Кошелєв О. Л. Пучков І. Р.
Сарієнко В. К. Сарієнко В. В.

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ІНФОРМАТИКИ

Елементи комбінаторики
Числові послідовності
Числові системи
Елементи алгоритмізації

Слов'янськ
2021

УДК 51:004(075.8)
К76
Кошелєв О. Л., Пучков І. Р., Сарієнко В. К., Сарієнко В. В. Математичні основи інформатики : навч.-метод. посіб. для студентів факультету підготовки вчителів початкових класів (спеціалізація «Інформатика») / ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет». Слов'янськ, 2021. 106с.

Навчально-методичний посібник призначений для студентів педагогічних вищих навчальних закладів зі спеціальності підготовки вчителів початкових класів зі спеціалізації «Інформатика» ВНЗ, учителів математики та інформатики у навчальній ланці початкової школи.

Посібник складений відповідно до змісту державного стандарту початкової освіти, освітньо-кваліфікаційних вимог до учителя початкової школи, освітньо-професійної програми підготовки учителя початкової школи.

У посібнику представлені основні математичні відомості з розділів, які входять до курсу теоретичних основ початкового курсу математики та складають певний пласт відомостей з математичних основ інформатики.

Рецензенти:

Митник О. Я. – доктор педагогічних наук, професор національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова (м. Київ).

Турка Т. В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри методики навчання математики та методики навчання інформатики ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» (м. Слов'янськ).

Рекомендовано вченою радою ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» (протокол № 4 від 17.12.2020 р.) як навчально-методичний посібник для фахівців спеціальності «Початкова освіта» спеціалізації «Інформатика».

ВСТУП

У результаті впровадження нових інформаційних технологій значно змінюються суспільно-економічні структури, формується гнучке динамічне суспільство, здатне до активної самооцінки та вибору мети розвитку, швидкої й адекватної реакції на зміни зовнішнього та внутрішнього середовища. Тому сьогодення дає освітянам важливе соціальне замовлення – готувати підростаюче покоління до використання обчислювальної техніки, познайомити зі способами організації та обробки інформації, виробити в учнів особливий стиль мислення, що відповідає алгоритмам та логіці ЕОМ. Уже зараз комп'ютерна грамотність є важливим показником культури, а в майбутньому стане необхідною кожній людині; де б вона не працювала, знання основ інформатики й обчислювальної техніки стає елементом загальної культури, другою грамотністю людини [47] .

Математика, як наукова галузь, посідає одне з ключових місць у загальній системі наук. Зважаючи на це, вертикаль математичної освіти пронизує практично кожну професійну галузь, у тому числі й інформатику. Потребу в певному обсязі математичних знань (від професійної складової до побутової) має практично кожна людина. Інформатика в цьому ракурсі посідає одне з провідних місць.

Математика початкової школи закладає у свідомість людини основні первинні, найпростіші кількісні поняття і відношення, формує і розвиває логіку мислення, формує просторову уяву, що є однією з необхідних умов усвідомлення суті цифрових технологій.

Ключовими математичними темами в структурі комп'ютерних програм є математична логіка, комбінаторика, числові послідовності і числові системи, алгоритми. Матеріал цих тем забезпечує усвідомлення логіки побудови комп'ютерних програм

Початкова школа в системі математичної освіти посідає особливе місце. Особливість її полягає в тому, що в молодшому шкільному віці рівень абстрактного мислення ще не досить високий, тому обґрунтування математичних тверджень, опис понять часто важко піддається дитячому розумінню. Тут вихід із становища повністю лежить у сфері професійності і педагогічної майстерності вчителя. Тільки глибоке знання основ математичних понять і відношень, на яких ґрунтується конструкція цифрових програм на етапі початкової школи надає учителю ключ до доступного пояснення структури цифрових технологій учням. Причому математичні знання вчителя повинні поширюватися значно далі, ніж необхідний обсяг для сьогодення. Адже у зв'язку з розвитком науково-технічного прогресу обсяг знань значно зростає, що знаходить свій відбиток і в шкільних програмах, зокрема й у програмах початкової школи.

Пропонований навчальний посібник написаний відповідно як до нинішніх вимог шкільних програм, так і на перспективу.

У посібнику викладені теми, які певною мірою запрограмовані інформативним компонентом Державного стандарту вивчення інформатики в початкової школи і, відповідно, представлені у шкільних програмах.

Відомості із запропонованих розділів сприяють поглибленому усвідомленню студентами суті та структури цифрової конструкції інформатики як предмету навчання та використання в створенні програмних продуктів. Розділи «Числові послідовності» та «Елементи комбінаторики» надають можливість усвідомити логіку випадкових явищ. Розділ «Числові системи» знайомить школярів з історією виникнення і розвитку поняття про число, пояснює технологію роботи комп'ютерних систем, а розділ «Алгоритми» розкриває логіку побудови комп'ютерних прграм.

Розділ «Елементи комбінаторики» широко використовується в початковому курсі математики при розв'язанні задач на перебір. Тут же учні вперше знайомляться з поняттям випадкових явищ.

Державний стандарт початкової освіти зобов'язує вищі навчальні заклади з підготовки учителя початкової школи забезпечити належну підготовку майбутніх фахівців щодо набуття якісних і, певною мірою, фундаментальних знань з використання інформаційного компоненту викладення курсу інформатики в початковій школі, а також розуміння та формування умінь створювати програмні продукти. Тому в посібнику викладений математичний матеріал, який забезпечує студентам усвідомлення суті загальних основ зазначених теорій.

Зміст, обсяг і структура посібника визначені багаторічним вивченням досвіду викладання математики вчителями початкової школи, змістом навчальних підручників і посібників з математики та інформатики, остаточним рівнем відповідних знань учнів-випускників початкової школи.

Посібник розрахований на студентів факультетів підготовки вчителів початкової школи вищих навчальних закладів 2 – 4 рівнів акредитації, методистів та вчителів початкових класів.

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

1. Декартовий добуток двох множин

Почнемо з прикладу. Число 27 записується за допомогою двох цифр 2 і 7. Ці цифри слід записувати в певному порядку: спочатку 2, а потім 7. Якщо їх переставити, вийде інше число 72. Говорять, що множина {(2;7)} – *упорядкована пара* чисел. Упорядковану пару чисел x і y записують у вигляді $(x;y)$. У число 44 входять дві однакові цифри. Вони утворюють пару (4;4), яка не є упорядкованою. Отже, суть упорядкованості полягає, що пара $(a;b)$ не дорівнює парі $(b;a)$, тобто $(a;b) \neq (b;a)$. Пара $(a;a)$ не є упорядкованою, оскільки зміна місця елемента в парі її не змінює. Таким чином, упорядкованість регламентується визначенням: «*Пара* $(a;b)$ *називається упорядкованою, якщо* рівнозначність для неї виконується лише тоді, коли $a = b$». Це означення описує не тільки упорядковану пару, а й будь-яку упорядковану множину.

Упорядковані пари можна створювати не тільки з чисел, але й з елементів будь-яких множин. Скажімо, учнів, які вишикувалися по росту, або прізвища за алфавітом та ін.

Пари $(x_1;y_1)$ і $(x_2;y_2)$ вважаються *співпадаючими* в тому і лише тому випадку, коли $x_1= x_2$ і $y_1= y_2$. У цьому разі вважається $(x_1;y_1) = (x_2;y_2)$.

В упорядкованих множинах певні елементи можуть повторюватися. Наприклад, з букв множини X={a; a; b} можна скласти упорядковані множини: $(a;\ a;\ b)$, $(a;\ b;\ a)$, $(b;\ a;\ a)$.

Прикладом упорядкованої пари натуральних чисел може служити пара, складена з чисельника і знаменника дробу, наприклад, пара (3; 5) утворює дріб $\frac{3}{5}$, а пара (5; 3) утворює дріб $\frac{5}{3}$.

Більш загальне поняття упорядкованої пари виходить, якщо її компоненти належать різним множинам, тобто, наприклад компоненту x з множини X, а y – з множини Y. Нехай, наприклад, задано дві множини X={a; b, c} і Y={4; 5}. Утворимо з елементів цієї множини пари так, щоб перша компонента пари належала множині X, а друга – множині Y. Всі ці пари складають множину пар: {(a; 4); (a; 5); (b; 4); (b; 5); (c; 4); (c; 5)}, яку називають декартовим добутком множин X і Y і позначають $X\times Y$.

Взагалі, *декартовим добутком множин X і Y називають множину $X \times Y$, елементами якої є всі пари $(x;y)$ такі, що $x \in X$, $y \in Y$,* тобто $X\times Y=\{(x;y)/x \in X;\ y \in Y\}$

Якщо множини X і Y співпадають, тобто $X=Y$, то множина $X\times X$ складається з усіх пар $(x;\ y)$ таких, що $x \in X$, $y \in Y$. Наприклад, якщо $X=\{\ m;\ n;\ p\}$, то $X\times X=\{\ m;\ m);\ (m;n);\ (m;\ p);\ (n;\ m);\ (n;\ n);\ (n;\ p);\ (p;\ m);\ (p;\ n);\ (p;\ p)\}$.

Вважається, що $X \times \varnothing = \varnothing \times X = \varnothing$ для будь-якої множини X.

Декартовий добуток множин, власне кажучи, не має ні властивість коммутативності, ні властивість асоціативності, тобто:

1) якщо $X \neq Y$, то $X\times Y \neq Y \times X$;

2) якщо жодна з множин X, Y, Z не порожня, то $X \times (Y\times Z) \neq (X\times Y) \times Z$.

Дійсно, елементами множини $X\times Y$ є пари $(x;\ y)$ такі, що $x \in X$, $y \in Y$, а елементами множини $Y\times X$ – пари $(y;\ x)$, де $x \in X$, $y \in Y$. Але при $x \neq y$ пари $(x;\ y)$ і $(y;\ x)$ різні, отже, якщо $X\neq Y$, то множини $X\times У$ і $Y\times X$ різна.

Елементи декартового добутку двох скінчених множин зручно розташовувати у вигляді таблиці, де по вертикалі розташовують елементи множини X, по горизонталі – елементи множини Y, а елементи множини $X\times Y$ пишуть на перетинах відповідних рядків і стовпців. Так, на таблиці, наведеній нижче, зображені елементи декартового добутку множин Х=$\{a;b;c\}$ і $Y=\{4;\ 5\}$.

У Х	4	5
a	$(a;\ 4)$	$(a;\ 5)$
b	$(b;\ 4)$	$(b;\ 5)$
c	$(c;\ 4)$	$(c;\ 5)$

Вправи:

1. Назвіть п'ять упорядкованих пар дійсних чисел, що є розв’язання рівняння $2x - 3y - 7$.

2. Дано дві множини: $X=\{б;г;д\}$ і К=$\{a;e;o\}$. Запишіть елементи множини Х×$У$ у вигляді таблиці.

3. Випишіть всі двозначні числа, в яких число десятків належить множині $\{8;\ 6;\ 2\}$, а число одиниць – множині $\{3;\ 5;\ 0\}$.

4. Складіть всі дроби, чисельник і знаменник яких – однозначне число з множини $\{3;\ 4;\ 5;\ 7\}$. Скільки дробів вийшло?

5. A – множина голосних букв, B – множина глухих приголосних. Випишіть елементи множин $A\times B$ і $B\times A$.

6. Задані множини $A=\{a; b; c\}$, $B=\{1; 2\}$ і $C=\{2; 3; 4\}$.

а) Запишіть множини $A\times B$, $A\times C$ і $B\times C$.

б) З'ясуйте, які елементи належать множині $(A\times B)\cap(A\times C)$ і $A\times(B\cap C)$. Чи вірно, що $(A\times B)\cap(A\times C) = A\times(B\cap C)$?

7. Доведіть, що для будь-яких множин A, B, C справедлива наступна рівність: $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

2. Кортежі. Якщо задана множина X, то з її елементів можна складати не тільки упорядковані пари, але і упорядковані трійки, четвірки елементів і т.д. Наприклад, букви слова «телефон» утворюють упорядковану сімку. Введемо загальне математичне поняття, окремими випадками якого є і упорядковані пари, і упорядковані трійки, і упорядковані четвірки.

Хай задані множини $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Візьмемо який-небудь елемент a_1 з множини X_1, потім елемент a_2 з множини X_2, елемент a_n з множини X_n. Вибрані елементи розташуємо по порядку: $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$. Ми отримуємо *упорядковану n-ку* елементів (читається: «*енка*»), вибраних з множини $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Замість слів «упорядкована *n-ка*» говорять коротше – «кортеж» (французьке слово «кортеж» означає урочистий хід, наприклад, говорять «весільний кортеж» або «кортеж автомашин»). Число n називають *довжиною кортежу,* елементи $a_1; a_2; \ldots; a_n$ – його *компонентами.*

Множини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ можуть мати загальні елементи або навіть співпадати одна з одною. Наприклад, слово «телефон» – кортеж довжини 7, він складений з алфавіту – елементів множини $X = \{$ а; б; в; . . .; ю; я$\}$ (при цьому в слово «телефон» входять не всі букви цієї множини, а лише частина цих букв). Речення «У мене задзвонив телефон» – кортеж довжини 4, компонентами якого є слова української мови. Кожне з цих слів – кортеж, складений з букв. Таким чином, компонентами кортежу можуть бути і кортежі. Можна складати і кортежі, компонентами яких є множини, наприклад $(\{a; b\}; \{c; d\}; \{e; f\})$.

У математиці прикладом кортежу може служити набір цифр, що входять в десятковий запис якого-небудь числа. Цей кортеж складений з цифр 0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, причому цифри можуть повторюватися, а при перестановці цифр може утворитися інше число. Так, кортеж цифр числа 112 231 має вигляд (1; 1; 2; 2; 3; 1).

Два кортежі (a_1; a_2; . . .; a_n) і (b_1; b_2; ...b_m) називають *рівними,* якщо вони мають однакову довжину, тобто $n = m$, *і* кожний компонент першого кортежу рівний компоненту другого кортежу з тим же номером, тобто $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ ..., $a_n = b_m$.

Наприклад, кортежі *(a; b; c)* і *(a; b; c)* – рівні, а кортежі *(a; b; c)* і *(b; a; c)* – різні. Так само не рівні і кортежі *(a; b; c)* і *(a; b; c; d)*.

Використовуючи поняття кортежу, можна визначити поняття *декартового добутку* трьох, чотирьох, і взагалі n множин.

Нехай задані n множин: A_1, A_2 . . ., A_n (множини можуть мати спільні елементи). З елементів цих множин утворимо кортежі довжини n, перша компоненту яких належить множині A_1, друга – множині A_2 . . ., n-на – множині A_n. Множину таких кортежів називають *декартовим добутком множин* A_1, A_2 . . ., A_n і позначають $A_1 \times A_2 \times . . . \times A_n$.

Наприклад, декартовий добуток множин A_1 = {1; 2}, A_2 = {3; 4}, A_3 ={5; 6; 7} має вигляд: $A_1 \times A_2 \times A_3$ = {(1; 3; 5); (1; 3; 6); (1; 3: 7); (1; 4; 5); (1; 4; 6); (1; 4; 7); (2; 3; 5); (2; 3; 6); (2; 3; 7); (2; 4; 5); (2; 4; 6): (2; 4; 7)}.

Вправи

1. Порівняйте поняття кортежу і множини. Вкажіть, в чому їх схожість і в чому відмінність.

2. Запишіть множини різних букв слова «паралелограм». Запишіть кортеж букв в цьому слові. Яка довжина цього кортежу?

3. Скільки цифр в записі числа 235535? Скільки різних цифр в записі цього числа?

4. Сформулюйте завдання 3, використовуючи поняття множини і кортежу.

5. На множині N всіх натуральних чисел задано рівняння $\frac{x}{y} = \frac{s}{t}$. Назвіть декілька четвірок чисел, що належать множині розв’язань T даного рівняння. Чи вірно, що (3; 1; 9; 3) $\in T$?

6.Утворіть будь-які кортежи довжини 3 з элементів множини A={*a; b; c; d*}

7.Використовуючи цифри 2, 7, 0, 4, запишіть всілякі тризначні числа (цифри в записі числа не повторюються).

8. Задані множини: $A=\{a; b; c\}$, $B = \{ m; n\}$, $C = \{ x; y; z\}$. Запишіть множини: $A\times B\times C$ і $B\times A\times C$. З'ясуйте, які з наступних висловів істинні, а які помилкові:

а) $(b, m, x)\in A\times B\times C$; б) $(b, m, x)\notin A\times B\times C$; в) $A\times B\times C = B\times A\times C$.

3. Комбінаторика. Правило суми. На практиці часто доводиться вибирати з деякої множини об'єктів її підмножини, розташовувати елементи якоїсь множини в тому або іншому порядку і т.д. Так, майстрові доводиться розподіляти різні види робіт робочим, офіцерові – вибирати наряд з солдатів взводу, шахістові – з декількох ходів вибирати якнайкращий. Оскільки в таких завданнях йдеться про ті або інші комбінації робіт, солдатів, ходів і т. д., їх називають комбінаторними. Область математики, в якій вивчають комбінаторні завдання, називають комбінаторикою. По суті справи, в комбінаториці вивчають скінчені множини, їх підмножини, відображення, а також кортежі, складені з елементів скінчених множин. Тому комбінаторику можна розглядати як частину теорії скінчених множин.

Розв'язання більшості комбінаторних завдань засноване на двох простих правилах, які називають правилами суми і добутку.

Правило суми

Правило суми дозволяє знайти число елементів в об'єднанні двох скінчених множин, а правило добутку – число елементів їх декартового добутку.

Позначимо число елементів скінченої множини X через $n(X)$ (множину, що складається з n елементів, називають *n-множиною*). Наприклад, якщо

$$X = \{a; b; c; d; e; f\}, \qquad \text{то } n(X) = 6.$$

Нехай X містить m елементів, а $У$ містить n елементів. Знайдемо, скільки елементів містить об'єднання $X\cup У$. Однозначну відповідь на це питання можна дати лише у разі, коли множини X і $У$ не перетинаються. В цьому випадку множина $X\cup У$ містить $m + n$ елементів. Наприклад, якщо $X=\{a; b; c; d\}$, $У=\{e; f\}$, то $X \cup У = \{a; b; c; d; e; f \}$ містить 4+2 = 6 елементів. Таким чином, справедливо наступне твердження.

*Якщо множина X містить m елементів, а множина У – n елементів, причому ці множини не перетинаються, то множина X*U*У містить m+n елементів.*

Іншими словами, з X U *У* = ∅ слідує, що $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y)$.   *(1)*

Це очевидне твердження називають в комбінаториці *правилом суми.*

У разі, коли перетин множин X і У не порожній, справа йде складніше. Наприклад, об’єднання множин $X = \{a; b; c; d; e\}$ і $Y = \{d; e; g\}$ складається лише з 6 елементів: $XUУ = \{a; b; c; d; e; g\}$. Це пояснюється тим, що елементи *d* і *e* належать і X, і *Y*, а в об'єднання XU*У* ці елементи входять лише один раз (для множин не має сенсу говорити, що деякий елемент входить в них кілька разів). Тому з суми 5+3 треба відняти 2, тобто число елементів перетину XUУ

Взагалі, *для будь-яких двох множин X і У справедлива рівність*:

$n(X \cup У) = n(X) + n(Y) - n(X \cap У)$.

Отже, *число елементів об'єднання двох множин дорівнює сумі чисел елементів в кожному з них, зменшеною на число елементів перетину цих множин.*

Відмітимо, що в початковій школі при вивченні додавання також виходять з об'єднання множин, але при цьому, звичайно, вважають, що вони не мають спільних елементів.

Вправи

1. З 40 студентів групи 35 чоловік успішно склали іспит з математики, а 37 - з мови. Двоє студентів отримали незадовільні відмітки з обох предметів. Скільки студентів мають академічну заборгованість?

2. З 80 школярів 40 грають у футбол, а 50 – у волейбол, причому 27 школярів грають і у футбол, і у волейбол. Скільки школярів грає хоч в одну з цих ігор? Скільки школярів грає лише в одну з цих ігор?

3. З 100 студентів англійську мову вивчають 28 чоловік, німецьку - 30, французький - 42, англійський і німецький - 8, англійський і французький - 10, німецький і французький - 5, всі три мови вивчають троє студентів. Решта студентів вивчає іспанську мову. Скільки студентів вивчають іспанську мову? Скільки студентів вивчають тільки одну мову?

4. У класі 35 учнів, з них 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, 10 учнів не відвідують ні одного гуртка. Скільки учнів відвідують обидва гуртка? Скільки учнів відвідують тільки математичний гурток?

5. Розглянуто певну множину натуральних чисел. Відомо, що серед них є 100 чисел, кратних 2, 115 чисел кратних 3, 120 чисел, кратних 5, 45 чисел, кратних 6, 38 чисел, кратних 10, 50 чисел, кратних 15, 20 чисел, кратних 30. Скласти діаграму Венна і визначити, скільки чисел у даній множині?

6. У шкільному буфеті снідали 92 учня. Бутерброди взяли 47 учнів, молоко – 38, млинці – 42, бутерброди і молоко – 28, бутерброди і млинці – 26, молоко і млинці – 31. Бутерброди, молоко і млинці взяли 25 учнів, а декілька школярів взяли пиріжки. Скільки учнів взяли пиріжки?

7. У групі 10 дівчаток і 15 хлопців. Скількома способами з цієї групи можна вибрати:

а) одного хлопця;
б) одного хлопчика або одну дівчинку;
в) одного хлопчика і одну дівчинку?

1. **Комбінаторика. Правило добутку.** Друге основне правило комбінаторики стосується підрахунку числа кортежів, які можна скласти з елементів даних кінцевих множин. Розглянемо спочатку таке завдання.

Скільки пар виду $(x_к; y_i)$ *можна скласти з елементів множини*

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \text{ і } Y=\{y_1, y_2, y_3, \ldots ,y_m\}?$$

Запишемо всі ці пари у вигляді наступної таблиці:

$$\begin{array}{l} (x_1;y_1),\ (x_1;y_2),\ (x_1;y_3), \ldots, (x_1;y_m), \\ (x_2;y_1),\ (x_2;y_2),\ (x_2;y_3), \ldots, (x_2;y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_n;y_1),\ (x_n;y_2),\ (x_n;y_3), \ldots, (x_n;y_m). \end{array}$$

Ми бачимо, що вона складається з n рядків, в кожному з яких міститься m елементів. Значить, за правилом прямокутника загальне число пар дорівнює $m \cdot n$.

Отже, *число упорядкованих пар, які можна скласти з елементів n-множини X і m-множини Y, дорівнює* $\boldsymbol{m \cdot n}$, *тобто добутку числа елементів множини X на число елементів множини Y.*

Множину упорядкованих пар, складених з елементів множин X і *Y*, ми назвали *декартовим добутком* цих множин і позначили $X \times Y$. Тому доведене твердження можна коротко записати так: $n(X \times Y) = n(X) \cdot n(Y)$.

Можна довести, що справедливим є більш загальне

твердження, яке называється *правилом добутку.*

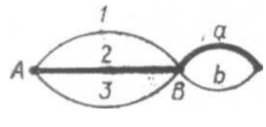
$n(X_1 \times X_2 \times . . . \times X_n) = n(X_1) \cdot n(X_2) \cdot . . . . \cdot n(Xn)$

У комбінаториці рівність (1) зазвичай формулюють так:

Якщо елемент x можна вибрати ***m*** *способами, а елемент y можна вибрати* ***n*** *способами, то упорядковану пару* (*x; y*) *можна вибрати m·n способами.*

Приклад 1. З села *A* в село *B* ведуть три дороги, а з *B* в *C* ведуть дві дорогі. Скількома способами можна пройти з *A* в *C* через *B*?

С



Щоб розв'язати задачу, позначимо дороги з А у В числами 1, 2 і 3, а з В у С – буквами *a* і *b*. Тоді кожен варіант шляху з А в С задається парою, що складається з числа і букви. Наприклад, шлях, виділений на малюнку, задається парою (2; *a).* Але число пар такого виду за правилом добутку рівне 3 · 2 = 6. Ось ці варіанти: (1; *a*), (2; *a*), (3; *a*), (1; *b*), (2; *b*), (3; *b*).

Іноді для розв'язання завдань доводиться користуватися *узагальненим правилом добутку.* Буває, що хоча різні варіанти вибору елементу ***y*** визначаються вже зробленим вибором елементу ***x***, число способів вибрати ***y*** при будь-якому виборі ***x*** одне і те ж. В цьому випадку пару (*x; y*) теж можна вибрати *m·n* способами, де *m* - число способів вибрати елемент *x,* а *n* – число способів вибрати ***y*** після того, як елемент ***x*** уже вибраний.

Приклад 2. Знайдемо число слів, що містять 4 букви, в яких будь-які дві сусідні букви різні (число букв в алфавіті рівне 33; при цьому допускаються і слова, позбавлені смислу, наприклад „ваха").

Першу букву слова можна вибрати 33 способами. Після того, як вона вибрана, наступну букву можна вибрати лише 32 способами, оскільки повторити вибрану букву не можна. Третя буква відмінна від другої, хоч і може співпадати з першою, а тому її можна вибрати 32 способами, так само як і четвертую. Тому загальне число способів вибору дорівнює 33 · 32 · 32 · 32 = 1081344.

Вправи:

1. Є п'ять видів конвертів без марок і чотири види мазкий. Скількома способами можна вибрати конверт і марку для посилки листа?

2.Скількома способами можна із слова «будівля» вибрати дві букви, одна з яких голосна, інша приголосна?

3.Скількома способами можна із слова «космонавт» вибрати дві букви, одна з яких голосна, а інша приголосна?

4.Скількома способами можна вказати на шахівниці два квадрати - білий і чорний?

5. Скількома способами можна вибрати на шахівниці білий і чорний квадрати, які не лежать ні на одній горизонталі і ні на одній вертикалі?

6.З 12 слів чоловічого роду, 9 жіночого і 10 середнього роду треба вибрати по одному слову кожного роду. Скількома способами це можна зробити?

7. Скільки існує складів, у яких перша буква голосна, а друга приголосна?

8.Скільки шахістів приймало участь у турнірі, якщо кожний з них зіграв по одній партії, а всього було зіграні 210 партій?

9. Є три міста – А, Б, В. З міста А в місто Б ведуть 6 шляхів, а з міста Б у місто В – 4 шляхи. Скількома способами можна проїхати з міста А у місто В?

10. В країні Чудес окрім цих трьох міст побудували ще одне – місто Г, і нові шляхи: з А у Г – 2 шляхи, з Г у В – 3 шляхи. Скількома способами можна тепер доїхати з А у В?

11. Скількома способами вибрати одну з голосних і одну приголосну зі слова а) „цукат”; б) „телефон”?

12. Складіть автомобільні номери, які складаються з 4 цифр. Скільки таких номерів можна скласти, якщо:

а) використати 10 цифр;

б) використати тільки непарні цифри?

13. Скількома способами з 5 конвертів, 4 марок і 6 листівок можна вибрати два предмета з різними назвами?

14. Абетка племені М складається з 3 букв: *а, м, ю.* Слова мови цього племені складаються не більше як з 4 букв. Скільки слів у мові племені?

15. У фермера 20 овець і 24 корови. Для закупівлі кормів йому запропонували продати 1 овечку і 2 корів. Скількома способами фермер може вибрати для продажу названі три тварини? Скількома способами він може продати ще три тварини, якщо тепер буде продавати 2 овечки і 1 корову?

16. Кидають дві монети. Скільки різних варіантів випадання „орел" – „решка" може при цьому статися?

Упорядковані множини. Перестановки. Кінцева множина X називається *упорядкованою,* якщо її елементи перенумеровані певним чином:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}.$$

Поняття упорядкованої множини – частковий випадок поняття кортежу. Воно виділяється із загального поняття кортежу умовою, що в упорядкованій множині всі елементи різні. Наприклад, кортеж *(а; б; а; з; а; к)* не є впорядкованою множиною, а *(а, б, в, г, д)* – упорядкована множина.

Одну і ту ж множину можна упорядкувати різними способами. Наприклад, множину школярів в класі можна упорядкувати за віком, зростом, вагою, алфавітом і т.д. Розв'яжемо наступне завдання.

Скількома способами можна упорядкувати m-множину X?

Кожне впорядкування полягає в тому, що якийсь елемент отримує номер 1, якийсь інший – номер 2, . . ., і якийсь – номер m. Номер 1 може отримати будь-який з елементів множини X. Значить, вибір першого елементу можна зробити m способами. Якщо перший елемент вибраний, то на друге місце може бути вибраний лише кандидат із тих, що залишилися (m –1) елементів. Значить, маємо m – 1 спосіб вибору другого елементу. Третій елемент можна вибрати вже тільки (m – 2) способами і т.д. Останній елемент можна вибрати лише одним способом – решта елементів отримали свої місця, і залишився лише один елемент, який і займає m-не місце. За правилом добутку отримуємо, що загальне число способів упорядкування дорівнює $m\cdot(m-1)\cdot(m-1)\cdot. \ . \ .\cdot3\cdot2\cdot1$. Добуток перших m натуральних чисел в математиці називають „*m – факторіал"* і позначають $\boldsymbol{m!}$. Наприклад, $4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$. Таким чином, число різних упорядкувань m-множини X дорівнює $m!$. Різні упорядкування m-множини складаються з одних і тих же елементів, а відрізняються один від одного лише порядком цих елементів. При цьому елементи в них не повторюються. Тому їх називають *перестановками без повторень з m елементів.* Число таких перестановок позначають $\boldsymbol{P_m}$ (від французького слова permutation — «перестановка»). Таким чином, ми довели, що $\boldsymbol{P_m= m!}$.

Наприклад, з трьох букв *a; b c* можна скласти 6 перестановок:

a b c *a c b* *b c a* *c b a* *c a b* *b a c*, тобто $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Таким чином випливає означення:

Означення. Перестановками з n елементів називається будь-яке упорядкування n-елементної множини.

Перестановки з повтореннями

Розглянемо це питання на прикладі.

Нехай задана множина $A = \{a,a,a,b,b\}$. Розв’яжемо задачу: Скільки упорядкованих множин можна утворити з цих елементів?

Будемо вважати, що усі елементи різні. Тоді з них можна утворити 5! перестановок. Тепер звернемо увагу на те, що серед них є перестановки, в яких елемент 2 повторюється тричі, скажімо, *a,a,b,b,a.* Значить при перестановці цих елементів *a* перестановка не зміниться. Не зміняться від цього й усі інші, тобто кожна з них повториться стільки разів, скільки разів можна переставити між собою елементи *a.* А їх можна переставити 3! раз. Отже, щоб звільнитися від усіх інших однакових перестановок, загальну їх кількість слід розділити на 3!. Аналогічну картину ми отримаємо і від повторення елементів *b.* З цього випливає, що для того, щоб отримати усі різні перестановки, треба загальну кількість перестановок поділити на добуток 3!·5!, тобто провести обчислення за формулою $\overline{P_{3,2}} = \frac{(3+2)!}{3! \cdot 2!}$. В загальному ж вигляді ця формула буде мати такий вигляд $\overline{P_{n_1 n_2 .. n_к}} = \frac{(n_1 + n_2 + ... + n_к)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_к!}$

<u>Приклад.</u> Скільки різних слів можна утворити зі слова *мамбатумба* (смисл слів ролі не грає)?

У цьому слові буква *м* повторюється 3 рази, буква *а* – теж 3 рази, буква *б* повторюється двічі, а букви*, у* і *т* – по 1 разу. Значить слів можна скласти

$$\overline{P_{3,3,2,1,1}} = \frac{(3+3+2+1+1)!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{10!}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 50400 .$$

Вправи

Перестановки без повторень

1. Обчислити: а) $\frac{102!}{100!}$; б) $\frac{5! - 3!}{2!}$; в) 10! – 7! ; г) 3! + 4! ; д) 5! – 25.

2.Порівняйте числа: а) $4! - 3!$ і 4; б) $1! - 3!$ і 0; в) $2! + 4!$ і 26; г) $4!$ і $3! + 2!$; д) $5! \cdot 9$ і $6!$.

3. Розв’язати рівняння: а) $7! + 5! - x = 40$. б) $x + 3! = 5!$ в) $6! - 2x = 3 \cdot 4!$.

4. Скоротити дроби: а) $\frac{2+3!}{2!}$; б) $8 + \frac{6!}{4!}$; в) $\frac{6!}{5!} \cdot 4$.

5. Скількома способами можна скласти прапор з 5 горизонтальних смуг матерії різного кольору?

6. Скількома способами можна скласти прапор з 3 горизонтальних і 2 вертикальних смуг матерії різного кольору?

7. Скільки 5-значних чисел можна утворити з цифр 0, 2, 5, 6, 9, якщо цифри не повторюються?

8. 6 студентів підготувалися до відповіді на іспиті. Скількома способами вони можуть утворити чергу для відповіді?

9. У коробці 8 кубиків різного кольору. Скількома способами можна витягти ці кубики з коробки?

10. Скільки різних слів можна утворити з букв слова „Стрілковий”?

11. Довести тотожність: $P_n = (n - 1) \cdot (P_{n-1} + P_{n-2})$.

12. 7 книг різних авторів разом з тритомником ще одного розташовані на полиці. Скількома способами можна розташувати їх так, щоб книги автора тритомника стояли поряд?

13. Скількома способами можна розставити 5 томів Т.Г.Шевченка так, щоб:

а) перший том стояв скраю зліва;
б) перший том стояв скраю справа або зліва;
в) 2 і 3 томи стояли поряд;
г) 1 і 2 томи стояли поряд зліва;
д) 1 і 2 томи не стояли поряд?

14. На зборах мають виступити 5 осіб: А, Б, В, Г і Д. Скількома способами їх можна розташувати у списку так, щоб:

а) Б не повинен виступати перед А;
б) Б не повинен виступати після А.

15. Скільки перестановок можна утворити з цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, які починаються з цифри 5? з числа 45? з числа 745?

16. Скількома способами можна розмістити на полиці 6 томів, щоб 3 і 5 томи не стояли поряд?

17. Обчислити: а) $\frac{P_7 - P_5}{P_6}$; б) $\frac{P_{10}}{P_{12} + P_{10}}$.

18. Розв’язати рівняння: а) $2 \cdot P_x = 48$; б) $P_x : 3 = 40$; в) $\frac{x!}{(x-4)!} = \frac{12x!}{(x-2)!}$; г) $\frac{P_{2x}}{P_{2x-1}} = \frac{2P_x}{P_{x-2}}$

19. Скількома способами можна вишикувати в одну шеренгу гравців двох футбольних команд (по 11 гравців) так, щоб при цьому 2 футболісти однієї команди не стояли поряд?

Перестановки з повтореннями

20. Скільки різних 8-значних чисел можна утворити з цифр 5, 3, 0, якщо число 5 повторюється 3 рази, число 3 – 4 рази, а число 0 – 1 раз?

21. Скільки різних 8-значних чисел можна утворити з цифр 5, 3, 0, якщо число 5 повторюється 4 рази, число 3 – 2 рази, а число 0 – 2 рази?

22. На реї 9 місць для сигнальних прапорців. Скільки сигналів можна передати, якщо є 3 прапорці червоних, 2 прапорця синіх, 1 білий і 4 зелених, використовуючи усі прапорці?

23. Скільки різних слів можна утворити з слова „Міміно” , використовуючи усі букви?

24. Скільки різних слів можна утворити з слова „Математика”, використовуючи усі букви?

25. У мами 2 яблука і 3 груші. Щодня протягом п'яти днів підряд вона видає синові по одному фрукту. Скількома способами вона може Це зробити?

26. Скількома способами можна розставити на другій лінії шахової дошки 2 тури, 2 слона і 3 пішака?

27. П’ятизначний телефонний номер складається з двох трійок і трьох четвірок, але в якому порядку вони розташовані, хлопчик забув. Скільки йому треба зробити спроб, щоб додзвонитися до свого друга.

28. Скількома способами можна розставити 20 книг на 5 полках, кожна з яких може вмістити усі 20 книг.

29. Клоун кидає 10 кілець на 6 стержнів. Скільки варіантів попадання кілець на стержні може статися, якщо клоун ні разу не схибить.

Розміщення.

а) розміщення з повтореннями. Спробуємо з елементів множини $X=\{a; b; c; d\}$ скласти будь-які пари. Комбінуючи ці елементи, можемо отримати такі пари:

(a,a);	(a,b);	(a,c);	(a,d);
(b,a);	(b, b);	(b,c);	(b,d);
(c,a);	(c,b);	(c,c);	(c,d);
(d,a);	(d,b);	(d,c);	(d,d);

Розв'яжемо цю задачу в загальному вигляді.

Зайти число кортежів довжини k, які можна утворити з элементів m-множини X.

Щоб вирішити це завдання, треба знайти число кортежів в декартовому добутку $\underbrace{X\times X\times ...\times X}_{k}$, який містить k множників (цей декартовий добуток саме і складається з таких кортежів). Але за правилом добутку число елементів в нашому декартовому добутку дорівнює $\underbrace{n(X)\cdot n(X)\ \cdot n(X)\cdot ...\ \cdot n(X).}_{k \text{ разів}}$ Оскільки за умовою $n(X) = m$, то $n(X\times X\times ...\times X) = \underbrace{m\cdot m\cdot m\cdot ...\cdot m}_{k \text{ разів}} = m^k$.

Отже, *число кортежів довжини k, складених з елементів m-множини* X, *дорівнює* m^k.

Кортеж довжини k, складений з елементів m-множини, називають *розміщенням з повтореннями з m елементів по k,* а число таких кортежів позначають $\overline{A_n^{к}}$ (від французького слова *arrangement* –розміщення). Таким чином, $\overline{A_n^{к}} = n^k$.

***Означення*. Розміщенням з n елементів по k елементів називається будь-яка упорядкована k-підмножина даної n-множини.**

б) розміщення без повторень

Так само розв'язується більш загальне завдання.

Скільки упорядкованих k-множин можна скласти з елементів m-множини X?

Відмінність цього завдання від попереднього полягає в тому, що складання впорядкованої k-множини закінчується, коли ми виберемо k елементів. Тому, щоб знайти число таких впорядкованих підмножин, треба перемножити k чисел: m, $m - 1$, $m - 2$ і т.д. Останнє з них рівне $m–k+1$ (легко перевірити, що в множині

{ *m; m –1*; . ..; *m–k*+1} *міститься* k чисел). Тому число епорядкованих *k*-множин, складених з елементів *m*-множини X, дорівнює $m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)$.

Ці впорядковані *m*-множини називають ***розміщеннями без повторень*** *з m елементів по k,* а їх число позначають $A_m^к$. Ми довели, що

$$A_m^к = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1).\ (*)$$

Формулу для $A_m^к$ можна записати інакше, помноживши і поділивши першу частину формули (*) на $1\cdot2\cdot\ldots\cdot(m-k)$. Отримаємо:

$$A_m^k=\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)(m-k)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(m-k)}=\frac{m!}{(m-k)!}$$

При цьому $A_m^m = P_m = m!$ і вважається $0! = 1$.

Вправи

Розміщення без повторень

1.Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 0?

2.Скількома способами можна розподілити три призових місця на чемпіонаті по футболу, в якому приймають участь 18 команд?

3. Скільки сигналів можна подати чотирма сигнальними прапорцями різного кольору?

4. Скільки двозначних чисел можна скласти з цифр 3 5 7 0?

5. Скількома способами можна розподілити 5 путівок серед 18 бажаючих у різні будинки відпочинки?

6. У групі 29 студентів. Треба вибрати старосту, його заступника і профорга. Скількома способами можна це зробити, якщо кожний студент може займати тільки одну посаду?

7. Розв'язати рівняння: а) $A_x^4 = 12\cdot A_x^2$; б) $A_x^{x-3} = x\cdot P_{x-2}$; в) $A_7^x = 4\cdot A_7^{x-1}$;

г) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$, д) $A_{x-4}^2 + A_{x-3}^2 + A_{x-2}^2 = 20$.

8. Скількома способами можна скласти трибарвний прапор з трьома горизонтальними смугами однієї і тієї ж ширини, якщо є матерія п'яти різних квітів? Розв'яжіть те ж завдання, якщо одна із смуг повинна бути червоною.
9. Скільки можна скласти тризначних чисел з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо жодне з цих чисел не містить двох цифр, що повторюються?

10. Клавіатура піаніно містить 88 клавіш. Скільки різних музичних фраз із 6 нот можна скласти, щоб не допускати в одній фразі повторення звуків?
11. Зашифровані знаки складаються з точок і тире. Скільки знаків можна створити, якщо кожний з них складається з 5 елементів?
12. Учні 9 класу вивчають 12 предметів. Скількома способами можна скласти розклад з 6 предметів, щоб усі уроки були різні? Якщо 5 предмети виставляються по одному разу, а один з предметів треба виставити двічі?
13. Команда „Шахтар" налічує 28 гравців, у складі яких 3 воротаря. Скільки варіантів складу команди може виставити на гру тренер, якщо окрім воротарів усі інші гравці рівнозначні?
14. Скільки різних натуральних чисел, які складаються не більше ніж з 3 знаків, можна скласти з цифр 2, 4, 5, 8?
15. Скільки різних чотиризначних чисел можна утворити з 10 цифр, у яких перша цифра непарна, а інші три парні? У яких одна цифра парна, а три непарні? У яких дві цифри парні і дві непарні?

Розміщення з повтореннями.

16. Кожний телефонний номер складається з 7 цифр. Скільки усього телефонних номерів з цифр 2, 3, 5 і 7?
17. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 2, 3, 4, 5? З цифр 3, 5, 6, 0?
18. На першому поверсі 6-поверхового будинку сіли у ліфт 10 мешканців. Люди можуть виходити з ліфта на кожному поверсі. Скількома способами можуть бути розподілені пасажири ліфта на 6 поверхах?
19. Скільки символів можна закодувати у п'яти знаках, які складаються з точок і тире? З точок, тире і зірки?
20. Скільки різних автомобільних номерів можна виготовити, якщо кожний номер складається з 2 букв (використовуються 30 букв) і 4 цифр?
21. Скільки різних автомобільних номерів можна виготовити, якщо кожний номер складається з 2 букв, з яких перша буква А і 4 цифр (використовуються 30 букв)?
22. Групі з 10 туристів (4 дітей і 6 дорослих) запропонували відвідати 5 музеїв, причому у два з них дітей не пускають. Скільки існує способів розподілення туристів по музеях?
23. Номери трамвайних маршрутів колись позначалися двома різноколірними ліхтарями. Яку кількість різних маршрутів можна позначити, якщо використати ліхтарі 6 кольорів?

24. Два листоноші повинні рознести 8 листів по 8 адресам. Скількома способами вони можуть розподілити роботу?

Сполуки без повторень.

Ми розглянемо наступне завдання комбінаторики.

Скільки можна скласти підмножин, що містять по k елементів, з елементів даної n-множини X, щоб кожний з елементів у підмножині містився лише один раз ?

Такі підмножини називають *сполуками без повторень з m елементів по k,* а їх кількість позначають C_n^k.

Означення. Сполуками з n елементів по k елементів називається будь-яка k–підмножина даної n-множини.

Виведемо формулу, яка виражає C_n^k через n і k. Візьмемо яку-небудь k -підмножину A з n елементів множини X. Оскільки A містить k елементів, то її можна упорядкувати $k!$ способами. При цьому кожна впорядкована k -множина, що складається з елементів множини X, може бути отримана таким шляхом. Значить, число впорядкованих k-множин, складених з елементів множини X, в $k!$ разів більше числа невпорядкованих k -підмножин в X.

Наприклад, з елементів множини *X = {a; b; c; d)* можна скласти чотири трьохелементних підмножини: {*a; b; c*;}, {*a; b; d*}, {*a: c: d*}, {*b; c; d)*}. Число ж упорядкованих трьохелементних підмножин у 3! = 6 разів більше.

Щоб це побачити і щоб вивести формулу обчислення сполук, розглянемо приклад. Утворимо розміщення A_4^3.

(*a; b; c)*	(*a*; *b; d)*	*(a; c; d)*	*(b; c; d)*
(a; c; Ь)	(*a*; *d; b)*	*(a; d; c)*	*(b; d; c)*
(b; a; c)	*(b; a; d)*	*(c; a; d)*	*(c; b; d)*
{b; c; a)	*(b; d; a)*	*(c; d; a)*	*(c; d; b)*
(c; a; b)	*(d; a; b)*	*(d; a; c)*	*(d; b; c)*
(c; b; a)	*(d; b; a)*	*(d*; *c*; *a)*	*(d; c; b)*

Як бачимо, кількість трьохелементних підмножин з 4 елементів склала за правилом прямокутника 24 кортежі. По горизонталі розмістилися усі підмножини, які відрізняються лише складом елементів, тобто сполуки C_4^3. А по вертикалі перестановки P_3. Звідси $A_4^3 = C_4^3 \cdot P_3$. Звідки $C_4^3 = \frac{A_4^3}{P_3}$. Таким чином, в загальному вигляді формула обчислення сполук без повторень обчислюється за формулою: $C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$.

Зважаючи на формулу $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, легко отримати новий вид формули сполук, помноживши знаменник на $k!$, тобто її вигляд буде $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

Ця формула виражає число k -підмножин у n-множині X.

Приклад. Скількома способами можна вибрати делегацію з 5 осіб з групи, у 12 осіб?

Оскільки порядок членів делегації ролі не грає, то нам треба дізнатися, скільки можна вибрати 5-тиелементних підмножин з 12-тиелементної множини. Щоб обчислити кількість способів, підставимо данні у формулу C_n^k:

Отримаємо: $C_{12}^5 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792$.

Властивості чисел $\boldsymbol{C_n^k}$.

Властивість 1. $\boldsymbol{C_n^k} = C_n^{n-k}$.

Нам відомо, що $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

Розкриємо формулу C_n^{n-k}. $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, тобто отримали ту ж саму формулу. А з цього і випливає вірність нашого твердження.

Властивість 2. $\boldsymbol{C_n^k} = \boldsymbol{C_{n-1}^{k-1}} + C_{n-1}^k$

Дійсно, $\boldsymbol{C_{n-1}^{k-1}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}$. $C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-k-1)!}$. Помноживши чисельник і знаменник цього виразу на $(n-k)$, отримаємо вираз $C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!\cdot(n-k)}{k!\cdot(n-k-1)!\cdot(n-k)} = \frac{(n-1)!\cdot(n-k)}{k!\cdot(n-k)!}$. Виконавши додавання, отримаємо шукане твердження. Проілюструємо цю властивість на прикладі: Обчислимо C_9^4.

$C_9^4 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126$. $C_8^3 = 56$, $C_8^4 = 70$. $C_8^3 + C_8^4 = 56 + 70 = 126$.

За допомогою цієї тотожності можна послідовно обчислювати C_n^k спочатку при $k = 0$, потім при $k = 1$, при $k = 2$ і т.д. При цьому слід враховувати, що $C_n^0 = 1$ і $C_n^n = 1$. Обчислення зручно записувати у вигляді трикутної таблиці, яка у математиці отримала назву „Трикутник Паскаля”. Справа в тому, що ця таблиця зустрічається у працях французького математика й астронома *Блеза Паскаля* (1623–1662). Однак фактично така таблиця була відома ще арабському математику і поету Омару Хайяму ще у XIII столітті.

Сутність цієї таблиці полягає в тому, що в $n + 1$ рядку трикутної таблиці по порядку стоять числа C_n^0, C_n^1, C_n^2,..., C_n^n. При цьому $C_n^0 = C_n^n = 1$, а інші числа обчислюються за формулою $C_n^k = C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Оскільки C_{n-1}^{k-1} і C_{n-1}^k розташовані у цій таблиці рядком вище, ніж C_n^k, і знаходяться у цьому рядку зліва і справа від нього, то для отримання C_n^k треба додати числа попереднього рядка, які знаходяться від нього зліва і справа. Наприклад, значення $C_5^2 = 10$ отримується шляхом додавання чисел 4 і 6, які знаходяться над числом 10, а щоб знайти C_4^3, яке дорівнює 4 і знаходиться у 5 рядку справа, слід додати числа 3 і 1, які знаходяться над ним.

Вправи

1. Скількома способами можна вибрати чотири фарби з шести різних фарб?

2.У одного учня є 8 книг з математики, а у іншого – 6 книг. Скількома способами вони можуть обміняти три книги однієї людини на три книги іншої людини?

3. У класі 30 учнів. Скількома способами можна скласти чотири команди по 4 учня для участі в олімпіаді з 4 предметів, якщо з усіх предметів вона проходить одночасно?
4. Скількома способами можна створити з групи у 12 чоловіків і 8 жінок комісію, щоб вона складалася з 3 чоловіків і 4 жінок?

5.Рота складається з трьох офіцерів, 6 сержантів і 60 рядових. Скількома способами можна виділити з них загін, що складається з одного офіцера, двох сержантів і 20 рядових?

6. На шкільному вечорі були присутніми 12 дівчат і 16 хлопців. Скількома способами можна вибрати з них 4 пари для танцю?

7. Скількома способами можна вибрати 12 чоловік з 17, якщо двоє з них Петро і Іван не можуть бути вибрані разом?

8. Скільки діагоналей має 8-микутник?

9.Профспілковий комітет складається з 12 осіб. Мінімальний кворум складається з 8 осіб.

а) Скількома способами може складатися мінімальний кворум?

б) Скількома способами може складатися будь-який кворумний склад?

10. Обчислити значення виразів: а) $\boldsymbol{C}_{10}^{5} - \boldsymbol{C}_{10}^{3}$; б) $\boldsymbol{C}_{8}^{4} + \boldsymbol{C}_{5}^{3}$; в) $A_{10}^{5} - \boldsymbol{C}_{10}^{3}$;

г) $\dfrac{C_8^4 - C_8^3}{C_7^3 - C_7^2}$; д) $\dfrac{A_8^4 - A_8^3}{C_7^4 - C_7^5}$.

11. З двох партій деталей, з яких в одній було 6 деталей, а у другій 11 взяли деталі на експертизу ВТК: з першої партії 2, а з другої 3. Скількома способами можна це зробити?

12. Розв'язати рівняння: а) $C_m^{m-2} = 15$; б) $C_n^2 + C_{n+1}^2 = 49$; в) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x - 1)$;

г) $14 \cdot C_x^{x-2} = 15 \cdot A_{x-3}^2$; д) $21 \cdot C_{2x}^{x+1} = 11 \cdot C_{2x+1}^{x-1}$, е) $A_x^3 - C_x^3 = 10 \cdot C_{x-1}^3$

є) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x^2 - 1)$.

13. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} C_x^{y-1} = 2{,}5x \\ C_{x-1}^{y} = 10 \end{cases}$

14. У шаховому гуртку займаються 2 дівчинки і 7 хлопчиків. Для участі у змаганнях необхідно створити команду з 4 гуртківців, в яку обов'язково повинна входити хоча б одна дівчинка. Скількома способами можна це зробити?

15. Три стрільця повинні вразити 15 мішеней (кожний по 5). Скількома способами вони можуть розподілити мішені між собою?

16. Є колода з 36 карт. Скількома способами можна витягнути 6 карт так, щоб:

а) серед них був тільки один туз;

б) щоб було 2 тузи;

в) не було ні одного туза;

г) був хоча б один туз;

д) щоб було хоча б 2 тузи;

е) були тільки один туз і один король;

є) не було ні одного туза і ні одного короля.

ж) були туз і король однієї масті.

17. У лотереї „5 з 36” ті, хто вгадав 4, 3 або 2 номери отримують менший приз, ніж той, хто вгадав 5 номерів. Скільки може бути різних карток, де вгадано:

а) 4 номери; б) 3 номери; в) хоча б 4 номери?

18. Скільки різних дільників має число 2310? ($2310 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$)

19. У Миколи 6 друзів. Кожний день він запрошує до себе трьох з них так, щоб компанія ні разу не повторилася. Скільки для цього йому знадобиться днів?

20. Скільки прямих можна провести через 7 точок, які не лежать на одній прямій?

БІНОМ НЬЮТОНА

Добуток біномів, що відрізняються тільки другими членами. Звичайним множенням знаходимо:

$$(x+a)(x+b) = x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab;$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=[x^2+(a+b)x+ab](x+c)=x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+(ac+bc)x +$$
$$+abc = x^3+(a+b+c)x^2+(ab + ac + bc)x + abc.$$

Подібно до цього знайдемо:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)= x^4+(a+b+c+d) x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+$$
$$+(abc+abd+acd+bcd) x+abcd.$$

Розглядаючи ці добутки, помічаємо, що всі вони складені поодинці і за тим же законом, а саме, добуток складає многочлен, розташований за спадаючими ступенями букви x.

Показник першого члена дорівнює числу біномів, які перемножуються; показники при x в наступних членах спадають на 1; останній член не містить x (містить його в нульовому ступені).

Коефіцієнт першого члена є 1; коефіцієнт другого члена є сума всіх других членів перемножуваних біномів; коефіцієнт третього члена є сума всіх добутків других членів, узятих по два; коефіцієнт четвертого члена є сума всіх добутків других членів, узятих по троє. Останній член є добуток всіх других членів.

Формула бінома Ньютона. Припустимо, що в доведеній нами рівності $(x+a)(x+b)\cdot\ldots\cdot(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\ldots+S_m$ всі другі члени біномів однакові, тобто що $a = b = c = \ldots = k$. Тоді ліва частина буде ступінь бінома $(x+a)^m$. Поглянемо, у що перетворяться коефіцієнти S_l, S_2, ..., S_m.

Коефіцієнт S_l рівний $a+b+c+\ldots+k$, перетвориться в ma. Коефіцієнт S_2, рівний $ab+ac+ad+\ldots$, перетвориться в число a^2, повторене стільки раз, скільки можна скласти сполук з m елементів по 2, тобто перетвориться в $C_m^2\,a^2$. Коефіцієнт S_3, рівний $abc+acd+abd+\ldots$, перетвориться в число a^3, повторене стільки раз, скільки можна скласти сполук з m елементів по 3, тобто $C_m^3\,a^3$ і т.д. Нарешті, коефіцієнт S_m, рівний $abc\ldots k$, перетвориться в a^m. Так, ми отримаємо запис: $(x+a)^m= x^m+C_m^1\,ax^{m-1}+C_m^2\,a^2x^{m-2}+C_m^3\,a^3\,x^{m-3}+\ldots+a^m$.

Ця рівність відома як *формула бінома Ньютона**, причому многочлен, що стоїть в правій частині формули, називається *розкладанням бінома.* Розглянемо особливості цього многочлена.

Властивості формули бінома Ньютона. З цих властивостей ми вкажемо наступні 10:

1. Показники букви x зменшуються на 1 від першого члена до останнього, причому у першого члена показник x рівний показнику ступеня бінома, а в останньому він є 0; навпаки, показники букви a збільшуються на 1 від першого члена до останнього, причому в першому членові показник при a є 0, а в останньому він рівний показнику ступеня бінома. Внаслідок цього сума показників при x і a в кожному члені одна і та ж, а саме: вона дорівнює показнику ступеня бінома.

2. Число всіх членів розкладання є $m + 1$, оскільки розкладання містить всі ступені а від 0 до m включно.

**⁄ Ісаак Ньютон – видатний англійський математик (1642–1727). Формула бінома для цілого, дробового і від'ємного показників була ним виведена біля 1665 р., але строгого доведення він не надав. Таке доведення для цілих додатних показників була доведена Якобом Бернуллі (1654-1705).*

3. Коефіцієнти рівні: у першого члена – 1, у другого члена – показнику ступеня бінома, у третього члена – числу сполук з m елементів по 2, у четвертого члена – числу сполук з m елементів по 3; взагалі коефіцієнт (*n* + 1)-го члена є число сполук з m елементів по n. Нарешті, коефіцієнт останнього члена дорівнює числу сполук з m елементів по m, тобто 1. Відмітимо, що ці коефіцієнти називаються *біноміальними.*

4. Позначаючи кожен член розкладання буквою T з цифрою внизу, яка вказує номер місця цього члена в розкладанні, тобто перший член T_1, *другий* член T_2 і т. д., ми можемо написати: $T_{n+1} = C_m^n a^n x^{m-n}$

Ця формула виражає загальний член розкладання, оскільки з неї ми можемо отримати всі члени (окрім першого), підставляючи на місце n числа: 1, 2, 3 ..., m.

5. Коефіцієнт першого члена від початку розкладання дорівнює одиниці, коефіцієнт першого члена від кінця теж дорівнює одиниці. Коефіцієнт другого члена від початку є m, тобто C_m^1 , коефіцієнт другого члена від кінця є C_m^{m-1}, але оскільки $C_m^n = C_m^{m-n}$, то ці коефіцієнти однакові. Коефіцієнт третього члена від початку дорівнює третьому коефіцієнту від кінця і т.д., тобто, *коефіцієнти членів, однаково віддалених від кінців розкладання, рівні між собою.*

6. Розглядаючи біноміальні коефіцієнти, ми відмічаємо, що оскільки вони розташовані симетрично, то найбільший з них розташований посередині. Якщо показник степеня є число парне, то кількість членів розкладання непарне, тому найбільший коефіцієнт один, якщо ж показник парний, то таких коефіцієнтів 2, оскільки членів розкладання число парне. Наприклад:

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4;$$

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

7) З порівняння двох членів, які стоять рядом, випливає висновок, що

Для отримання коефіцієнта наступного члена досить помножити коефіцієнт попереднього члена на показник букви *x* ***в цьому члені і розділити на число членів, передуючих визначуваному.***

Користуючись цією властивістю, можна відразу писати, наприклад

$$(x + a)^7 = x^7+7x^6a + 21x^5a^2 + 35x^4a^3 +35x^3a^4+21x^2a^5 + 7xa^6+ a^7$$

Щоб отримати, скажімо, коефіцієнт третього члена 21, треба у попередньому члені помножити 7 на 6 і результат поділити на 2, тобто на кількість членів, що цьому третьому передують. Наступний 35 отримається так: (21·5):3 і т.д.

8. Сума усіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^m. Дійсно, поклавши $x = a = 1$, отримаємо, що сума усіх коефіцієнтів дорівнює 2^m. Наприклад, у попередньому прикладі сума коефіцієнтів

$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$$

9) Замінивши у формулі бинома a на $–a$, отримаємо чергування знаків коефіцієнтів. У нашому прикладі це буде виглядати так:

$$(x – a)^7 = x^7–7x^6a + 21x^5a^2 – 35x^4a^3 +35x^3a^4–21x^2a^5 + 7xa^6– a^7$$

Від'ємні коефіцієнти будуть у членів, в яких другий член біному a буде у непарному степені.

10) Якщо в останньому випадку покласти $x=a=1$, то побачимо, що сума коефіцієнтів, які стоять на непарних місцях, дорівнює сумі коефіцієнтів, що стоять на парних місцях.

Вправи для самостійного розв'язання.

1. Знайти за формулою бінома Ньютона:

$(x + 1)^6$; $(x + 3)^9$; $(x – 2)^8$; $(5 – a)^4$; $(3x + 2y)^5$; $(2x – 5y)^4$.

2. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$; $(x^2+ 2y^2)^4$; $(3a^2– 2b^2)^6$.

3. Знайти 6 член розкладання $(5x^2–6a^2)^{10}$; $(3a–2)^{10}$.

Знайти 8 член розкладання $(5x–1)^{12}$; $(3a+1)^{10}$.

4. Обчислити: $2{,}1^6 = (2 + 0{,}1)^6$. Аналогічно: $1{,}03^5$; $0{,}97^4$; $2{,}8^4$.

5. Обчислити: 29^5; 31^3; 99^3; 82^4.

6. Обчислити: $(4 +\sqrt{3})^5$; $(6 – 5\sqrt{2})^5$; $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4$; $(\sqrt{a}-2\sqrt{b})^4$;

$(1 + \sqrt{3})^8$; $(3\sqrt{2}+\sqrt{6})^6$.

Література:

1. Віленин Н. Я., Пишкало А. М., Рождественская В. Б., Стойлова Л. П. Математика. М., Просвещение, 1977. 352 с.
2. Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбінаторика. М., ФИМА МЦИМО, 2006. 311 с.
3. Проценко Е. А., Семёнова Г. А. Теоретические и методические основы изучения комбинаторики в начальной школе. Таганрог, 2008. 126 с.
4. Семеновых Г. А. Основные понятия комбинаторики. *Математика в школе*. 2004. № 15, №16, №17.
5. Скачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М., Наука, 1982. 162 с.
6. Сморжевський Л., Шлапак Л. В. Елементи комбінаторики. Тернопіль: Мандрівець, 2006. 88 с.

ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Поняття числової послідовності

ОЗНАЧЕННЯ. *Сукупність чисел, кожне з яких визначається номером місця, яке воно займає у цій сукупності, називається числовою послідовністю.*

Задати числову послідовність – значить вказати правило, за яким обчислюється той чи інший член послідовності, якщо відомий номер місця, яке він у ній займає.

У якості прикладу наведемо числові сукупності:

1) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \ldots, n, \ldots$

2) $\frac{1}{2},\ 2,\ 4\frac{1}{2},\ 8,\ 12\frac{1}{2},\ \ldots\ \frac{n^2}{2},\ \ldots$

3) $0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 35, \ldots, n^2 - 1, \ldots$

Існують декілька способів завдання послідовності. Розглянемо деякі з них.

1. Завдання послідовності за допомогою формули. Формула встановлює зв’язок числа з номером місця, яке воно займає у послідовності. Прикладами можуть задані вище послідовності. Скажімо, у третій послідовності під номером 4 значиться число, яке обчислюється формулою $n^2 - 1$, тобто замість числа n слід поставити число 4 і виконати запропоновані дії: $4^2 - 1 = 15$.

Формула, за якою обчислюється член числової послідовності за його номером, називається загальним членом числової послідовності.

Оскільки за загальним членом можна визначити будь-який член послідовності, то часто послідовність позначається $\{a_n\}$.

2. Завдання послідовності через опис її членів. Наприклад, послідовність 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... утворена з наближених значень $\sqrt{2}$ з недостачею з точністю до 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 ... В подібних випадках формулу загального члена встановити неможливо.

3. Завдання послідовності через вказування перших декількох членів послідовності. Наприклад, перший і другий члени дорівнюють 1, а кожний наступний дорівнює сумі двох попередніх членів.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

(до речі, числа цієї послідовності називаються *числами Фібоначчі*, за ім’ям італійського математика Леонарда Пізанського).

Послідовності можуть мати як скінчену, так і нескінчену кількість членів. Послідовності, які мають скінчену кількість членів, так і називаються *скінченими,* а нескінчену – *нескінченими.*

Якщо кожний наступний член послідовності *<u>більший</u> за попередній, то послідовність називається монотонно зростаючою*. Тобто, $a_{n+1} > a_n$. Прикладом таких послідовностей є наведені вище приклади.

Якщо ж кожний наступний член послідовності *<u>менший</u> за попередній, то послідовність називається монотонно спадаючою.* Тобто, $a_{n+1} < a_n$. Наприклад,

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\ \dots,\ \frac{1}{n^2},\dots$$

Іноді, якщо неістотно, послідовність монотонно спадаюча чи зростаюча, їх просто називають *монотонними.*

Про послідовності, які не є монотонними, а її члени приймають значення то більші за попередній член, то менші – називаються такими, що *коливаються.* Наприклад, послідовність, що визначається формулою $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ має вигляд:

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},-\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\dots$$

Числова послідовність називається обмеженою зверху, якщо для будь-якого ***n*** *існує таке число A, що* $a_n \le A$. Прикладом такої послідовності може бути послідовність периметрів вписаного в коло правильних многокутників (тобто при *n≥ 3, де* ***n*** *– кількість сторін многокутника*): $p_3\ p_4, p_5, \dots, p_n$. Ця послідовність не може перевищити довжину кола, описаного навколо многокутника.

Або послідовність $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \dots,\ \frac{n}{n+1},\dots$ Усі члени цієї послідовності менші за число 1, тобто $a_n < 1$.

Числова послідовність називається обмеженою знизу, якщо для будь-якого ***n*** *існує таке число* ***B****, що* $a_n \ge B$. Прикладом такої послідовності може бути послідовність множини натуральних чисел: 1, 2, 3, 4, ..., *n*, ..., або послідовність периметрів правильних многокутників, описаних навколо кола. Члени цієї послідовності не можуть бути менші за довжину кола.

Числова послідовність називається обмеженою, якщо для будь-якого ***n*** *вона обмежена і зверху, і знизу:* $B \le a_n \le A$. Прикладом такої послідовності може бути послідовність значень $\sqrt{2}$, яка утворена з наближених значень з недостачею та надлишком з точністю до 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 ... Вона має вигляд:

$1 \leq \sqrt{2} \leq 2$

$1{,}4 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}5$

$1{,}41 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}42$

$1{,}414 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}415$

$1{,}4142 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}4143$

. . . .

Ясно, що ця послідовність обмежена знизу числом 1, а зверху числом 2.

Практична робота

Тема. Загальні відомості про числові послідовності.

Мета: Сформувати у студентів знання про основні властивості числових послідовностей. На практичному рівні засвоїти основні поняття і відношення з теорії числових послідовностей.

Знаючи загальний член послідовності, записати її перші 5 членів:

1. $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.

2. $x_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$.

5. *Чи є обмеженою послідовність* $x_n = \sin n$. *? Відповідь обґрунтувати.*

6. *Довести, що послідовність монотонно зростає* $x_n = \frac{n^2}{n^2+10}$.

7. Довести, що послідовність $x_n = \frac{3n}{n+1}$ обмежена і монотонно зростаюча.

8. Чи кожна монотонна послідовність є обмеженою? Відповідь обґрунтувати.

Практичні завдання до теми для самостійного опрацювання

Завдання 1.

Навести приклад зростаючої необмеженої послідовності.

Навести приклад зростаючої послідовності, обмеженої зверху.

Навести приклад необмеженої зверху послідовності, що коливається.

Навести приклад необмеженої знизу послідовності, що коливається.

Навести приклад послідовності, обмеженої зверху і знизу.

Навести приклад спадної необмеженої послідовності.

Навести приклад спадної обмеженої послідовності.

Навести приклад зростаючої та збіжної до 0 послідовності.

Навести приклад спадної та збіжної до 2 послідовності.

Навести приклад збіжної до 0 послідовності, що коливається.

Завдання 2. Продовжити ряд.

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{2},\frac{5}{2\sqrt{2}},\frac{7}{4},\frac{9}{4\sqrt{2}},...$$

$$\sqrt{1\cdot 2},\sqrt{2\cdot 3},\sqrt{3\cdot 4},\sqrt{4\cdot 5},...$$

$$\frac{3}{2^2\cdot 3^2},-\frac{5}{3^2\cdot 4^2},\frac{7}{4^2\cdot 5^2},-\frac{9}{5^2\cdot 6^2},...$$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10},...$$

$$\frac{1}{3\cdot 5},\frac{1}{5\cdot 7},\frac{1}{7\cdot 9},\frac{1}{9\cdot 11},...$$

$$\frac{1}{6},\frac{4}{11},\frac{7}{16},\frac{10}{21},\frac{13}{26},\frac{16}{31},...$$

$$\frac{1}{5},\frac{6}{7},\frac{11}{9},\frac{16}{11},\frac{21}{13},\frac{26}{15},...$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{4}},-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{7}},...$$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},...$$

$$\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{5}{10},\frac{7}{17},\frac{9}{26},\frac{11}{37},\frac{13}{50},...$$

Завдання 3. Задано послідовність $\{x_n\}$ і властивість P. Визначити, чи властивість P має місце для скінченного числа членів послідовності $\{x_n\}$? А для нескінченного числа членів послідовності $\{x_n\}$?, А для всіх членів послідовності $\{x_n\}$.

1) $x_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$. P – властивість $|1-x_n| < 0{,}0001$.

2) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$. P – властивість $1-x_n < 0{,}001$.

3) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. P – властивість $|x_n| < 0{,}000001$.

4) $x_n = \frac{1}{n}$. P – властивість $x_n < 0{,}000001$

5) $x_n = \frac{1000}{n}\cdot\left[1+(-1)^n\right]$. P – властивість $|x_n| < 1$.

6) $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. P – властивість $x_n < 1$.

7) $x_n = 1 + \frac{5}{n}$. P – властивість $x_n < 2$.

8) $x_n = n + 3$. P – властивість бути точним квадратом.

9) $x_n = n(n+1)$. P – властивість бути парним числом.

10) $x_n = p_n$. (p_n - n -те просте число). P – властивість бути непарним числом.

Завдання 4. Знаючи загальний член послідовності, записати її перші 5 членів:

1. $x_n = \frac{n}{n+2}$.
2. $x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$.
3. $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, n - \textit{непарне}, \\ \frac{n}{n+1}, n - \textit{парне}. \end{cases}$

Завдання 5. Чи є обмеженою послідовність? Відповідь обґрунтувати.

1. $x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$.
2. $x_n = 2n$.
3. $x_n = \ln n$.
4. $x_n = \sin n$.
5. $x_n = \frac{n}{n+1}$.

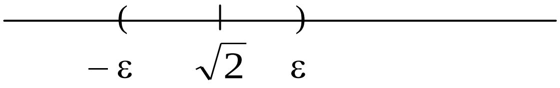
Границя нескінченої числової послідовності

Розглянемо попередній приклад. Наголосимо, що послідовність значень числа $\sqrt{2}$, взятих з недостачею, по-перше, нескінченна, а по-друге, члени цієї послідовності не можуть перевищити абсолютного значення $\sqrt{2}$. Аналогічно і для послідовності з надлишком. Характер послідовності така, що кожний новий член все ближче наближується до абсолютного значення $\sqrt{2}$. Оскільки ж послідовність нескінченна, то і наближення нескінченне, а це означає, що яке б мале число $\varepsilon > 0$ ми не вибрали (наприклад, $\varepsilon = 0{,}000001$), завжди можна вказати такий номер N, що для усіх $n > N$ буде виконуватись нерівність

$$|a_n - \sqrt{2}\,| < \varepsilon.$$

Ця нерівність еквівалентна подвійній нерівності $-\varepsilon < a_n - \sqrt{2} < \varepsilon$, з якої випливає нерівність $\sqrt{2} - \varepsilon < a_n < \sqrt{2} + \varepsilon$.

Отже, при будь-якому $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, починаючи з якого усі члени послідовності лежать в інтервалі від $\sqrt{2} - \varepsilon$ до $\sqrt{2} + \varepsilon$.



В цьому разі говорять, що число $\sqrt{2}$ є границею заданої числової послідовності.

ОЗНАЧЕННЯ. *Число а називається границею числової послідовності* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, *якщо для будь-якого додатного числа* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *існує номер N такий, що усі члени послідовності, починаючи з* a_{n+1}*, попадають в інтервал* $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$.

Границя числової послідовності записується так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Приклад.

Довести, що границя числової послідовності $1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \ldots, \frac{2n}{n+1}, \ldots$

дорівнює 2. Тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$.

Доведення. Розділимо чисельник і знаменник дробу на n, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Теорема. *Числова послідовність не може мати дві границі.*

Дійсно, якщо послідовність має дві границі a і b, то повинні бути два інтервали $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ і $(b - \varepsilon,\ b + \varepsilon)$, які не перетинаються, а це означає, що члени послідовності, починаючи з певного $n > N$, будуть знаходитися у різних інтервалах, чого бути не може. А значить інтервали повинні співпадати, отже $a = b$.

Теорема. *Будь-яка обмежена послідовність має границю.*

Дійсно, якщо послідовність $\{x_n\}$ обмежена певним числом a, то це число і буде границею даної послідовності.

ОЗНАЧЕННЯ. *Числова послідовність, яка має границю, називається такою, що збігається.*

Теорема. *Числова послідовність, яка не збігається, не має границю.* Дійсно, якщо послідовність не збігається, то не існує інтервалу $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, в який потрапляють члени послідовності при певному $n > N$, а значить і границі не існує.

Основні властивості границь.

1. *Границя постійного числа (константи) дорівнює цьому ж числу:*

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

2. *Числовий множник перед змінною можна виносити за знак границі.*

$$\lim_{n\to\infty} (k\cdot a_n) = k\cdot\lim_{n\to\infty} a_n .$$

3. *Границя суми двох змінних величин дорівнює сумі границь цих величин.*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

4.Границя добутку двох змінних величин дорівнює добутку границь цих величин.

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

Границя добутку двох змінних величин дорівнює добутку границь цих величин.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0.\right).$$

Теорема. *Якщо* $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Розглянемо це припущення для двох випадків:

1) коли $0 < q < 1$, і коли

2) $-1 < q < 0$.

1. Якщо *n натуральне число,* а при $0 < q < 1$ число q є додатний правильний звичайний дріб, то в послідовності q^n кожний наступний дріб буде менший за попередній, оскільки знаменник буде зростати швидше за чисельник. Отже ми отримаємо нескінченну спадаючу послідовність чисел, обмежену певним числом ***c***. Доведемо, що це число є 0. Дійсно, оскільки послідовність має границею число ***c***, то існує число N таке, що при певному $n > N$ q^n попадає в інтервал $(c - \varepsilon,\ c + \varepsilon)$. Однак, у цей же інтервал попаде і член q^{n+1} і послідовність $\{q^{n+1}\}$, а значить вона буде мати ту же границю – число c. Але $q^{n+1} = q\cdot q^n$. Тоді

$$c = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} q\cdot q^n = q\cdot \lim_{n\to\infty} q^n = q\cdot c$$

З цього виходить, що $c = q\cdot c$, оскільки ж $q \neq 1$, це можливе лише тоді, коли $c = 0$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

2. Якщо $-1 < q < 0$, то розглянемо різницю $|q^n - 0| = |q^n|$, а оскільки $|q| < 1$, то повертаємося до попереднього випадку.

Практична робота

Тема. Границі числових послідовностей.

Мета: На практичному рівні сформувати свідоме розуміння поняття границі числової послідовності. Сформувати у студентів практичні уміння розв'язувати задачі на знаходження границь числових послідовностей.

Користуючись означенням границі числової послідовності, довести, що:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

4. *Чи має границю дана послідовність:* (2.18) $x_n = \frac{1}{n}\cdot\cos\frac{n\pi}{2}$.

Користуючись властивостями границі числової послідовності, знайти границі:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3-n}{2n+1} - \frac{3n^2+2}{4n^2+1}\right)$.

Знаючи, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1, \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$, *обчислити границі:*

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^7}$.

Знайти границі послідовностей:

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right)$.

Практичні завдання до теми для самостійного опрацювання

Завдання 1.

Користуючись означенням границі числової послідовності, довести рівності:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{4n-5} = \frac{1}{2}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} = 0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3} = 2$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n + 5\cdot 6^n}{3^n + 6^n} = 5$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+6}{n+1} = 5$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+2n+1} = 0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1} = \frac{1}{2}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3}{3n^3+1} = \frac{2}{3}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{5n+1}=\frac{3}{5}.$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi n}{6n+1}=\frac{1}{2}.$

Завдання 2.

Користуючись властивостями границі числової послідовності, знайти границі:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n^2-1}.$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2}.$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+n+1}.$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^n}{n}.$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n-1}{2n^2+n-1}.$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}.$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{2n+1}.$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}.$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}.$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

Завдання 3. Користуючись означенням границі числової послідовності, довести, що:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$

Зразок розв'язання.

Виберемо довільне $\varepsilon>0$ і покажемо, що для нього можна визначити таке натуральне число N, що для всіх номерів $n>N$ буде виконуватися нерівність $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$. Отримуємо: $\left|\frac{1}{n+1}\right|<\varepsilon$, $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$, звідки $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$. Взявши $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$, будемо мати, що для $n>N$ буде $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+1}=2.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}=1.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=\frac{1}{2}.$

Завдання 4.

Довести, що $\{x_n\}$ *є нескінченно малою послідовністю, вказавши для кожного* $\varepsilon>0$ *натуральне число* $N=N(\varepsilon)$, *таке, що* $|x_n|<\varepsilon$ *при* $n>N$ *:*

1. $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$

Зразок розв'язання

Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Із нерівності $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| < \varepsilon$ слідує, що $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Прийнявши $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, будемо мати, що для $n > N$ буде $|x_n| < \varepsilon$.

2. $x_n = \frac{\cos n}{n}.$
3. $x_n = \log_n 2.$
4. $x_n = \frac{2n}{n^2 + 1}.$
5. $x_n = \frac{1}{n!}.$
6. $x_n = q^n$, де $0 < q < 1.$

Завдання 5.

Користуючись властивостями границі числової послідовності, знайти границі:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^2 + 2n - 3}{5n^2 - 4n + 4}.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3 + 5n^2 - n + 1}{5n^3 - 4n + 17}.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2 - 4n + 2}{n^3 - 4n + 1}.$

Завдання 6.

Знайти границі послідовностей:

1.(Зразок) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 2\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 2 \cdot 0 = 0.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}\right).$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right).$

ОЗНАЧЕННЯ. *Числова послідовність, в якій кожний наступний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, складеному з постійним для цієї послідовності числом, називається арифметичною прогресією.*

Прикладом арифметичної прогресії може бути послідовність

$$3, 7, 11, 15, 19, ...$$

В ній кожне наступне число дорівнює попередньому, складеному з постійним числом 4. Це число називається різницею прогресії. Позначивши перший член послідовності через a_1, а різницю через d, характеристичну властивість арифметичної прогресії запишемо у такому вигляді:

$$a_{n+1} = a_n + d. \quad (1)$$

Якщо $d > 0$, то прогресія буде зростаючою, а якщо $d < 0$, то спадаючою. Наприклад, при $d = -6$, прогресія 15, 9, 3, -3, -9, ... буде спадаючою.

Визначимо формулу загального члена арифметичної прогресії. Для визначення закономірності визначимо перші декілька членів послідовності. Виходячи з формули (1), визначеної означенням, можна скласти наступний ряд:

$$a_2 = a_1 + d.$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d.$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d.$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d.$$

. . . .

Елементарний порівняльний аналіз робить очевидним, що загальний член (формула) арифметичної прогресії має такий вигляд:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.} \quad (2)$$

Теорема. *Кожний член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному сусідніх з ним членів.*

Дійсно, якщо заданий член a_n де $n \geq 2$, то згідно формулі (1)

$$a_n = a_{n-1} + d \text{ і}$$

$$a_n = a_{n+1} + d.$$

Додавши ці дві рівності, маємо: $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, звідки

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (3)$$

З цього випливає наслідок:

Якщо один з членів числової послідовності дорівнює середньому арифметичному сусідніх з ним членів, то така числова послідовність є арифметична прогресія.

Це твердження, власне кажучи, є теоремою, оберненою до сформульованої.

Сума членів арифметичної прогресії.

Розповідають, що видатний німецький математик Карл Гаусс, навчаючись ще у школі, на завдання вчителя знайти суму усіх чисел від 1 до 100, за хвилину дав відповідь: 5050. На запитання, як він обчислив так швидко, К. Гаусс пояснив: з чисел заданого числового ряду утворив суму

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ...+ 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$. Потім доданки згрупував наступним чином:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (48 + 53) + (49 + 52) + (50 +51) =$$

$$= \underbrace{101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101 = 101\cdot 50}_{50 \text{ разів}} = 5050$$

Використаємо цю ідею для розв'язання нашої задачі.

<u>Лема.</u> *Сума будь-яких двох членів арифметичної прогресії, рівновіддалених від кінців послідовності дорівнює сумі крайніх членів.*

Доведення. Нехай задана скінчена арифметична прогресія

$$a_1, a_2, a_3, \dots , a_{n-2} , a_{n-1}, a_n .$$

Виберемо будь-яку пару її членів, рівновіддалених від кінців. Нехай це буде a_k зліва і йому відповідний a_{n-k+1} з правої сторони. Тоді

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 +(k - 1) d + a_1 +(n - k +1 - 1) d = 2a_1 +k d - d + nd - k d =$$

$$= 2a_1 + (n - 1)d.$$

Тепер обчислимо суму крайніх членів:

$$a_1 + [a_1 + (n - 1)d] = 2 a_1 + (n - 1)d.$$

Порівняння отриманих результатів свідчить про вірність сформульованого твердження.

Використовуючи доведену лему, неважко вивести формулу суми членів арифметичної прогресії. Для цього запишемо суму членів арифметичної прогресії двома способами:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...+ a_{n-2} + a_{n-1} + a_n ,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ...+ a_3 + a_2 + a_1.$$

Додавши ці дві рівності, отримаємо суму:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Згідно леми кожна сума в дужках дорівнює сумі $a_1 + a_n$ і таких сум, як бачимо з індексів членів прогресії, буде n. Тобто маємо рівність:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ разів}}$$

Тоді отримана рівність приймає вигляд: $2S_n = (a_1 + a_n)\cdot n$, звідки

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}.} \qquad (4)$$

Це і є формула суми членів арифметичної прогресії.

Практична робота

<u>Тема.</u> Арифметична прогресія.

Мета: Сформувати у студентів практичне уявлення про арифметичну прогресію. Виробити уміння розв’язувати практичні завдання з послідовностей виду арифметичної прогресії.

1. Знайдіть 10-й, 23-й і n-й члени арифметичної прогресії 2,3; 1. . .

2. Знайдіть перший член арифметичної прогресії, якщо: $c_5 = 27, c_{27} = 60.$

3. Чи є арифметичною прогресією послідовність $\{a_n\}$, задана формулою: $a_n = n^2 - 5.$

4. Починаючи з якого номера n всі члени заданої арифметичної прогресії $\{a_n\}$ будуть менше заданого числа A? $a_n = 3\sqrt{3} - n\sqrt{3}, A = -7.$

5. Починаючи з якого номера n всі члени заданої арифметичної прогресії $\{a_n\}$ будуть більше заданого числа A? $a_n = 7n - 121, A = \sqrt{3}.$

6. Знайдіть суму п'ятдесяти, ста, n перших членів послідовності $\{x_n\}$, якщо: $x_n = 4n + 2.$

7. Знайдіть суму усіх натуральних чисел, які кратні 7 і не більше за 130.

8. Знайдіть ті значення x, при яких числа $x-4, \sqrt{x-3}, x-6$ утворюють скінченну арифметичну прогресію.

Практичні завдання до теми для самостійного опрацювання

1. Послідовність $\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Знайдіть a_{12} і S_{16}, якщо $a_1 = -13$ і $a_{12} = -12{,}3$.

Послідовність $\{a_n\}$ – арифметична прогресія. Знайдіть a_{25} і S_{10}, якщо $a_1 = 18$ і $a_{12} = 17{,}4$.

Послідовність $\{c_n\}$ – арифметична прогресія. Знайдіть c_1 і S_{10}, якщо $c_{15} = 150$ і $c_4 = 117$.

Послідовність $\{c_n\}$ – арифметична прогресія. Знайдіть c_1 і S_8, якщо $c_{17} = 102$ і $c_4 = 86$.

Знайти різницю і п’ятий член арифметичної прогресії, якщо відомо, що її перший член дорівнює (–16), а дев'ятий член дорівнює (–232).

Знайти різницю і четвертий член арифметичної прогресії, якщо відомо, що перший і восьмий її члени дорівнюють відповідно (–12) і (–236).

Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії $\{c_n\}$, якщо $c_5 = 8$ і $c_2 = 5$.

Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії $\{c_n\}$, якщо $c_2 = 5$ і $c_4 = 11$.

Чи містить арифметична прогресія $\{x_n\}$ числа 155, 156, якщо $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Знайти чотирнадцятий член.

Чи містить арифметична прогресія $\{x_n\}$ числа 297, 295, якщо $x_2 = 2$, $x_3 = 7$. Знайти десятий член.

2. Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії $\{c_n\}$, якщо $c_{16} = -7$ і $c_{26} = 55$. Знайдіть номер члена, рівного 66,8.

Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії $\{c_n\}$, якщо $c_{16} = 3$ і $c_{26} = -55$. Чи є число 117,8 членом цієї прогресії?

Обчислити суму дев'яти перших членів арифметичної прогресії $\{b_n\}$, якщо $b_3 = -5$, $b_5 = 7$.

Обчислити суму дев'яти перших членів арифметичної прогресії $\{b_n\}$, якщо $b_3 = -7$, $b_6 = -5$.

Арифметична прогресія задана формулою $a_n = 3n + 2$. Знайти суму п'ятнадцяти перших членів цієї прогресії.

Арифметична прогресія задана формулою $a_n = 4n - 1$. Знайти суму десяти перших членів цієї прогресії.

Знайти суму десяти перших членів арифметичної прогресії, якщо восьмий її член дорівнює 56, а різниця 3.

Знайти суму восьми перших членів арифметичної прогресії, якщо десятий її член дорівнює 10, а різниця 4.

В арифметичній прогресії $\{x_n\}$ другий її член дорівнює 8,4, а четвертий член дорівнює 7,8. Починаючи з якого номера виконується умова $x_n < 0$?

В арифметичній прогресії $\{x_n\}$ третій і п'ятий члени відповідно рівні 6,9 і 6,1. Починаючи з якого номера виконується умова $x_n > 0$?

Геометрична прогресія

Геометричною прогресією називається така числова послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на постійне для даної послідовності число, відмінне від нуля.

Це постійне число називається *знаменником прогресії* і позначається q.

Прикладом такої прогресії може бути така послідовність:

2, 8, 32, 128, 256, ...

Перший член у цій прогресії $a_1 = 2$, а знаменник $q = 4$.

або ж $81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ ($a_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$),

або $\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, \ldots$ ($a_1 = \frac{1}{5}$, $q = -2$).

Виходячи з означення, характеристичну властивість геометричної прогресії запишемо у такому вигляді:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \qquad (1)$$

Геометрична прогресія називається *зростаючою*, якщо $|q| > 1$, а *спадаючою*, якщо $|q| < 1$. Так, з наведених вище прикладів, перша і третя прогресії є

зростаючі, а друга – спадаюча. Виходячи з формули (1), визначеної означенням, можна скласти наступний ряд:

$$a_2 = a_1 \cdot q.$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2.$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 .$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^4.$$

. . . .

Елементарний порівняльний аналіз робить очевидним, що *загальний член* (формула) геометричної прогресії має такий вигляд:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \qquad (2)$$

Теорема. *Кожний член геометричної прогресії з додатними членами*

$$a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_{n-2} , a_{n-1} , a_n , a_{n+1} \dots ,$$

починаючи з другого, дорівнює середньому геометричному сусідніх з ним членів.

Інакше кажучи, при $n \geq 2$ $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

Дійсно, при $n \geq 2$ $a_n = a_{n-1} \cdot q$ і з другого боку $a_n = \dfrac{a_{n+1}}{q}$.

Перемноживши їх, отримаємо, що $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, звідки $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$ (3).

Наступним ключовим питанням є сума членів геометричної прогресії.

Сума членів геометричної прогресії.

Визначимо суму n членів геометричної прогресії

$$a_1, \quad a_1 \cdot q, \quad a_1 \cdot q^2, \quad a_1 \cdot q^3, \dots, a_1 \cdot q^{n-1}, \; a_1 \cdot q^n.$$

Утворимо суму з $n - 1$ члена прогресії в якій $q \neq 1$

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на q. Отримаємо наступну рівність:

$$q \cdot S_n = a_1\, q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n$$

Віднімемо від першої суми другу, отримаємо:

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot q^n.$$

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо $S_n(1 - q) = a_1\, (1 - q^n)$

Звідси $$\boxed{S_n = \frac{a_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}} \qquad (4)$$

Ця формула стосується суми n членів геометричної прогресії. Але ми відзначали, що числові послідовності можуть бути необмеженими. Цікавість в даному випадку викликають обмежені послідовності з нескінченною кількістю членів. Одним з таких видів числової послідовності є нескінченно спадаюча геометрична прогресія.

Згідно теорії границь,

1) якщо числова послідовність обмежена, то вона має границю;

2) якщо числова послідовність має границю, то вона має і суму.

З цих двох положень випливає, що якщо геометрична прогресія нескінченно спадаюча і обмежена, то вона має суму.

Визначимо формулу цієї суми.

Нехай задано нескінченно спадаючу прогресію

$$a_1, \quad a_1\cdot q, \quad a_1\cdot q^2, \quad a_1\cdot q^3, \ldots, \quad a_1\cdot q^n \ldots$$

Утворимо її суму $S = a_1 + a_1\cdot q + a_1\cdot q^2 + a_1\cdot q^3 + \ldots + a_1\cdot q^n + \ldots$

Оскільки ця послідовність має границю, то визначимо її суму як границю суми членів послідовності.

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + a_1\cdot q + a_1\cdot q^2 + a_1\cdot q^3 + \ldots + a_1\cdot q^n + \ldots)$, тобто

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} (1 - q^n) = \frac{a_1}{1-q} (\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} q^n) = \frac{a_1}{1-q} .$$

Отже, сума членів нескінченно спадаючої геометричної прогресії обчислюється за формулою:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}} \qquad (5)$$

Практична робота

Тема. Геометрична прогресія.

Мета: Сформувати у студентів практичні уміння розв'язання завдань на послідовності виду геометричної прогресії. Закріпити теоретичні знання з даного матеріалу.

Тренувальні вправи

Послідовність $\{c_n\}$ *– геометрична прогресія.*

1. *Знайти* x_7, якщо $x_1 = 16$ і $q = \frac{1}{2}$.

2. *Знайти* q, якщо $x_3 = -162,\ x_5 = -18$.

3. *Знайдіть шостий, сьомий і 9-й члени геометричної прогресії, якщо*

$c_1 = 2, \quad q = -5.$

4. *Сума перших трьох членів геометричної прогресії дорівнює 9, а сума наступних трьох членів цієї прогресії дорівнює (–72). Знайдіть восьмий член цієї прогресії.* $(-384.)$

5. *Знайдіть, чому дорівнює сьомий член геометричної прогресії, якщо п'ятий її член більше третього на 8, а дев'ятий більше третього на 728.* $(81.)$

6. *При якому цілому значенні* x *послідовність* x, $x+2$, $5x-2$ *є геометричною прогресією?* $(2.)$

7. *При якому цілому значенні* x *послідовність* $-x$, $x+1$, $x-5$ *є геометричною прогресією?* $(1.)$

Знайдіть суму перших п'яти членів геометричної прогресії, в якої:

8. $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$. $(15{,}5.)$

9. $b_1 = 500$, $q = \frac{1}{5}$. $(624{,}8.)$

Практична робота

Тема. Нескінченні прогресії.

Мета: Виробити у студентів уміння розв'язувати завдання на нескінченні прогресії.

Знайти суму нескінченної геометричної прогресії:

1. $3\sqrt{5}$, 3, $\frac{3\sqrt{5}}{5}, \ldots$

2. 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}, \ldots$

3. $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2} \ldots$

Знайти суму, доданки якої є членами нескінченної геометричної прогресії:

4. $a - a^4 + a^7 - a^{10} + \ldots$

Записати у вигляді звичайного дробу число:

5. $0,(5)$.

6. $2{,}01(06)$.

7. $0{,}00(1)$.

8. *Знайти суму нескінченно спадної геометричної прогресії* $\{b_n\}$, *якщо* $b_2 - b_4 = 3$, .

Контрольна робота

Варіант І.

1. Обчислити:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+n-1}{n^2+5n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{7n^2-6n-1}$$

2. Три числа, які утворюють арифметичну прогресію, дають у сумі 15. Якщо до них додати відповідно числа 1, 4, 19, то отримаємо три числа, які утворюють геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.

Відповідь: (2,5,8 або 26,5,–16.)

3. Сума трьох чисел, які є послідовними членами арифметичної прогресії, дорівнює 21. Якщо друге число зменшити на 1, а третє збільшити на 1, то отримаємо три числа, які утворюють геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.

Відповідь: (3,7,11 або 12,7,2.)

Послідовність $\{x_n\}$ *– геометрична прогресія.*

4. *Знайти* x_7, якщо $x_1=-\frac{2}{9}$, $x_3=-2$.

5. При якому цілому значенні x послідовність $-x,\ x+1,\ x-5$ є геометричною прогресією?

Знайти суму перших п'яти членів геометричної прогресії, в якої:

6. $b_1=500$, $q=\frac{1}{5}$.

7. *Знайдіть суму членів нескінченно спадаючої геометричної прогресії:*

2,032323232...

8. Два приятелі поклали до банку по 10000 грн кожний, причому перший поклав гроші на вклад із щоквартальним начисленням 10%, а другий – із щорічним начисленням 45%. Через рік приятелі отримали гроші разом із відсотками. Хто отримав більший прибуток?

Варіант ІІ.

1. Обчислити: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n-6}{4n^2+7n-2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n^2-1}$.

2. За даними першими членами послідовності підібрати одну з формул загального члена: $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{2},\frac{5}{2\sqrt{2}},\frac{7}{4},\frac{9}{4\sqrt{2}},...$

3. Користуючись означенням границі числової послідовності, довести рівність: $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{4n-5}=\frac{1}{2}$.

4. Знайти перший член арифметичної прогресії, якщо:

$x_{30}=128, d=4.\ (x_1=128-29\cdot 4=12.)$

$x_{45}=-208, d=-7.\ (100.)$

5. *Послідовність* $\{x_n\}$ *– геометрична прогресія. Знайдіть* x_6, якщо

$x_1=125$ і $q=0{,}2.$

6. *Знайти шостий, сьомий і* n *-й члени геометричної прогресії:*

$b_5=17\frac{1}{2},\ q=-2\frac{1}{2}.$

7. *Знайти суму членів нескінченно спадаючої геометричної прогресії, де*

$a_1 = 9,\quad q = 0{,}5$

8. М’яч, падаючи з висоти 8 м, підскакує на половину свого шляху. Який шлях пролетить м’яч, доки зупиниться?

Питання для самоконтролю.

1. Що таке числова послідовність?
2. Способи завдання числової послідовності.
3. Що таке загальний член послідовності?
4. Яка послідовність називається монотонно зростаючою?
5. Яка послідовність називається монотонно спадаючою?
6. Яка послідовність називається обмеженою?
7. Що таке границя числової послідовності?
8. Чому дорівнює $\lim_{n\to\infty}(k\cdot a_n)$?
9. Чому дорівнює $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$?
10. Чому дорівнює $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$?
11. Яка послідовність називається арифметичною прогресією?
12. Як визначається загальний член арифметичної прогресії?
13. Як визначається сума n членів арифметичної прогресії?
14. Яка послідовність називається геометричною прогресією?
15. Як визначається загальний член геометричної прогресії?

16. Як визначається сума n членів геометричної прогресії?

17. Яка прогресія називається нескінченно спадаючою?

18. Як визначається сума членів нескінченно спадаючої геометричної прогресії?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Колмогоров А. Н., Абрамов А. Н. и др. Алгебра и начала анализа. Учеб. пособие для 9–11 кл. М. Просвещение, 1988. –336 с.

2. Фіхтенгольц Г. М. Дифференциальное и интегральное исчисление**.** т.1 –М.: Наука, 1970. – 607 с**.**

3. Шкіль М.І**.** Математичний аналіз ч.1.–К.: Вища школа.

4. Математика. Шкіль М. І., Дюженкова Л.І**.** та ін./ за ред Шкіля М.І. – К.: Освіта, 2004. – 288 с.

5. Шкіль М.І., Колесник Т. В., Хмара Т. М. Алгебра і початок аналізу. Підручник для 10 кл. –К.: Освіта, 2000. –320 с.

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

1. Історична довідка

У процесі історичного розвитку кожний народ зіштовхувався з необхідністю рахувати і підрахунки фіксувати. Ця необхідність була об'єктивною і зумовлена соціальними та життєвими потребами. Але у зв'язку з роз'єднаністю народів, кожний з них утворював свою систему. Так світ пізнав різні системи числення, найбільш відомі з яких римська, єгипетська, грецька, вавилонська, арабська, майя та ін.

Під *системою числення* розуміється сукупність знаків і правил, за допомогою яких можна записати і прочитати довільне ціле невід'ємне число і яка відповідає таким умовам:

а) будь-яке число однозначно визначається в заданій системі;

б) числа заданої системи можна між собою порівнювати;

в) алгоритми операцій над числами в заданій системі взаємопов'язані між собою.

Усі наявні системи можна поділити на дві групи: позиційні і непозиційні.

Непозиційні – це такі, у яких значення цифри не залежить від місця, яке вона займає в запису числа. У непозиційній системі використовуються декілька знаків (цифр), які позначають певні числа і які мають відповідне позначення. За допомогою них і записується будь-яке число. Такі знаки-числа називаються *вузловими.*

Представником такої системи є, наприклад, римська система. Її основу складають знаки I, V, X, L, C, D, M, які є вузловими і які позначають відповідно числа 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Ця система була пов'язана з найбільш уживаним "інструментом" – рукою (I, V, X), з першими буквами латинських слів (centum – C, mille – 1000). Щоб записати число, римляни розбивали число на тисячі, півтисячі, сотні, півсотні, десятки, п'ятірки, одиниці. Наприклад, число 2868 записувалося

MMDCCCLXVIII. До того ж у цій системі запис чисел спирався не тільки на символічні позначки, а й на дії між числами. Наприклад, якщо символ числа меншого значення ставився перед символом числа більшого значення, то записуване число утворювалося через віднімання попереднього від наступного, наприклад, XL (40), тобто L – X (50 – 10). А якщо символ числа меншого значення писався після символу числа більшого значення, то записуване число утворювалося через додавання попереднього до наступного, наприклад, LX (60), тобто L + X (50 + 10). Аналогічно і числа IV, VI, VII, … IX, XI і т.д. Але запис чисел у цій системі дуже громіздкий і створює значні труднощі при виконанні навіть простих арифметичних дій. З ускладненням математичних операцій потрібна була проста і зручна система числення. Тому римська система в певний період стала гальмувати розвиток математики і від неї наука відмовилась, хоча у деяких випадках ми ще використовуємо римські символи (наприклад, при нумерації розділів книги, століть тощо).

Непозиційною була і система числення у древніх греків. Числа від 1 до 9 вони позначали першими буквами алфавіту (α, β, γ, δ, …,θ). Для чисел 10, 20, 30, …, 80, 90 використовувалися наступні дев’ять літер (ι, κ, λ, μ, …, ς), а для чисел 100, 200, 300, … 900 – наступні дев’ять літер (ρ, ς, σ, …, ω).[1/] Так, число 423 записувалося як $\overline{\tau\kappa\gamma}$. Риска зверху ставилася, щоб відокремити число від слова. Ця система теж була дуже незручною. Наприклад, при порівнянні чисел неможливо побачити, що σ (300) у 10 разів більше за λ і у 100 разів більша за γ. Важко було і виконувати арифметичні дії. Наприклад, $\bar{\eta}$(7) + $\bar{\varepsilon}$(5) = $\overline{\iota\beta}$(12). Були й інші недоліки, які гальмували розвиток обчислень і математики в цілому.

Разом із грецькими письменами та православною культурою така ж система перейшла і в нумерацію Русі, яка зберігалася майже до кінця XVII століття, хоч деякими деталями і відрізнялася від неї. Водночас уся Західна Європа давно вже користувалася більш зручною, так званою арабською десятковою системою. Причиною цього стало 240-річне татаро-

---

[1/] Зазначимо, що давньогрецький алфавіт відрізнявся від сучасного кількістю літер, їх було 27, нині ж – 25.

монгольське панування. Після його розвалу вже наприкінці XVI століття на Русі з'являються перші друковані книги. Запис чисел у них ще здійснювався в літерній (слов'янській) системі.

З розвитком стосунків між різними країнами, а також у зв'язку з бурхливим розвитком математичної науки виникла потреба заміни непозиційних систем більш зручними й уніфікованими системами. У цих пошуках математика звернулася до позиційних систем. Суть позиційної системи в тому, що один і той же знак (символ) може позначати різні числа залежно від місця цього знака (позиції) у запису числа. Місце, яке займає цифра в запису числа, називається розрядом. У позиційній системі кількість знаків обмежується певною кількістю. Порозрядний принцип запису числа означає, що якщо система базується на n знаках (цифрах), кожний з яких визначає певну кількість числових одиниць, то n одиниць певного розряду становлять одну одиницю наступного (вищого) розряду. Число n у цьому разі, називається *основою системи числення.*

Першою позиційною системою з відомих науці була шістдесяткова система, яку використовували в древньому Вавилоні. Вавилоняни використовували лише два клинописних знаки, один з яких позначав числа 1 і 60, а другий – 10 і 600. При запису чисел від 1 до 60 знаки для 1 до 10 повторювалися стільки разів, скільки в цьому числі одиниць та десятків, а числа кратні 60 від 60 до $59 \cdot 60$ позначали тими ж значками, які вказували лише множник біля 60.

Залишки шістдесяткової системи збереглися донині: 1 хвилина – 60 секунд, 1 година – 60 хвилин, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$ (для кутів).

Збереглися на сьогодні і залишки дванадцяткової системи числення, яка використовувалася певний час у стародавньому Єгипті: 12 місяців у році, $2 \cdot 12$ годин на добу. Число 12 називалося “дюжиною”.

Окрім основних видів (позиційної і непозиційної) систем, існує і так звана мішана система, яка містить у собі елементи декількох систем. Прикладом такої є система вимірювання часу. Століття – десяткова система; рік, доба – дванадцяткова; година, хвилина – шістдесяткова; долі секунди – десяткова.

Але найбільшого поширення здобула позиційна десяткова система числення. Своїм корінням вона поринає в далеку давнину. Ще видатний давньогрецький учений Архімед у III столітті до нашої ери розробив систему числення, яка ґрунтується на числі 10. Вона давала можливість за

допомогою невеликої кількості знаків записувати будь-яке велике число.

У сучасному вигляді десяткова система склалася приблизно в VI столітті нашої ери в Індії. У цей час в Індії панували араби, тому цю десяткову систему часто називають арабською. Значним досягненням індійської математичної думки було введення спеціального знака для позначення нуля. Це внесло кардинальні зміни в запис числа і десяткова система остаточно сформувалася в такому вигляді, якою ми її знаємо сьогодні.

Важливим кроком у розвитку російської математичної науки було видання в Росії книжки Леонтія Магницького “Арифметика, сиречь наука числительная”. Вона була видана в 1703 році слов’янською мовою, але розрахунки в ній виконувалися вже в позиційній десятковій системі. Тривалий час ця книга була настільною книгою всіх освічених людей Росії і стала причиною швидкого переходу математики в Росії на індійську десяткову систему числення.

На сьогодні, у зв’язку з розвитком технічних засобів обчислень, виникли й інші штучні системи числення. Однією з найуживаніших із них є двійкова система. Вона складається лише з двох цифр 0 і 1. Це зручно не лише з позицій економності (лише два знаки), але й тому, що відповідає технічним вимогам електронної обчислювальної техніки, яка живиться електричним струмом (струм іде – 1, струм не йде – 0). Теоретично в деяких розрахунках разом із двійковою системою використовується і вісімкова система, яка базується на 8 цифрах від 0 до 7. Взагалі ж основою позиційної системи числення може бути будь-яке число d. Знаки від 0 до числа d називаються цифрами заданої числової системи.

2. Алгоритми операцій із числами в різних числових системах

Одним із важливіших питань будь-якої системи числення є питання запису чисел. Розкриття його важливе не тільки з погляду запису числа як такого, але й з позицій порівняння чисел (причому як писемного, так і зорового), з позицій технології виконання дій тощо.

Означення 1. ***Запис виду*** $a_n \cdot d^n + a_{n-1} \cdot d^{n-1} + \dots + a_2 \cdot d^2 + a_1 \cdot d + a_o$ ***будемо називати многочленом, розташованим за спадними степенями числа d.***

Теорема. ***Будь-яке натуральне число N можна представити у вигляді многочлена, розташованого за спадними степенями основи системи числення, коефіцієнтами якого є однозначні числа або нулі.***

Доведення. Нехай задані натуральне число N і основа системи числення число d. Розділимо число N на d з остачею. Отримаємо $N = q_1d + r_1$ (**1**). Якщо $q_1<d$, то представлення закінчене. Якщо ж $q_1 \geq d$, то знов поділимо q_1 на d з остачею. Одержимо $q_1 = q_2d + r_2$, і підставимо у (**1**), отримаємо $N = (q_2d + r_2)d + r_1 = q_2d^2 + r_2d + r_1$ (**2**). Якщо $q_2< d$, то представлення закінчене. Якщо ж $q_1 \geq d$, то знов поділимо q_2 на d з остачею. Одержимо $q_2 = q_3d + r_3$ і підставимо у (**2**). Одержимо:

$T = (q_3d + r_3)d^2 + r_2d + r_1= q_3d^3+ r_3d^2 + r_2d + r_1$. І так доти, пір, поки q_n не стане менше за d. А це рано чи пізно станеться, тому що з кожним кроком число q_i зменшується, а, як відомо, натуральний ряд чисел обмежений знизу числом 1. У результаті будемо мати:

$N = q_nd^n + r_n d^{n-1} + r_{n-1} d^{n-2} + \dots + r_3d^2 + r_2d + r_1$ (**3**).

Числа q_n і r_i будуть однозначними, тому що згідно нашій умові $q_n<d$, а згідно з умовами ділення з остачею, остача менша за дільник, тобто $r_i < d$.

Виходячи з теореми, натуральне число в десятковій системі числення буде мати такий вигляд: $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots +a_2 \cdot 10^2 + +a_1 \cdot 10 + a_o;$

$a_i < 10$, $i = 1,2,...$ Але такий запис натуральних чисел дуже громіздкий. Спростити його дозволяє позиційність системи числення. Завдяки їй множник 10^k замінюється місцем у числі (позицією), яке посідає доданок $a_k \cdot 10^k$, замість доданка записується тільки коефіцієнт a_k. Місце, яке він посідає в числі, називається розрядом. Отже, натуральне число N записується у вигляді послідовно записаних коефіцієнтів $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_o$, що значно спрощує запис числа і виконання дій.

Доведена теорема до того ж дає ключ і до переведення чисел з одної системи числення в іншу. Наприклад, як перевести число 95 з десяткової системи у двійкову? Згідно з теоремою, виконаємо ділення числа 95 на 2 (основа системи числення є число 2). Одержимо: $93 = 46 \cdot 2 + 1$. Наступний крок: ділимо 46 на 2, одержимо: $46 = 23 \cdot 2 + 0$. Аналогічно далі: $23 = 11 \cdot 2 + 1$, $11 = 5 \cdot 2 + 1$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$, $2 = 1 \cdot 2 + 0$. Остання частка $q_n = 1$, остання остача $r_n = 0$, передостання остача $r_{n-1} = 1$, їй передує 1, перед нею 1, перед нею 0 і найперша остача– 1. Тоді натуральне число 93_{10} буде мати такий вигляд:

$$93_{10} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1,$$

або в спрощеній формі $93_{10} = 1011101_2$. Наведемо ще один приклад, у формі практичного виконання ділення „драбинкою”:

$\underline{116}\,|\,\underline{\quad 2}$

$\quad 0 \quad \underline{58}\,|\,\underline{\quad 2}$

$\qquad\quad 0 \quad \underline{29}\,|\,\underline{\; 2}$

$\qquad\qquad\quad 1 \quad \underline{14}\,|\,\underline{\; 2}$

$\qquad\qquad\qquad\quad 0 \quad \underline{\; 7 \;}\,|\,\underline{\; 2}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1 \quad \underline{\; 3 \;}\,|\,\underline{\; 2}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1 \quad 1$ тобто $116_{(10)} = 1110100_{(2)}$

Аналогічно переводяться числа в трійкову, п’ятіркову, вісімкову або будь-яку іншу систему числення. Щоб перевести число навпаки з будь-якої системи до десяткової, скористаємося тією ж теоремою. Наприклад, щоб перевести число 111000101 з двійкової системи до десяткової, запишемо його у вигляді многочлена $1{\cdot}2^8 + 1{\cdot}2^7 + 1{\cdot}2^6 + 0{\cdot}2^5 + 0{\cdot}2^4 + 0{\cdot}2^3 + 1{\cdot}2^2 + 0{\cdot}2 + 1 = 256 + 128 + 64 + 4 + 1 = 453$, тобто $111000101_2 = 453_{10}$

Покажемо, який вигляд мають числа деяких систем числення відносно десяткової? Вигляд цих чисел залежить від кількості використовуваних знаків.

Десяткова	двійкова	трійкова	вісімкова
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	10	3
4	100	11	4
5	101	12	5
6	110	20	6
7	111	21	7
8	1000	22	10
9	1001	100	11
10	1010	101	12
11...	1011 …	102…	13 …

Однією із складностей при переведенні чисел з будь-якої системи в десяткову є встановлення степеня n у першому доданку $a_n{\cdot}10^n$. Найвищий степінь многочлена визначається за формулою $n = k - 1$, де k – кількість цифр у числі. Наприклад, у числі $1100011_{(2)}$ 7 розрядних знаків. Тому найвищий степінь n буде 6, тобто

$$1100011_{(2)} = 1{\cdot}2^6 + 1{\cdot}2^5 + \ldots + 1 = \ldots$$

Це зумовлено тим, що найменший степінь числа 2 тут є нуль.

У практичній обчислювальній роботі одне з головних місць посідають дії з числами. Смисл арифметичних операцій ми розглянули раніше. Який же механізм цих операцій?

Розглянемо його в загальному вигляді з подальшою конкретизацією на прикладі.

Додавання

Нехай задані два натуральних числа з основою системи числення d: $\mathbf{a} = n_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$ і $\mathbf{b} = m_p \cdot d^p + m_{p-1} \cdot d^{p-1} + \ldots + m_1 \cdot d + m_0$. Тут можливі два випадки: коли $p = k$ і коли $p \neq k$. Наперед зазначимо, що випадок, коли $p \neq k$, легко ототожнюється з випадком, коли $p = k$. У цьому разі треба додати до числа з меншою кількістю одночленів одночлени, яких не вистачає з коефіцієнтами 0 зі степенями, яких у ньому немає, але є в числі з більшою кількістю одночленів. Тому будемо розглядати тільки випадок, коли $p = k$, тобто $\mathbf{b} = m_k \cdot d^k + m_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + \quad + m_1 \cdot d + m_0$. У ньому в так само можливі варіанти: 1) $n_i + m_i < d$ і 2) $n_i + m_i \geq d$.

Розглянемо перший випадок.

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = n_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0 + m_k \cdot d^k + m_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + m_1 \cdot d + +m_0 = (n_k + m_k) \cdot d^k + (n_{k-1} + m_{k-1}) \cdot d^{k-1} + \ldots + (n_1 + m_1) \cdot d + (n_0 + m_0)$. Тобто, для того щоб додати два натуральних числа, треба додати числа їхніх відповідних розрядів. У десятковій системі це буде виглядати так: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (n_k + m_k) \cdot 10^k + (n_{k-1} + m_{k-1}) \cdot 10^{k-1} + \ldots + (n_1 + m_1) \cdot 10 + (n_0 + m_0)$.

Наприклад, 345 + 7253. Число 345 має на один розряд менше, ніж число 7253. Тому, щоб зрівняти кількість, розрядів запишемо його як 0345. Подамо це число у вигляді многочлена, тобто $0345 = 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$. Відповідно число 7253 подамо як $7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3$. Згідно з отриманим алгоритмом сума $0345 + 7253 = =(0 + 7) \cdot 10^3 + (3 + 2) \cdot 10^2 + (4 + 5) \cdot 10 + (5 + 3) = 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 8 = 7598$.

Дещо складніше виглядає додавання в другому варіанті, тобто коли $n_i + m_i \geq d$. В цьому разі, виконавши аналогічні перетворення, отримаємо: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (n_k + m_k) \cdot d^k + (n_{k-1} + m_{k-1}) \cdot d^{k-1} + d^{k-1} + r \cdot d^{k-2} + \ldots + (n_0 + m_0)$.

Замінивши суми $n_i + m_i$ на r_i, отримаємо: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = r_k\cdot d^k + r_{k-1}\cdot d^{k-1} + d^{k-1} + r_{k-2}\cdot d^{k-2} + \ldots + r_1 d + r_0 = r_k\cdot d^k + (r_{k-1}\cdot d^{k-1} + d^{k-1}) + r_{k-2}\cdot d^{k-2} + r_1 d + r_0 = r_k\cdot d^k + (r_{k-1} + 1)\cdot d^{k-1} + r_{k-2}\cdot d^{k-2} + \ldots + r_1 d + r_0$. Як бачимо, у результаті додавання у цьому варіанті коефіцієнт попереднього одночлена $n_{k-1} + m_{k-1} = r_{k-1}$ збільшився на 1, а коефіцієнт наступного одночлена r_{k-2} виявився як різниця $(n_{k-2} + m_{k-2}) - d$. Отже, якщо в процесі додавання двох чисел сума деяких розрядів виявляється більша за основу системи числення, то сума сусідніх розрядів більшого порядку збільшується на 1, а число, яке відповідає цій сумі буде дорівнювати різниці цієї суми й основи системи числення. Наприклад, нехай треба додати числа 7348 і 581 у десятковій системі числення. Сума їх буде

виглядати як $(7 + 0)\cdot 10^3 + (3 + 5)\cdot 10^2 + (4 + 8)\cdot 10 + \ldots + (8 + 1) = \ldots = 7\cdot 10^3 + 8\cdot 10^3 + 12\cdot 10 + 9$. Оскільки в розряді десятків сума розрядів склала число 12, що більше основи числення – числа 10, то коефіцієнт попереднього розряду (сотень) збільшуємо на 1, а коефіцієнт розряду десятків буде дорівнювати різниці між сумою розрядів – числа 12 і основою системи числення – числом 10, тобто $12 - 10 = 2$. Отже, отримане в результаті додавання число буде дорівнювати

$7\cdot 10^3 + 9\cdot 10^3 + 2\cdot 10 + 9$ або 7929.

Описаний механізм виконання операції додавання лежить і в основі одного з найбільш уживаних зручних способів додавання – додавання в стовпчик.

Аналогічно виконується додавання і в інших системах численнях. Але тут треба враховувати їхні особливості, для чого зручно мати перед очима невеличку табличку. Наприклад, для двійкової системи треба враховувати, що $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 10$, $1 + 1 + 1 = 11$, $1 + 1 + 1 + 1 = 100$ і т.д.

Наприклад, додамо числа 110010110 + 100111101.

$$\begin{array}{r} {}_{+}\,110010110 \\ \underline{100111101} \\ 1011010011 \end{array}$$

Аналогічно, виконуючи додавання, наприклад, у трійковій системі, треба знати, що $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 10$, $2 + 2 = 11$, $1 + 2 + 1 = 11$, $2 + 2 + 1 = 12$, $0 + 2 = 2$, ...

Віднімання

Нехай задані два натуральних числа $\boldsymbol{a} = n_k \prec d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$ і $\boldsymbol{b} = m_p \cdot d^p + m_{p-1} \cdot d^{p-1} + \ldots + m_1 \cdot d + m_0$. Відповідно до умови операції віднімання, різниця $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ можлива лише тоді, коли $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$. Але оскільки $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ є окремим випадком, зосередимося на випадку, коли $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$. Згідно з означенням, віднімання є дією, протилежною додаванню. Тому технологія виконання дії віднімання тісно пов'язана з технологією виконання дії додавання. У результаті аналогічних додаванню перетворень отримаємо такий вираз:

$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (n_k - m_k) \cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1}) \cdot d^{k-1} + (n_{k-2} - m_{k-2}) \cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 - m_1) \cdot d + (n_0 - m_0)$. Якщо $n_i \geq m_i$ для всіх i, то операція віднімання виконується просто: цифра кожного розряду числа $\boldsymbol{b}$ віднімається від відповідної цифри розряду числа $\boldsymbol{a}$ і різниця записується на відповідному місці результату.

Дещо складніше виконується ця дія, коли для якихось значень i $n_i < m_i$. У цьому разі зробимо так: нехай у різниці $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ $n_{k-2} < m_{k-2}$. Тоді маємо: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (n_k - m_k) \cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1}) \cdot d^{k-1} + (n_{k-2} - m_{k-2}) \cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 - m_1) \cdot d + (n_0 - m_0) = (n_k - m_k) \cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1}) \cdot d^{k-1} - d^{k-1} + d^{k-1} + (n_{k-2} - m_{k-2}) \cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 - m_1) \cdot d + (n_0 - m_0) = (n_k - m_k) \cdot d^k + [(n_{k-1} - m_{k-1}) \cdot d^{k-1} - d^{k-1}] + +[(n_{k-2} - m_{k-2}) \cdot d^{k-2} + d^{k-1}] + \ldots + (n_1 - m_1) \cdot d + (n_0 - m_0) = (n_k - m_k) \cdot d^k + +(n_{k-1} - m_{k-1} - 1) \cdot d^{k-1} + [(n_{k-2} - m_{k-2}) \cdot d^{k-2} + \ldots + d \cdot d^{k-2}] + \ldots + (n_1 - m_1) \cdot d + (n_0 - m_0) = (n_k - m_k) \cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1} - 1) \cdot d^{k-1} + \ldots + (d + n_{k-2} - m_{k-2}) \cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 - m_1) \cdot d + (n_0 - m_0)$. Оскільки ж $d > m_i$, будь-яка сума $d + n_i > m_i$. Тому різниця $d + n_i - m_i$ завжди існує, а оскільки $n_i < m_i$, то $d + n_i - m_i < d$, тобто отримане число вписується у нумерацію заданої системи числення.

Отже, щоб виконати віднімання в цьому разі, треба до n_i додати основу системи числення число d, відповідно зменшивши попереднєчисло n_{i+1} на одиницю. Якщо $n_{i+1} = 0$, то n_{i+2} треба зменшити на 1.

Наприклад, віднімемо в десятковій системі від числа 2748 число 583. Аналіз цих чисел показує, що у від'ємного числа 2748 розряд десятків менший за розряд десятків числа 583. Тоді, згідно з виведеним правилом віднімання, виконаємо так:

$2748 - 583 = (2 - 0)\cdot 10^3 + (7 - 5)\cdot 10^2 + (4 - 8)\cdot 10 + (8 - 3) = 2\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 +$

$+(4 - 8)\cdot 10 + 5 = 2\cdot 10^3 + (2 - 1)\cdot 10^2 + +(10 + 4 - 8)\cdot 10 + 5 = 2\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 +$

$+6\cdot 10 + 5 = 2165$. Віднімання в стовпчик виглядає так:

_ 2748
583
1165

Аналогічно виконується віднімання і в будь-якій системі числення. Наприклад, у двійковій. Нехай нам треба відняти 1100101110 – 10011010. Найбільш легко для розуміння проілюструвати це в стовпчик. Для цього треба знати, що 0 – 0 = 0, 1 – 0 = 1, 1 – 1 = 0, 10 – 1 = 1. 11 – 1 = 10, 100 – 1 = 11, 1000 – 1 = 111, 10000 – 1 = 1111.

_ 1100101110
10011010
1010010100

Інший приклад:

_ 110000111
1110111
100010000

Аналогічно і для трійкової системи. Тут теж треба знати, що 0 – 0 = 0; 1 – 0 = 1; 1 – 1 = 0; 2 – 1 = 1; 2 – 2 = 0; 10 – 1 = 2; 10 – 2 = 1; 11 – 2 = 2; 20 – 1 = 12; 20 – 2 = 11; 100 – 1 = 22; 100 – 2 = 21; 100 – 10 = 20. Це легко вивести з таблиці додавання, яку кожний може скласти сам.

Наведемо приклад. Нехай нам треба відняти в трійковій системі 221201 – 12012. Найбільш зрозуміло це робити в стовпчик.

_ 221201
12012
202112

Множення

Механізм виконання множення натуральних чисел дещо складніший, ніж додавання і віднімання, але він будується на тих же основах.

Розглянемо його.

За одним із означень, за яким множення розглядається в початкових класах, ця операція представляється як процес знаходження суми декількох однакових доданків, тобто $n + n + \ldots + n$ з m доданків і записується $n \cdot m$. Для спрощення добутки однозначних чисел зібрані в спеціальній таблиці (*таблиці множення*). Спираючись на неї, розглянемо множення багатозначних чисел.

Нехай задані два натуральних числа: $\boldsymbol{a} = n_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$

і $\boldsymbol{b} = m_p \cdot d^p + m_{p-1} \cdot d^{p-1} + \ldots + m_1 \cdot d + m_0$. Утворимо їх добуток $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (n_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0) \cdot (m_p \cdot d^p + m_{p-1} \cdot d^{p-1} + \ldots + m_1 \cdot d + m_0) =$$
$$= n_k \cdot d^k \cdot m_p \cdot d^p + n_{k-1} \cdot d^{k-1} \cdot m_p \cdot d^p + \ldots + n_1 \cdot d \cdot m_p \cdot d^p + n_0 \cdot m_p \cdot d^p + n_k \cdot d^k \cdot m_{p-1} \cdot d^{p-1} +$$
$$+ n_{k-1} \cdot d^{k-1} \cdot m_{p-1} \cdot d^{p-1} + \ldots + n_1 \cdot d \cdot m_{p-1} \cdot d^{p-1} + n_0 \cdot m_{p-1} \cdot d^{p-1} + \ldots + n_k \cdot d^k \cdot m_1 \cdot d +$$
$$+ n_{k-1} \cdot d^{k-1} \cdot m_1 \cdot d + \ldots + n_1 \cdot d \cdot m_1 \cdot d + n_0 \cdot m_1 \cdot d + n_k \cdot d^k \cdot m_0 + n_{k-1} \cdot d^{k-1} \cdot m_0 + \ldots + n_1 \cdot d \cdot m_0 +$$
$$+ n_0 \cdot m_0 = n_k \cdot m_p \cdot d^{k+p} + \ldots + n_{k-1} \cdot m_p \cdot d^{k+p-1} + \ldots + n_1 \cdot m_p \cdot d^{p+1} + n_0 \cdot m_p \cdot d^p + n_k \cdot m_{p-1} \cdot d^{p+k-1} +$$
$$+ \ldots + n_{k-1} \cdot m_{p-1} \cdot d^{p+k-2} + \ldots + n_1 \cdot m_{p-1} \cdot d^p + n_0 \cdot m_{p1} \cdot d^{p-1} + \ldots + n_k \cdot m_1 \cdot d^{k+1} + n_{k-1} \cdot m_1 \cdot d^k +$$
$$+ \ldots + n_1 \cdot m_1 \cdot d^2 + n_0 \cdot m_1 \cdot d + n_k \cdot m_0 \cdot d^k + n_{k-1} \cdot m_0 \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot m_0 \cdot d + n_0 \cdot m_0 =$$
$$= n_k \cdot m_p \cdot d^{k+p} + (n_{k-1} \cdot m + n_k \cdot m_{p-1}) \cdot d^{p+k-1} + (n_{k-1} \cdot m_{p-1} + n_k \cdot m_{p-2} + n_{k-2} \cdot m_p) \cdot d^{p+k-2} + \ldots +$$
$$+ (n_0 \cdot m_p + n_1 \cdot m_{p-1}) \cdot d^p + (n_k \cdot m_0 + n_{k-1} \cdot m_1) \cdot d^k + \ldots + (n_0 \cdot m_1 + n_1 \cdot m_0) \cdot d + n_0 \cdot m_0.$$

Утворений у результаті вказаних перетворень вираз і є алгоритмом операції множення. Розглянемо його на конкретному прикладі множення двох чисел у десятковій системі. Перемножимо числа 748 і 213. Для цього представимо їх у вигляді многочленів.

$748 = 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8$, $213 = 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 3$.

$$748 \cdot 213 = (7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8) \cdot (2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 3) = 14 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 21 \cdot 10^2 +$$
$$+ 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10 + 16 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 24.$$

Перетворивши двозначні коефіцієнти многочлена в однозначні по типу $14 = 1 \cdot 10 + 4$, отримаємо такий многочлен:

$1\cdot10^5 + 4\cdot10^4 + 7\cdot10^3 + 2\cdot10^3 +1\cdot10^2 + 8\cdot10^3 + 4\cdot10^2 + 1\cdot10^2 + 2\cdot10 + 1\cdot10^3 + \quad + 6\cdot10^2 + 8\cdot10 + 2\cdot10 + 4 = 1\cdot10^5 +4\cdot10^4 + (7+2+8+1)\cdot10^3 + (1+4+1+6)\cdot10^2 + +(2+8+2)\cdot10 + 4 = 1\cdot10^5 + 4\cdot10^4 +18\cdot10^3 + 12\cdot 10^2 +12\cdot10 + 4 = 1\cdot10^5 + 4\cdot10^4 + +1\cdot10^4 + 8\cdot10^3 + 1\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 1\cdot10^2 + 2\cdot10 + 4 = 1\cdot10^5 + 5\cdot10^4 + 9\cdot10^3 + +3\cdot10^2 + 2\cdot10 + 4 = 159324.$

Але такий метод множення надто вже громіздкий. Тому на практиці користуються більш зручною формою множення “в стовпчик”. Суть його в тому, що співмножники записуються один над одним і по черзі відбувається множення кожного розряду одного числа на розряди іншого. При цьому, при переході множення з одного розряду на інший, добуток зміщується на один розряд вліво, що відповідає збільшенню степеня основи *d* на одиницю. Попередній приклад у цьому разі буде мати такий вигляд:

$$\begin{array}{r} {}_{\times}748 \\ \underline{213} \\ 2244 \\ 748 \\ \underline{1496} \\ 159324 \end{array}$$

Зазначимо, що якщо якийсь співмножник закінчується числом 0, то множення на нього не виконується, бо буде в результаті нуль, тому множення відбувається незважаючи на нього, а в результаті він дописується в розряді одиниць.

Аналогічно виглядає множення і в інших системах числення. Наведемо приклад множення у двійковій системі чисел 10110110 і 1010111. Тут треба лише пам’ятати, що $0\cdot0 = 0$, $0\cdot1 = 0$, $1\cdot1 = 1$ та таблицю додавання.

$$\begin{array}{r}
\times 10110110\\
1010111\\
\hline
10110110\\
10110110\\
10110110\\
10110110\\
10110110\\
\hline
11110111011010
\end{array}$$

Ділення

Операція ділення базується на загальному означенні і видається на практиці найбільш складною. Розглянемо її в декілька етапів.

1. *Ділення однозначного числа на однозначне.* Нехай задані два числа ***a*** і ***b***, і $a = \underbrace{b+b+...b}_{q}+r$. Тобто $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}q + r$. Це означає, що число ***b*** можна відняти від числа ***a*** q разів і при цьому залишиться остача $r < \boldsymbol{b}$. Дія, за допомогою якої ми встановлюємо, скільки разів можна відняти число ***b*** від числа ***a***, тобто скільки разів число ***b*** міститься в числі ***a*** – і є операцією ділення. При цьому, якщо число $r = 0$, то говорять, що число ***a*** ділиться на число ***b*** цілком, якщо ж $r \neq 0$, то говорять, що число ***a*** ділиться на число ***b*** з остачею.

2. *Ділення багатозначного числа на однозначне.* Нехай задано два числа ***a*** і ***b***, де число ***b*** однозначне, тобто $1 \leq b \leq d$, де

$$\boldsymbol{a} = n_k \cdot d^{\,k} + n_{k-1} \cdot d^{\,k-1} + \quad n_{k-1} \cdot d^{\,k-2} + \ldots \; + n_1 \cdot d + n_0.$$

Розділимо число ***a*** на число ***b***, виходячи при цьому з властивості, "Щоб розділити суму на число, треба розділити кожний доданок на це число". Окрім цього, ми знаємо, що ділення є дія, зворотна до множення. Оскільки множення ми виконуємо, починаючи з меншого розряду до більшого, то ділення будемо виконувати навпаки. Тобто спочатку розділимо на ***b*** розряд $n_k \cdot d^k$. Тут можливі три випадки:

а) $n_k \geq b,$ б) $n_k < b$ і в) $n_k \vdots b.$

Розглянемо спочатку випадок а) $\underline{n_k \geq b.}$ Тоді розділимо n_k на b з остачею: $n_k = bq_k + r_k$, тоді $\boldsymbol{a} = (bq_k + r_k)\cdot d^k + n_{k-1}\cdot d^{k-1} + \ldots + n_1\cdot d + n_0 =$ $= bq_k\cdot d^k + r_k\cdot d^k + n_{k-1}\cdot d^{k-1} + n_{k-2}\cdot d^{k-2} + \ldots + n_1\cdot d + n_0$. (*) Об'єднаємо в групу $r_k\cdot d^k + n_{k-1}\cdot d^{k-1} = (r_k\cdot d + n_{k-1})\cdot d^{k-1}$. Оскільки $r < b < d$, то $r_k\cdot d + n_{k-1} > b$. Розділимо це число на b з остачею. Отримаємо $r_k\cdot d + n_{k-1} = b\cdot q_{k-1} + r_{k-1}$. Підставимо цей вираз у (*). Отримаємо:

$\boldsymbol{a} = bq_k\cdot d^k + (b\cdot q_{k-1} + r_{k-1})\cdot d^{k-1} + n_{k-2}\cdot d^{k-2} + \ldots + n_1\cdot d + n_0 = bq_k\cdot d^k + b\cdot q_{k-1}\cdot d^{k-1} +$ $+ r_{k-1}\cdot d^{k-1} + n_{k-2}\cdot d^{k-2} + \ldots + n_1\cdot d + n_0$. (**) Аналогічно об'єднаємо в групу наступну пару доданків $r_{k-1}\cdot d^{k-1} + n_{k-2}\cdot d^{k-2} = (r_{k-1}\cdot d + n_{k-2})\cdot d^{k-2}$. І знов на тих же умовах $r_{k-1}\cdot d + n_{k-2} > b$. Розділимо його на b з остачею. Отримаємо: $r_{k-1}\cdot d + n_{k-2} = b\cdot q_{k-2} + r_{k-2}$. Підставимо його у (**) і отримаємо:

$bq_k\cdot d^k + b\cdot q_{k-1}\cdot d^{k-1} + (r_{k-1}\cdot d + n_{k-2})\cdot d^{k-2} + \ldots + n_1\cdot d + n_0 = bq_k\cdot d^k + b\cdot q_{k-1}\cdot d^{k-1}$ $+ \ldots +$ $+ (b\cdot q_{k-2} + r_{k-2})\cdot d^{k-2} + \ldots + n_1\cdot d + n_0 = bq_k\cdot d^k + b\cdot q_{k-1}\cdot d^{k-1} + b\cdot q_{k-2}\cdot d^{k-2} + r_{k-2}\cdot d^{k-2}$ $+ \ldots + + n_1\cdot d + n_0$. І так до останнього розряду. В остаточному вигляді цей многочлен буде мати вигляд $\boldsymbol{a} = b\cdot q_k\cdot d^k + b\cdot q_{k-1}\cdot d^{k-1} + b\cdot q_{k-2}\cdot d^{k-2} + b\cdot q_{k-3}\cdot d^{k-2} + \ldots$ $+ b\cdot q_1\cdot d + bq_0 + r_0 = \boldsymbol{b}\cdot(q_k\cdot d^k + q_{k-1}\cdot d^{k-1} + q_{k-2}\cdot d^{k-2} + q_{k-3}\cdot d^{k-2} + \ldots + q_1\cdot d + q_0) + r_0$, де $\boldsymbol{a}$ – ділене, $\boldsymbol{b}$ – дільник, $q_k\cdot d^k + q_{k-1}\cdot d^{k-1} + q_{k-2}\cdot d^{k-2} + q_{k-3}\cdot d^{k-2} + \ldots + q_1\cdot d + q_0$ – частка і r_0 – остача. Якщо $r_0 \neq 0$, то маємо ділення з остачею, а якщо $r_0 = 0$, то маємо ділення без остачі, тобто

$$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = q_k\cdot d^k + q_{k-1}\cdot d^{k-1} + q_{k-2}\cdot d^{k-2} + q_{k-3}\cdot d^{k-2} + \ldots + q_1\cdot d + q_0.$$

Тепер звернемося до випадку б) $\underline{n_k < b.}$ Об'єднаємо в групу перші два розряди $n_k\cdot d^k + n_{k-1}\cdot d^{k-1} = (n_k\cdot d + n_{k-1})\cdot d^{k-1}$. Оскільки $n_k < b < d$, то число $n_k\cdot d + n_{k-1} > b,$ а тому розділимо його на $\boldsymbol{b}$ з остачею. Отримаємо: $n_k\cdot d + n_{k-1} = b\cdot q_{k-1} + r_{k-1}$. Підставивши в $\boldsymbol{a}$, одержимо:

$$\boldsymbol{a} = (bq_{k-1} + r_{k-1}) \cdot d^{k-1} + \ldots + n_{k-1}\cdot d^{k-1} + \ldots + n_1\cdot d + n_0$$

і далі як у попередньому випадку.

У випадку ж в) низка відповідних перетворень приводить до випадку а) або випадку б).

Отриманий висновок надає нам алгоритм виконання ділення.

Розглянемо конкретний приклад у десятковій системі. Розділимо,

наприклад, число 7344 на 6.

$7344 = 7\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 4\cdot10 + 4$. $7 = 6\cdot1 + 1$, тому $7344 = (6\cdot1 + 1)\cdot10^3 + {} + 3\cdot10^2 + 4\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + (1\cdot10^3 + 3\cdot10^2) + 4\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + (1\cdot10 + 3)\cdot10^2 + {} + 4\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 13\cdot10^2 + 4\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + (1\cdot10^2 + 4\cdot10) + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + 14\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + (6\cdot2 + 2)\cdot10 + 4 = {} = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + 6\cdot2\cdot10 + (2\cdot10 + 4) = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + 6\cdot2\cdot10 + 24 = {} = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + 6\cdot2\cdot10 + 6\cdot4 = 6\cdot(1\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 2\cdot10 + 4) = 6\cdot1224$.

Отже, 7344 : 6 = 1224.

Така форма ділення надто громіздка, але вона визначає алгоритм значно простішої форми ділення “куточком”. Розглянемо той же приклад у такій формі ділення.

```
_7344 |6
 6     1224
 ---
_13
 12
 ---
 _14
  12
  ---
  _24
   24
    0
```

Якщо ж число ***b*** багатозначне, то алгоритм виконання ділення такий же, як і для однозначного ***b***. Різниця лише в тому, що треба вибрати першу групу розрядів, яка буде найменшим діленим для числа ***b***. Наприклад, розділимо 13206 на 31.

```
_13206 | 31
 124    426
  _80
   62
 _186
  186
    0
```

Аналогічно виконується ділення і в інших системах числення.

Покажемо це на прикладі ділення у двійковій системі числення.

Розділимо, наприклад, число 111101111 на 101101.

```
_111101111  | 101101
 101101       1011
_01000011
  101101
 _0101101
    101101
         0
```

Вправи.

1. Перевести число 617 з десяткової системи у двійкову, трійкову та вісімкову системи.

2. Перевести числа а)11010011 б) 1000001101 в) 1010111111 з двійкової в десяткову систему.

3. Перевести число а) 122102 б) 10102 в) 21021 з трійкової до десяткової системи.

4. Перевести число 11100111001 з двійкової у п’ятіркову систему.

5. Перевести число 1021 з трійкової системи у двійкову.

6. Обчислити: а) 1101101 + 100011; б) 10111011 + 10001101;
в) 10010101 – 11110101; г) 110100100 – 111011;
д) 1001110 · 110111; є) 1011110 · 101101;
ж) 10010000111 : 111101; з) 110111001 : 10101.

7. Обчислити: а) $10010110_2 + 2102_3 = x_8$ б) $127_8 + 112_3 = x_2$
в) $1102_3 + 1011_3 = x_5$ г) $110100_2 – 222_3 = x_5$

Питання, розглянуті в розділі "Системи числення" забезпечують вчителю розуміння загального алгоритму виконання арифметичних дій і його використання в конкретних числових системах, зокрема, в десятковій. Окрім того цей матеріал має пряме відношення до математичних основ інформатики і забезпечує в ній розуміння математичної складової. Зокрема, усвідомлення алгоритму дій з числами у двійковій системі числення забезпечує розуміння операційної системи роботи комп'ютера.

Література

1. Вивальнюк Л. М. Алгебра та теорія чисел К.: Вища школа, 1972. 316 с.
2. Вивальнюк Л. М. Числові системи К.: Вища школа, 1977. 168 с.
3. Завало С. Т., Костарчук В. М., Б. І. Хацет. Алгебра і теорія чисел. Т.2. К.: Вища школа, 1980. 407 с.
4. Затула Н. І., Зуб А. М., Коберник Г. І., Нещадим А. Ф.. Математика: Навчальний посібник. К.: Кондор, 2006. 560 с.
5. Касаткин В. Н. Новое о системах счисления. К.: Вища школа,1982.184 с.
6. Сарієнко В. К., Сарієнко В. В. Математика. ДДПУ, 2013. 156 с.
6. Фомин С.В. Системы счисления. М.: Наука, 1975. 84 с.

Інтернет-ресурси

http://uk.wikipedia.org/wiki/Система_числення

http://math-ua.semestr.ru/inf/index.php

http://nazachot.ru/referat/167-sistemi-chislennya.html

http://informatuka.at.ua/publ/lekciji/lekcija_1_5_sistemi_chislennja/2-1-0-7

ЕЛЕМЕНТИ АЛГОРИТМІЗАЦІЇ

У результаті впровадження нових інформаційних технологій значно змінюються суспільно-економічні структури, формується гнучке динамічне суспільство, здатне до активної самооцінки та вибору мети розвитку, швидкої й адекватної реакції на зміни зовнішнього та внутрішнього середовища. Тому сьогодення дає освітянам важливе соціальне замовлення – готувати підростаюче покоління до використання обчислювальної техніки, познайомити зі способами організації та обробки інформації, виробити в учнів особливий стиль мислення, що відповідає алгоритмам та логіці ЕОМ. Уже зараз комп'ютерна грамотність є важливим показником культури, а в майбутньому стане необхідною кожній людині; де б вона не працювала, знання основ інформатики й обчислювальної техніки стає елементом загальної культури, другою грамотністю людини [47] .

Здатність використовувати й розробляти алгоритми – основний елемент комп'ютерної грамотності. Щоденно ми складаємо алгоритми різних дій. Академік А. О. Дородніцин [47] говорить, що при наявності алгоритму розробка програми – лише питання часу, але без алгоритмів зрушити з місця неможливо. Таким чином, розвиток алгоритмічного мислення необхідний незалежно від того, використовуються комп'ютери чи ні. Звичка користуватися алгоритмічними прийомами в практичній діяльності стає вимогою часу, бо життя в сучасному суспільстві неможливе, якщо не вмієш планувати свої дії та ефективно навчатися. При правильній постановці курс алгоритмізації здатний внести великий вклад у формування цих умінь. Оволодіння учнями алгоритмічною культурою дозволить їм самим свідомо будувати навчання та самонавчання за третім типом (див.с.15), добившись його високої ефективності. Це тим більш так, тому що навчання найпростішим алгоритмам і використання їх у шкільній практиці дисциплінує школяра, привчає його до порядку й організованості мислення. Більш того, можна стверджувати, що воно виробляє особливий стиль розумової діяльності: мислення перестає бути чимось невизначеним, аморфним, воно набуває більш чіткі форми, стає керованим.

Невичерпні можливості сучасних інформаційних технологій часто залишаються невикористаними через неготовність нашого мислення до засвоєння та активного використання законів і логіки світу комп'ютерів. Тому формування алгоритмічної грамотності повинно здійснюватися на основі формування основних логічних структур мислення, котре, за твердженням психологів, найбільш сприятливе в молодшому шкільному віці.

Комп’ютерна грамотність не обмежується знанням будови ЕОМ і навіть умінням програмувати. Саме цим і зумовлена поява нового терміна “інформаційна грамотність” [49]. Сюди входить насамперед розуміння інформації й уміння її виражати, організовувати й планувати свої дії у взаємозв’язку з навколишнім. З такого погляду інформатика – наука, яка досліджує структуру та загальні властивості інформації, а також закони і методи нагромадження, збереження, переробки, пошуку та використання інформації в різноманітних областях людської діяльності.

Зміст курсу Інформатика базується на трьох фундаментальних поняттях сучасної науки: інформація - алгоритм - ЕОМ. Саме ця система понять задає обов'язковий рівень теоретичної підготовки.

В інформатиці виділяють три основні частини:

- алгоритми обробки інформації (algorithm);
- обчислювальну техніку (hardware);
- комп’ютерні програми (software).
- К

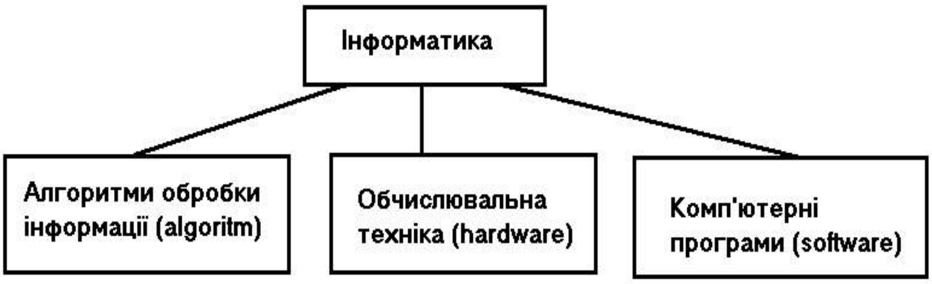


Рис. 1. Структура інформатики.

Поняття «алгоритм» є концептуальною основою різноманітних процесів обробки інформації. З давніх часів у математиці склалося інтуїтивне уявлення про алгоритм як формальне розпорядження, що визначає сукупність операцій і порядок їх виконання для розв’язання задач деякого типу. Термін «алгоритм» зобов'язаний своїм походженням великому вченому середньовічного Сходу – Махамад ібн Муса ал-Хорезмі (Магомет, син Мойсея, із Хорезма 783 - 850 рр).

У латинських перекладах з арабської арифметичного трактату ал-Хорезмі його ім'я транскрибувалося як algorismi.

З алгоритмами, тобто ефективними процедурами, які однозначно приводять до результату, математика мала справу завжди й у своєму розвитку накопичила множина різних алгоритмів. Отримавши відповідну інтерпретацію в конкретних додатках, вони становлять значну і найсуттєвішу частину математичного апарату, який використовується в техніці.

Відомі зі шкільної програми методи множення «стовпчиком» та ділення«кутом», алгоритм Евкліда знаходження найбільшого спільного дільника двох додатних натуральних чисел, «решето Ератосфена» для знаходження простих чисел, метод Гауса розв’язання системи лінійних рівнянь, правило диференціювання складної функції, добування квадратного кореня з раціонального числа із заданою мірою точності, спосіб побудови трикутника за трьома сторонами – все це алгоритми.

Поняття алгоритму є одним із основних понять сучасної математики. Щодо методів обчислювальної математики, якізастосовуються при розв’язанні задач обробки інформації з використанням комп’ютера, то алгоритм є тим фундаментом, на якому базується кожний із цих методів.

Поки ми не побудуємов уяві або на папері чітку послідовність своїх дій у процесі розв’язання будь-якої задачі, то не зможемоописати цей процес мовою програмування, тобто написати вірогідну програму для виконання її на комп’ютері. Значення цього ствердження зростає разом із підвищенням складності задач.

Визначення алгоритму теж змінювалося у часі залежно від того, за допомогою яких понять формулюється це визначення. Тому використовується значна кількість визначень алгоритму. Тривалий час цим терміном користувалися лише математики, розуміючи під ним правила розв’язання задач. Тепер поняттям алгоритму широко користуються в найрізноманітніших галузях науки, техніки, виробництва. У багатьох випадках результат діяльності людини безпосередньо залежить від того, наскільки чітко відчуває вона алгоритмічну суть своїх дій: що робить у даний момент, у якій послідовності, який передбачує результат тощо. Все це визначає особливий стиль культури мислення й поведінки людини. Тому формування алгоритмічного мислення учнів – важливе й актуальне завдання школи на сучасному етапі.

2. Поняття алгоритму

Слово «алгоритм» є перефразуванням географічної назви місцевості Хорезм через праці відомого узбецького математика Мухамеда ібн Муса аль-Хорезмі (близько 825 року). У IX ст. великий узбецький математик Мухаммед, уродженець Хорезма (арабською «аль-Хорезмі»), розробив правила виконання чотирьох арифметичних дій над числами в десятковій системі числення. Множину цих правил назвали алгоритмом (algorithmi - від латинського написання імені аль-Хорезмі), а потім словом «алгоритм» почали позначати сукупність правил певного виду, а не тільки правил виконання арифметичних дій.

Одним із найперших алгоритмів є відомий алгоритм Евкліда для знаходження найбільшого спільного дільника натуральних чисел (III ст. до н. е.).

Тривалий час поняття алгоритму використовували лише математики при позначенні правил розв'язування різних задач. Розвиток математичної науки привів до необхідності уточнення поняття алгоритму як одного з основних математичних понять і розробки нової математичної дисципліни «Теорії алгоритмів».

Інтуїтивно алгоритм трактується як ефективна обчислювальна процедура в працях Бореля (1912 р.), Вейля (1921 р.) та ефективна обчислювальна функція у роботі Чорча (1936 р.). За Постом (1936 р.) алгоритм - це послідовність пронумерованих інструкцій. У термінах Тюрінга (1936 р.) алгоритм - непорожня послідовність команд. Еквівалентні їм інтуїтивні поняття алгоритму введені Марковим (1951 р.) і Колмогоровим (1953 р.). Подальші дослідження, здійснені Шенгаге, Ахо, Ульманом, Хопкрофтом і Криницьким, не вийшли за рамки інтуїтивного підходу.

Алгоритм - це набір інструкцій, що описує, як деяке завдання може бути виконане.

Іншими словами, **алгоритм** – ***це система формальних правил, що визначає зміст і порядок дій над вхідними даними і проміжними***

результатами, необхідними для отримання кінцевого результату при розв'язуванні задачі.

Говорячи про алгоритми, необхідно розглянути *джерела їх виникнення.*

Перше джерело - це практика, наше повсякденне життя, що надає можливість, а іноді й вимагає отримувати алгоритми шляхом описання дій з розв'язування різних задач. Такі алгоритми називаються емпіричними.

Друге джерело - це наука. З її теоретичних положень і встановлених фактів можуть бути виведені алгоритми. Так, на основі теоретичних законів можна побудувати алгоритми для управління різними технологічними процесами.

Третім джерелом є різні комбінації і модифікації вже наявних алгоритмів. Очевидно, що тут велику роль відіграють кваліфікація та винахідливість працівників, їх знання про математичні закономірності перетворень алгоритмів. Для багатьох задач можна побудувати послідовність операцій їх розв'язання. Якщо цю послідовність можна використати для розв'язання подібних задач, то вона наближається до алгоритму. Щоб вона ним стала, необхідно, щоб вона набула **властивостей** алгоритму.

Властивості алгоритму

Алгоритми мають наступні властивості:

– **дискретність:** процес, що визначається алгоритмом, можна розчленувати (розділити) на окремі елементарні етапи (кроки), кожен з яких називається кроком алгоритмічного процесу чи алгоритму;

– **детермінованість (визначеність)**: через повну однозначність правил, встановлених в алгоритмі, застосування алгоритму до однакових вхідних даних незалежно від виконавця повинно приводити до однакового результату;

– **масовість:** алгоритм повинен бути придатним для розв'язуваннявсіх задач певного типу;

– **результативність:**вказує на наявність таких варіантів вхідних даних, для яких обчислювальний процес, що реалізується за наданим алгоритмом, повинен через скінчену кількість етапів (кроків) зупинитись і дати шуканий результат або сигнал про те, що наданий алгоритм непридатний длярозв'язання поставленої задачі;

– **ефективність** – властивість, основним способом кількісної оцінки якої є орієнтовний підрахунок числа арифметичних операцій.

Щоб побудувати алгоритм, необхідно дотримуватись певних умов:

- вхідні та вихідні дані задаються у вигляді послідовності слів;
- процес розв'язання задачі це є процес перетворення вхідних даних у вихідні;
- процес перетворення складається із сукупності елементарних припустимих операцій формального характеру;
- припустима елементарна операція — це проста, чисто механічна дія, результат якої не залежить від виконавця (машини чи людини);
- послідовність припустимих операцій не залежить від конкретних вхідних даних;
- порядок виконання припустимих операцій визначений однозначно;
- сукупність припустимих операцій визначається класом задач та типом даних.

Говорячи про алгоритми, необхідно розглянути **джерела їх виникнення.**

- Перше джерело – це практика, наше повсякденне життя, що надає можливість, а іноді й вимагає отримувати алгоритми шляхом описання дій зрозв'язування різних задач. Такі алгоритми називаються емпіричними.
- Друге джерело – це наука. З її теоретичних положень і встановлених фактів можуть бути виведені алгоритми. Так, на основі теоретичних

законівможна побудувати алгоритми для управління різними технологічними процесами.

- Третім джерелом є різні комбінації і модифікації вже наявних алгоритмів. Очевидно, що тут велику роль відіграють кваліфікація та винахідливість працівників, їх знання про математичні закономірності перетворень алгоритмів.

З поняттям алгоритму пов’язані такі поняття, як область його завдання, складність, еквівалентність, алгоритмічна розв’язність та ін.

Область завдання алгоритму – це множина даних, до яких алгоритм застосовний. Якщо алгоритм припиняється без результату або продовжується необмежено довго, то говорять про незастосовність алгоритму до цих вхідних даних.

Складність алгоритму – це величина, яка характеризує довжину опису алгоритму. А для оцінки складності обчислень, що виконуються в даному алгоритмі, використовується так звана сигналізуюча функція.

Під алгоритмічною розв’язністю масової проблеми розуміють можливість побудови алгоритму розв’язку **всіх** задач даного класу.

Існують класи задач, для розв’язання яких не існує одного універсального способу. Це алгоритмічно не розв’язувані проблеми. Це не означає, що неможливо розв’язати окремі задачі даного класу. В кожному окремому випадку суттєво використовуються особливості вхідних даних, тобто порушується властивість масовості алгоритму. Для визначення алгоритмічного розв’язку якогось класу задач необхідно або побудувати алгоритм розв’язку, або довести неможливість побудови такого алгоритму, тобто довести, що проблема є алгоритмічно не розв’язуваною.

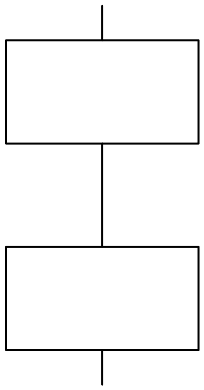
Наприклад, алгоритмічно може бути розв’язна проблема доведення тотожностей в алгебрі (відомі правила перетворення алгебраїчних виразів), у той самий час розв’язання диференційних рівнянь – проблема алгоритмічно нерозв’язна. Є проблеми, про які невідомо, чи є вони алгоритмічно розв’язні чи нерозв’язні.

Алгоритмічні конструкції

Основні структури алгоритмів – це обмежений набір блоків і стандартних способів їх з'єднання для виконання типових послідовностей дій. Використання кількох основних структур дає можливість будувати різноманітні алгоритми.

До основних структур алгоритмів належать: лінійна, розгалужена і циклічна.

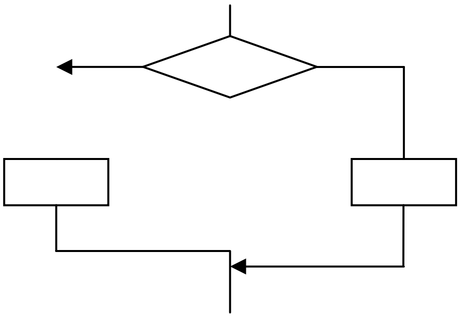
Лінійна або послідовна без будь-яких розгалужень конфігурація алгоритму нагадує форму ланцюжка:

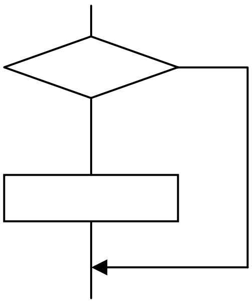


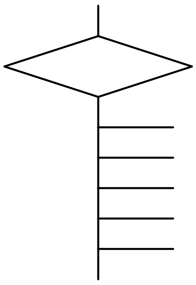
Задачі, в яких перетворення інформації відбувається послідовно за певними формулами, які розкладаються на елементарні операції, є найпростішими для алгоритмізації. Потрібно тільки визначити раціональну послідовність цих операцій і виконати їх за схемою.

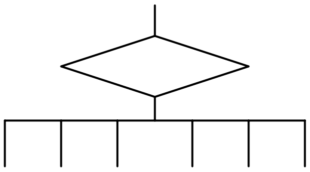
Розгалужена конфігурація алгоритму, що містить в собі як послідовності, так і розпаралелення послідовностей, використовується у тих випадках, коли перетворення інформації може здійснюватись за різними схемами, залежно від властивостей вхідних даних або проміжних результатів. Тобто в алгоритмі передбачаються всі можливі варіанти обробки інформації, кожний з яких розробляється як окрема гілка алгоритму, а вибір однієї з них для виконання здійснюється за допомогою перевірки деякої умови, що відображає властивості інформації, використовуваної у процесі перетворення. В алгоритмічних системах для цього є розпізнавачі. Залежно від того, на скільки гілок розгалужується алгоритм, він може бути простим або складним. Для простого розгалуженого процесу перевіряється одна умова (один розпізнавач), для складного – дві чи більше умов, кожна з яких відокремлює одну гілку.

Умова формулюється таким чином, щоб відповідь перевірки була «так» чи «ні». Просте розгалуження відбувається за схемою:









Розгалуження в алгоритмах з’являється тоді, коли виконавцю необхідно зробити вибір одного з кількох наборів кроків у залежності від деяких умов.

Перевірка цієї умови повинна бути допустимою дією виконавця (якщо виконавець не вміє перевіряти умову, то для нього не можна писати розгалужені алгоритми).

Існує дві форми розгалужень – повна (має дві гілки) та неповна (має одну гілку).

Будь-який вибір можна звести до одного чи кількох розгалужень.

При записі розгалужень необхідний вказівник, котрий відмежує розгалуження від частини алгоритму, що залишилася. При відсутності такого вказівника алгоритм стає двозначним.

При вирішенні життєвих задач розгалуження з’являються неминуче.

В основі багатьох моделей лежать різні нерівності та інші відношення між вихідними даними і результатами, котрі в алгоритмі втілюються у формі розгалужень. І взагалі, обмежена сфера застосування будь-якої моделі приводить до появи у відповідному алгоритмі того, що вихідні дані задовольняють обмеженням, при яких математична модель відповідає реальності.

2. Цикли:

У деяких алгоритмах передбачається можливість багаторазової перевірки однієї і тієї самої умови та багаторазове виконання однієї чи декількох підстановок. Тим самим досягається компактність алгоритму, а також можливість розробки ефективної програми. Повторювану частину алгоритму називають тілом циклу (або циклом), а алгоритм, що його містить, – **циклічним**. Можливе виконання циклу **Доки**, циклу **Поки**, циклу **За параметром.**

Для побудови циклічного алгоритму необхідно:

– Поява циклів в алгоритмі зумовлена необхідністю повторювати набір відповідних дій до тих пір, доки виконується певна умова.

– Цикл "доки" може виконувати будь-який виконавець, котрий "уміє" перевіряти умову (цикл "для кожного" доступний тільки для тих виконавців, котрі "вміють" працювати з числами та числовими змінними).

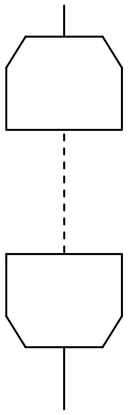
– Умова продовження циклу перевіряється тільки перед черговим виконанням тіла циклу. Цикл припиняється лише в тому випадку, коли перед черговим виконанням його тіла умова виявляється порушеною. У випадку, коли умова циклу не виконана з самого початку, то тіло циклу не виконувалося жодного разу. В ході виконання тіла циклу умова може порушитись – це не викличе негайного припинення циклу.

– Щоб записати цикл, необхідний вказівник, котрий відділить його тіло від дій алгоритму, що залишилися.

– Цикли показують ефективність застосування ЕОМ : за допомогою короткої циклічної програми можна організувати виконання великої кількості дій.

- визначити всі дії, які необхідно виконати до входу в цикл, тобто провести підготовку циклу;
- визначити всі операції, які ввійдуть до циклу;
- скласти умову виходу з циклу.

Якщо в процесі перетворення інформації є змінна, значення якої змінюється за відомим правилом, або відомі межі її зміни, то можна визначити кількість циклів та організувати вихід із циклічного процесу. Таку змінну називають параметром циклу. Для організації циклічного процесу використовують лічильник циклів, пов’язаний із цим параметром. Схема такого процесу:



Особливістю всіх наведених структур є те, що вони мають один вхід і один вихід, тому їх можна поєднувати один з одним у будь-якій послідовності. Зокрема, кожна структура може містити будь-яку іншу структуру в якості одного із блоків.

Досвід практичної алгоритмізації привів до формування особливої методики структурної організації алгоритмів, використання якої зменшує ймовірність помилок у процесі розробки і запису алгоритмів, спрощує їх розуміння імодифікацію. Цю методику алгоритмізації називають структурним підходом. При структурному підході до конструювання алгоритмів їх ніби «збирають» із трьох основних (базових) структур.

При розв’язуванні будь-якої задачі та побудові алгоритму її розв’язку звичайно беруть до уваги наявність деяких вхідних даних і мають уявлення про результат, що необхідно отримати.

З реалізацією алгоритму безпосередньо пов’язане вміння застосувати цей алгоритм до конкретних вхідних даних розв’язуваної задачі. Таке застосування називається **алгоритмічним процесом**. Цей процес полягає у перетворенні вхідних даних за правилами, визначеними заданим алгоритмом.

Алгоритмічний процес загалом складається із самостійних етапів, кожен з яких призначений для переведення даних з одного стану в інший. Одним із завдань кожного етапу обчислень є також визначення свого наступника.

Допоміжні алгоритми

В ролі допоміжного може виступати будь-який алгоритм, якщо йому дати заголовок, котрий дасть змогу викликати його з інших алгоритмів

Для того, щоб алгоритм можна було викликати з інших алгоритмів, у заголовкові необхідно вказати назву, аргументи (тобто імена тих змінних, значення котрих передаються допоміжному алгоритму із основного) і результати (тобто імена тих змінних, значення котрих передаються з допоміжного алгоритму основному).

Коли викликається допоміжний алгоритм, змінні основного алгоритму "заморожуються" (окрім результатів допоміжного алгоритму), а після завершення допоміжного алгоритму – "розморожуються". Таким чином, однаково позначені змінні в основному та допоміжному алгоритмах – просто "однофамільці" (окрім результатів допоміжного алгоритму).

Результати, заради яких основний алгоритм "перетворюється" в допоміжний, не завжди придатні для подальшого використання виконавцем алгоритму. Це можуть бути, наприклад, повідомлення, що передаються на екран чи принтер. В подібних випадках вводять спеціальну змінну і її значеннями замінюють (кодують) повідомлення. Така змінна називається сигнальною. Кожному з можливих повідомлень відповідає своє значення сигнальної змінної.

Створюючи допоміжний алгоритм, ми неначе прибавляємо ще одну припустиму дію. В результаті виконання допоміжного алгоритму докладні пояснення того, що необхідно робити, можна замінити однією командою. І хоча клас досягнутих цілей від цього не розширюється, алгоритми для досягнення цих цілей скорочуються і спрощуються (тут проглядається глибока аналогія з навчанням людини).

Допоміжні алгоритми можуть бути складеними заздалегідь. Складання алгоритму з допоміжних алгоритмів подібно збору будинку з готових блоків. Чим більше та універсальніше блоки, тим легше збір.

Допоміжні алгоритми виступають в якості змінних деталей алгоритмів. Для "переналагодження" основного алгоритму на розв'язання іншого завдання досить замінити допоміжний алгоритм іншим допоміжним алгоритмом, що має ті ж аргументи та результати. Аналогічно проводиться переналагодження складних устроїв: один блок замінюється іншим, що має ті ж входи та виходи.

Допоміжні алгоритми – це етап до покрокової деталізації алгоритмів.

Важливим питанням є питання стосовно способів запису алгоритмів. Щоб довести алгоритми до використання, в залежності від їх призначення, вони повинні бути формалізовані за деякими правилами, за допомогою конкретних образотворчих засобів.

Існує декілька способів запису, які різняться простотою, наочністю, компактністю, ступенем формалізації та іншими показниками. Найчастіше застосовуються наступні форми запису:

- словесна;
- формульно-словесна;
- блок-схема;
- таблична;
- програми для МК;
- мова операторних схем;
- мова програмування.

Найбільш розповсюджена форма запису алгоритмів – ***словесна***. Зміст послідовних етапів обчислень записується у вільній формі звичайною мовою, але з ретельно відібраним набором слів, не допускаючи повторів, зайвих слів.

Спосіб формульно-словесного запису заснований на завданні команд про виконання окремих дій у певній послідовності з використанням математичних формул і словесних пояснень. Такий спосіб запису застосовується, як правило, для написання обчислювальних алгоритмів.

Розрізняють два основних типи таких описів. Перший – опис операції з однозначним результатом. Називається оператором присвоєння. Другий тип опису відповідає операціям, результат виконання яких залежить від певних умов. Називається такий опис умовним (умовний оператор або оператор умовних переходів).

Зручним способом передачі алгоритмів є табличний запис, який широко застосовується вчителями-мовниками на уроках української та російської мов, а також на уроках з інших навчальних дисциплін.

Блок-схеми є графічним зображенням алгоритму, доповненим елементами словесного запису, в якому кожний етап процесу переробки даних представлений у вигляді геометричних фігур (блоків), які мають певну конфігурацію в залежності від характеру операцій. Блок-схема є виключно наочним і простим способом написання алгоритмів.

Таким чином, можна сказати, що **алгоритм** – це правило, сформульоване на деякій мові, яке визначає процес переробки вихідних даних у шуканий результат.

Розкриваючи питання щодо джерел алгоритмів, відзначимо, що ними є:

1. **Практика**

Практика пропонує дві основні можливості: спостереження і експеримент.

Об'єктом спостереження може бути будь-яке живе створіння (людина), яке вміє розв'язувати будь-які поставлені перед ним завдання. Описуючи його дії, аналізуючи їх залежність від змін умов, можна отримати алгоритм для розв'язання заданої задачі. Отримані таким чином алгоритми часто називають імітуючими.

З поняттям алгоритмічного процесу тісно пов'язане і поняття обчислювального процесу.

Обчислювальний процес в ЕОМ детермінований перетворенням даних за допомогою заданих кінцевих систем правил.

Суть алгоритмізації обчислювального процесу полягає в наступному:

–виокремлення автономних етапів обчислювального процесу;

– формальний запис змісту кожного з них;

– визначення порядку виконання виділених автономних етапів обчислювального процесу;

– перевірка правильності вибраного алгоритму для реалізації заданого методу обчислень.

Результати алгоритмізації обчислювального процесу систематизують (формалізуються) у вигляді певної обчислювальної схеми, тобто деякої послідовності операцій і форм запису результатів цих операцій, яка задає алгоритм розв'язування даної задачі.

Алгоритми є фундаментом сучасної методології розробки програм. Програми, що створюються як вправи на початкових етапах навчання програмування – це переважно нескладні завдання, записані однією з мов програмування. Мета цих вправ – допомогти студентам-першокурсникам вивчити елементи певної мови програмування. Для знаходження способу їх виконання практично не потрібно великих розумових або часових затрат.

На наступних етапах навчання методи, за допомогою яких виконують завдання, набувають дедалі більшого значення, їх застосування потрібне для розроблення плану виконання завдання ще до того, як розв'язок буде виражений мовою програмування, тобто виникає необхідність створення алгоритму.

Для наочного представлення структури розв'язання складних задач особливо підходять схеми алгоритмів їх розв'язку, адже їх можна реалізувати будь-якою мовою програмування.

Загальними для всіх алгоритмів і найсуттєвішими є ознаки форми, структури і двосторонніх зв'язків між конструктивними об'єктами.

Крім цього, важливе значення мають не лише можливості нових поколінь обчислювальних засобів, а й часова складність вибраного алгоритму.

Вивчення основ алгоритмізації - необхідна умова поєднання теорії і практики програмування, частина математичної культури та загальної культури мислення.

2. Етапи розв'язування задачі на ОЕМ

Розв'язання будь-якої задачі на ЕОМ складається з кількох етапів, а саме:

- постановка завдання;
- формалізація (математична постановка задачі);
- вибір (або розроблення) методу розв'язування;
- розроблення алгоритму;
- складання програми;
- налагодження програми;
- обчислення та обробка результатів.

Поряд з цими етапами користувач у процесі розв'язування задачі може виконувати також наступні:

- вибір мови програмування;
- опис структури даних;

- оптимізація програми;
- тестування;
- документування та ін.

Під час *постановки задачі* першочергову увагу треба приділити з’ясуванню кінцевої мети і розроблення загального підходу до досліджуваної проблеми, а саме встановити:

1) чи зрозуміла термінологія у формулюванні задачі;
2) що дано;
3) що необхідно знайти;
4) які загальні властивості явища чи об’єкта;
5) чи існує розв’язок поставленої задачі і чи він єдиний;
6) яких даних не вистачає і чи всі вони потрібні;
7) які слід зробити припущення;
8) які можливості конкретної ЕОМ і заданої системи програмування (проаналізувати).

Формалізація - побудова математичної моделі розглядуваного явища. У результаті аналізу суті задачі визначається об’єм і специфіка даних, вводиться система умовних позначень, встановлюється приналежність розв’язуваної задачі до одного з відомих класів задач, вибирається відповідний математичний апарат.

На перший погляд більшість задач, які зустрічаються на практиці, не мають чіткого і однозначного опису. Деякі задачі взагалі неможливо сформулювати в термінах, що допускають комп’ютерне розв’язання.

Зазвичай для формального опису задачі необхідна велика кількість різних параметрів, і часто лише в ході додаткових експериментів можна знайти інтервали зміни цих параметрів.

Якщо певні аспекти розв’язуваної задачі можна виразити в термінах якої-небудь формальної моделі, то це, безумовно, необхідно зробити, оскільки в цьому випадку в рамках формальної моделі можна дізнатись, чи існують методи й алгоритми розв’язання поставленої задачі. Навіть якщо вони не існують, то використання засобів і властивостей формальної моделі допоможе в побудові розв’язку задачі.

Практично будь-яку галузь математики чи інших наук можна використати для побудови моделі певного кола задач. Для задач, числових за своєю природою, можна побудувати моделі на основі загальних математичних конструкцій, таких як системи лінійних рівнянь, диференціальні рівняння тощо. Для задач з символьними або текстовими даними можна застосувати моделі символьних послідовностей або формальних граматик. Розв’язок таких задач містить етапи компіляції та інформаційного пошуку.

Після визначення математичного формулювання задачі слід *вибрати метод її розв’язання.* При цьому потрібно враховувати:

1) складність формул і співвідношень;
2) необхідну точність обчислень і характеристики самого методу.

Похибка результату визначається вибраним чисельним методом розв’язання задачі.

Коли побудована (підібрана) модель поставленої задачі, то, звичайно, слід шукати розв’язок в термінах цієї моделі.

На етапі *розробки алгоритму* основна мета полягає в побудові розв’язання у формі алгоритму, що складається зі скінченної послідовності інструкцій, кожна з яких має чіткий зміст і може бути виконана з певними обчислювальними затратами за скінченний час. Тобто програма, написана на основі розробленого алгоритму, при будь-яких початкових даних ніколи не повинна приводити до нескінченних циклічних обчислень. З цією метою здійснюється:

1) поділ обчислювального процесу на можливі складові частини;
2) встановлення порядку їх слідування;
3) опис змісту кожної такої частини;
4) перевірка реалізації вибраного методу.

Розгляд крупноблочної структури алгоритму, дає змогу швидше і простіше розробити кілька різних його варіантів, провести їх аналіз, оцінку і вибрати оптимальний.

Поетапна деталізація алгоритму дає можливість здійснювати його розробку по частинах одночасно кількома спеціалістами.

Складання програми передбачає подання алгоритму у формі, зрозумілій ЕОМ.

При *відлагодженні програми* розробник перевіряє її візуально та виявляє помилки у процесі компіляції.

Обчислення та обробка результатів дозволяє отримати розв’язок задачі шляхом виконання завершеної програми. Цей етап є підсумком виконання всіх попередніх етапів, а іноді обумовлює необхідність повного перегляду і зміни підходу до розв’язання задачі.

Документування дає можливість людям зрозуміти програми, які написані іншими людьми. Існує так зване «золоте правило»: «Оформляйте ваші програми в такому вигляді, в якому вам хотілось би бачити програми, написані іншими».

3. Способи представлення алгоритмів

У процесі розроблення алгоритму можуть використовуватись різні способи його опису, які відрізняються за простотою, наочністю, компактністю, мірою формалізації, орієнтації на машинну реалізацію тощо.

Форми запису алгоритму:

- словесна або вербальна (мовна, формульно-словесна);
- псевдокод (формальні алгоритмічні мови);
- схемна:
  1) структурограми;
  2) графічна (виконується за вимогами стандарту).

Псевдокоди

Псевдокод - система позначень і правил, призначена для записування алгоритмів.

Він займає проміжне місце між звичайною і формальною мовою. Через свої особливості псевдокоди орієнтовані на людину.

У псевдокоді не вимагає дотримання синтаксичних правил для запису команд, які властиві формальним мовам, що полегшує запис алгоритму на стадії його проектування і дає можливість використати ширший набір команд, розрахований на абстрактного виконавця.

У псевдокоді звичайно є деякі конструкції, властиві формальним мовам, що полегшує перехід від запису їх псевдокодом до запису алгоритму формальною мовою.

Зокрема, у псевдокоді, як і в формальних мовах, є службові слова, зміст яких визначений раз і назавжди. Їх виділяють у друкованому тексті жирним шрифтом, а в рукописному - підкресленням:

початок, кінець, якщо, то, інакше, поки, повторювати, повторювати до.

Наприклад:

$$y=\begin{cases} x+1, & x\geq 0 \\ 5x, & x<0 \end{cases}$$

```
початок
  ввід $x$
  якщо $x \geq 0$ то $y = x + 1$
  інакше $y = 5x$
кінець
```

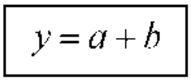
Структурограми

Спосіб зображення алгоритму за допомогою структурограми (схеми На-ссі-Шнейдермана) реалізує в собі вимоги структурного програмування. Він дає змогу зобразити схему передачі управління не за допомогою ліній потоку, а вкладеними структурами.

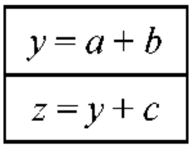
Деякі із зображуваних графічних символів відповідають зображенню символів на схемах, виконаних згідно зі стандартами Єдиної системи програмної документації (ЄСПД).

Допустимим є використання таких блоків.

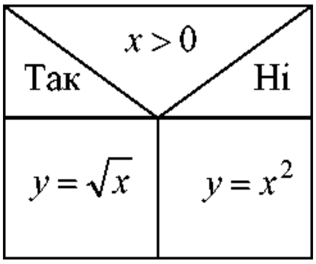
1. Блок обробки (обчислень):



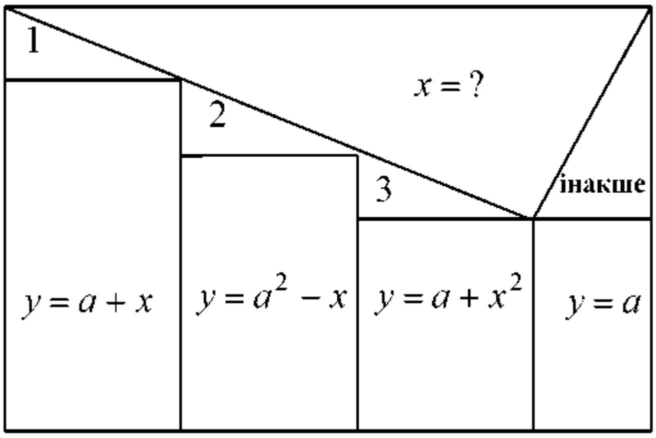
2. Блок послідовності:

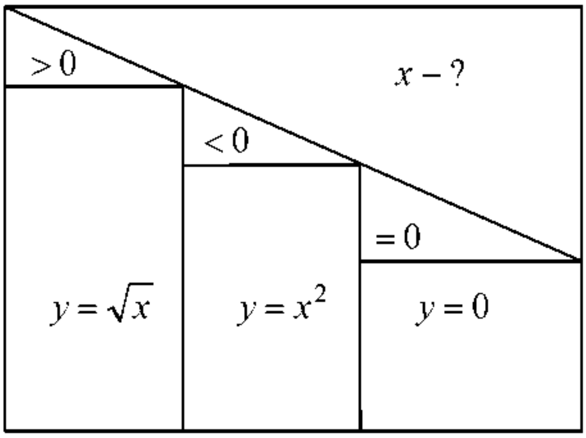


3. Блок розв’язання (для розгалужень):



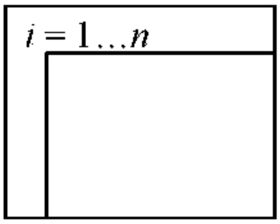
4. Блок варіанту:

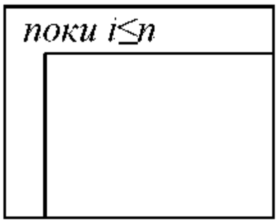




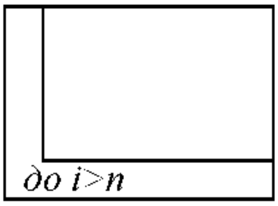
Ті варіанти, які можна точно сформулювати, розташовують зліва. Решту - об’єднують в один, що розташований справа і є виходом за недотриманням умови.

5. Блок циклу з параметром або циклу з передумовою:





6. Блок циклу з постумовою:



Кожен блок структурограми має форму прямокутника і може бути вписаний в будь-який інший. Блоки заповнюються формульно-словесно.

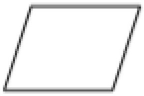
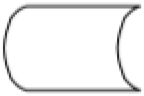
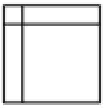
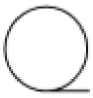
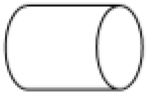
Графічне представлення алгоритмів згідно з вимогами стандартів ЄСПД

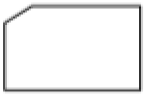
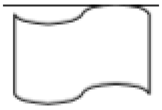
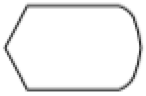
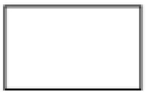
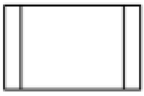
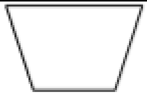
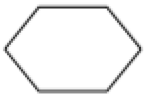
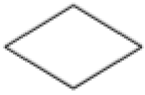
Схема в програмній документації - це графічне представлення визначення, аналізу або методу розв’язування задачі, в якому використано символи для відображення операцій, даних, потоку, обладнання тощо.

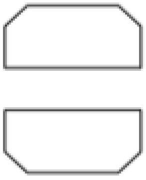
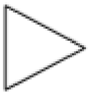
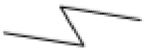
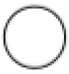
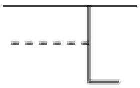
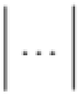
Схеми алгоритмів, програм, даних і систем складаються із символів, які мають встановлене значення (таблиця 1), короткого пояснювального тексту та з’єднувальних ліній.

Таблиця 1

Стандартні символи

Зображення символа	Назва символа	Призначення символа
Символи даних		
	Дані	Символ відображає дані, носій яких не визначений
	Збережувані дані	Символ відображає дані, які зберігаються у вигляді, придатному для обробки, але їх носій не визначений
	Оперативний запам’ятовуючий пристрій	Символ відображає дані, які зберігаються в оперативному запам’ятовуючому пристрої
	Запам’ятовуюий пристрій з послідовним доступом	Символ відображає дані, які зберігаються в запам’ятовуючому пристрої з послідовним доступом (магнітна стрічка, магнітофонна касета тощо)
	Запам’ятовуюий пристрій з прямим доступом	Символ відображає дані, які зберігаються в запам’ятовуючому пристрої з прямим доступом (магнітний диск, магнітний барабан, гнучкий магнітний диск)
	Документ	Символ відображає дані, подані на носії в зручній для читання формі (машинограма, мікрофільм, бланки вводу даних та ін.)
	Ручний ввід	Символ відображає дані, які вводять вручну під час обробки з пристроїв будь-якого типу (клавіатура, перемикачі, кнопки, смужки зі штрих-кодом)

	Карта	Символ відображає дані, подані на носії у вигляді карти (магнітні карти, карти зі
	Паперова стрічка	скануючими мітками та ін.) Символ відображає дані, подані на носії у вигляді паперової стрічки
	Дисплей	Символ відображає дані, подані в зручній для сприйняття людиною формі на носії у вигляді відображуючого пристрою (екран для візуального спостереження, індикатори вводу інформації)
Символи процесу		
	Процес	Символ відображає функцію обробки даних будьякого виду
	Попередньо визначений процес	Символ відображає заздалегідь визначений процес, який складається з однієї або кількох операцій чи кроків програми, що визначені в іншому місці (в підпрограмі, модулі)
	Ручна операція	Символ відображає будь який процес, який виконує людина
	Підготовка	Символ відображає модифікацію команди або групи команд з метою впливу на якусь наступну функцію (встановлення перемикача, модифікація індексного регістра)
	Розв'язання	Символ відображає розв'язання або функцію перемикального типу, яка має один вхід і декілька альтернативних виходів, один і тільки один з яких може бути активізований після обчислення умов, визначених всередині цього символа
	Паралельні дії	Символ відображає синхронізацію двох або більше паралельних операцій

	Межі циклу	Символ складається з двох частин і відображає початок і кінець циклу. Обидві частини символа повинні мати один і той же ідентифікатор. Умови для приросту, завершення тощо поміщають усередині символа на початку чи в кінці залежно від розташування операції, яка перевіряє умову
Символи ліній		
	Лінія	Символ відображає потік даних або управління.
	Передача управління	Символ відображає безпосередню передачу управління від одного процесу до іншого. Тип передачі управління вказують всередині символа.
	Канал зв’язку	Символ відображає передачу даних по каналу зв’язку.
	Пунктирна лінія	Символ відображає альтернативний зв’язок між двома чи більше символами, використовується для обведення анотованої ділянки схеми.
Спеціальні символи		
	З’єднувач	Символ відображає вихід у частину схеми і вхід з іншої частини цієї схеми. Використовується для обриву лінії і продовження її в іншому місці. Відповідні символи - з’єднувачі повинні мати одне і те ж унікальне позначення.
	Термінатор	Символ відображає вихід в зовнішнє середовище і вхід із зовнішнього середовища (початок або кінець схеми програми, зовнішнє використання і джерело чи пункт призначення даних).
	Коментар	Символ використовується для описових коментарів або пояснювальних записів.
 	Пропуск	Символ (три крапки) використовується для відображення пропуску символа або групи символів, в яких не визначені ні тип, ні кількість символів.

5. ОСНОВНІ СТРУКТУРИ АЛГОРИТМІВ

Основні структури алгоритмів - це обмежений набір блоків і стандартних способів їх з’єднання для виконання типових послідовностей дій. Використання кількох основних структур дає можливість будувати різноманітні алгоритми.

До основних структур алгоритмів належать:

- **лінійна** або **послідовна** без будь-яких розгалужень конфігурація алгоритму, що нагадує форму ланцюжка (рисунок 1);

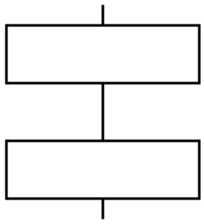


Рис. 1

- **розгалужена** конфігурація алгоритму, що містить в собі як послідовності, так і розпаралелення послідовностей. Використовується, коли залежно від умови потрібно виконати ту чи іншу дію (рис. 2, а), здійснити обхід, якщо одна вітка не містить жодних дій (рис. 2, б), здійснити множинний вибір, коли умова має більш як три можливі варіанти (рис. 2, в);

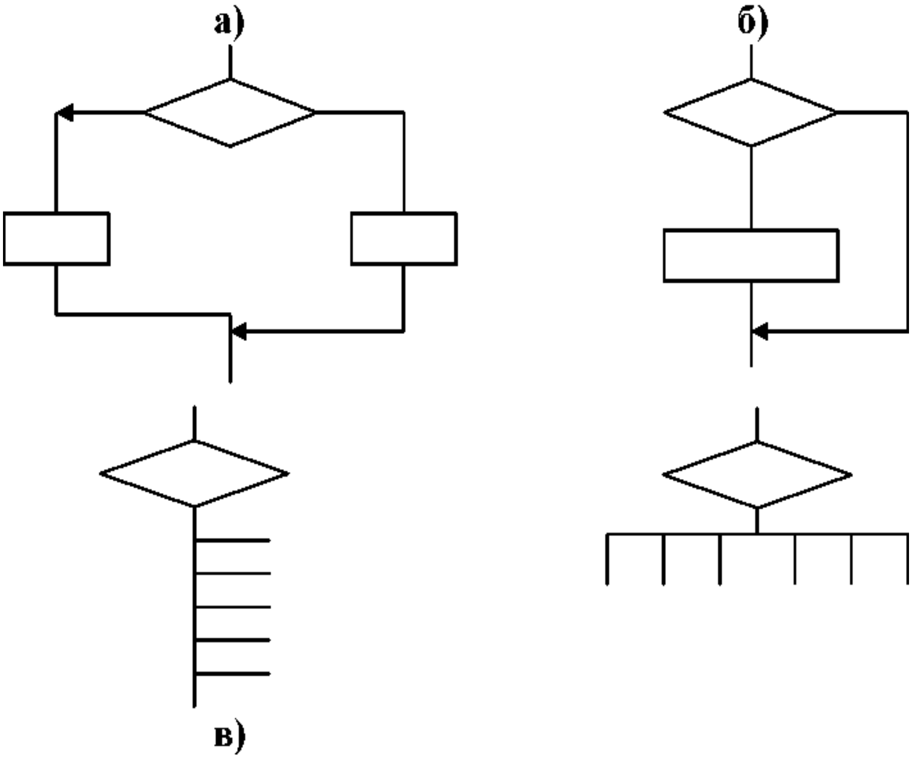
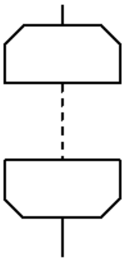


Рис. 2

циклічна, щовикористовується при необхідності виконувати деякі дії кілька разів. Можливе виконання циклу *До,* циклу *Поки,* циклу за *параметром*

(Рис 3)



Особливістю всіх наведених структур є те, що вони мають один вхід і один вихід, тому їх можна поєднувати один з одним у будь-якій послідовності. Зокрема, кожна структура може містити будь-яку іншу структуру в якості одного із блоків (рис. 4).

$$y = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

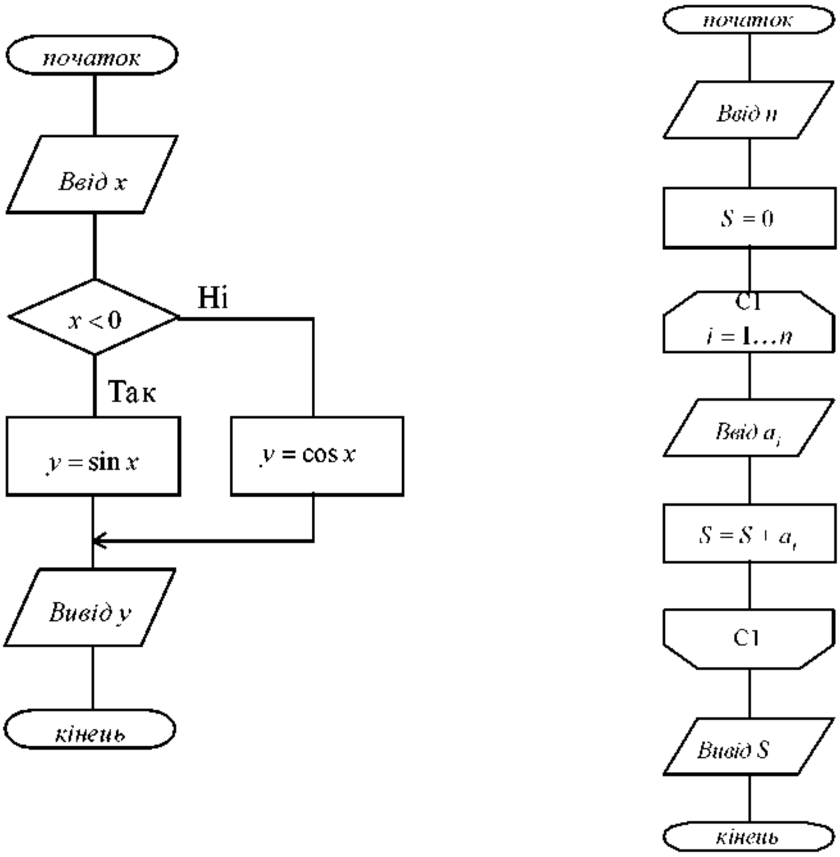


Рис. 4. Поєднання базових алгоритмічних структур у схемах алгоритмів розв’язку задач

Досвід практичної алгоритмізації привів до формування особливої методики структурної організації алгоритмів, використання якої зменшує ймовірність помилок у процесі розробки і запису алгоритмів, спрощує їх розуміння і модифікацію.

Цю методику алгоритмізації називають структурним підходом.

При структурному підході до конструювання алгоритмів їх ніби «збирають»із трьох основних (базових) структур.

Алгоритми сотування

Доволі поширеним завданням, що виникає при роботі з масивами та лінійними списками, є завдання сортування, тобто розташування елементів в порядку зростання або зменшення значень. Існує набір алгоритмів сортування. При цьому розрізняють так зване «внутрішнє» та «зовнішнє» сортування, тобто сортування структур даних, що знаходяться в оперативній або в зовнішній пам'яті комп'ютера.

При внутрішньому сортуванні всі дані, що сортуються, поміщають в оперативну пам'ять комп'ютера, де можна отримати доступ до даних в будь-якому порядку (тобто використовується модель пам'яті з довільним доступом). Зовнішнє сортування застосовують тоді, коли об'єм впорядковуваних даних надто великий для розташування в оперативній пам'яті. При цьому вузьким місцем є механізм переміщення великих блоків даних між пристроями зовнішнього зберігання даних та оперативною пам'яттю комп'ютера. Те, що фізично неперервні дані слід для зручності переміщення організовувати у блочну структуру, змушує користувачів використовувати різні методи зовнішнього сортування.

Структура алгоритмів сортування є не дуже складною, їх доволі легко реалізовують будь-якою мовою програмування.

На сучасному етапі розвитку технології програмування існує тенденція використання готових процедур сортування, вмонтованих в інструментальне програмне забезпечення. Користуючись ними, важливо розуміти механізм їх роботи, особливості того чи іншого методу.

Розглянемо деякі поширені алгоритми внутрішнього сортування.

Сортування простим вибором

На першому кроці алгоритму, починаючи з першого елемента масиву або списку, здійснюється пошук елемента, який має найменше значення, і після цього проводиться обмін місцями знайденого елемента з елементом, який розташовяний ня першому місці масиву або списку (рис. 9, а).

а) перший крок б) другий крок

Потім здійснюється пошук другого найменшого елемента шляхом подальшої перевірки значень елементів, починаючи з другого елемента. Елемент, який має друге найменше значення міняється місцями з елементом, що розташований на другому місці масиву чи списку (рис. 9, б). Цей процес пошуку елемента з наступним найменшим значенням і розташуванням його у відповідну позицію - на початок невідсортованої частини масиву, що залишилась, - продовжується доти, доки всі елементи не стануть відсортованими в порядку збільшення їх значень.

Загальна кількість операцій порівняння в алгоритмі сортування простим вибором дорівнює $n(n-1)/2$, тобто вона пропорційна n^2, а максимальна кількість перестановок - $n(n-1)$ також пропорційна n^2.

Сортування методом бульбашки (просте обмінне сортування)

Відмінністю цього методу від попереднього є те, що на кожному кроці замість пошуку найменшого елемента масиву з наступною його перестановкою два елементи масиву міняються місцями відразу, якщо тільки між ними порушується порядок: значення i-го елемента є більшим за значення (i+1)-го елемента. Порівняння поточного $X(i)$ елемента з усіма попередніми (j=1,2,...,i-1) і його перестановка при необхідності на кожному *к-му* кроці відбувається доти, доки цей мінімальний елемент не займе найбільш крайнє ліве (іноді кажуть: крайнє верхнє) положення. Тут і спостерігається аналогія з легкою бульбашкою, що здіймається вгору.

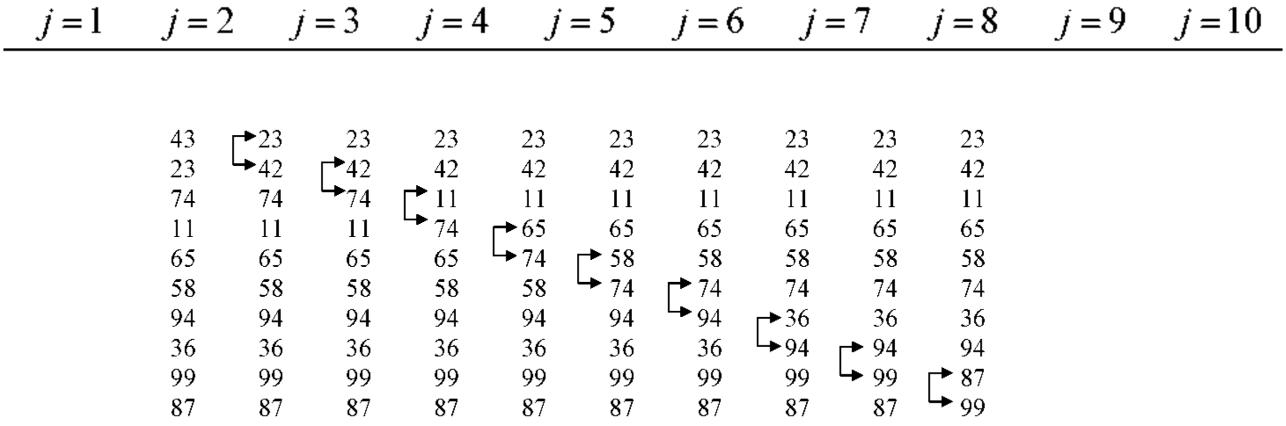
Щоб описати основну ідею цього методу, уявіть, що записи, які слід сортувати, зберігаються у масиві, розташованому вертикально.

Розглянемо цей алгоритм на числовому прикладі. Нехай задано масив чисел (42, 23, 74, 11, 65, 58, 94, 36, 99, 87). На першому кроці *(к* = 1) елементи масиву будуть переставлятися так, як подано на (рисунку 10,а).

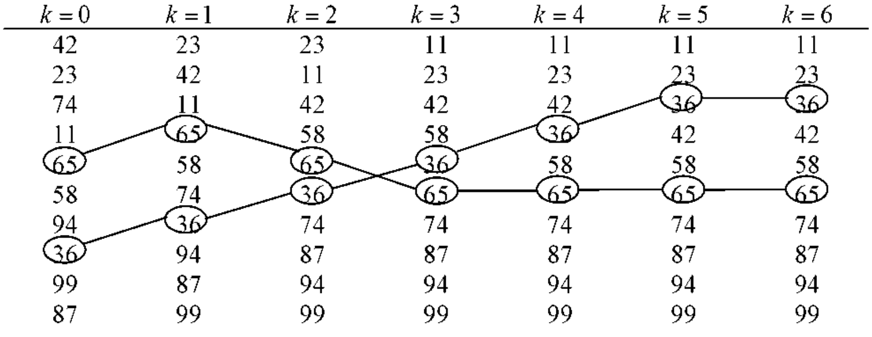
Така процедура повторюється на кожному кроці. У результаті цього в кінці кожного кроку масив буде мати вигляд, зображений на (рис. 10 б).

Як бачимо, дійсно, елементи з меншим значенням - «легкі елементи» - піднімаються до верхньої частини масиву, а «важкі» - опускаються вниз. Однак траєкторія переміщення елементів у масиві не завжди одностороння, а тому неоптимальна (прикладом є елемент зі значенням «65»).

Кількість проходів методу бульбашкового сортування може бути змінною. Його загальна ефективність залежить від початкового розташування елементів. Максимальна кількість порівнянь і кількість перестановок пропорційні n^2.



а) перший крок



б) k-ий крок

Схема алгоритму сортування методом бульбашки

Удосконалення методу бульбашки - метод *шейкер-сортування,* при якому перегляд масиву відбувається поперемінно з двох напрямків.

Сортування вставками

Нехай $1<j\leq N$ та елементи $X_1,\ldots,X_{j-1}$ уже розміщені так, що $X_1\leq X_2\leq\ldots\leq X_{j-1}$. Тоді порівнюють по черзі X_jз X_{j-1}, X_{j-2}, поки не виявиться, що елемент X_j потрібно вставити між X_jта X_{i+1}. Для цього зсувають елементи $Xi_{+1},\ldots$, X_{j-1}на одну позицію праворуч і розташовують новий елемент в позицію $i+1$.

Процес «просіювання» може закінчитись при виконанні однієї з умов:

1) знайдено елемент зі значенням, меншим, ніж X_j;

2) досягнуто лівої межі готової послідовності.

Алгоритм з прямими вставками можна вдосконалити, якщо звернути увагу на те, що готова послідовність, у яку потрібно вставити новий елемент, уже впорядкована. Використовується так званий подвійний пошук, при якому робиться спроба порівняння з серединою готової послідовності, а потім процес поділу на дві частини продовжується, поки не буде знайдена точка включення (вставки). Такий модифікований алгоритм сортування називається методом з двійковим включенням. Він не є ефективнішим за пряме включення.

Різновид сортування вставками - сортування Шелла, коли на початку весь масив ділиться, наприклад, на 8 груп по два елементи в кожній: (X_1, X_9); (X_2, X_{10}); ... ; (X_8, X_{16}). Після сортування кожної групи окремо всі елементи знову ділять, але тепер уже на 4 групи по чотири елементи в кожній: (X_1, X_5, X_9, X_{13}); ... ; $(X_4, X_8, X_{12}, X_{16})$, тобто об’єднують деякі групи в одну (X_1,X_9) *та* (X_5,X_{13}) в (X_1,X_5,X_9,X_{13}) тощо, і продовжують процес. Спосіб розбивки на групи може бути й іншим.

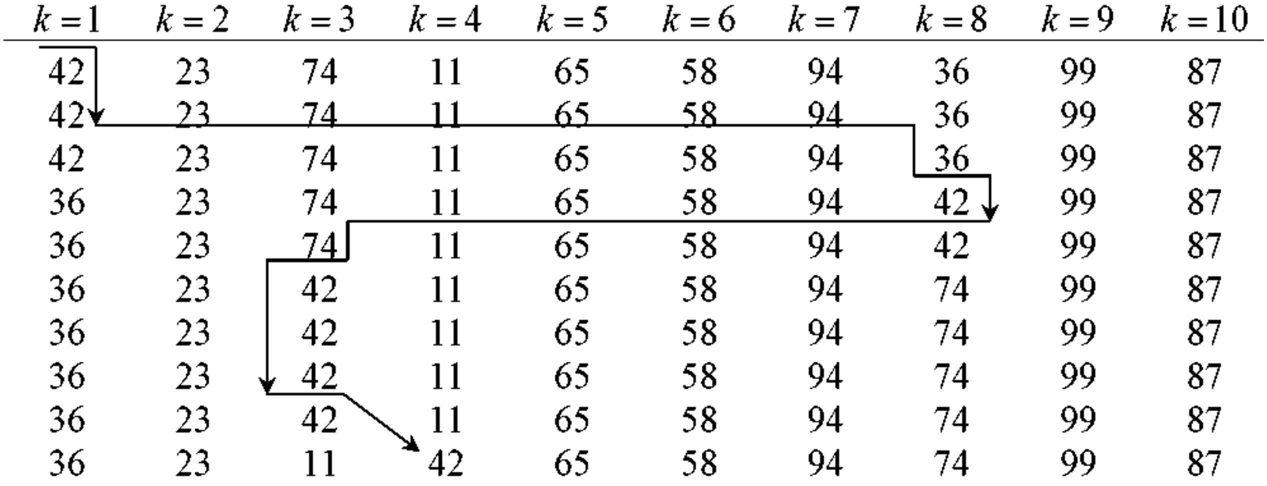
Швидке сортування

В алгоритмі швидкого сортування метою кожного кроку є розміщення наступного елемента на його кінцеву позицію у середині масиву. Масив завжди ділиться на дві частини, тому бажано вибрати опорний елемент, відносно якого перевпорядковуються елементи масиву, близький до значення медіани розподілу значень. Надалі аналогічний процес застосовується для кожної частини масиву доти, доки всі елементи не займуть свої кінцеві позиції. Розглянемо приклад:

X_i={42 23 74 11 65 58 94 36 99 87}.

В алгоритмі використовуються два індекси *i* та *j* з початковими значеннями для даного прикладу 1 та 10 відповідно.

Спочатку порівнюються елементи X_i**,** та X_jі, якщо перестановка не потрібна, то *j* зменшується на одиницю й процес повторюється. У разі, коли $X_i>X_j$, елементи X_i**,** та X_jміняються місцями, і після цього процес повторюється, але вже зі збільшенням величини *i*, а не *j*, на одиницю; *j* залишається фіксованим, поки не виникне наступна перестановка. У тому випадку знову *j* зменшиться на 1, а *i* залишиться фіксованим, і так далі (рис. 11).



$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
42	23	74	11	65	58	94	36	99	87
42	23	74	11	65	58	94	36	99	87
42	23	74	11	65	58	94	36	99	87
36	23	74	11	65	58	94	42	99	87
36	23	74	11	65	58	94	42	99	87
36	23	42	11	65	58	94	74	99	87
36	23	42	11	65	58	94	74	99	87
36	23	42	11	65	58	94	74	99	87
36	23	42	11	65	58	94	74	99	87
36	23	11	42	65	58	94	74	99	87

Схема алгоритму швидкого сортування

У результаті проходження елемент «42» став на свою кінцеву позицію, а початковий масив розбився на два підмасиви: (36, 23, 11) та (65, 58, 94, 74, 99, 87). Цей процес застосовується в подальшому для кожного з них окремо.

7. АЛГОРИТМІЧНА КУЛЬТУРА

Для того, щоб розв’язувати задачі за допомогою ЕОМ, складати програми і користуватись ними, необхідна алгоритмічна культура.

Алгоритмічна культура - це частина загальної математичної культури і загальної культури мислення, яка зумовлює формування вмінь, пов’язаних з розумінням суті поняття алгоритму і його властивостей, тобто це сукупність знань, умінь і навичок, які дозволяють успішно розв’язувати задачі.

У процесі розв’язування прикладних задач вибір алгоритму має певні труднощі. Одна з основних проблем, що виникають при переході від алгоритмів безкомп’ютерних до алгоритмів, представлених у вигляді комп’ютерної програми, пов’язана з формою їх запису, яка повинна бути зрозумілою комп’ютеру. Алгоритм повинен відповідати наступним вимогам:

1) бути простим для розуміння, переведення в програмний код та налагодження;

2) ефективно використовувати комп’ютерні ресурси і виконуватись якнайшвидше.

Оволодіння алгоритмічною культурою включає необхідність не тільки інтуїтивного розуміння суті поняття алгоритму та його властивостей, уявлення про можливість автоматизації тієї сфери діяльності, до якої цей алгоритм застосовується, а й уміння представляти алгоритм за допомогою певних засобів і методів опису, зрозумілих виконавцю, знання основних типів алгоритмів і способів їх використання.

Із практичного досвіду побудови алгоритмів і реалізації їх у вигляді програм випливають наступні висновки та рекомендації:

1. Планування етапів розробки програми (спочатку чорновий варіант алгоритму у неформальному стилі, потім псевдопрограма, далі - послідовна формалізація псевдопрограми, тобто перехід до рівня виконуваного коду). Ця стратегія організовує і дисциплінує процес створення кінцевої програми, яка буде простою для налагодження і для подальшої підтримки та супроводу.

2. Використання інкапсуляції. Усі процедури, що реалізують абстрактні типи даних (АТД), подаються в одному місці програмного тексту. Надалі, якщо виникне необхідність змінити реалізацію АТД, можна буде коректно і без особливих затрат внести якісь зміни, оскільки всі необхідні процедури локалізовані в одному місці програми.

Використання та модифікація вже існуючих програм. Один із неефективних підходів до процесу програмування полягає в тому, що кожний новий проект розглядається з “нуля”, без урахування вже існуючих програм. Як правило, серед програм, реалізованих на момент початку проекту, можна знайти такі, котрі якщо вирішують не всю поставлену задачу, то хоча б її частину. Після створення завершеної програми слід передбачити сфери, де її ще можна використати.

Практична робота

Записати число **2011** у системі числення з основою n=**2**.
Записати число **2011** у системі числення з основою n=**3**.
Записати число **2011** у системі числення з основою n=**5**.
Записати число **2011** у системі числення з основою n=**8**.

Записати число $\mathbf{2011_3}$ у десятковій системі числення.
Записати число $\mathbf{2301_4}$ у десятковій системі числення.
Записати число $\mathbf{11001_2}$ у десятковій системі числення.
Записати число $\mathbf{134_6}$ у десятковій системі числення.

Записати розклад на прості множники числа **2052**.
Записати розклад на прості множники числа **1725**.
Записати розклад на прості множники числа **3978**.
Записати розклад на прості множники числа **444444**.

Навести приклад математичного алгоритму і показати виконуваність основних властивостей.

Навести приклад алгоритму на матеріалі природознавства і показати виконуваність основних властивостей.

Навести приклад алгоритму на матеріалі уроків мови і показати виконуваність основних властивостей.

Навести приклад алгоритму на матеріалі уроків фізкультури і показати виконуваність основних властивостей.

Навести приклад алгоритму на матеріалі уроків трудового навчання і показати виконуваність основних властивостей.

Навести приклад алгоритму на матеріалі уроків образотворчого мистецтва і показати виконуваність основних властивостей.

Виконати сортування числового масиву вставкою:
(11 34 25 18 77 62 58 6 3 41)

Виконати сортування числового масиву вставкою:
(83 27 16 96 3 70 11 35 7 2)

Виконати сортування числового масиву вставкою:
(8 10 52 17 22 80 61 5 44 35)

Виконати сортування числового масиву вставкою:
(27 3 56 19 55 30 13 62 41 78)

Виконати сортування числового масиву вибором:
(26 96 79 10 1 70 32 18 45 11)
Виконати сортування числового масиву вибором:
(11 34 25 18 77 62 58 6 3 41)
Виконати сортування числового масиву вибором:
(83 27 16 96 3 70 11 35 7 2)
Виконати сортування числового масиву вибором:
(8 10 52 17 22 80 61 5 44 35)

Виконати сортування числового масиву обміном:
(11 34 25 18 77 62 58 6 3 41)
Виконати сортування числового масиву обміном:
(83 27 16 96 3 70 11 35 7 2)
Виконати сортування числового масиву обміном:
(8 10 52 17 22 80 61 5 44 35)
Виконати сортування числового масиву обміном:
(27 3 56 19 55 30 13 62 41 78)

Сформулювати визначення лінійного алгоритму, навести відповідний приклад і побудувати його блок-схему.

Сформулювати визначення алгоритму з повним розгалуженням, навести відповідний приклад і побудувати його блок-схему.

Сформулювати визначення алгоритму з неповним розгалуженням, навести відповідний приклад і побудувати його блок-схему.

Сформулювати визначення циклічного алгоритму (цикл-«доки»), навести відповідний приклад і побудувати його блок-схему.

Сформулювати визначення циклічного алгоритму (цикл-«до»), навести відповідний приклад і побудувати його блок-схему.

Сформулювати визначення циклічного алгоритму (цикл із параметром) навести відповідний приклад і побудувати його блок-схему.

Виконати тести

1. В якій науці вперше почали застосовувати алгоритми?
[ ] в фізиці[ ] в математиці[ ] в біології[ ] в інформатиці.

2. Від імені якого вченого походить слово «алгоритм»?
[ ] Евклід [ ] аль-Хорезмі[ ] аль-Горитм.

3. Назвіть перший розроблений алгоритм для використання
[ ] як зварити борщ[ ] дії під час перерви[ ] дії над числами[ ] додавання дробів.

4. Які два види алгоритмів бувають?
[ ]правильні і неправильні[ ] фізичніі хімічні[ ] числовіінечислові [ ]абстрактні та конкретні.

5. Як називаються алгоритми, які описують правила виконання арифметичниих дій над числами?
[ ] арифметичні[ ] цифрові[ ] числові[ ] послідовні.

6. Яку загальну назву мають алгоритми, де не обробляються числа? Наприклад, алгоритми виготовлення мульфільмів
[ ] мультфільмові[ ] розгалужені [ ] нечислові[ ] числові[ ] типові.

7. Як називаμться «точний і простий опис послідовності дій для розв'язування задачі»?
[ ] рецепт[ ] цикл [ ] приклад[ ] алгоритм[ ] рішення.

8. Яки геометричні фігури використовують при складанні блок-схем?
[ ] параллелепипед, ромб, прямокутник[ ] елліпс, параллелограм, прямокутник, ромб
[ ] прямокутник, ромб, коло[ ] прямокутник, трикутник, елліпс, ромб.

9. Як називається алгоритм,записаний мовою програмування
[ ] словесний[ ] програма[ ] виконавець алгоритму[ ] блок-схема.

10. Назвіть властивості алгоритму [ ] послідовність, якість, масовість
[ ] однозначність, дискретність, масовість[ ] многозначність, привабливість
[ ] формальність, типовість, циклічність.

11. Яка властивість дозволяє застосовувати алгоритм для розв'язування цілого класу конкретних задач?
[ ] однозначність[ ] масовість[ ] результативність[ ] формальність[ ] дискретність.

12. Хто перший розробив алгоритм обчислення найбільшого спільного дільника двох чисел?
[ ] Галілей[ ] Евклід[ ] аль-Хорезмі[ ] Блез Паскаль.

13. Які форми запису алгоритму вам відомі?
[ ] графічний, словесний, програмний[ ] алгоритмічні мови[ ] блок-схеми
[ ] послідовна, розгалужена, циклічна.

14. Чим відрізняється графічна форма запису алгоритму від словесної?
[ ] послідовністю дій [ ] тільки зовнішнім виглядом [ ] це зовсім інший алгоритм.

15. Які помилки спричиняють порушення структури алгоритму, дають невірні результати?
[ ] синтаксичні[ ] масові [ ] логічні[ ] нетипові.

16. Які базові структури алгоритмів Вам відомі?
[ ] послідовна, зворотня, повторювальна[ ] послідовна, розгалужена, циклічна
[ ] пряма, зворотня[ ] однозначна, масова, формальна.

17. Якою фігурою позначається умова в блок-схемах?
[ ] ромбом[ ] прямокутником[ ] паралелограмом[ ] еліпсом.

18. Якою фігурою позначається ввод та вивід даних в блок-схемах?
[ ] ромбом[ ] прямокутником[ ] паралелограмом[ ] еліпсом.

19. Якою фігурою позначається функціональний оператор (дія) в блок-схемах?
[ ] ромбом[ ] прямокутником[ ] паралелограмом[ ] еліпсом.

20. Якою фігурою позначається початок та кінець алгоритму в блок-схемах?
[ ] ромбом[ ] прямокутником[ ] паралелограмом[ ] еліпсом.

21. До якої базової структури належить алгоритм «Їсти борщ»?
[ ] лінійної[ ] розгалуженої[ ] циклічної[ ] формальної[ ] типової.

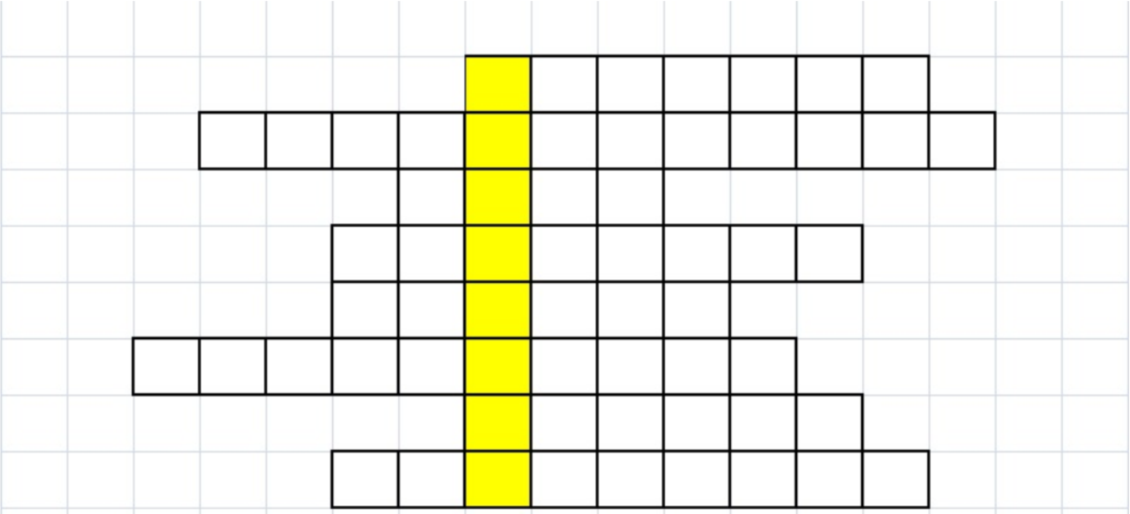
22. Напис на камені говорить: направо підеш – коня втратиш, наліво підеш – додому попадеш, прямо підеш – подарунок знайдеш.
До якої базової структури належить алгоритм?
[ ] слідування [ ] розгалуження [ ] повторення [ ] циклічної.

27. Визначте правильний алгоритм з наданих:
[ ] крок, поворот, крок, стоп[ ] крок вперед, поворот вліво, крок вперед, стоп
[ ] крок вперед, крок назад; крок вперед, крок назад,.... [ ] крок, крок, крок, стоп.

28. До якої базової структури належить алгоритм Евкліда?
[ ] циклічної [ ] слідування [ ] розгалуженої [ ] обчислювальної.

Кросворд «Алгоритм»

1. Одна з базових структур алгоритмів
2. Прізвище людини, від якого походить слово “алгоритм”
3. Алгоритм, записаний мовою програмування
4. Властивість алгоритму
5. Фігура, що в блок-схемі означає введення/виведення
6. Хто вперше застосував поняття ”алгоритм”?
7. Базова структура алгоритмів
8. Виконавець алгоритму видачі грошей.



1. Сама розповсюджена мова програмування
2. Властивість алгоритму
3. Фігура, що в блок-схемі позначає умову
4. Скінчена сукупність простих дій, виконання яких закінчується певним результатом
5. Як називався перший комп'ютер фірми IBM?
6. Система, що реалізує алгоритм
7. Встановлений зв'язок між вхідними даними та рез – том, виражений формулою
8. Спосіб запису алгоритмів

ЛІТЕРАТУРА

1. Овсяк В. Алгоритми: аналіз методів, алгебра впорядкувань, моделі, моделювання. Львів, 1996. 132 с.
2. Колодницький М. М. Технічне та програмне забезпечення комп'ютерних інформаційних технологій: Навч. посібник. Житомир: ЖІТІ, 1995. 231 с.

ЗМІСТ