35}, \frac{4}{7}, \frac{15}{21}, \frac{8}{56}\right\}$ задано відношення еквівалентності. Виберіть підмножини еквівалентних дробів. Побудуйте граф заданого відношення.

9. Порівняйте дроби: $\frac{5}{11}$ і $\frac{8}{14}$; $\frac{11}{17}$ і $\frac{23}{33}$; $\frac{17}{12}$ і $\frac{19}{13}$; $\frac{13}{31}$ і $\frac{3}{8}$; $\frac{9}{8}$ і $\frac{117}{104}$.

10. Скоротіть дроби: $\frac{880}{1008}$; $\frac{5579}{8767}$; $\frac{143}{176}$; $\frac{464}{548}$.

11. Знайдіть дріб, еквівалентний дробу $\frac{84}{37}$ із знаменником 111 111.

12. Доведіть, що відношення $\frac{p}{n} \sim \frac{s}{t}$ симетричне, рефлексивне і транзитивне.

2. Пропорції

Нехай заданий дріб $\frac{m}{n}$. Він показує, що в цьому числі міститься m n-них частин одиниці виміру, або, розглядаючи риску як знак ділення, у скільки разів число m більше або менше за n. Наприклад, розглядаючи дріб $\frac{8}{4}$, зазначаємо, якщо одиницю виміру розбити на 4 рівні частини і взяти 8 таких частин, то вони складуть 2 цілих одиниці, тобто дріб $\frac{8}{4}$ дорівнює числу 2. Іншими словами, він показує, що 8 більше за 4 у 2 рази. У цьому разі дріб $\frac{8}{4}$ розглядається як відношення 8 до 4, значення якого дорівнює 2. Надалі, виходячи з ідентичності позначень ділення як дві крапки і дробової риски, в частині випадків відношення $a : b$ будемо записувати як $\frac{a}{b}$.

Якщо розглядати відношення величин, то треба спиратись на такі властивості:

1) *відношення величин можна замінити відношенням чисел, що їм відповідають*.

Наприклад, нехай задані два відрізка довжиною 12*м* і 4*м*. Відношення 12*м* : 4*м* = 3, тобто перший відрізок у 3 рази більший за другий. Відношення чисел 12 : 4 теж дорівнює 3, тому відношення 12*м* : 4*м* можна замінити просто відношенням чисел 12 : 4, тобто 12*м* : 4*м* = 12 : 4;

2) *відношення a : b не зміниться, якщо обидва члени його помножити або поділити на одне й те ж число.*

Дійсно, згідно з властивістю ділення, що якщо ділене і дільник помножити або розділити на одне й те ж число, то частка не зміниться, можна записати: $a : b = am : bm$. Аналогічно $a : b = (a{:}m) : (b{:}m)$. Це означає, що відношення великих чисел можна замінити відношенням малих, наприклад, 36 : 48 = 3 : 4;

3) *на тій же підставі можна замінити відношення дробових чисел цілими.* Дійсно, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = ad : bc$.

Очевидно, якщо відношення $\frac{a}{b} = n$ і $\frac{c}{d} = n$, то можна записати, що $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

<u>*Означення.*</u> ***Рівність двох відношень називається пропорцією.***

Якщо обидві частини рівності $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ помножити на добуток bd, то одержимо рівність $ad = bc$. Тобто, *добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх членів пропорції*. Цей висновок одержав назву *основної властивості пропорції*.

Відношення бувають прямо пропорційними і обернено пропорційними.

Відношення називається прямо пропорційним, якщо збільшення (зменшення) однієї величини тягне за собою збільшення (зменшення) у стільки ж разів другої величини. Наприклад, 3 метри тканини коштують 9 гривень. Скільки коштують 6 метрів? $3 : 6 = 9 : x$. $x = \frac{6 \cdot 9}{3} = 18$. Тобто збільшення кількості матерії вдвічі визначає і збільшення вартості вдвічі.

Відношення називається обернено пропорційним, якщо збільшення (зменшення) однієї величини тягне за собою зменшення (збільшення) у стільки ж разів другої величини. Наприклад, на 36 гривень закупили 3 *м* матерії ціною по 12 гривень за метр. Скільки метрів матерії можна закупити на ті ж гроші ціною по 4 гривні? $3 : x = 4 : 12$. $x = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9$, тобто зменшення ціни в 3 рази визначає збільшення в 3 рази кількості матерії, яку можна закупити на ту ж суму.

У наведених прикладах розглянута пропорційна залежність між двома величинами (кількість і вартість, або кількість і ціна). У цьому разі пропорція називається подвійною. Пропорційна залежність між трьома величинами називається потрійною. Прикладом її може бути залежність, викладена в задачі: 12 автомобілів на 100 *км* витрачають 120 *л* бензину. Скільки бензину витратять 16 автомобілів на 150 *км*?

В п р а в и.

1. Замінити відношення дробових чисел відношеннями цілих чисел:
   а) $\frac{3}{20} : \frac{7}{45}$; б) $\frac{11}{12} : \frac{5}{24}$; в) $\frac{11}{4} : \frac{3}{8} : \frac{5}{12}$; г) $3\frac{1}{4} : \frac{7}{12} : \frac{7}{5}$.
2. Концентрацією розчину називається відношення кількості розчиненої речовини до кількості всього розчину. У 2*л* води розчинено 40*г* солі. Знайти концентрацію розчину.
3. Концентрація розчину солі $\frac{1}{20}$. Скільки солі міститься в 4 *л* солі?
4. Знайти чисельний масштаб, якщо 1*см* на кресленні відповідає 7 *м* на місцевості.
5. Яким відрізком на карті відобразиться відстань у 600 *м* на місцевості, масштаб карти а) $\frac{1}{10000}$; б) $\frac{1}{50000}$; в) $\frac{1}{100000}$?
6. Якій відстані на місцевості відповідають 5*см* на карті, якщо масштаб її а) $\frac{1}{10000}$; б) $\frac{1}{250}$; в) $\frac{1}{75000}$?
7. Який у карти масштаб, якщо 45 *км* на місцевості відповідають 5 *см* на карті?
8. Розв'яжіть пропорції:
   а) $24 : x = 8 : 5$; б) $x : 15 = 8 : 24$; в) $343 : 98 = x : 60$.
9. У 800 *г* розчину міститься 50 *г* солі. Скільки солі у 240 *г* розчину?

10. З 24 *кг* соняшникового насіння отримано 8 *кг* масла. Скільки насіння потрібно для отримання 15 *кг* масла?
11. На дільниці залізничної дороги замінили рейки довжиною 8 *м* на нові, довжиною 12 *м* . Скільки потрібно нових рейок на заміну 360 старих рейок.
12. Колесо, яке має коло $1\frac{1}{2}$ *м,* зробило на якійсь відстані 96 обертів. Скільки обертів на цій же відстані зробить колесо, довжина кола якого дорівнює $2\frac{2}{5}$ *м*?
13. На виготовлення однієї деталі робочі почали витрачати 8 хвилин замість 20. Скільки деталей виготовляє бригада за зміну, якщо раніше вона випускала 120 деталей?
14. Скільки обертів зробить зубчате колесо з 48 зубцями, якщо зціплене з ним колесо має 18 зубців і робить 60 обертів?
15. Швидкість човна відноситься до швидкості течії річки як 36 : 5. Човен плив за течією 5 год.10хв. Скільки часу потрібно буде йому, щоб повернутися назад?
16. Для 16 голів худоби на 36 днів потрібно 1920 *кг* соломи. Скільки соломи потрібно для 20 голів худоби на 40 днів?
17. Щоб пошити 6 палаток треба 120 *м* брезенту шириною 2 *м.* Скільки метрів брезенту шириною 3 *м* треба для того, щоб пошити 4 такі палатки?
18. За 18 днів бригада лісорубів з 15-ти осіб заготувала 972 *куб.м* деревини. Скільки деревини заготує бригада з 12-ти осіб за 25 днів?

3. Арифметика раціональних чисел

Додавання в множині додатних раціональних чисел

<u>*Означення*</u>. ***Додаванням додатних раціональних дробів називається бінарна алгебраїчна операція “+”, яка кожній парі дробів*** $\frac{a}{b}$ ***і*** $\frac{c}{d}$ ***ставить у відповідність єдиний дріб*** $\frac{ad+bc}{bd}$**.**

Із цього означення випливають два випадки:

1) $b = d$. У цьому разі ми маємо два дроби з однаковими знаменниками $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{b}$ тоді їхня сума буде мати вигляд $\frac{ab+cb}{bb}$ або $\frac{b(a+c)}{bb} = \frac{a+c}{b}$. Тобто,

<u>Правило.</u> ***Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, залишивши той же знаменник.***

2) $b \neq d$. Тоді сума дробів має вигляд, представлений в означенні. З нього випливає і відповідне правило:

<u>Правило</u>. ***Щоб додати два звичайних дроби з різними знаменниками, треба звести їх до спільного знаменника, додати чисельники і підписати той же спільний знаменник. Якщо можна, то одержаний дріб скоротити.***

З правила додавання дробів випливає, що операція додавання *комутативна, асоціативна і монотонна*. Дійсно, операція додавання комутативна, тому що сама дія додавання виконується з чисельниками, які являють собою цілі числа. А для цілих чисел додавання комутативне. Аналогічно виглядає і доведення асоціативності. Монотонність додавання раціональних чисел виглядає так: якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ і $\frac{m}{n}$ будь-яке раціональне число, то $\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{c}{d} + \frac{m}{n}$. Дійсно, якщо задані дроби рівні, то $ad = bc$. Розглянемо, що буде, якщо до обох частин рівності додамо дріб $\frac{m}{n}$. Внаслідок додавання за правилом додавання дробів у лівій частині одержимо дріб $\frac{an+bm}{bn}$, а в правій – $\frac{cn+dm}{dn}$. Якщо за правилом порівняння дробів перемножити чисельник першого дробу на знаменник другого, а знаменник першого – на чисельник другого, то одержимо такі два вирази:

$$(an + bm)\cdot dn = adn^2 + bmdn, \text{ і } (cn + dm)\cdot bn = bcn^2 + bmdn.$$

Порівнюючи ці два вирази за властивістю монотонності додавання в множині натуральних чисел, відмічаємо, що вони рівні, оскільки мають однакові доданки $bmdn$, а $bcn^2 = adn^2$, оскільки за умовою $ad = bc$. А значить, $\frac{a}{b}+\frac{m}{n} = \frac{c}{d}+ \frac{m}{n}$. Аналогічно доводиться, що коли $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b}+\frac{m}{n} > \frac{c}{d}+\frac{m}{n}$, а коли $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b}+\frac{m}{n} < \frac{c}{d}+\frac{m}{n}$.

Віднімання в множині додатних раціональних чисел

Означення. Відніманням звичайних дробів називається бінарна алгебраїчна операція "–", яка будь-якій парі дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ ставить у відповідність єдиний дріб $\frac{ad-bc}{bd}$ такий, що виконується рівність $\frac{ad-bc}{bd}+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$.

Аналізуючи це означення можна сказати, що віднімання звичайних дробів є операція, за допомогою якої за відомою сумою й одним з доданків знаходиться другий доданок. Тобто, якщо $\frac{c}{d}+ \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, то $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

<u>*Теорема.*</u> **Різниця $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ у множині додатних раціональних чисел існує тільки тоді, коли $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$.** Дійсно, якщо $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, то $ad \geq bc$, а тому існує різниця $ad - bc$. Покажемо, що дріб $\frac{ad-bc}{bd} = \frac{x}{y}$ є різницею $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$. Для цього достатньо показати, що сума $\frac{ad-bc}{bd} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$. Дійсно, за правилом додавання дробів з різними знаменниками маємо: $\frac{ad-bc}{bd} + \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$, що і треба було одержати.

Тому $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$. Звідси випливає <u>*п р а в и л о*</u>:

Щоб відняти один звичайний дріб від іншого, треба привести їх до спільного знаменника, відняти чисельники і підписати спільний знаменник. Якщо можна, то результат скоротити.

В п р а в и.

1. Виконайте обчислення усно, використовуючи раціональні способи:

   а) $7\frac{17}{24}+2\frac{11}{15}+2\frac{7}{24}$; б) $2+9\frac{1}{22}-3\frac{17}{22}+1\frac{2}{11}-7\frac{7}{11}$.

2. Заданий дріб $\frac{11}{41}$. Яке число треба додати до чисельника і знаменника, щоб отримати дріб $\frac{3}{8}$?

3. Заданий дріб $\frac{29}{64}$. Яке число треба відняти від чисельника та знаменника, щоб отримати дріб $\frac{2}{9}$?

4. Доведіть, що якщо a, b і c раціональні числа, то

   а) $a-(b+c)=a-b-c$ (якщо $a>b+c$);

   б) $a+(b-c)=a+b-c$ (якщо $b>c$);

   в) $a-(b-c)=a-b+c$ (якщо $a>b>c$).

5. Доведіть, що якщо $a>b$, то $a+c>b+c$.

6. Обчислити:

   а) $10\frac{17}{80}+2\frac{19}{48}-1\frac{5}{32}+\frac{1}{96}$;

   б) $2\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{2}{15}\right)$;

   в) $\frac{3}{44}+6\frac{1}{3}+3\frac{2}{11}+1\frac{7}{66}-\frac{3}{44}$;

   г) $\left(21-19\frac{1}{8}\right)+\left(15\frac{3}{4}-15\frac{3}{8}\right)-\left(3\frac{1}{2}-\frac{19}{24}\right)$;

9. Яке з чисел ближче до 3: $2\frac{88}{97}$ чи $3\frac{1}{9}$?

Множення в множині додатних раціональних чисел

<u>*Означення.*</u> ***Множенням звичайних дробів називається бінарна алгебраїчна операція, яка будь-якій парі звичайних дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ ставить у відповідність єдиний дріб $\frac{a\cdot b}{c\cdot d}$.***

Як бачимо, чисельник і знаменник добутку дробів представляє собою добуток чисельників і знаменників цих дробів.

Множення дробів із теоретико-множинних позицій розглядається у два етапи.

1. Розглянемо спочатку *множення звичайного дробу на ціле число*, тобто $\frac{a}{b}\cdot c$. Це множення можна розглядати як суму c однакових доданків виду $\frac{a}{b}$, тобто $\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots+\frac{a}{b}}_{c}$. Тому сума буде мати вигляд $\frac{\overbrace{a+a+\ldots+a}^{c}}{b}$, де доданок a повторюється c разів. Тоді добуток $\frac{a}{b}\cdot c = \frac{ac}{b}$. Тобто, ***щоб помножити дріб на ціле число, треба помножити на це ціле число чисельник дробу і підписати той же знаменник. Якщо можна, то скоротити.***

2. *Множення дробу на дріб*. Розглянемо цю операцію на прикладі вимірювання відрізків. Нехай заданий відрізок $\boldsymbol{a}$ сумірний з одиничним відрізком $\boldsymbol{e_1}$, а відрізок $\boldsymbol{e_1}$ сумірний з відрізком $\boldsymbol{e_2}$, причому довжина відрізка $\boldsymbol{a}$ виражена мірою: $\boldsymbol{a} = \frac{p}{n}\boldsymbol{e_1}$, а $\boldsymbol{e_1} = \frac{t}{q}\boldsymbol{e_2}$. Або $n\boldsymbol{a} = p\boldsymbol{e_1}$, а $q\boldsymbol{e_1} = t\boldsymbol{e_2}$. Помноживши обидві частини першої рівності на q, а другої на p, одержимо $(nq)\boldsymbol{a} = (pq)\boldsymbol{e_1}$ і $(pq)\boldsymbol{e_1} = (pt)\boldsymbol{e_2}$. Тоді за властивістю транзитивності рівності $(nq)\boldsymbol{a} = (pt)\boldsymbol{e_2}$, а звідси випливає, що $\boldsymbol{a} = \frac{pt}{nq}\boldsymbol{e_2}$. Тобто, довжина відрізка $\boldsymbol{a}$ буде виражатися звичайним дробом $\frac{pt}{nq}$. З іншого боку, оскільки $\boldsymbol{a} = \frac{p}{n}\boldsymbol{e_1}$, а $\boldsymbol{e_1} = \frac{t}{q}\boldsymbol{e_2}$, то, підставивши в $\boldsymbol{a}$ замість $\boldsymbol{e_1}$ його вираз через $\boldsymbol{e_2}$, одержимо, що $\boldsymbol{a} = \frac{p}{n}\cdot\frac{t}{q}\boldsymbol{e_2}$. Звідси

$\frac{p}{n}\cdot\frac{t}{q} = \frac{pt}{nq}$.

<u>Правило.</u> ***Щоб перемножити два звичайних дроби, треба окремо перемножити чисельники і знаменники.***

Множення звичайних дробів має властивості *комутативності, асоціативності та скорочуваності*. Дійсно, для будь-яких цілих чисел ***a*, *b*** і ***c*** маємо ***ab* = *ba*, (*ab*)*c* = *a*(*bc*),** а з ***ac* = *bc*** випливає, що ***a* = *b***.

Спираючись на алгоритм множення, який випливає з означення, відмічаємо, що $\frac{a}{b} \prec \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, а $\frac{c}{d} \prec \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{d \cdot b}$. Але в чисельнику і в знаменнику ми маємо дії з цілими числами, для яких комутативний закон виконується, тобто $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c \cdot a}{d \cdot b}$, а значить $\frac{a}{b} \prec \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \prec \frac{a}{b}$.

Аналогічно доводиться й асоціативність множення.

Окрім того, множення в множині **Q** *дистрибутивне* відносно додавання і *монотонне,* тобто для будь-яких трьох чисел ***a*, *b*** і ***c*** з множини **Q** (числа ***a*, *b*** і ***c*** є три звичайні дроби) виконується рівність: (***a* + *b***)***c* = *ac* + *bc*,** а з ***a* > *b*** випливає ***ac* >*bc*.**

Ділення в множині додатних раціональних чисел

<u>Означення.</u> ***Діленням звичайних дробів називається бінарна алгебраїчна операція, яка будь-яким двом дробам*** $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ ***ставить у відповідність єдине число*** $\frac{a \cdot d}{c \cdot b}$, тобто $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$.

Істинність цього твердження можна встановити, довівши рівність $\frac{a \cdot d}{c \cdot b} \prec \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

Порівняння операцій множення і ділення показує, що ділення $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$ можна замінити множенням $\frac{a}{b}$ на $\frac{d}{c}$. Тому операція ділення вважається оберненою до множення, тобто це дія, за допомогою якої за добутком і відомим співмножником знаходять невідомий другий співмножник. Або ж якщо $\frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, то $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{x}{y}$.

<u>*Теорема*</u>***.*** ***Ділення дробових чисел завжди виконується***.

Дійсно, з того, що $\frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, випливає $\frac{cx}{dy} = \frac{a}{b}$, або $cbx = ady$. Звідси випливає $x = \frac{ady}{cb}$, або $\frac{x}{y} = \frac{ad}{dc}$. Тобто

П р а в и л о: ***щоб розділити дріб на дріб, треба чисельник першого дробу помножити на знаменник другого і результат записати в чисельник, а знаменник першого дробу помножити на чисельник другого і записати в знаменник. Якщо можна, то зробити скорочення.***

Означення. **Числом, зворотним до числа $\frac{a}{b}$, називається число $\frac{b}{a}$** (зважаючи, що $a \neq 0$ і $b \neq 0$).

Теорема. ***При множенні будь-якого раціонального числа на правильний дріб отримується число, менше за задане.***

Дійсно, нехай задані раціональне число $\frac{a}{b}$ і правильний дріб $\frac{m}{n}$, де $m < n$. Виконаємо множення $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$. Порівняємо дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{am}{bn}$. Утворимо добутки abn і abm. Виходячи з властивості монотонності очевидно, що $abn > abm$, а це свідчить, що $\frac{a}{b} > \frac{am}{bn}$.

В п р а в и.

1. (Усно). Обчислити раціональним способом:

а) $4\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{25}{27}\cdot\frac{26}{75}$; б); $\left(\frac{35}{72}+\frac{7}{48}\right)\cdot1\frac{5}{7}$. в) $\left(7\frac{2}{5}\cdot3\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{10}{37}\cdot1\frac{2}{7}\right)$.

2. Виконати обчислення:

а) $\left(4\frac{1}{2}\cdot5\frac{2}{3}\right):6\frac{3}{4}$; б) $\left(7\frac{2}{5}\cdot3\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{10}{37}\cdot1\frac{2}{7}\right)$; в) $\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{18}\right)\cdot5\frac{1}{7}-2:1\frac{5}{7}$

г) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)\cdot1\frac{8}{19}+\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2\right)\cdot21\frac{1}{25}$; д) $\dfrac{\left(2:\frac{1}{18}-30\right)\cdot2-\frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\right):\frac{2}{3}+1\frac{1}{2}}$.

3. Розв’язати рівняння:

а) $\left(10\frac{2}{5}+x\right):1\frac{1}{7}=9\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{9}:\left(3\frac{2}{3}-5x\right)=\frac{1}{6}$; в) $\left(4\frac{1}{2}-2x\right)\cdot3\frac{2}{3}=\frac{11}{15}$;

г) $\left(2\frac{1}{8}-\left(1\frac{1}{27}-\left(x-\frac{1}{9}\right)\right)\right)+3\frac{5}{34}=5$; д) $1\frac{3}{5}+\left(2\frac{7}{12}-\left(\left(\frac{3}{4}-x\right)+1\right)\right)=2\frac{14}{15}$;

є) $12-\left(30-19\frac{1}{2}:\left(2\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\boldsymbol{x}\right)\right)\cdot\frac{23}{55}=3$.

4. Розв’язати задачу:

а) Хлібозавод отримав три партії борошна. Перша партія складала $\frac{10}{27}$ усього замовлення, друга партія – $\frac{15}{34}$ остачі, а третя – на 6 *т* більша за другу. Борошно було двох ґатунків: $\frac{5}{9}$ кількості борошна першого ґатунку складало $\frac{25}{36}$ кількості борошна другого ґатунку. Скільки було борошна кожного ґатунку?

б) У помешканні дві кімнати. Довжина однієї $5\frac{1}{4}$*м*, довжина іншої складає $\frac{2}{3}$ довжини першої. Ширина кожної кімнати $3\frac{1}{5}$*м*. Площа цих кімнат складає $\frac{7}{10}$ площі всієї квартири. Яка площа помешкання?

5. Майданчик прямокутної форми має довжину $45\frac{1}{2}$*м*, а його ширина складає $\frac{5}{13}$ довжини. Навколо цього майданчика є доріжка шириною $\frac{4}{5}$*м*. Знайти площу доріжки.

6. Автозавод випустив три партії машин. Кількість машин першої партії складають $\frac{3}{10}$ усіх випущених автомобілів. У другій партії кількість машин в $1\frac{1}{2}$ разів більше, ніж у першій. А в третій партії на 420 машин менше, ніж у другій. Скільки всього машин випустив завод?

7. Три шматки заліза мають загальну масу $17\frac{1}{4}$*кг*. Якщо масу першого шматка зменшити на $1\frac{1}{2}$*кг*, а масу другого на $2\frac{1}{4}$*кг*, то всі три шматки будуть мати однакову масу. Якої маси був кожний шматок?

8. Сума трьох чисел $22\frac{1}{2}$. Друге число в $3\frac{1}{2}$, а третє в $2\frac{1}{4}$ рази більше першого. Знайти ці числа.
9. Човен за течією пливе із швидкістю $15\frac{1}{2}$ *км/год,* а проти течії – із швидкістю $8\frac{1}{4}$ *км/ч.* Яка швидкість течії?
10. Суміш із води та цукру має масу 330*г.* Маса цукру в цій суміші складає $\frac{5}{28}$ маси води. Скільки в суміші цукру і скільки води?
11. Батько старший за сина на 24 роки. Кількість років сина дорівнює $\frac{5}{13}$ кількості років батька. Скільки років батьку і скільки років сину?
12. У двох ящиках $24\frac{1}{4}$ *кг* яблук. Якщо з першого ящика перекласти у другий $3\frac{1}{2}$*кг*, то в першому буде яблук на $\frac{3}{5}$*кг* більше, ніж у другому. Скільки кілограмів яблук у кожному ящику?

Відношення порядку на множині раціональних чисел

З порівняння дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ випливає, що між будь-якими двома раціональними числами можна встановити одне з трьох відношень: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ або $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Теорема. ***У множині раціональних чисел виконується властивість транзитивності нерівності.*** Тобто треба довести, що коли $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, а $\frac{c}{d} < \frac{m}{n}$, то $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$. Дійсно, якщо $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, то $ad < bc$, а якщо $\frac{c}{d} < \frac{m}{n}$, то $cn < dm$. Перемноживши ці дві нерівності, одержимо нерівність $adcn < bcdm$, або $an < bm$, а це означає, що $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$. Що і треба було довести.

Теорема. ***Відношення нерівності асиметричне.***

Дійсно, нехай задана нерівність $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Тоді буде виконуватися нерівність $ad < bc$. Їй симетричною є нерівність $bc < ad$. Якщо вважати, що симетричність виконується, то за властивістю транзитивності буде істинною нерівність $ad < ad$, що є хибним. Значить припущення, що симетричність виконується є хибним. А звідси випливає й хибність нерівності $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$, тобто відношення нерівності асиметричне.

Із цих двох теорем випливає наслідок, що на множині раціональних чисел визначене відношення порядку.

Окрім зазначеної властивості раціональних чисел, множина **Q** має й такі важливі властивості як *щільність та зліченність.*

<u>*Означення.*</u> ***Множина М називається щільною, якщо між будь-якими її двома елементами існує ще нескінченна кількість елементів.***

<u>*Теорема.*</u> ***Множина раціональних чисел щільна.***

Нехай задані два раціональних числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$. Для них завжди існує їхнє середнє арифметичне $\frac{a+b}{2}$, тобто число, що знаходиться між ними. А оскільки ці числа будь-які, то це означає, що які б не були раціональні числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, між ними завжди міститься ще нескінченна кількість раціональних чисел.

<u>*Означення.*</u> ***Множина називається зліченною, якщо між її елементами і множиною натуральних чисел можна встановити взаємно-однозначну відповідність.***

Якщо такої відповідності встановити не можна, то множина називається *незліченною.*

<u>*Теорема.*</u> ***Множина раціональних чисел зліченна.***

Щоб це довести, уведемо попередні умови: представимо кожне раціональне число у вигляді звичайного дробу. Назвемо висотою дробу суму його чисельника і знаменника. Розташуємо всі звичайні дроби в порядку зростання висоти, а числа з однією висотою – в порядку зростання чисельника. Цей ряд буде мати такий вигляд: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}$, ... Таким методом можна перебрати, перелічити всі звичайні дроби, тобто поставити їм у відповідність множину натуральних чисел.

$$Q_+ = \left\{\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \dots\right\}$$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$N = \{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad \dots\}$$

А це означає, що множина раціональних чисел зліченна.

Вправи.

1. Порівняйте значення виразів і розташуйте їх по порядку: $\frac{19}{34}$; $\frac{28}{51}$; $\frac{42}{67}$; $\frac{31}{46}$; $\frac{3}{5}$.
2. Не виконуючи обчислень порівняйте вирази: $34\frac{1}{3}\left(8\frac{2}{3}+2\frac{3}{4}\right)$ і $34\frac{1}{3}\left(8\frac{2}{3}+2\frac{1}{4}\right)$.
3. Доведіть, що якщо $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ і $\boldsymbol{d}$ – натуральні числа, і $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} < \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$, то $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} < \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}} < \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$.

4. Аксіоматична побудова теорії додатних раціональних чисел

Ми визначили додатні раціональні числа й операції над ними, виходячи із задачі про вимірювання відрізків, тобто з геометричних міркувань. Проте додатні раціональні числа потрібні не тільки для вимірювання довжини, а і для вимірювання площі, об'єму і т.д. Тому для всебічного користування множиною раціональних чисел виникає необхідність побудови теорії таких чисел, що не спирається на геометричні поняття. Для цього треба вказати систему аксіом, яка лежить в основі теорії раціональних чисел.

Визначимо множину $\boldsymbol{Q}_+$ за допомогою системи аксіом, які описують властивості операції додавання в $\boldsymbol{Q}_+$ і операції множення на натуральне число, яка також зводиться до додавання як $n \cdot a = \underbrace{a+a+a+\dots+a}_{n}$. Суть цієї системи аксіом полягає в наступному:

1) Множина $\boldsymbol{Q}_+$ містить у собі множину $\boldsymbol{N}$ натуральних чисел.

2) В множині $\boldsymbol{Q}_+$ визначена операція додавання, яка ставить у відповідність будь-яким двом числам $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ з множини $\boldsymbol{Q}_+$ число $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ з *тієї ж множини, яке називається сумою чисел* $\boldsymbol{a}$ *і* $\boldsymbol{b}$. *На підмножині* $\mathbf{N}$ *операція додавання збігається з визначеною в* $\mathbf{N}$.

3) Операція додавання в $\boldsymbol{Q}_+$ *комутативна, асоціативна і скорочувана.*

4) Для чисел $\boldsymbol{a}$ *і* $\boldsymbol{b}$ *з множини* $\boldsymbol{Q}_+$ *існує число* $\boldsymbol{c}$ *з тієї ж множини таке, що* $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, *якщо* $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$. *У цьому разі* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$. *Число* $\boldsymbol{c}$ *називається різницею чисел* $\boldsymbol{a}$ *і* $\boldsymbol{b}$.

5) У множині $\boldsymbol{Q}_+$ *визначена операція множення, яка ставить у відповідність будь-яким двом числам* $\boldsymbol{a}$ *і* $\boldsymbol{b}$ *з множини* $\boldsymbol{Q}_+$ *число* $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b}$ *з тієї ж множини, яке називається добутком чисел* $\boldsymbol{a}$ *і* $\boldsymbol{b}$. *На підмножині* $\mathbf{N}$ *операція множення збігається з визначеною в* $\mathbf{N}$.

6) Для будь - якого $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{Q}_+$ *знайдуться такі натуральні числа* $\boldsymbol{p}$ *і* $\boldsymbol{n}$, *що* $\boldsymbol{na} = \boldsymbol{p}$. *У цьому разі* $\boldsymbol{a} = \frac{p}{n}$, *тобто кожному* $\boldsymbol{a}$ *відповідає нескінченна сукупність еквівалентних дробів.*

7) Для будь - яких натуральних чисел $\boldsymbol{p}$ *і* $\boldsymbol{n}$ *є таке число* $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{Q}_+$, *що* $\boldsymbol{na} = \boldsymbol{p}$.

8) Якщо $\boldsymbol{na} = \boldsymbol{nb}$, *то* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Можна довести, що ця система аксіом несуперечлива, однозначно визначає множину $\boldsymbol{Q}_+$ і операції додавання та множення на ній. Але доведення цього виходить за межі програми з математики зазначеного рівня.

Розділ IV. Десяткові дроби

Запис дробових чисел у вигляді звичайних дробів хоч і простий, але в багатьох випадках незручний. Перша незручність – це те, що не завжди без виконання дій можна порівняти дроби, наприклад, $\frac{9}{13}$ і $\frac{17}{26}$. Друга – це певні утруднення і громіздкість у виконанні дій, особливо з мішаними числами. Значно полегшує цю роботу другий вид раціональних чисел – десяткові дроби.

Ідея десяткових дробів виникла в X - XV століттях у зв'язку з поширенням у світі арабської десяткової системи числення. Ми знаємо, що виникнення дробів пов'язане з вимірюваннями. У десятковій системі числення перехід від одних одиниць вимірювання до інших виконується через збільшення або зменшення перших в 10, 100, 1000 і т. д. разів. Наприклад, 1*т* = 1000 *кг* = 1 000 000 *г*, 1 *км* = 1 000*м* = 100 000 *см* і т.д. Тому для обчислювальної практики зручними є дроби, знаменник яких є степенями числа 10, тобто дроби виду $\frac{m}{10}$, $\frac{m}{100}$, $\frac{m}{1000}$ ... Такі дроби називаються *десятковими.*

Заслуга остаточного оформлення ідеї десяткових дробів і створення відповідної теорії належить самаркандському математику і астроному Джамшиду ал-Каши, який в 1427 році видав роботу "Ключ арифметики". У Європі ця робота не була відома, і відкриття десяткових дробів тут пов'язують з ім'ям фламандського інженера Сімона Стівена на рубежі XVI - XVII століть. У подальшому теорію десяткових дробів розробляли вчені як Європи, так і Азії. Цілу частину від дробової тоді відокремлювали тим, що над дробовою частиною проводили лінію. Уведення коми належить іншому європейцю - математику Неперу в 1617 році.

Поняття десяткового дробу

Суть десяткових дробів випливає з теореми:

<u>*Теорема.*</u> ***Якщо знаменник звичайного дробу є натуральна степінь числа 10, то цей дріб можна представити у вигляді многочлена, розташованого за спадаючими степенями числа 10. При***

цьому коефіцієнтами цього многочлена будуть однозначні числа або нулі.

Нехай заданий дріб $\frac{m}{10^n}$. Відповідно до означення $\boldsymbol{m}$ – натуральне число. Представимо його у вигляді:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a}_{n+k}\, 10^{n+k} + \boldsymbol{a}_{n+k-1}10^{n+k-1} + \ldots + \boldsymbol{a}_n 10^n + \boldsymbol{a}_{n-1}10^{n-1} + \ldots + \boldsymbol{a}_1\, 10^1 + \boldsymbol{a}_o.$$

Розділимо обидві частини цієї рівності на 10^n. У результаті будемо мати рівність:

$$\frac{m}{10^n} = \frac{a_{n+k}10^{n+k}}{10^n} + \frac{a_{n+k-1}10^{n+k-1}}{10^n} + \ldots + \frac{a_n 10^b}{10^n} + \frac{a_{n-1}10^{n-1}}{10^n} + \ldots + \frac{a_1 10^1}{10^n} + \frac{a_0}{10^n}.$$

Після скорочення одержимо:

$\frac{m}{10^n} = \boldsymbol{a}_{n+k}10^k + \boldsymbol{a}_{n+k-1}10^{k-1} + \ldots + \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_{n-1}10^{-1} + \ldots + \boldsymbol{a}_1 10^{1-n} + \boldsymbol{a}_o 10^{-n}$. Цей многочлен і є десятковий дріб·

<u>*Означення.*</u> ***Десятковим дробом називається многочлен, розташований за спадними степенями числа 10, коефіцієнтами членів якого є однозначні числа або нулі.***

Для запису десяткових дробів звернемося до позиційної форми запису чисел. Коефіцієнти многочлена $\boldsymbol{a}_{n+k},$ $\boldsymbol{a}_{n+k-1},$ ... $\boldsymbol{a}_n,$ які мають співмножником невід'ємний степінь числа 10, будемо називати розрядами цілої частини, а коефіцієнти $\boldsymbol{a}_{n-1}$, $\boldsymbol{a}_{n-2}$, ..., $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_o$, які мають від'ємний степінь числа 10 – розрядами дробової частини. Користуючись розрядністю в позиційній системі числення, це число можна записати у вигляді $\boldsymbol{a}_{n+k}\boldsymbol{a}_{n+k-1}\ldots\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{n-1}\ldots\boldsymbol{a}_o$, де кожна цифра $\boldsymbol{a}_i$ є коефіцієнт многочлена, записаний на певному місці й означає той чи інший розряд числа. За символікою Непера ціла частина від дробової відокремлюється комою.

<u>*Означення 1.*</u> ***Десятковий дріб називається скінченним, якщо кількість розрядів у дробовій частині скінченна, і нескінченним, якщо кількість розрядів у дробовій частині нескінченна.***

<u>*Означення 2.*</u> ***Десятковий нескінченний дріб називається періодичним, якщо в дробовій частині група цифр, починаючи з певної, нескінченної кількості разів повторюється. Якщо ж це не має місця, то дріб називається неперіодичним.***

Означення 3. ***Періодичний дріб називається чистим, якщо період починається одразу після коми, яка розділяє цілу і дробову частину.***

Означення 4. ***Періодичний дріб називається мішаним, якщо між комою і періодом є розряди неперіодичного виду.***

Примітка. Будь-який скінченний дріб можна представити у вигляді мішаного з періодом нуль. Наприклад, 2, 176 = 2,17600000... = 2,176(0).

Оскільки звичайний дріб і десятковий дріб – це два види дробів того самого змісту, то вони мають властивість взаємоперетворення.

Теорема. ***Будь-який періодичний дріб можна перетворити в звичайний.*** Для доведення цієї теореми скористаємося формулою суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії $S=\frac{a_1}{1-q}$, де a_1 – перший член прогресії, а q – знаменник прогресії. Тут можливі два випадки:

1) десятковий діб скінченний, тобто має вигляд ***a,b000***... (***a*** – ціла частина дробу, ***b*** – дробова). Як ми зазначали, такі дроби можна представити як періодичні з періодом 0, або у вигляді суми членів послідовності як ***a,b000***... = ***a*** + $\frac{b}{10^n}+\frac{0}{10^{n+1}}+\frac{0}{10^{n+2}}+\ldots$ Прогресія починається з доданка $\frac{0}{10^{n+1}}$. Цей доданок і буде першим членом прогресії. Знаменник прогресії тут дорівнює $\frac{1}{10}$. Тоді згідно з формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії маємо

$S=\frac{\frac{0}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{0\cdot 10}{9\cdot 10^{n+1}}=0$. Тоді ***a,b000***...= ***a*** + $\frac{b}{10^n}$.

Наприклад, $8{,}415 = 8 + \frac{415}{1000} = 8\frac{415}{1000} = 8\frac{83}{200}$.

Тобто, *щоб перетворити скінченний десятковий дріб у звичайний, треба записати його у вигляді звичайного дробу із знаменником, що дорівнює відповідному степеню числа 10, і якщо можна, виконати* *скорочення*. Наприклад, 2,75 треба записати у вигляді $2\frac{75}{100}$, або скоротивши, одержимо дріб $2\frac{3}{4}$.

2) дріб періодичний нескінченний. У цьому разі скористаємося формулою суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії. ***a,b(c)*** (***a*** – ціла частина дробу, ***b*** – дробова неперіодична, ***c*** – періодична). Як ми зазначали, такі дроби можна представити як періодичні з періодом ***c***, або у вигляді суми членів послідовності як ***a,bccc... =*** $\boldsymbol{a} + \frac{b}{10^n}+\frac{c}{10^{n+k}}+\frac{c}{10^{n+2k}}+\frac{c}{10^{n+3k}}...$, де *n – кількість розрядів числа b*, а *k – кількість розрядів числа c.* Прогресія починається з доданка $\frac{c}{10^{n+k}}$. Цей доданок і буде першим членом прогресії. Знаменник прогресії тут дорівнює $\frac{1}{10^k}$. Тоді згідно з формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії маємо $S=\frac{\frac{c}{10^{n+k}}}{1-\frac{1}{10^k}}=\frac{c\cdot 10^k}{(10^k-1)\cdot 10^{n+k}}=\frac{c}{(10^k-1)\cdot 10^n}$. Тоді

a,b(c) = a + $\frac{b}{10^n}+\frac{c}{(10^k-1)\cdot 10^n}$.

Наприклад, нехай нам заданий дріб 1,2135353535..., або в скороченій формі 1,21(35). Тоді його можна представити у вигляді 1 + $\frac{21}{100}+\frac{35}{10000}$ + $\frac{35}{1000000}$ + $\frac{35}{100000000}$ + ... Цей ряд являє собою суму членів нескінченно спадаючої геометричної прогресії. Тому скористаємося формулою цієї суми $S=\frac{a_1}{1-q}$, де a_1 – це перший член прогресії, в нашому прикладі це $\frac{35}{10000}$, а q – це знаменник прогресії, тобто $\frac{1}{100}$. Тоді сума буде мати такий вигляд: $S = \frac{\frac{35}{10000}}{\frac{99}{100}} = \frac{35}{9900}$.

Скоротивши його, маємо $S = \frac{35}{9900}=\frac{7}{1980}$.

Тоді $1{,}21(35) = 1+\frac{21}{100}+\frac{35}{9900} = 1\frac{2114}{9900}= 1\frac{1057}{4950}$.

<u>Зворотне перетворення.</u> Як перевести звичайний дріб у десятковий? Відповісти на це питання допоможе теорема:

<u>*Теорема.*</u> ***Будь-який звичайний дріб $\frac{a}{b}$ можна представити у вигляді десяткового дробу.***

Тут можливі два випадки.

1. Знаменник дробу b такий, що його можна представити у вигляді $2^m \cdot 5^n$. Дійсно, нехай заданий звичайний дріб $\frac{a}{b}$, у якого $b = 2^m \cdot 5^n$.

Тоді $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^n \cdot 5^m}{2^m \cdot 5^n \cdot 2^n \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 2^n \cdot 5^m}{2^{m+n} \cdot 5^{m+n}} = \frac{a \cdot 2^n \cdot 5^m}{10^{m+n}}$, а це є скінченний десятковий дріб. Тобто, *звичайний дріб $\frac{a}{b}$ перетворюється в скінченний десятковий дріб, якщо його знаменник b розкладається на добуток $2^m \cdot 5^n$.*

2. Знаменник дробу b не можна представити у вигляді $2^m \cdot 5^n$. Тоді він буде або простим числом p, або розкладається на добуток простих множників, серед яких є прості числа, що відрізняються від 2 і 5. Для визначеності будемо вважати, що $a < b$. Тоді

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10a}{b} = \frac{1}{10}\left(\frac{bq_1 + r_1}{b}\right) = \frac{1}{10}\left(q_1 + \frac{r_1}{b}\right) = \frac{q_1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{r_1}{b} = \frac{q_1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{10r_1}{b} =$$

$$= \frac{q_1}{10} + \frac{1}{10^2}\left(\frac{bq_2 + r_2}{b}\right) = \frac{q_1}{10} + \frac{1}{10^2}\left(q_2 + \frac{r_2}{b}\right) = \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{r_2}{b} = \ldots$$

Продовжуючи такі дії, ми отримаємо суму послідовності $\frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \ldots$ Оскільки $q_1, q_2, q_3, \ldots$ є остачі від ділення чисельника на b, а їх може бути різних не більше b, то максимум через b кроків ми отримаємо повторення якоїсь остачі, і з цього моменту остачі почнуть повторюватися, а значить отримаємо період. Тобто у випадку, коли *знаменник дробу має у своєму розкладанні якесь просте число окрім 2 і 5, то звичайний дріб перетворюється в нескінченний періодичний дріб.* На практиці, як це випливає з наведеного доведення, перетворення звичайного дробу в десятковий здійснюється через ділення чисельника на знаменник.

Десяткові дроби мають такі властивості:

1. Десяткові дроби можна порівнювати. З двох десяткових дробів той дріб більше, у якого ціла частина більше; у разі рівності цілих частин той дріб більше, у якого відповідний розряд у дробовій частині більший.

2. Якщо в дробовій частині скінченного дробу справа дописати декілька нулів, то величина дробу від цього не зміниться.

3. Множина десяткових дробів щільна.

4. Щоб збільшити десятковий дріб у 10^n разів, треба перенести кому на n розрядів уліво, а щоб зменшити – вправо.

2. Дії з десятковими дробами

Додавання і віднімання. Якщо маємо два скінченних десяткових дроби, то за допомогою відомих перетворень запишемо їх у вигляді звичайних, тобто $\frac{a}{10^n}$ і $\frac{b}{10^m}$. Для визначеності приймемо, що $n < m$. Тоді $m = n + k$. Звідси маємо:

$\frac{a}{10^n}+\frac{b}{10^m}=\frac{a}{10^n}+\frac{b}{10^{n+k}}=\frac{a\cdot 10^k}{10^{n+k}}+\frac{b}{10^{n+k}}=\frac{a\cdot 10^k+b}{10^{n+k}}$. У цьому разі додавання десяткових дробів зводиться з додаванням цілих чисел, строго дотримуючись розрядності чисел. А потім результат ділиться на $10^к$, тобто комою відокремлюється справа стільки знаків, скільки нулів у знаменнику. Щоб не перетворювати десяткові дроби в звичайні, цю процедуру можна виконати за допомогою простого дописування нулів справа до дробової частини того дробу, у якого менша кількість десяткових розрядів. Як ми знаємо, від цього значення дробу не зміниться. А далі, строго дотримуючись розрядності, виконати додавання як із цілими числами, відокремивши комою цілу частину від дробової там, де вона стояла в доданках. На практиці можна кількість десяткових знаків за допомогою нулів не зрівнювати, а просто додавати числа за розрядами: ... тисячні долі – до тисячних, соті долі – до сотих, десяті – до десятих, одиниці до одиниць, десятки до десятків і т.д.

Аналогічно виконується і віднімання.

Множення. Нехай нам задані два десяткових дроби $\frac{a}{10^n}$ і $\frac{b}{10^m}$. Перемножимо їх як звичайні. Тоді будемо мати такий вираз: $\frac{a}{10^n} \cdot \frac{b}{10^m}$ $=\frac{ab}{10^{n+m}}$, тобто треба перемножити чисельники, а потім результат поділити на 10^{n+m}. Звідси випливає: *щоб помножити десятковий дріб на десятковий, треба перемножити їх як цілі числа, не звертаючи уваги на коми, а потім у результаті відокремити справа комою стільки десяткових знаків, скільки їх у співмножниках разом.*

Ділення. Розглянемо ділення у два етапи: а) ділення десяткового дробу на ціле число і б) ділення дробу на дріб.

У першому випадку ділення виконується за правилом ділення цілих чисел, тобто починаючи з більшого розряду. Тому спочатку виконується ділення цілої частини, а потім дробової. У той момент, коли до ділення включається перший десятковий розряд, в частці ставиться кома. Якщо після закінчення значущих десяткових знаків дробової частини залишається остача, то ділення продовжується через дописування до остачі нулів.

У другому випадку (ділення дробу на дріб) треба виконати перетворення, яке зводить ділення до відомої операції – ділення дробу на ціле число. У цьому разі виконують такі дії: ділене і дільник збільшують у стільки разів, щоб дільник став цілим числом, а потім виконують ділення за попереднім правилом. На практиці ж просто переносять кому в дільнику і діленому на стільки знаків управо, скільки знаків після коми в дільнику, а потім виконують ділення.

В п р а в и.

1. Які з дробів можна записати у вигляді десяткових дробів?

$$\frac{21}{28};\frac{195}{260};\frac{15}{24};\frac{13}{20};\frac{18}{45};\frac{195}{375};\frac{5}{12}.$$

2. Обчислити:

а) $50{,}32 - [(20 + 9{,}744 : 2{,}4)\cdot 0{,}5 - 1{,}63] : 0{,}25 + 0{,}0752 : 0{,}4$

б) $\dfrac{6{,}75^2 + 0{,}125\cdot 67{,}5}{5{,}9^2 - (1{,}03 + 1{,}89726 : 0{,}618)^2}$;

в) $\dfrac{57{,}24\cdot 3{,}55+430{,}728}{2{,}7\cdot 1{,}88-1{,}336}+\dfrac{127{,}18\cdot 4{,}35+14{,}067}{18+2{,}1492:3{,}582}$;

г) $\dfrac{(1{,}238+2{,}762)\cdot 0{,}1}{(36{,}487-34{,}237):2{,}8125}+\dfrac{(4{,}36-1{,}16)\cdot 0{,}3125}{0{,}2\cdot(47{,}8-45{,}55):0{,}225}$;

д) $\left[\dfrac{0{,}3\cdot(3{,}6-2{,}8)}{0{,}25\cdot(0{,}94+1{,}6)}+\dfrac{(0{,}2-0{,}15):0{,}001}{(4{,}7-3{,}9)\cdot 10}\right]:26{,}92$;

є) $52:\left[\dfrac{6:(0{,}4-0{,}2)}{2{,}5\cdot(0{,}8+1{,}2)}+\dfrac{(34{,}06-33{,}81)\cdot 4}{6{,}84:(28{,}57-25{,}15)}\right]-8$.

3. Обчислити:
   а) (4,32 *кг* : 1,35 +1,3 *ц* : 26–0,04 *т* · 0,0225) : (10,01 *кг* : 13–40 *г*);
   б) (0,08 *т* · 0,18 + 0,025 *кг* – 3,05 *кг* : 2):(1,2*кг* ·2,7 + 1 *кг* 60 *г*).
   в) (2 *год* 15 *хв* + 3,25 *год* – 0,75 *год* + *x год y хв* = 1 *доба.*

4. Перетворити звичайні дроби на десяткові:
   $\dfrac{8}{25}$; $\dfrac{17}{16}$; $\dfrac{8}{125}$; $\dfrac{125}{16}$; $\dfrac{5}{12}$; $\dfrac{22}{7}$.

5. Перетворити десяткові дроби на звичайні:
   0,375; 3,14; 5,181818…; 0,1454545…; 2,0155555…; 0,02222…; 6,(6); 4,(24); 1,715.

6. Обчислити:

а) $\dfrac{\left(\left(6{,}2:0{,}31-\frac{5}{6}\cdot 0{,}9\right)\cdot 0{,}2+0{,}15\right):0{,}02}{\left(2+1\frac{4}{11}\cdot 0{,}22:0{,}1\right)\cdot\frac{1}{33}}$;

б) $\dfrac{0{,}8:\left(\frac{4}{5}\cdot 1{,}25\right)}{0{,}64-\frac{1}{25}}+\dfrac{\left(1{,}08-\frac{2}{25}\right):\frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}}+(1{,}2\cdot 0{,}5):\dfrac{4}{5}$;

в) $\left(\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}03}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}-\dfrac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{80}}\right):2\dfrac{1}{20}$;

г) $\left(15:\dfrac{(0{,}6+0{,}425-0{,}05):0{,}01}{30\frac{5}{9}+3\frac{4}{9}}\right)\cdot\left(0{,}645:0{,}3-1\dfrac{107}{180}\right)\cdot\left(4:6{,}25-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}\cdot 1{,}96\right)$;

д) $\left(\left(7\dfrac{2}{3}-6\dfrac{8}{15}\cdot\dfrac{5}{14}\right):\left(8\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{7}-1\dfrac{1}{6}\right)+\dfrac{7}{18}:\dfrac{14}{27}\right)\cdot\left(\dfrac{5}{6}-0{,}75\right)\cdot\dfrac{20{,}4\cdot 4{,}8\cdot 6{,}5}{22{,}1\cdot 1{,}2}$;

є) $\left(46\dfrac{2}{25}:12+41\dfrac{23}{35}:260\dfrac{5}{14}+800:12\dfrac{28}{31}\right)\cdot\dfrac{0{,}8\cdot 7{,}2\cdot 4{,}5\cdot 1{,}3}{6{,}5\cdot 2{,}7\cdot 1{,}92}$;

ж) $6:\dfrac{1}{3}-0{,}8:\dfrac{1{,}5}{\frac{3}{2}\cdot 0{,}4\cdot\frac{50}{1:\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6-\frac{46}{1+2{,}2\cdot 10}}$.

6. Розв’язати задачі, не вводячи змінну.

а) З пункту *A* до пункту *B* виїхав велосипедист із середньою швидкістю 12,4 *км* за годину. Через 3 години 15 хвилин з *B* назустріч йому виїхав інший велосипедист зі середньою швидкістю 10,8 *км* за годину. Через скільки годин і на якій відстані від *A* вони зустрінуться, якщо 0,32 відстані від *A* і *B* дорівнює 76 *км*?

б) Два пароплави вийшли одночасно з одного порту в одному напрямку. Перший пароплав за кожні 1,5 год. проходить 37,5 *км*, а другий за кожні 2 години проходить 45 *км*. Через який час перший пароплав буде знаходитися від другого на відстані 10 *км*?

в) З міста *A* до міста *B*, які знаходяться на відстані 234 *км,* виїхав автомобіль зі швидкістю 32 *км* за годину. Через 1,75 години після цього з міста *B* назустріч виїхав другий автомобіль, швидкість якого в 1,225 раза більше швидкості першого. Через скільки годин після свого від’їзду перший автомобіль зустрінеться з другим?

г) Одна бригада може виконати замовлення за 8 днів. Друга – за 0,5 часу першої. Третя бригада може виконати це замовлення за 5 днів. За скільки днів буде виконане все замовлення, якщо всі три бригади будуть працювати спільно? (Результат округлити до 0,1).

д) Пасажирський та товарний поїзди вийшли одночасно назустріч один одному з двох міст, відстань між якими 607,6 *км*. Пасажирський потяг проходив за годину на 5,5 *км* більше товарного. Яка швидкість кожного потягу, якщо через 4,2 години після їхнього виходу відстань між ними була 290,5 *км*?

є) Автомобіль проїхав весь шлях між пунктами A і B за три дні. За перший день він проїхав $\frac{5}{14}$ того, що проїхав за другий день, а за третій – у 2,5 рази більше, ніж за перший. У перший день автомобіль витратив 12 *л* пального. Скільки кілограмів пального витратив автомобіль на весь шлях? (Питома вага пального 0,754).

ж) До двох кіосків завезли зошити, причому в один із них – 250 штук. Коли з цього кіоску передали до другого 0,3 числа зошитів, то в другому стало зошитів в $1\frac{1}{7}$ разів більше, ніж залишилось у першому. Скільки зошитів спершу було в другому кіоску?

3. Відсотки

Поряд з десятковими та звичайними дробами в практиці використовується ще третій вид дробів – відсотки. Цей вид найбільш зручний, коли треба встановити, яку частину складає одна величина від іншої. У цьому разі відповідь може виражатися звичайним або десятковим дробом незручного виду, або дуже малим числом. Тому математична практика вважає за доцільне збільшити результат порівняння в 100 разів. Тому **відсотком називається сота частина числа.** Відсотки позначаються значком %. Наприклад, якщо 1% числа x є число 5, то значить число x дорівнює 500. Або якщо задане число 70, то 1% від нього буде число в 100 разів менше, тобто 0,7.

За допомогою відсотків математика розв’язує три задачі:

Знаходження відсотків даного числа. Суть задачі полягає в такому: задане число a. Треба знайти, яке число складає m% від нього.

Число x є m% числа a. $m\% = \frac{m}{100}$. Тоді m% від a дорівнюють $\frac{ma}{100}$. Тобто $x = \frac{m \cdot a}{100}$. Отже, *щоб знайти відсоток числа, треба це число помножити на кількість відсотків і результат поділити на 100.*

Знаходження числа за його відсотком. Суть задачі полягає в тому, що задане число b дорівнює n% від числа a. Чому ж дорівнює число a? Виходячи з попереднього випадку, можна записати $b=\frac{a\cdot n}{100}$, або $b\cdot 100 = a\cdot n$, звідки $a = \frac{b\cdot 100}{n}$, тобто, *щоб знайти число за його відсотком, треба його частину помножити на 100 і поділити на кількість відсотків.*

Знаходження відсоткового відношення. Суть задачі полягає в тому, що задане число a, і число b – його частина. Треба визначити, скільки відсотків складає число b від числа a? Позначимо кількість відсотків через x. Тоді $\frac{a\cdot x}{100}=b$, звідки $x = \frac{b}{a}\cdot 100$. Тобто, *щоб знайти відсоткове відношення числа* ***b*** *до числа* ***a****, треба частину (число* ***b****) поділити на число* ***a*** *(ціле) і результат помножити на 100.*

В п р а в и.

Розв'язати задачі, не вводячи змінної.

1. За першу половину дня два трактористи зорали разом 16,2 *га*, причому перший зорав на 1,8 *га* більше ніж другий і кожний виконав по 60% зобов'язання. Яку площу зобов'язався зорати кожний тракторист?

2. Трос довжиною 19,8 *м* розрізали на дві частини так, що перша частина на 20% довша за другу. Знайти довжину кожної частини.

3. Руда містить $66\frac{2}{3}$% заліза. Скільки руди треба для того, щоб одержати 2*т* заліза?

4. 300*г* розчину солі містить 15 *г* солі. Установити процентний склад солі.

5. Визначити відсоткову місткість міді в руді, якщо з 45*т* руди отримано 9*т* міді?

6. Кількість овець у господарстві змінювалася в такому відношенні: у перший рік було 550 голів, на другий – 650 і на третій – 800. Виразити у відсотках щорічний приріст поголів'я овець.

7. З двох ділянок площею 10,5 *га* і 9 *га* зібрано 415,2 *ц* пшениці. Скільки пшениці зібрано з кожної ділянки, якщо урожай з 1 *га* на

першій на 12% більший, ніж на другій? На скільки відсотків урожай першої ділянки більший за урожай другої?

8. При перевірці виявилося, що вологість зерна становить 25%. 2 *ц* цього зерна висушили, після чого воно полегшало на 30 *кг*. Визначити вологість зерна після просушування.

9. Об'єм будівельних робіт збільшився на 80%. На скільки відсотків треба збільшити кількість робочих, щоб виконати роботу за той же час, якщо продуктивність праці буде збільшена на 20%? (Вказівка: прийняти початковий об'єм роботи за 100%, а продуктивність праці до її підвищення за 100 одиниць).

10. Покращення організації виробництва підвищило продуктивність станка на 10%; раціоналізаторська пропозиція робочого знов підвищила продуктивність станка на 20%. На скільки відсотків підвищиться кількість деталей, що виробляються на цьому станку?

11. Банк нараховує складні відсотки за вкладом з розрахунку 5% на місяць, тобто сума вкладених грошей кожного місяця збільшується на 5% (проценти на проценти). Яку суму отримає вкладник за рік, якщо вкладе 2000 грн.?

Розділ V. Дійсні числа

1. Поняття дійсного числа.

Дійсні числа з'явилися в процесі подальшого розширення поняття числа. Необхідність такого розширення була зумовлена низкою причин як теоретичного, так і практичного характеру. До поняття дійсного числа математика підійшла ще в давньогрецькі часи. Давньогрецькі математики зіткнулися з необхідністю введення ірраціональних чисел у процесі дослідження несумірних відрізків. Але практично поняття ірраціонального числа і відповідно до цього введення поняття дійсного числа було сформульоване лише в XVII ст. Логічні ж побудови теорії дійсних чисел були розроблені наприкінці XIX ст. К.Вейєрштрассом (1815 – 1897), Ю. Дедекіндом (1831 – 1916), Г.Кантором (1845 – 1918).

Розглянемо суть поняття дійсного числа й арифметичних дій з дійсними числами.

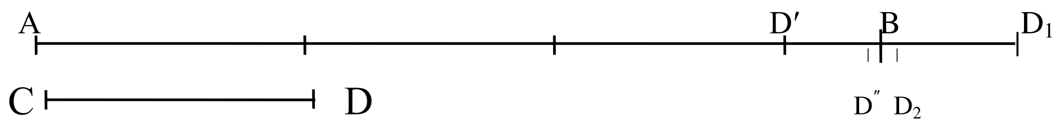
За допомогою додатних раціональних чисел можна з будь-якою точністю виразити результат вимірювання тої чи іншої величини. Це можливо завдяки тому, що ми можемо одиницю виміру нескінченно дробити. Але наприкінці ми таки вийдемо на спільну міру одиничного елементу і того, що вимірюється, оскільки раціональні числа ми одержали виходячи з того, що заданий елемент сумірний з одиницею виміру. На прикладі відрізків – це існування такого третього відрізка (спільної міри), який цілу кількість разів відкладається на заданому і на одиничному відрізках. Але в практиці вимірювань є й такі випадки, коли раціональні числа дають лише наближене значення величини, тобто для точного значення результату вимірювання раціональних чисел недостатньо.

Розглянемо випадок, коли вимірювані відрізки *несумірні*, тобто такі, що *не мають спільної міри.*

Які числа будуються на основі несумірності?

Розглянемо це питання на прикладі вимірювання відрізків.

Нехай нам задані два несумірних відрізка [AB] і [CD]. Причому [AB]>[CD]. Оскільки вони несумірні, то вони не мають спільної міри. Приймемо відрізок [CD] за одиницю виміру і будемо відкладати його на відрізку [AB]. Нехай він відкладеться на [AB] a_o число разів, при цьому точка D' буде зліва від точки B і залишиться остача відрізок $[D'B] < [CD]$.



Якщо ми відкладемо його ще один раз, то одержимо т. D_1, яка вийде за межі відрізка [AB]. Тоді абсолютне значення довжини відрізка буде знаходитися в межах $[AD'] < [AB] < [AD_1]$, тобто $a_o < |AB| < a_o + 1$. Розіб'ємо відрізок [CD] на 10 рівних частин і будемо відкладати цю частину на остачі $[D'B]$. Нехай вона відкладеться на ній a_1 разів і залишиться остача $[D''B] < \frac{1}{10}[CD]$. Якщо ж відкладемо цю $\frac{1}{10}$ частину [CD] ще один раз, то вона вийде за межі [AB] і абсолютне значення довжини [AB] буде знаходитися в межах відрізка $[AD''] < [AB] < [AD_2]$, тобто $a_o,a_1 < |AB| < a_o,(a_1+1)$. Далі знову розділимо вже $\frac{1}{10}$ [CD] ще на 10 рівних частин, одержимо $\frac{1}{100}$[AB] і будемо відкладати її на остачі $[D''B]$. Нехай вона відкладеться a_2 разів. І знов одержимо остачу, меншу ніж $\frac{1}{100}$ [CD]. А якщо відкладемо її ще один раз, то вона знов вийде за межі [AB]. Тобто $a_o,a_1a_2 < |AB| < a_o,a_1(a_2+1)$ і так далі. Цей процес буде нескінченний, оскільки якби він був скінченний, то довжина [AB] виразилася б раціональним числом, а значить відрізки [AB] і [CD] були б сумірні. А ми виходили з того, що вони несумірні. І в кожному разі з новим таким кроком ми будемо одержувати все більш точне значення довжини відрізка [AB]. Абсолютне значення довжини відрізка [AB] буде знаходитися між двома числами, одне з яких є наближеним значенням довжини цього відрізка, але меншим за нього, а друге – більшим за нього, тобто одне значення довжини з недостачею, а друге з надлишком. Оскільки таких кроків наближення нескінченна кількість, то наближені значення довжини відрізка [AB] утворюють дві послідовності:

$$a_o; \; a_o,a_1; \; a_o,a_1a_2; \; a_o,a_1a_2a_3; \; \ldots \; a_o,a_1a_2a_3\ldots a_ka_{k+1} \ldots \quad \text{і}$$

$$a_o+1; \; a_o,(a_1+1); \; a_o,a_1(a_2+1); \; a_o,a_1a_2\ldots a_k(a_{k+1}+1) \ldots$$

Перша з них монотонно висхідна, а друга - спадна. Ці дві послідовності нескінченно наближаються одна до одної і границею цих послідовностей є абсолютне значення довжини відрізка [AB]. Цією границею є нескінченний неперіодичний десятковий дріб. Цей дріб неперіодичний, тому що якби він був періодичним, то його можна було б перетворити на звичайний, тобто в раціональне число, а значить відрізки повинні були б бути сумірними, а за умовою вони несумірні.

Означення. ***Нескінченний неперіодичний десятковий дріб називається ірраціональним числом.***

Визначаючи поняття ірраціонального числа, ми спиралися на вимірюванні несумірних відрізків. Але результатом вимірювання відрізків є додатне число. Тому визначене нами ірраціональне число теж є додатним. Але довжина відрізка може вимірюватись і раціональним числом і теж додатним. Так кожному відрізку може бути поставлене у відповідність якесь додатне раціональне або ірраціональне число. Об'єднання множини додатних раціональних та ірраціональних чисел утворює множину *додатних дійсних чисел* (R_+).

Приклад 1.

Довести, що $\sqrt{2}$ – ірраціональне число.

Доведення: Припустимо, що число $\sqrt{2}$ – раціональне. Тоді його можна записати у вигляді $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, де m і n взаємно прості. Звідси випливає, що $\frac{m^2}{n^2} = 2$, або $m^2 = 2n^2$ що означає, що m^2 – парне число. Значить і m – парне число, тобто можна записати $m = 2k$ і $m^2 = 4k^2$. Випливає рівність $4k^2 = 2n^2$, або $2k^2 = n^2$, тобто число n – теж парне. Виходить, що і m, і n парні, тобто не взаємно прості. Протиріччя. Значить число $\sqrt{2}$ не раціональне.

Приклад 2.

Довести, що $\sqrt{11}$ – ірраціональне число.

Доведення: Припустимо, що число $\sqrt{11}$ – раціональне. Тоді його можна записати у вигляді $\sqrt{11} = \frac{m}{n}$, де $\boldsymbol{m}$ і $\boldsymbol{n}$ взаємно прості, тобто цей дріб нескорочуваний. Звідси випливає, що дріб $\frac{m^2}{n^2}$ теж нескорочуваний. Тоді $\frac{m^2}{n^2} = 11$, або $\boldsymbol{m}^2 = 11\boldsymbol{n}^2$. Підставивши у попередній дріб замість m^2 число $11n^2$, отримаємо дріб $\frac{11n^2}{n^2}$, який є скорочуваним, а значить скорочуваним буде і дріб $\frac{m}{n}$. Ми ж виходили з того, що дріб $\frac{m}{n}$ нескорочуваний. Протиріччя. Значить число $\sqrt{11}$ не може бути раціональним.

Відношення порядку на множині R₊. Нехай задані два додатних дійсних числа x та y:

$$x = m, m_1 m_2 \dots m_k \dots ,$$
$$y = n, n_1 n_2 \dots n_\kappa \dots .$$

Число x менше числа y, якщо $m < n$ або знайдеться таке натуральне k, що при $m = n$, $m_1 = n_1$, . . . $m_{k-1} = n_{k-1}$ буде $m_k < n_k$. Виходячи з цього легко довести, що відношення “більше” асиметричне. Дійсно, оскільки порівняння дійсних чисел x і y виконується на основі порівняння k-того наближення цих чисел, тобто як раціональних чисел, у множині яких виконується асиметричність, то правомірним буде висновок, що якщо $x > y$, то $y < x$, тобто в множині $\mathbf{R}_+$ виконується асиметричність. Аналогічно можна довести і виконання властивості транзитивності відношення “більше”. До того ж у будь-якому наближенні є хибним, що $x > x$. Отже, в множині $\mathbf{R}_+$ відношення “більше” асиметричне, транзитивне й антирефлексивне, тобто на множині $\mathbf{R}_+$ визначене відношення строгого порядку.

Додавання і множення в множині R₊. Нехай задані два додатних дійсних числа $x = m, m_1 m_2 \dots m_k \dots$ і $y = n, n_1 n_2 \dots n_\kappa \dots$.

Кожне з цих чисел можна розглядати в будь-якому наближенні з двох позицій: з недостачею, тобто коли після декотрого k-того десяткового знака всі менші розряди замінюються нулями, і з надлишком, тобто коли цифра k-того розряду збільшується на одиницю, а всі інші розряди десяткової частини, починаючи з $k+1$, замінюються нулями. Отже, абсолютне значення додатного дійсного числа x буде знаходитись в межах:

$$m,\, m_1 m_2 \ldots m_k < x < m,\, m_1 m_2 \ldots (m_k+1)$$

Якщо значення числа x з недостачею позначити як x_k , а з надлишком - як x_k', то це можна записати як

$$x_k < x < x_k'$$

Таким чином, якщо k пробігає значення від 1 до нескінченності, то значення дійсного числа x з недостачею і з надлишком утворюють дві множини, особливістю яких є те, що будь-яке число із множини x_k менше за будь-яке число з множини x_k'. І розділяє ці дві множини абсолютне значення числа x.

<u>*Означення.*</u> ***Число, відносно якого одні елементи множини розташовані з одного боку, а другі елементи множини – з другого боку, називається поділяючим множину на дві підмножини, які не перетинаються.***

Розглядаючи задані нам два дійсних числа x і y як поділяючі двох множин, можна представити їх як $x_k < x < x_k'$ і $y_k < y < y_k'$. Додавши ці дві нерівності, отримаємо нерівність $x_k+y_k < x+y < x_k'+y_k'$. Із цієї нерівності видно, *що сумою двох дійсних чисел x і y буде число $x + y$, яке розділяє множини $\{x_k+y_k\}$ і $\{x_k'+y_k'\}$, де x_k і y_k – десяткові наближення чисел x і y з недостачею, а x_k' і y_k' – десяткові наближення цих чисел з надлишком.*

Розглядаючи з цих позицій властивості додавання, можна твердити, що операція додавання в множині $\mathbf{R}_+$ комутативна, асоціативна і монотонна. Також для будь-яких чисел x і y не виконується рівність: $x = x+y$, якщо $y \neq 0$. Якщо ж $y = 0$, то $x + 0 = x$ (*).

Аналогічними виглядають і міркування відносно операції множення. Додатковим і відмінним є лише те, що множина властивостей доповнюється дистрибутивним законом, який пов’язує операції додавання і множення, а також замість властивості (*) наявна властивість: *число* 1 *є нейтральним відносно множення, тобто* $1 \cdot a = a$.

Приклад.

Відомо, що $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, а $\sqrt{3} = 1{,}7320\ldots$ Знайти значення $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ з точністю до 0,001 з недостачею та з надлишком.

Розв'язання. $1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$

$$1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321$$

$$1{,}4142 + 1{,}7320 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1{,}4143 + 1{,}7321$$

$$3{,}1462 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}1464$$

З точністю до 0,001 маємо $3{,}146 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}147$

2. Аксіоматика множини $\mathbf{R}_+$

Дійсними числами ми назвали такі, які можуть бути записані у вигляді будь-яких десяткових дробів. Залежно від трактування поняття дійсного числа існують різні аксіоматичні підходи, а відповідно до них і різні системи аксіом. Наш підхід спирається на операцію додавання, як головну, фундаментальну. Тому ми і розглянемо відповідну систему аксіом. У цій системі операція додавання і число 1 є невизначуваними і повинні задовольняти такій системі аксіом:

1) $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}_+$ **.**

2) Операція додавання ставить у відповідність будь-якій парі $(a;b)$, яка складається з чисел множини $\mathbf{R}_+$, число $a + b$ з тієї ж множини. Це число називається сумою чисел a і b, а самі числа – доданками. На множині **N** додавання збігається з додаванням натуральних чисел.

3) Операція додавання в $\mathbf{R}_+$ комутативна: для будь-яких a і b з $\mathbf{R}_+$ має місце рівність $a + b = b + a$.

4) Операція додавання в $\mathbf{R}_+$ асоціативна: для будь-яких a, b і c з $\mathbf{R}_+$ має місце рівність $(a+b)+c = a + (b+c)$.

5) Якщо a і b належать $\mathbf{R}_+$, то $a + b \neq a$.

6) Якщо a і b належать $\mathbf{R}_+$ і $a \neq b$, то знайдеться таке $c \in \mathbf{R}_+$, що $a = b + c$ або $b = a + c$.

7) Для будь-якого $a \in \mathbf{R}_+$ та будь-якого натурального числа n знайдеться тільки одне число $b \in \mathbf{R}_+$ таке, що $a = \overbrace{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}+\ldots+\boldsymbol{b}}^{n}$. Це записується $a = n \cdot b$. Число a називається добутком чисел n і b.

Аксіоми 1-7 дозволяють увести в множині $\mathbf{R}_+$ відношення порядку. Крім того має місце аксіома неперервності:

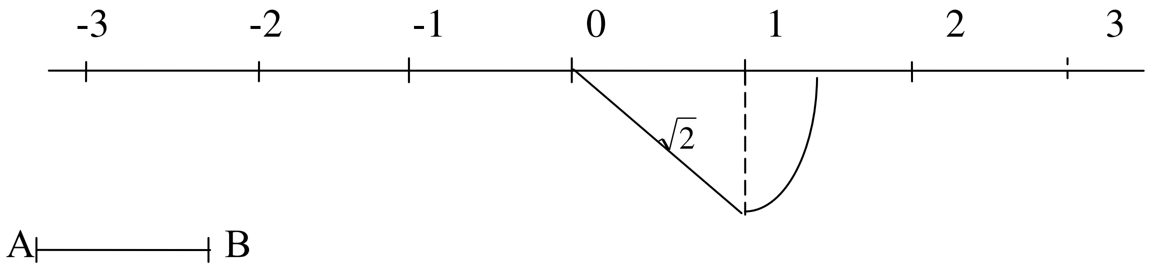
8) Якщо числова множина $\boldsymbol{X}$ розташована зліва від числової множини $\boldsymbol{У}$ (тобто $x \leq y$ для будь-яких x та y, що належать $\mathbf{R}_+$), то існує число $a \in \mathbf{R}_+$, яке розділяє множини $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{У}$ (тобто $x \leq a \leq y$).

За допомогою цієї системи аксіом можна довести, що будь-яке число з множини $\mathbf{R}_+$ може бути представлено у вигляді нескінченного десяткового дробу, можна визначити арифметичні операції в $\mathbf{R}_+$ та ін. Але це виходить за межі програми з математики для факультетів початкової освіти, тому на цьому затримуватися не має сенсу.

На основі відношення порядку, яке визначене на множині $\mathbf{R}_+$, можна твердити, що якщо $a < b$, то в множині $\mathbf{R}_+$ існує c, що $b = a+c$. Елемент c визначається як різниця $a - b$.

За допомогою додатних дійсних чисел можна виразити результат вимірювання будь-якої скалярної величини: довжини, об’єму, площі, маси та ін. Але на практиці часто буває необхідним виразити числом не результат вимірювання величини, а її зміну, тобто на скільки змінилася величина – на скільки збільшилася або зменшилася. У процесі цього порівняння треба від однієї величини відняти іншу. І якщо зменшуване буде більше ніж те, що віднімаємо, то результат буде виражений додатним числом, а якщо буде меншим, то результат виходить за межі множини $\mathbf{R}_+$. Те ж буде і якщо ці дві величини будуть рівні. Отже, виникає потреба в розширенні множини $\mathbf{R}_+$, приєднавши до неї $\{0\}$ і множину чисел, протилежних $\mathbf{R}_+$, позначивши їх $\mathbf{R}_-$ **.** Множина $\mathbf{R}_+ \cup \{0\} \cup \mathbf{R}_- = \mathbf{R}$ називається множиною всіх дійсних чисел. Множина $\mathbf{R}_-$ є множиною від’ємних дійсних чисел. Множини $\mathbf{R}_-$ **і** $\mathbf{R}_+$ не перетинаються.

Розглядаючи геометричну інтерпретацію множини всіх дійсних чисел, ми можемо зробити висновок, що між множиною точок прямої лінії і множиною дійсних чисел існує взаємно однозначна відповідність. Дійсно, нехай нам задана пряма лінія ***а***. Відмітимо її якусь точку і поставимо їй у відповідність число 0.



Виберемо довільний відрізок [AB] і приймемо його за одиничний, тобто поставимо йому у відповідність число **1**. За допомогою цих даних утворимо числову пряму з позначками цілих одиниць.

Відкладаючи частини відрізка [AB], отримаємо точки, що відповідають раціональним числам. якщо ж на відрізку [0;1] побудуємо квадрат і циркулем відмітимо на прямій довжину діагоналі, то одержимо точку, яка відповідає ірраціональному числу $\sqrt{2}$. Можна побудувати безліч точок, що відповідають іншим ірраціональним числам. Отже, кожному з дійсних чисел на прямій є точка і кожній точці відповідає якесь дійсне число.

Числа x і $-x$ на числовій прямій позначаються точками, що розташовані симетрично відносно точки 0. Тобто вони знаходяться від точки 0 на однаковій відстані по різні сторони від неї. Ці числа називаються *протилежними*, причому виходячи з поняття протилежності, $-(-x) = x$.

Відстань точки, яка зображає число x, від точки початку відліку, якій відповідає число 0, називається *модулем* цього числа. Модуль числа x позначається $|x|$. Отже,

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } & x > 0 \\ 0, \text{ якщо } & x = 0 \\ -x, \text{ якщо } & x < 0 \end{cases}$$

Аксіоматика множини додатних дійсних чисел поширюється і на всю множину дійсних чисел. Додавання розглядається як зміст другої аксіоми, а множення – як наслідок сьомої аксіоми. Відповідно віднімання $a - b$ розглядається як додавання до a числа, протилежного

b, тобто $(-b)$. Ділення ірраціонального числа на раціональне розглядається як і в множині раціональних чисел. Ділення ж на ірраціональне число як нескінченний неперіодичний дріб в абсолютному значенні неможливе, оскільки ми не знаємо його точного значення. Тому таке ділення можливе лише з певною точністю наближення і не дає точного результату. Зміна точності дільника здатна значно вплинути на результат ділення. Тому математика вважає доцільним звільнятися від ірраціональності дільника.

Знакові відношення при множенні в множині дійсних чисел збігаються зі знаковими відношеннями при множенні в множині раціональних чисел.

В п р а в и.

1. Довести, що число $\boldsymbol{a}$ – ірраціональне:

а) $\boldsymbol{a} = \sqrt{3}$; б) $\boldsymbol{a} = \sqrt{2}+\sqrt{5}$; в) $\boldsymbol{a} = 3\cdot\sqrt{7}$; г) $\boldsymbol{a} = \sqrt{50}$;

д) $\boldsymbol{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$; є) $\boldsymbol{a} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{12}$; ж) $\boldsymbol{a} = 5\sqrt{2}-2\sqrt{5}$; з) $\boldsymbol{a} = 5 - \sqrt{11}$.

2. Обчислити з точністю до 0,001:

а) $\sqrt{11}$; б) $\sqrt{8}$; в) $3\sqrt{5}$; г) $\sqrt{7}+\sqrt{13}$; д) $2\sqrt{5}-3\sqrt{3}$;

є) $2\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}$; ж) $\sqrt{\frac{5}{17}}$.

3. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$; в) $\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{2}+\boldsymbol{b}}$; г) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}}$; д) $\frac{\boldsymbol{a}}{2-\sqrt[3]{5}}$;

є) $\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}-\sqrt{\boldsymbol{a}}}$; ж) $\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{a}}$; з) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$; і) $\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}-2}-\sqrt{\boldsymbol{x}-7}}$;

й) $\frac{\boldsymbol{a}}{25-5\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}}$; к) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; л) $\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}}-\sqrt[3]{\boldsymbol{b}}}$; м) $\frac{\boldsymbol{a}-2}{\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}+\sqrt{2}}$.

4. Розв'язати ірраціональні рівняння.

а) $x + 3 = \sqrt{\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{x}+25}$; б) $\sqrt{4\boldsymbol{x}+2}+\sqrt{4\boldsymbol{x}-2}=1$;

в) $\sqrt{25-x}-\sqrt{9+x}=2$; г) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}=\sqrt{2x-1}$;

д) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$; є) $\sqrt{x}=\sqrt{6x+1}-\sqrt{2x+1}$;

ж) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$; з) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}$.

5. Спростити вирази:

а) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}}$; б) $\dfrac{k+2+\sqrt{k^2-4}}{k+2-\sqrt{k^2-4}}+\dfrac{k+2-\sqrt{k^2-4}}{k+2+\sqrt{k^2-4}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}-\dfrac{1}{a}$; г) $2x+\sqrt{x^2-1}\cdot\left(1+\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)-\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

Список використаної літератури

1. Бельский А.А. Деление с остатком/А.А.Бельский, Л.А. Калужнин. – К.: Вища школа, 1977. – 89 с.
2. Боровик В.Н., Математика /В.Н. Боровик, Л.М.Вивальнюк та ін. –К.: Вища школа, 1980. – 445 с.
3. Вивальнюк Л.М. Алгебра та теорія чисел / Л.М. Вивальнюк. –К.: Вища школа, 1972. –316 с.
4. Вивальнюк Л.М. Числові системи / Вивальнюк Л.М. –К.: Вища школа, 1977. –168 с.
5. Виленкин Н.Я. О понятии величины // Математика в школе. – 1973. – № 4. – С. 4–7.
6. Воробьёв Н.Н. Признаки делимости. –М.: Наука, 1972. – 80 с.
7. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел /С.Т. Завало, В.М. Костарчук, Б.І. Хацет: у 2 т. Т.2. – К.: Вища школа, 1980. – 407 с.
8. Затула Н.І., Математика: Навчальний посібник / Н.І.Затула, А.М.Зуб, Г.І.Коберник, А.Ф.Нещадим. –К.: Кондор, 2006.–560 с.
9. Касаткин В.Н. Новое о системах счисления. –К.: Вища школа, 1982. – 184 с.
10. Ляпин Е.С. Алгебра и теория чисел/Е.С.Ляпин, А.Е.Евсеев. – М. : Просвещение, Ч. 1. –1974. – 342 с.
11. Ляпунов А.А. Действительные числа // Математическое просвещение. Вып.2. – 1957. –С. 149–156.
12. Кошелєв О.Л. Про місце окремих ознак подільності в системі усних обчислень/ Кошелєв О.Л., Сарієнко В.К. – Луганськ, Вісник ЛДПУ ім.Т.Шевченка №8. Педагогічні науки. 2003. –С.132–136..
13. Кужель О.В. Розвиток поняття про число. Ознаки подільності. –К.: Вища школа, 1974. –117 с.
14. Виленкин Н.Я. Математика / Виленкин Н.Я., Пышкало А.М. и др. –М.: Просвещение, 1977. –351 с.
15. Нешков К.И. Множества, отношения, числа, величины/ Нешков К.И., ПышкалоА. М.,Рудницкая В.Н. –М.: Просвещение, 1974. – 64 с.
16. Нивен А. Числа рациональные и иррациональные (перевод с английского). – М.: Мир, 1966. –128 с.
17. Современные основы школьного курса математики / Н. Я. Виленкин, К. И., Дуничев, Л. А.Калужнин А. А. Столяр – М.: Просвещение, 1980, – 221 с.

18. Соминский И.С. Метод математической индукции. Изд. 8-е. – М.: Наука, 1974. – 135 с.
19. Стойлова Л.П. Основы начального курса математики / Пышкало А.М. – М.: Просвещение, 1988. – 320 с.
20. Стойлова Л.П. Математика. –М.: Академия, 1999. – 422 с.
21. Теоретические основы начального курса математики/Пышкало А.М., Стойлова Л.П., Ирошников Н.П., Зельцер Д.Н. –М. : Просвещение, – 1974. – с.342.
22. Фомин С.В. Системы счисления. –М.: Наука, 1975. – 84 с.
23. Толковый словарь словообразовательных единиц русского языка Т.Ф.Ефремовой. –М.: Энциклопедия, 1996 : Электронная версия: www.Slovar.plib.ru.

З М І С Т

Сарієнко Владислав Костянтинович
Сарієнко Володимир Владиславович

МАТЕМАТИКА

Невід'ємні цілі числа
Величини
Розширення поняття про число

Навчальний посібник
для студентів факультетів підготовки вчителів початкових класів вищих педагогічних навчальних закладів

Художнє оформлення О.В. Плахотський
Коректор к.п.н. Л.М.Тищенко

Рекомендовано до видання 27.12.2012 р.

Відомості про авторів:

Сарієнко Владислав Костянтинович, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри природничо-математичних дисциплін і педагогічних технологій початкової освіти ДВНЗ "Донбаський державний педагогічний університет".

Сарієнко Володимир Владиславович, старший викладач кафедри природничо-математичних дисциплін і педагогічних технологій початкової освіти ДВНЗ "Донбаський державний педагогічний університет".