Сарієнко В. В.
Пучков І. Р.

ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ

Методичні рекомендації до вивчення розділу навчального курсу «Основи інформатики з елементами програмування»

Слов'янськ
2023

УДК 378.016:511.111:004 (072)
Ч67
Рекомендовано до видання вченою радою Донбаського державного педагогічного університету (протокол №4 від 25.11.23 р.).

Рецензенти:

Чайченко В.Ф. – Кандидат педагогічних наук, доцент кафедри педагогіки та методики початкової освіти НПУ імені М. П. Драгоманова (м. Київ).

Турка Т.В. – Кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри методики навчання математики та методики навчання інформатики ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» (м. Слов'янськ).

Ч67 Числові системи : метод. рекомендації до вивчення програмного розділу навчального курсу «Основи інформатики з елементами програмування» для студентів спеціальності 013 «Початкова освіта» / ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» ; уклад.: В. В. Сарієнко, І. Р. Пучков. Слов'янськ, 2023. 49 с.

Методичні рекомендації складені у відповідності з навчальною програмою курсу «Основи інформатики з елементами програмування» для студентів спеціальності 0.13 «Початкова освіта».

Методичні рекомендації висвітлюють теоретичні, практичні та методичні питання вивчення розділу «Числові системи», який являє собою один із наріжних змістовних розділив зазначеного навчального курсу.

Питання, розглянуті в методичних рекомендаціях «Числові системи» забезпечують вчителю розуміння загального алгоритму виконання арифметичних дій і його використання в конкретних числових системах, зокрема, в десятковій. Окрім того цей матеріал має пряме відношення до математичних основ інформатики і забезпечує в ній розуміння математичної складової. Зокрема, усвідомлення алгоритму дій з числами у двійковій системі числення забезпечує розуміння операційної системи роботи комп'ютера.

УДК 378.016:511.111:004 (072)
© Сарієнко В. В., Пучков І. Р. 2023

Вступ.

Інформатика — це наука про інформацію та інформаційні процеси в природі й суспільстві, методи та засоби пошуку, збирання, одержання, опрацювання, зберігання, подання, передавання інформації та управління інформаційними процесами.

Інформатизація освіти – один з основних напрямів процесу інформатизації сучасного суспільства. Вона має забезпечити впровадження в практику програмно-педагогічних розробок, спрямованих на інтенсифікацію навчального процесу, реалізацію ідей педагогіки розвитку, вдосконалення форм і методів організації навчання.

Аналізуючи різні аспекти використання сучасних інформаційних технологій у школі, слід зазначити, що навчальні знання в цифровому вигляді потребують опису і формалізації, що виражається в створенні спеціальних програм. Цей же процес без математичного апарату здійснити практично неможливо.

Одним із наріжних математичних апаратів є специфічна числова система, яка складає основу функціонування як апаратної, так і програмної інформаційної системи.

Мова чисел, як і звичайна мова, має свій алфавіт. У тій мові чисел, якою зараз користуються практично на всій земній кулі, алфавітом служать десять цифр, від 0 до 9. Ця мова називається десятковою системою числення. Проте не за всіх часів і не скрізь люди користувалися десятковою системою. З точки зору чисто математичної вона не має спеціальних переваг перед іншими можливими системами числення, і своїм повсюдним поширенням ця система зобов’язана зовсім не загальним законам математики, а причинам зовсім іншого характеру. Останнім часом із десятковою системою серйозно конкурують двійкова та частково трійкова система, які є базовими для користування сучасних обчислювальних машин.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Основи інформатики з елементами програмування» є навчання здобувачів вищої освіти сучасним методам обробки інформації, навичкам алгоритмізації і програмування, методам розв'язання педагогічних завдань на персональному комп'ютері, формування у майбутнього фахівця знань із основ застосування персонального комп'ютера, вмінь і навичок роботи з широким спектром сучасного програмного забезпечення: операційні системи, офісні програми, комунікаційні програми, спеціальні пакети програм, мультимедійні програми, середовища програмування. Курс спрямовано на набуття здобувачами вищої освіти базових знань, на основі котрих у межах дисциплін педагогічного та психологічного циклів наступних семестрів будуть формуватися такі вміння й навички роботи з інформацією за допомогою комп'ютера й інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ), які дозволяють у подальшому всебічно, усвідомлено й ефективно використовувати комп'ютер і засоби ІКТ у своїй професійній діяльності. Майбутній фахівець має оволодіти, передусім, базовими технологіями роботи з основним типом програмних продуктів, а також створювати їх сам. І в цьому питанні *конвертація математичного матеріалу у відповідну числову систему є однією з наріжних ланок.*

1. Джерела виникнення і етапи розвитку систем числення

Під *системою числення* розуміється сукупність знаків і правил, за допомогою яких можна записати і прочитати довільне ціле невід’ємне число і яка відповідає таким умовам:

а) будь-яке число однозначно визначається в заданій системі;

б) числа заданої системи можна між собою порівнювати;

в) алгоритми операцій над числами в заданій системі взаємопов’язані між собою.

Мова чисел, як і звичайна мова, має свій алфавіт. Цей алфавіт, яким нині користуються у всьому цивілізаційному світі містить у собі десять знаків, якими позначається базова множина чисел. Вони називаються *цифрами.* Одночасно до системи математичних знаків-символів, що складають математичну мову відносяться:

1) знаки цифрової символіки, за допомогою якої записуються числа. У десятковій системі вона складається з 10 символів: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

2) знаки математичних операцій: $+, -, \cdot, :, \sqrt{\ }$

3) знаки відношень: $<, >, =, \cong, \supset, \in$ та ін.

4) буквеної символіки для позначення чисел сталих і змінних;

5) технічних символів – різного виду дужок: ( ), [ ], { }, позначення модулю $|\ |$, , $\Rightarrow$, $\sum$

6) символів позначення функцій та функціональних відношень;

7) спеціальних термінів для позначення математичних понять;

8) символів, які позначають геометричні поняття і відношення: $\perp$, $\angle$, $||$ тощо.

Числову систему саме визначають знаки цифрової символіки. На сьогодні пануючою в сучасному світі є десяткова система, яка містить

2) знаки математичних операцій: $+, -, \cdot, :, \sqrt{\ }$

3) знаки відношень: $<, >, =, \cong, \supset, \in$ та ін.

4) буквеної символіки для позначення чисел сталих і змінних;

5) технічних символів – різного виду дужок: ( ), [ ], { }, позначення модулю $| \; |$, , $\Rightarrow$, $\sum$

6) символів позначення функцій та функціональних відношень;

7) спеціальних термінів для позначення математичних понять;

8) символів, які позначають геометричні поняття і відношення: $\perp$, $\angle$, $||$ тощо.

Числову систему саме визначають знаки цифрової символіки. На сьогодні пануючою в сучасному світі є десяткова система, яка містить 10 знаків від 0 до 9.

Причини, за якими саме десяткова система виявилася загальноприйнятою, зовсім не математичного характеру. Десять пальців рук – ось той початковий апарат для рахунку, яким люди користувалися, починаючи з доісторичних часів. По пальцям зручно рахувати від одного до десяти.

Отже, природним було за основу прийняти саме число 10. Десять десятків утворюють одиницю третього розряду і т. д. Таким чином, саме рахунок по кінцівкам рук поклав початок тій системі, яка нині є пануючою в математиці.

Десяткова система числення далеко не відразу зайняла пануюче положення, яке вона має зараз. У різні історичні періоди багато народів користувалися системами числення, відмінними від десяткової. Так, наприклад, досить широкого поширення мала дванадцяткова система. Її походження пов’язане з пальцями рук (окрім великого). Кожна рука окрім великого пальця мають ще 4 пальця, кожний з яких має 3 фаланги – в сукупності 12 фаланг. За допомогою цих фаланг, перебираючи їх по черзі великим пальцем, ведеться рахунок від 1 до

12. Після цього 12 зараховується за одиницю наступного розряду.

В усній мові залишки дванадцяткової системи збереглися і до наших днів: замість того, щоб сказати «дванадцять», ми часто говоримо «дюжина». Багато предметів (ножі, виделки, чашки, столові набори і т. п.) дуже часто вважають саме дюжинами, а не десятками. Дванадцятковою системою ми користуємося і в обчисленні часу: доба – 2·12, рік – 12 місяців.

Безсумнівні залишки дванадцяткової системи числення є і в англійців, наприклад, 1 фут = 12 дюймів; у грошовій системі (1 шилінг = 12 пенсів). Зауважимо, що з математичної точки зору дванадцяткова система мала б, мабуть, певні переваги перед десятковою, оскільки число 12 ділиться на 2, 3, 4 і 6, а число 10 тільки на 2 і 5, а більший запас дільників у числа створює відомі зручності у її використанні.

Значне місце посідала дванадцяткова система в Стародавньому Римі. Римляни користувалися конкретними дробами, які замінювали абстрактні частки частинами вживаних мір. Вони зосередили свою увагу на мірі «асс» (нині він використовується як аптекарський фунт), що означала також і міру вартості. «Асс» ділився на 12 частин – **унцій**. З них складали всі дроби зі знаменником 12, тобто $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$ … $\frac{11}{12}$ (аналогія нинішніх дробів зі знаменником 10 – десяткові дроби). Кожний з дробів позначали особливим знаком, що мав свою назву. Будь-яку величину можна було виражати за допомогою унцій. **Унція** – це $\frac{1}{12}$ величини. Наприклад, замість того, щоб сказати «Я виконав $\frac{1}{12}$ частину роботи» говорили «Я виконав унцію роботи». Похідними були назви 2 унції = $\frac{1}{24}$, 4 унції = $\frac{1}{48}$ … Три унції називали чвертю, чотири унції – третиною, шість унцій – половиною. Унціями і нині користуються при роботі з дорогоцінними металами.

Щоб поліпшити методи лічби, раціоналізувати їх, деякі народи почали групувати числа відповідно кількості об'єктів у певній скінченій множині. Зокрема, лічити п'ятірками відповідно до кількості пальців на руці. В цьому разі число 5 позначалося словом *рука*. Число 10 – дві руки. Саме в цьому напрямку в основному розвивалися натуральні числа, що й привело до створення десяткової системи числення.

Числа сукупності посідали досить довго значне місце в системах числення. Прикладами таких сукупностей є поняття пари (три пари взуття), трійка (трійка коней), комплект (комплект посуду –12, пів комплект – 6), молодий місяць – 28 днів (три молодих місяці – 84 дні). З часом з технічним розвитком з'явилися й інші сукупності: пістолетна обойма (8 куль), автоматний ріжок (30 куль) та ін.

Як залишок групової лічби можна назвати лічба *дюжинами*, яка для деяких груп предметів (сорочок, посуду, столових приборів) збереглася до наших днів. Дюжина становила одиницю лічби (дюжина дюжин – грос; дюжина гросів – маса).

Довгий час «межовим» числом у багатьох народів, у тому числі й у слов'ян, було число 40. У слов'янській лічбі число 40 позначало невизначено велику множину. Про це свідчать релігійні звичаї і народні повір'я. Назва комахи «сороконожка» означає не те, що в неї 40 ніжек, а те, що їх багато.

Цікава історія числа 60. У стародавньому Вавилоні, культура якого, зокрема й математична, була досить висока, число 60 вважалось числом божим. 60 – число вавилонських богів. Відповідно до цього й система числення число 60 вважала вузловим. Відповідно до однієї з гіпотез, шестидесяткова система числення у Стародавньому Вавилоні пов'язана з кількістю днів у році. Вавилоняни вважали, що в році 360 діб, що, природно, пов'язувалося з числом 60. Ця система, як і дванадцяткова, збереглася і до наших днів. Наприклад, у розподілі години на 60 хвилин, а хвилини – на 60 секунд і в аналогічній системі вимірювання кутів: 1 градус = 60 хвилин, 1 хвилина = 60 секунд).

Шістдесяткові дроби були постійним знаряддям наукових обчислень – спочатку грецьких, потім арабських і середньовічних європейських учених аж до XV ст.., поки їх не змінили десяткові дроби. Однак в астрономії вчені всіх народів користувалися шістдесятковими дробами аж до XVII століття, називаючи їх астрономічними дробами.

Однак, ця система, що вимагає шістьдесят різних знаків, виявилась досить громіздкою і менш зручною для складних обчислень.

Параллельно з нею певні народи, наближені до Вавилону, користувалися шестирічною системою.

Вона певним чином узгоджувалася з дванадцятковою системою, в якій ключовим було число 4 (12 місяців ділилися на 4 чверті по 3 місяці. Коло взаємно перпендикулярними прямими ділиться на 4 рівні частини, при цьому висок був перпендикулярний горизонтальній поверхні. Земля має 4 частини світу та ін.). Отже число 4 відігравало особливу роль в дванадцятковій системі. Таку ж роль відігравало й число 6, як половина від 12.

Наряду з шестирічною системою історія математики приділяє увагу й числу 7. Цікаво, що в числовій культурі багатьох народів число 7 увійшло в легенди, приказки, прислів'я як синонім чогось великого, непорушного. Наприклад, французи, присягаючи, говорять: «твердо, як сім». У грецькому мовленні, яке з православ'ям перейшло до східної Європи, перейшло виділення числа 7 як чогось закінченого, особливого: «Сім чудес світу», «Сім мудреців», «Сім раз відмір –один раз відріж», «На сьомому небі», «за сьома печатками», «Де сім няньок, там дитя без ока», «Один з сошкою, а семеро з ложкою» та багато інших.

За свідченням відомого дослідника Африки Стенлі, у африканських племен була поширена п’ятіркова система числення. Ця система теж пов’язана з будовою людської руки.

Двадцятковою числовою системою користувалися народи Південної Америки. Такою ж двадцятковою системою користувалися кельти, що населяли Західну Європу, починаючи з другого тисячоліття до нашої ери. Деякі сліди двадцяткової системи збереглися в сучасній французькій мові: наприклад, «вісімдесят» французькою перекладається як «чотири рази по двадцять». Число 20 зустрічається і у французькій грошовій системі: основна грошова одиниця – франк дорівнював 20 су.

З названих систем числення (дванадцятковою, п'ятирічною, шістдесятковою та двадцятеричною), що зіграли поряд з десятковою помітну роль у розвитку людської культури, всі, крім шістдесяткової, джерела якої неясні, пов'язані з тим чи іншим способом рахунки на пальцях рук (або рук і ніг), тобто мають, подібно до десяткової системи, безсумнівне «анатомічне» походження.

Як показують наведені вище приклади (їх число можна було б значно збільшити), численні сліди цих числових систем збереглися донині й у мовах багатьох народів, й у прийнятих фінансових системах, й у системах заходів. Однак для запису чисел і для виконання тих чи інших обчислень математика практично завжди користується десятковою системою.

Отже, на перших порах число пов’язувалося з обмеженою множиною конкретних об’єктів. Та з часом прийшло розуміння того, що кожне окреме число – це властивість сукупностей, предмети яких можна зіставити один з одним. Так виникли абстрактні числа, тобто такі, за допомогою яких можна було б лічити будь-які предмети. Це абстрагування дало поштовх до виникнення арифметичних операцій. Основною операцією при цьому є додавання, а через нею вже формуються операції віднімання, як протилежна додаванню, множення, як форма додавання декількох однакових чисел, та ділення, як операція, обернена множенню.

Всі ті системи числення, про які ми говорили вище, будуються за одним загальним принципом. Вибирається деяке число p - основа системи числення, і кожне число N представляється у вигляді комбінації його ступенів з коефіцієнтами, що набирають значення від 0 до p – 1, тобто у вигляді $a_к \cdot p^к + a_{к-1} \cdot p^{к-1} + \ldots + a_i \cdot p + a_0$. Далі таке число скорочено записується як $(a_к a_{к-1} \ldots a_1 a_0)_p$.

У цьому записі значення кожної цифри залежить від місця, яке ця цифра займає. Наприклад, серед 222 двійка бере участь тричі. Але сама права з них означає дві одиниці, друга справа – два десятки, тобто двадцять, а третя – дві сотні. (Тут ми маємо на увазі десяткову систему. Якби ми користувалися якоюсь іншою системою числення, скажімо з основою p, то ці три двійки означали б відповідно величини 2, $2p$ і $2p2$.) **Системи числення, побудовані таким чином, називаються позиційними.**

Існують інші – **непозиційні системи** числення, побудовані інших принципах. Загальновідомий приклад такої системи – так звані *римські цифри*. У цій системі є певний набір основних символів, а саме одиниця (I), п'ять (V), десять (X), п'ятдесят (L), сто (C), п’ятсот (D), тисяча (M) і т. д., і кожне число подається як комбінація цих символів. Наприклад, число 88 у цій системі запишеться так: LXXXVIII. У цій системі сенс кожного символу не залежить від того місця, на якому він стоїть. Так, у наведеному вище запису числа 88 цифра X, беручи участь три рази, щоразу означає одну й ту саму величину — десять одиниць.

Найдосконалішими серед непозиційних систем числення були алфавітні позначення чисел. Такими були давньогрецька, слов'янська, єврейська, сірійська, грузинська, вірменська числові системи.

Скажімо, у древніх греків числа від 1 до 9 вони позначали першими буквами алфавіту (α, β, γ, δ, …,θ). Для чисел 10, 20, 30, …, 80, 90 використовувалися наступні дев'ять літер (ι, κ, λ, μ, …, ς), а для чисел 100, 200, 300, … 900 – наступні дев'ять літер (ρ, ς, σ, …, ω).[1/] Так, число 423 записувалося як $\overline{\tau\kappa\gamma}$. Риска зверху ставилася, щоб відокремити число від слова. Ця система теж була дуже незручною. Наприклад, при порівнянні чисел неможливо побачити, що σ (300) у 10 разів більше за λ і у 100 разів більша за γ. Важко було і виконувати арифметичні дії. Наприклад, $\bar{\eta}$ (7) + $\bar{\varepsilon}$ (5) = $\overline{\iota\beta}$ (12). Були й інші недоліки, які гальмували розвиток обчислень і математики в цілому.

Слов'янська система позначення чисел була схожа на грецьку, якою користувалися візантійці, причому числові значення мали тільки ті лов'янські букви, які відповідали буквам грецького алфавіту. Така система перейшла і в нумерацію Русі разом із грецькими письменами та православною культурою, яка зберігалася майже до кінця XVII століття, хоч деякими деталями і відрізнялася від неї.

[1/] Зазначимо, що давньогрецький алфавіт відрізнявся від сучасного кількістю літер, їх було 27, нині ж – 25.

Водночас уся Західна Європа давно вже користувалася більш зручною, так званою арабською десятковою системою. Причиною цього стало 240-річне татаро-монгольське панування. Після його розвалу вже наприкінці XVI століття на Русі з’являються перші друковані книги. Запис чисел у них ще здійснювався в літерній системі.

З розвитком стосунків між різними країнами, а також у зв’язку з бурхливим розвитком математичної науки виникла потреба заміни непозиційних систем більш зручними й уніфікованими системами. У цих пошуках математика звернулася до позиційних систем. Суть позиційної системи в тому, що один і той же знак (символ) може позначати різні числа залежно від місця цього знака (позиції) у запису числа. Місце, яке займає цифра в запису числа, називається розрядом. У позиційній системі кількість знаків обмежується певною кількістю. Порозрядний принцип запису числа означає, що якщо система базується на *n* знаках (цифрах), кожний з яких визначає певну кількість числових одиниць, то *n* одиниць певного розряду становлять одну одиницю наступного (вищого) розряду. Число *n* у цьому разі, називається *основою системи числення.*

Першою позиційною системою з відомих науці була шістдесяткова система, яку використовували в древньому Вавилоні. Вавилоняни використовували лише два клинописних знаки, один з яких позначав числа 1 і 60, а другий – 10 і 600. При запису чисел від 1 до 60 знаки для чисел від 1 до 10 повторювалися стільки разів, скільки в цьому числі одиниць та десятків, а числа кратні 60 від 60 до 59·60 позначали тими ж значками, які вказували лише множник біля 60.

Окрім основних видів (позиційної і непозиційної) систем, існує і так звана мішана система, яка містить у собі елементи декількох систем. Прикладом такої є система вимірювання часу. Століття – десяткова система; рік, доба – дванадцяткова; година, хвилина – шістдесяткова; долі секунди – десяткова.

Але найбільшого поширення здобула позиційна десяткова система числення. Своїм корінням вона поринає в далеку давнину. Ще видатний давньогрецький учений Архімед у III столітті до нашої ери розробив систему числення, яка ґрунтується на числі 10. Вона давала можливість за допомогою невеликої кількості знаків записувати будь-яке велике число.

У сучасному вигляді десяткова система склалася приблизно в VI столітті нашої ери в Індії. У цей час в Індії панували араби, тому цю десяткову систему часто називають арабською. Значним досягненням індійської математичної думки було введення спеціального знака для позначення нуля. Це внесло кардинальні зміни в запис числа і десяткова система остаточно сформувалася в такому вигляді, якою ми її знаємо сьогодні.

Важливим кроком у розвитку математичної науки було видання книжки Леонтія Магницького "Арифметика, сиречь наука числительная". Вона була видана в 1703 році слов'янською мовою, але розрахунки в ній виконувалися вже в позиційній десятковій системі. Тривалий час ця книга була настільною книгою всіх освічених людей Росії і стала причиною швидкого переходу математики в Росії на індійську десяткову систему числення.

МОВА СИМВОЛІВ

Уведення символів для чисел має величезне значення. Кожному зрозуміло, на скільки легше написати символ, який означає число «п'ять», ніж слова «клас множин, еквівалентних сукупності пальців на руці».

Уже на порівняно ранніх ступенях розвитку первісної культури поряд із звуковою мовою людина користувалась і жестами, що виражали насамперед її емоції. Існувала і своєрідна «мова символів».

З розвитком господарства з'явилася потреба робити Міні записи, а з розвитком обміну доводилось не тільки лічити, а й запам'ятовувати відлічені кількості. Спочатку пальці були єдиними «замінниками» відлічуваних предметів. Потім такими «замінниками» стали зарубки на палиці або кістці, пучки паличок, купки камінців тощо.

Найпримітивніша нумерація–«словесна», коли числа записують словами. Нею користувалися стародавні фінікіяни і навіть деякі арабські письменники (ал-Караджі).

Завдання всякої нумерації — зобразити будь-яке натуральне число за допомогою невеликої групи спеціальній знаків (цифр). Цього можна було досягти за допомогою єдиного знака «1» (одиниця). Кожне натуральне число тоді записувалося б повторенням знака «1» стільки разів, скільки в ньому міститься одиниць. Додаваний звелося б до простого приписування одиниць, а віднімання – до їх ви креслення.

Практика вимагає вміння правильно називати і записувати числа, якими б великими вони не були. Якби кожне число мало свою окрему назву і його позначали на письмі окремим знаком, то всі назви і знаки не можна було б запам'ятати. На різних етапах розвитку людства у різних народів існували для чисел свої спеціальні системи позначень. *Система числення,* або *нумерація,* є сукупність знаків, за допомогою яких можна записати й назвати будь-яке число.

На сучасному етапі математика набула такої глибини розвитку, що стала універсальним інструментом для становлення та досліджень будь-якої науки. Завдяки цій універсальності вона зайняла особливе місце в системі наук. Її методи використовуються як у технічних областях, так і в суто гуманітарних. Тому її не можна віднести ні до гуманітарних, ні до природничих. Рівень абстрактності в математиці є таким високим, що нині вона розглядає не тільки кількісні відношення і просторові форми реального світу, а й будь-які уявні відношення і форми, які мають свої основи в реальному світі. Це надає можливість значно розширити поле математичних досліджень, вторгнутися в такі заповідні області як психіка, біоенергетика, які довго вважалися недоступними. Це стало наслідком високого рівня абстрагування від конкретного змісту об’єктів, що вивчаються. Але абсолютний відрив від змісту неможливий, бо без нього втрачається смисл самої математики. Високий рівень абстракції і конкретний зміст – це дві протилежності єдиного цілого, містком між якими виступає *модель.*

Математична модель – це наближений опис будь-якого класу явищ реального світу, виражений за допомогою математичної символіки [16, с.21]. Модель – це не саме явище, а його наближений образ, позбавлений низки властивостей цього явища. Наприклад, у фізиці в молекулярно-кінетичній теорії для розкриття властивостей та встановлення закономірностей поводження і взаємодії газів розглядається поняття ідеального газу. У реальності газоподібна речовина складається з дрібних часточок – молекул, між якими діють різні сили взаємодії. Розміри молекул дуже малі порівняно з відстанями між ними, тому й сили взаємодії між ними надто малі. Тому для спрощення міркувань та розрахунків прийнято об’ємом молекул та силами взаємодії між ними зневажати і вважати, що взаємодія між молекулами полягає лише у співударах, причому прийнято вважати, що при співударах енергія не витрачається. Завдяки введенням таких спрощень вивчення реального газу замінюється вивченням його наближеного образу – моделі під назвою ідеальний газ. Метод моделювання є дуже ефективним засобом дослідження, бо надає можливість розглядати певні властивості та відношення об’єкта відокремлено від самого об’єкта, узагальнювати ці властивості, поширюючи їх на інші однорідні об’єкти.

Математичні моделі побудовані на відволіканні від будь-яких властивостей об’єктів реального світу і зосереджують увагу лише на їхніх кількісних і порядкових відношеннях та просторових формах. А засобом утворення такої моделі стало *число*. Воно виконує роль однієї із загальних властивостей скінченної множини – її *чисельності.*

Розглядаючи множину будь-яких елементів, у ній можна виділити дві характеристичні властивості: якісну і кількісну. Якісна визначає, з яких елементів складається множина, кількісна – скільки елементів у множині. Кількісна властивість множини власне і є *чисельність.*

Виникнення чисел, як і всіх інших математичних понять, було результатом практичної діяльності людини. Уже на стародавніх етапах розвитку суспільства наявною була потреба в кількісній оцінці продуктів діяльності. Серед багатьох задач була і задача встановити, чи рівна кількість елементів у множинах якихось побутових об’єктів, а якщо ні, то в якій множині їх більше і на скільки більше. Наприклад, чи є приріст гурта худоби, або чи вистачить списів кожному воїну? На перших порах порівняння двох множин відбувалося на основі зіставлення елементів однієї множини з елементами іншої, тобто на основі встановлення взаємно однозначної відповідності між множинами. Якщо така відповідність була наявна, то і множини вважалися складеними з однакової кількості елементів. Якщо ж ні, то множина, в якій залишались елементи, мала більше елементів ніж інша. Цей спосіб не потребував переліку. Але його не завжди можна було використовувати. Наприклад, неможливо було таким зіставленням порівняти два табуни, визначити на відстані, у якому табуні більше коней. Тому для порівняння почали використовувати множини-посередники, наприклад, мішки з камінцями, або зарубки на палицях, і вже зіставлялися не самі об'єкти, а їхні множини-посередники.

З часом, унаслідок необхідності фіксувати ту чи іншу кількість об'єктів, виникла символіка у формі чисел, яка значно спростила порівняння. Відпала необхідність носити мішки з камінцями або палиці із зарубками. Унаслідок зіставлення символів кількості об'єктів виникла письмова нумерація, а разом з нею й усна. Числа стали універсальною множиною, яка дала змогу порівнювати будь-які множини незалежно від їхньої природи, місця розташування, сприйняття. Числення вийшло на абстрактний рівень. На цьому ґрунті і виникло поняття *числа*.

Виникнення поняття числа надало можливість вивчати кількісні відношення незалежно від об'єктів, які з ними зіставляються. Так з'явилася теоретична наука про числа, яку назвали "арифметика".

Оскільки з розвитком господарчої діяльності ускладнювалися й арифметичні розрахунки, виникла і потреба у розширенні множини чисел. Тому, щоб відрізнити від нових числових множин множину, за допомогою якої виконувалася лічба, їх стали називати *натуральними числами* (від слова *nature* – природа), тобто числами, за допомогою яких обчислювалася кількість об'єктів з навколишнього світу. Термін "натуральне число" вперше використав римський учений Боецій (475-524 рр. н.е.).

2. Число як кількісна характеристика скінченної множини

Кожна математична теорія вивчає множини з тими чи іншими властивостями елементів та відношеннями між ними. Коли ми розглядаємо кількісну властивість якоїсь скінченної множини, то, здебільшого, нам доводиться розв'язувати одну з двох задач:

1) встановити кількість елементів у заданій множині, або, іншими словами, дати кількісну оцінку множині;

2) встановити упорядкованість заданої множини.

Обидві ці задачі розв'язуються за допомогою операції *лічби*. Будь-яка лічба елементів заданої скінченної множини є встановлення взаємно однозначної відповідності між нею та частиною деякої стандартної множини, яка прийнята для фіксування елементів будь-якої множини.

Найменша кількість елементів, яку може мати непорожня множина, це один. Така множина називається *одноелементною*. Тому числовий ряд починається з числа 1.

Процес лічби (встановлення кількості) елементів деякої конкретної множини за допомогою чисел полягає в тому, що ми встановлюємо взаємно однозначну відповідність між елементами множини й елементами числового ряду, починаючи з одиниці. При цьому нас не цікавить, якому елементу яке число відповідає. Головне тут – яке число відповідає останньому елементу. Яке число – стільки й елементів, тобто *число* в цьому разі *є кількісною характеристикою скінченної множини.*

Якщо ж насамперед нас цікавить, у якому порядку розташовані елементи даної множини, то істотним є питання, якому елементу яке число відповідає. Природно, що останньому елементу буде відповідати таке ж число, як і в кількісній характеристиці множини. Наприклад, щоб визначити порядок елементів якоїсь множини з чотирьох елементів, ми говоримо: “перший”, “другий”, “третій”, “четвертий”. На цьому процес лічби закінчується, бо названі всі елементи. Підрахувавши елементи цієї множини, ми говоримо, що в ній чотири елементи, тобто отримуємо кількісну характеристику заданої множини. Але щоб її одержати, використовуються числові символи, які мають таке ж позначення, як і кількісні. У цьому моменті кількісна характеристика множини й порядковий номер останнього елементу множини збігаються. Число, що відповідає кількості елементів заданої скінченної множини, ще називається *потужністю множини* (інколи можна зустріти термін *чисельність*).

Розглянемо поняття натурального числа як моделі переліку предметів.

Система модельної побудови тих чи інших понять передбачає іноді дуже складні структури. Вони представляють собою як одноступеневі, так і багатоступеневі конструкції. Одноступеневі моделі – це такі, які є безпосереднім спрощеним образом об’єкта, що вивчається. Це, наприклад, поняття математичного маятника. Воно відрізняється від реального маятника безпосередньо тим, що в ньому не враховується сила опору повітря, тертя в точці закріплення та інші фактори. Багатоступеневі моделі – це такі, які пов’язують об’єкт-прообраз з кінцевим образом за допомогою побудови системи моделей. Наприклад, щоб побудувати просторову модель тіла, треба спочатку побудувати площинні моделі його перерізу. Тобто одна модель ґрунтується на іншій. У цьому разі кожна нова модель-надбудова виступає наслідком попередньої зі своїми додатковими властивостями. Попередня ж модель має узагальнювальні властивості відносно неї і дає можливість побудувати клас моделей-надбудов.

Як же у цій системі виглядає теорія натуральних чисел, тобто що представляє собою *натуральне число як математична модель переліку предметів*?

Множини, між елементами яких можна встановити взаємно однозначну відповідність, називаються *рівнопотужними*. Відповідно до цього всі множини, які не перетинаються, поділяються на класи рівнопотужності, оскільки взаємно однозначна відповідність визначає розбиття множин на класи еквівалентності:

1°. $M \Leftrightarrow M$ – *рефлексивність;*

2°. $[M_1 \Leftrightarrow M_2] \Rightarrow [M_2 \Leftrightarrow M_1]$ – *симетричність;*

3°. $[M_1 \Leftrightarrow M_2 \wedge M_2 \Leftrightarrow M_3] \Rightarrow [M_1 \Leftrightarrow M_3]$ – *транзитивність.*

Нехай задана якась скінченна множина P, яка має потужність $p=n(P)$. Зберемо в один клас усі рівнопотужні множини, які мають потужність p. Тобто, якщо P – множина днів у тижні, то в один клас із нею попадуть всі многокутники, що мають сім вершин, усі слова, що складаються із семи букв, кольори райдуги та ін. До складу іншої множини K, не рівнопотужної з P, і яка має потужність k, зберемо всі рівнопотужні множини, що мають потужність k. Наприклад, якщо K – множина пальців на руці, то в один клас із нею попадуть кількість дільників числа 16, кількість робочих днів у тижні, кількість літер у слові “число” та інші, що мають потужність 5, і так далі. У результаті цього процесу всі скінченні множини будуть розподілені за класами рівнопотужності. Отже, будь-які дві множини одного класу будуть рівнопотужними, а будь-які дві множини різних класів – не рівнопотужними.

Загальною властивістю множин одного класу є те, що вони мають однакову потужність. Оскільки потужність кожного класу рівнопотужних множин різна, то вона позначається певним символом.

Звідси випливає, що потужність рівнопотужних множин позначаються однаковими символами, а не рівнопотужних – різними. Потужність (кількісну характеристику) множин одного класу еквівалентності і називають *натуральним числом.* Наприклад, кількісна характеристика множин, рівнопотужних множині днів тижня, є натуральне число “сім”, а кількісна характеристика множин, рівнопотужних множині пальців на руці є натуральне число “п’ять”.

Отже, ***кількісне натуральне число – це кількісна характеристика класу скінченних рівнопотужних множин.***

Із цього означення випливає, що кожній скінченній множині P відповідає тільки одне натуральне число $p = n(P)$, але кожному натуральному числу p відповідають різні рівнопотужні множини одного класу еквівалентності. Тому числу “п’ять” буде відповідати і множина сторін п’ятикутника, і множина літер у слові “число”, і множина пальців на руці і т.д.

Упорядковану множину натуральних чисел називають *натуральним рядом* або *рядом натуральних чисел.* Множину натуральних чисел позначають символом N.

Виконуючи підрахунок елементів заданої множини P, наприклад, днів у тижні, ми починаємо рахувати з одиниці і закінчуємо числом сім. Очевидно, що кількість днів з понеділка до п’ятниці не перевищує кількості днів від понеділка до суботи, а кількість днів від понеділка до суботи не перевищує кількості днів від понеділка до неділі. Із цього факту доцільно ввести поняття *відрізка натурального ряду.*

ОЗНАЧЕННЯ. ***Відрізком N_a натурального ряду називається множина натуральних чисел, що не перевищують натурального числа а**, тобто* $N_a = \{x / x \in N, x \le a\}$.

Уведення поняття відрізка натурального ряду дає можливість уточнити поняття лічби елементів множини. У процесі лічби ми кожному елементу з множини ставимо у відповідність один елемент з відрізка натурального ряду.

<u>*ОЗНАЧЕННЯ*</u>. ***Лічбою елементів множини А називається встановлення взаємно-однозначної відповідності між елементами цієї множини і відрізком натурального ряду*** N_a [17, с.125].

Найбільш істотним питанням у лічбі є встановлення писемної та усної нумерації. З теоретико-множинних позицій це виглядає так: кожна множина має певну кількість елементів, тобто чисельність. Але для її фіксації треба ввести певні позначення і цим позначенням дати назву. Оскільки це явище цілком умовне, то в процесі життєвої практики в різних народів виникла своя символіка в позначенні. Наприклад, в арабській системі лічби чисельність множини, що має один елемент {|} позначена символом 1, чисельність множини, що має два елементи – {||} – символом 2, три елементи – {|||} – 3, чотири елементи – {||||} – 4, п’ять елементів – {|||||} – 5 і т.д. Відповідно цим символам була дана і назва “один”, “два”, “три”, “чотири”, “п’ять” і т.д. У системі дій ця нумерація виглядає так. Наприклад, 2+3. Це значить, що до елементів множини {||} треба приєднати елементи множини {|||}. Одержимо нову множину {|||||}. У символічній чисельній формі це буде виглядати як 2 + 3 (приєднання будемо позначати символом +. Але чисельність множини {|||||} позначається символом “5”, значить 2 + 3 = 5.

Аналогічно в плані нумерації виглядає і дія віднімання.

Число “нуль”

Розглядаючи множини, ми говорили, що вони можуть бути порожніми або непорожніми. Узагальнюючи поняття рівносильності множин, вважаємо, що всі порожні множини рівносильні між собою, тобто утворюють особливий клас, клас порожніх множин, тобто множин, що не мають елементів.

Розгляд кількісної характеристики непорожніх скінченних множин привів нас до поняття натурального числа. Очевидно, що порожня множина є теж множина, і, як і всі множини, вона має свою потужність (кількісну характеристику). Але вона відрізняється від потужності (кількісної характеристики) непорожніх множин тим, що непорожні множини містять у собі хоч би один елемент, а порожня множина їх не має. Тому й символ, яким позначається потужність порожньої множини, відрізняється від позначень потужності інших множин. Вона позначається символом “0” і має назву “нуль”. Ця назва утворилася від латинського слова “*nullus*” (нуллюс) – *ніякий*. Таким чином можна записати $n(\varnothing) = 0$. У прикладному значенні число “нуль” як потужність порожньої множини свідчить про нейтральний стан. Наприклад, в економіці – що немає ні прибутку, ні збитку; у механіці – що тіло не рухається ні в заданому, ні в зустрічному напрямку і т.д.

2. Дроби

Арифметика вивчає додатні цілі й дробові числа та дії над ними. Алгебра починається по суті з введення від'ємних чисел, тобто з формування першої серед найважливіших числових множин — множини *цілих* чисел і ширшої множини *раціональних* чисел.

Запас чисел розширюється тоді, коли в розгляд вводяться ірраціональні числа. Всі раціональні та ірраціональні числа утворюють множину *дійсних* чисел. Строга побудова множини дійсних чисел подається звичайно в курсі математичного аналізу, а також у теоретичній арифметиці.

Нарешті, множина дійсних чисел розширюється введенням *комплексних чисел.*

Для всіх числових множин чисел справджуються основні арифметичні закони, тобто комутативний і асоціативний закони додавання і множення, дистрибутивний закон, який пов'язує ці дві операції, і закон відсутності дільників нуля.

Числа певного виду або типу вважають відомими, коли відомі правила, за якими виконують дію над ними. Отже, щоб задати якісь числа, досить сформулювати логічно незалежні одне від одного правила-аксіоми (постулати, «вимоги») і вивести з них всі закони дій над цими числами вже дедуктивним способом. Як відомо, в алгебрі основними є операції додавання, множення і піднесення до натурального степеня, операції ж віднімання, ділення і добування кореня є оберненими до основних. Отже, при побудові теорії будь-яких чисел ми повинні постулювати правила їх додавання і множення (піднесення до натурального степеня можна розглядати як окремий випадок множення). Але, крім того, треба ще й задати відношення рівності для побудованих чисел. На перший погляд ця вимога здається зайвою. Очевидно, що «рівними» ми вважаємо такі числа, які справді однакові; але ось тут і можуть виникнути труднощі: навіть в множині звичайних дробів важко на перший погляд впевнитись у тому, що, наприклад, дроби $\frac{49}{91}$ і $\frac{35}{65}$ однакові. Тому вже в теорії дробів відношення рівності задають так: дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ рівні тоді і тільки тоді, коли $ad = bc$.

Отже, щоб визначити числа того чи іншого виду, треба визначити (аксіоматизувати) поняття їх рівності, суми і добутку, а потім показати справедливість основних арифметичних законів. При цьому треба мати на увазі, що означення рівності, суми і добутку чисел нової множини не повинні суперечити відповідним поняттям тієї системи чисел, яка підлягає розширенню.

З виникненням уявлень про цілі числа виникли й уявлення про частини одиниці – частини цілого конкретного об’єкта, тобто про *дроби.* Основним джерелом виникнення дробів є процес вимірювання, який з’явився майже одночасно з лічбою. В основі будь-якого вимірювання завжди лежить якась величина (довжина, площа, об’єм). Вибір тієї чи іншої одиниці, яка є основою системи мір, зумовлювався конкретною історичною обставиною.

З виникненням уявлень про цілі числа виникли уявлення і про частини одиниці, тобто про частини цілого певного конкретного предмета.

З появою натурального числа *n* виникло уявлення про дріб виду.

$\frac{1}{n}$, який називають *аліквотним.*

Поява аліквотних дробів характерна для початкового розвитку поняття числа. На перших порах існували тільки двійкові дроби, тобто дроби виду $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots$ Основою таких дробів є двійковий поділ речі. Наступним кроком були дроби з потрійним двійковим поділом $\frac{1}{3}$ частини речі, тобто дроби виду $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24} \ldots$

АЛІКВОТНІ ДРОБИ

Отже, *аліквотні* дроби – це дроби з чисельником 1.

Необхідність в дрібних числах виникла в результаті практичної діяльності людини. Потреба в знаходженні частини від цілого (одиниці) з'явилася у наших предків при розподілі здобичі після полювання. Другою суттєвою причиною появи дрібних чисел слід вважати вимір величин за допомогою обраної одиниці виміру.

Аліквотні дроби єгиптяни часто прагнули представити у вигляді суми менших аліквотних дробів, наприклад; $\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$.

Єгипетський дріб в математиці – це сума кількох аліквотних дробів.

Єгипетський дріб являє собою додатне раціональне число виду $\frac{a}{b}$.

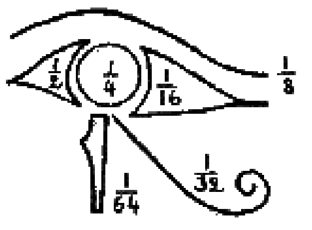
Наприклад, єгипетський дріб може бути записаний у вигляді дробу $\frac{43}{48}$.

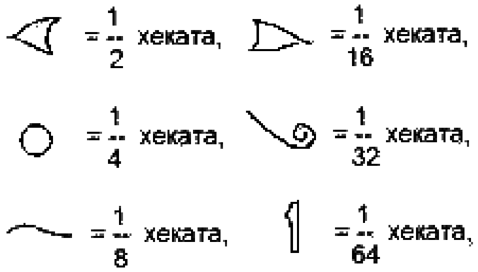
Єгиптяни всі дроби записували як суми часток, тобто дробів виду

Наприклад: $\frac{8}{15}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$; $\frac{7}{36}=\frac{1}{9}+\frac{1}{12}$; $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ ...

Розглянемо задачу: *«Розділити 7 хлібин між 8 людьми».* Якщо розрізати кожну хлібину на 8 частин, доведеться провести 49 розрізів. А по-єгипетськи ця задача розв'язувалася так: $\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, тобто, у цьому разі доведеться зробити майже в три рази менше розрізів.

Існували й інші форми запису дробів. Наприклад для запису дробів від $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{64}$ використовували частини, які утворювали так зване «око Гора».





Єгипетські дроби довго використовувалися в стародавній Греції і згодом математиками всього світу застосовували їх аж до середньовіччя. Наприклад, Клавдій Птолемей говорив про незручність використання єгипетських дробів в порівнянні з Вавилонською системою (позиційна система) числення**.**

Важливу роботу з дослідження єгипетських дробів провів математик XIII століття Леонардо Фібоначчі в своїй праці «Liber Abaci» – це обчислення, з десятковими і звичайними дробами, які з часом витіснили єгипетські дроби.

Основні операції над аліквотними дробами:

$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3\cdot(3+1)}$. $\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}=\frac{1}{5\cdot(5+1)}$. $\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}=\frac{1}{8\cdot(8+1)}$.

Отже, формула розкладання аліквотного дробу на інші два аліквотні дроби має такий вигляд: $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$. Відповідно

$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,   тобто, наприклад, $\frac{1}{7\cdot 8}=\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$.

Число 1 у вигляді суми аліквотних дробів як суму 2 чи трьох доданків можна представити, зокрема, так: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$.

Найпростіші задачі – це розкладання дробу на суму аліквотних дробів.

Ці задачі можна розділити на два види:

1) знаменник просте число;

2) знаменник складене число.

Приклад першого типу:

$$\frac{7}{17}=\frac{7}{17}\cdot 1=\frac{7}{17}\cdot\frac{6}{6}=\frac{42}{102}=\frac{34}{102}+\frac{6}{102}+\frac{2}{102}=\frac{1}{3}+\frac{1}{17}+\frac{1}{51}.$$

Приклад другого типу: $\frac{17}{24}=\frac{12}{24}+\frac{3}{24}+\frac{2}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$.

Інший спосіб, коли чисельник можна розкласти на суму чисел, серед яких є як дільники знаменника, так і числа, які не є дільниками:

$$\frac{9}{35}=\frac{7}{35}+\frac{2}{35}=\frac{1}{5}+\frac{12}{210}=\frac{1}{5}+\frac{10}{210}+\frac{2}{210}=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}+\frac{1}{105}.$$

Зразок:

Обчислити суму: $\frac{1}{15}+\frac{1}{14\cdot 15}+\frac{1}{13\cdot 14}+\frac{1}{12\cdot 13}+\frac{1}{11\cdot 12}$. Скориставшись визначеними вище формулами, отримаємо наступний запис:

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{14}-\frac{1}{15}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}=\frac{1}{11}.$$

Отже, зазначена сума дорівнює $\frac{1}{11}$.

Шістдесяткові дроби

Особливе місце в розвитку систем числення посідають вавилонські шістдесяткові дроби. Вони нагадують наші десяткові дроби, тільки замість знаменників 10, 10^2, 10^3... вавилоняни ставили 60, 60^2, 60^3, ... і записували дроби так само, як і натуральні числа. Користуючись такими шістдесятковими дробами, вавилоняни повинні були багато дробів зображати наближено. У цьому недолік і водночас перевага цих дробів.

Шістдесяткові дроби стали постійним знаряддям наукових обчислень спочатку грецьких, потім арабських і середньовічних європейських учених аж до XV ст., поки їх не замінили десяткові дроби. Однак в астрономії вчені всіх народів користувалися шістдесятковими дробами аж до XVII ст., називаючи їх астрономічними дробами.

Для обчислень з дробами вавилоняни складали величезні таблиці, які виражали в шістдесяткових дробах основні дроби. Наприклад:

$\frac{1}{16}=\frac{3}{60}+\frac{45}{60^2}$; $\frac{1}{54}=\frac{1}{60}+\frac{6}{60^2}+\frac{40}{60^3}$ і т.д.

Достовірних відомостей про те, як вавілоняни виконували дії над шістдесятковими дробами, немає. Що найімовірніше, що не тільки додавання, віднімання і ділення дробу на дріб виконували аналогічно до відповідних дій над цілими числами за допомогою подрібнення, тобто зміни одиниці лічби.

Досить високий розвиток вимірювальної геометрії примушує думати, що вавилоняни перемагали й ці труднощі: зміна лінійного масштабу в 60 разів дає зміну масштабу площі в 60·60 разів.

На відміну від єгиптян, які зводили множення до подвоєнь, вавилоняни виконували порозрядно. Вони широко використовували таблиці множення і таблиці обернених значень.

Слід зазначити, що й у Вавилоні область натуральних чисел остаточно не розширилася до області додатних раціональних чисел, оскільки вавилоняни розглядали тільки скінченні шістдесяткові дроби, в області яких ділення не завжди виконується.

Дванадцяткові дроби

Римляни користувалися конкретними дробами, які замінювали абстрактні частки частинами вживаних мір. Вони зосередили свою увагу мірі «асе» (тепер аптекарський фунт), що означала також і міру вартості.

«Асе» ділився на 12 частин – унцій. З них складали всі дроби із знаменником 12, тобто $\frac{1}{12},\frac{2}{12},\frac{3}{12},...\frac{9}{12},\frac{10}{12},\frac{11}{12}$.

Кожний з дробів позначали особливим знаком, що мав свою назву. Будь-яку величину можна було виражати за допомогою унцій. Наприклад, замість того щоб сказати «я прочитав $\frac{5}{12}$ книги», говорили «я прочитав 5 унцій книги». Крім того, були похідні назви для $\frac{1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{1}{72}, \frac{1}{144}, \frac{1}{288}$. За допомогою унцій римляни виражали і дроби на зразок $\frac{1}{8}$, говорячи «$1\frac{1}{8}$ унції».

На сьогодні, у зв'язку з розвитком технічних засобів обчислень, виникли й інші штучні системи числення. Однією з найуживаніших із них є двійкова система. Вона складається лише з двох цифр 0 і 1. Це зручно не лише з позицій економності (лише два знаки), але й тому, що відповідає технічним вимогам електронної обчислювальної техніки, яка живиться електричним струмом (струм іде – 1, струм не йде – 0). Теоретично в деяких розрахунках разом із двійковою системою використовується і вісімкова система, яка базується на 8 цифрах від 0 до 7. Взагалі ж основою позиційної системи числення може бути будь-яке число d. Знаки від 0 до числа d називаються цифрами заданої числової системи.

Позиційні системи зручні тим, що дозволяють записувати великі числа з допомогою порівняно невеликого числа знаків. Ще більш важливе перевагу позиційних систем – це простота і легкість виконання арифметичних операцій над числами, які у цих системах. (Спробуйте порівняти, наприклад, перемножити два тризначні числа, записавши їх римськими цифрами.).

3. Алгоритми операцій із числами в різних числових системах

Одним із важливіших питань будь-якої системи числення є питання запису чисел. Розкриття його важливе не тільки з погляду запису числа як такого, але й з позицій порівняння чисел (причому як писемного, так і зорового), з позицій технології виконання дій тощо.

Означення 1. ***Запис виду*** $\boldsymbol{a_n \cdot d^n + a_{n-1} \cdot d^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot d^2 + a_1 \cdot d + a_o}$ ***будемо називати многочленом, розташованим за спадними степенями числа d.***

Теорема. ***Будь-яке натуральне число N можна представити у вигляді многочлена, розташованого за спадними степенями основи системи числення, коефіцієнтами якого є однозначні числа або нулі.***

Доведення. Нехай задані натуральне число N і основа системи числення число d. Розділимо число N на d з остачею. Отримаємо $N = q_1 d + r_1$ (**1**). Якщо $q_1 < d$, то представлення закінчене. Якщо ж $q_1 \geq d$, то знов поділимо q_1 на d з остачею. Одержимо $q_1 = q_2 d + r_2$, і підставимо у (**1**), отримаємо $N = (q_2 d + r_2)d + r_1 = q_2 d^2 + r_2 d + r_1$ (**2**). Якщо $q_2 < d$, то представлення закінчене. Якщо ж $q_1 \geq d$, то знов поділимо q_2 на d з остачею. Одержимо $q_2 = q_3 d + r_3$ і підставимо у (**2**). Одержимо: $N = (q_3 d + r_3)d^2 + r_2 d + r_1 = q_3 d^3 + r_3 d^2 + r_2 d + r_1$. І так доти, пір, поки q_n не стане менше за d. А це рано чи пізно станеться, тому що з кожним кроком число q_i зменшується, а, як відомо, натуральний ряд чисел обмежений знизу числом 1. У результаті будемо мати:

$$N = q_n d^n + r_n d^{n-1} + r_{n-1} d^{n-2} + \ldots + r_3 d^2 + r_2 d + r_1 \ (\mathbf{3}).$$

Числа q_n і r_i будуть однозначними, тому що згідно нашій умові $q_n < d$, а згідно з умовами ділення з остачею, остача менша за дільник, тобто $r_i < d$.

Виходячи з теореми, натуральне число в десятковій системі числення буде мати такий вигляд: $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + {} + a_1 \cdot 10 + a_o$; $a_i < 10$, $i = 1, 2, \ldots$ Але такий запис натуральних чисел дуже громіздкий. Спростити його дозволяє позиційність системи числення. Завдяки їй множник 10^k замінюється місцем у числі (позицією), яке посідає доданок $a_k \cdot 10^k$, замість доданка записується тільки коефіцієнт a_k. Місце, яке він посідає в числі, називається розрядом. Отже, натуральне число N записується у вигляді послідовно записаних коефіцієнтів $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_o$, що значно спрощує запис числа і виконання дій.

Доведена теорема до того ж дає ключ і до переведення чисел з одної системи числення в іншу. Наприклад, як перевести число 95 з десяткової системи у двійкову? Згідно з теоремою, виконаємо ділення числа 95 на 2 (основа системи числення є число 2). Одержимо: $93 = 46 \cdot 2 + 1$. Наступний крок: ділимо 46 на 2, одержимо: $46 = 23 \cdot 2 + 0$. Аналогічно далі: $23 = 11 \cdot 2 + 1$, $11 = 5 \cdot 2 + 1$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$, $2 = 1 \cdot 2 + 0$. Остання частка $q_n = 1$, остання остача $r_n = 0$, передостання остача $r_{n-1} = 1$, їй передує – 1, перед нею – 1, перед нею – 0 і найперша остача – 1. Тоді натуральне число 93_{10} буде мати такий вигляд:

$$93_{10} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1,$$

або в спрощеній формі $93_{10} = 1011101_2$. Наведемо ще один приклад, у формі практичного виконання ділення „драбинкою”:

116 | 2
0 58 | 2
0 29 | 2
1 14 | 2
0 7 | 2
1 3 | 2
1 1 тобто $116_{(10)} = 1110100_{(2)}$

Аналогічно переводяться числа в трійкову, п’ятіркову, вісімкову або будь-яку іншу систему числення. Щоб перевести число навпаки з будь-якої системи до десяткової, скористаємося тією ж теоремою.

Наприклад, щоб перевести число 111000101 з двійкової системи до десяткової, запишемо його у вигляді многочлена

$$1\cdot2^8 + 1\cdot2^7 + 1\cdot2^6 + 0\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 0\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2 + 1 = 56 + 128 + +64 + 4 + 1 = 453,$$ тобто $111000101_2 = 453_{10}$

Покажемо, який вигляд мають числа деяких систем числення відносно десяткової? Вигляд цих чисел залежить від кількості використовуваних знаків.

Десяткова	двійкова	трійкова	вісімкова
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	10	3
4	100	11	4
5	101	12	5
6	110	20	6
7	111	21	7
8	1000	22	10
9	1001	100	11
10	1010	101	12

Однією із складностей при переведенні чисел з будь-якої системи в десяткову є встановлення степеня n у першому доданку $a_n \cdot 10^n$. Найвищий степінь многочлена визначається за формулою $n = k - 1$, де k – кількість цифр у числі. Наприклад, у числі $1100011_{(2)}$ 7 розрядних знаків. Тому найвищий степінь n буде 6, тобто

$$1100011_{(2)} = 1\cdot2^6 + 1\cdot2^5 + \ldots + 1 = \ldots$$

Це зумовлене тим, що найменший степінь числа 2 тут є нуль.

У практичній обчислювальній роботі одне з головних місць посідають дії з числами. Смисл арифметичних операцій ми розглянули раніше. Який же механізм цих операцій?

Розглянемо його в загальному вигляді з подальшою конкретизацією на прикладі.

Додавання

Нехай задані два натуральних числа з основою системи числення d: $\boldsymbol{a} = n_k\cdot d^k + n_{k-1}\cdot d^{k-1} + \ldots + n_1\cdot d + n_0$ і $\boldsymbol{b} = m_p\cdot d^p + m_{p-1}\cdot d^{p-1} + \ldots + m_1\cdot d + m_0$. Тут можливі два випадки: коли $p = k$ і коли $p \neq k$. Наперед зазначимо, що випадок, коли $p \neq k$, легко ототожнюється з випадком, коли $p = k$. У цьому разі треба додати до числа з меншою кількістю одночленів одночлени, яких не вистачає з коефіцієнтами 0 зі степенями, яких у ньому немає, але є в числі з більшою кількістю одночленів. Тому будемо розглядати тільки випадок, коли $p = k$, тобто $\boldsymbol{b} = m_k\cdot d^k + m_{k-1}\cdot d^{k-1} + \ldots + m_1\cdot d + m_0$. У ньому в так само можливі варіанти: 1) $n_i + m_i < d$ і 2) $n_i + m_i \geq d$.

Розглянемо перший випадок.

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = n_k\cdot d^k + n_{k-1}\cdot d^{k-1} + \ldots + n_1\cdot d + n_0 + m_k\cdot d^k + m_{k-1}\cdot d^{k-1} + \ldots + m_1\cdot d + {}$ $+ m_0 = (n_k + m_k)\cdot d^k + (n_{k-1} + m_{k-1})\cdot d^{k-1} + \ldots + (n_1 + m_1)\cdot d + (n_0 + m_0)$. Тобто, для того щоб додати два натуральних числа, треба додати числа їхніх відповідних розрядів. У десятковій системі це буде виглядати так: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (n_k + m_k)\cdot 10^k + (n_{k-1} + m_{k-1})\cdot 10^{k-1} + \ldots + (n_1 + m_1)\cdot 10 + (n_0 + m_0)$.

Наприклад, 345 + 7253. Число 345 має на один розряд менше, ніж число 7253. Тому, щоб зрівняти кількість, розрядів запишемо його як 0345. Подамо це число у вигляді многочлена, тобто $0345 = 0\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 5$. Відповідно число 7253 подамо як $7\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + 3$. Згідно з отриманим алгоритмом сума $0345 + 7253 = (0+7)\cdot 10^3 + (3+2)\cdot 10^2 + (4+5)\cdot 10 + + (5+3) = 7\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 +$ $+ 9\cdot 10 + 8 = 7598$.

Дещо складніше виглядає додавання в другому варіанті, тобто коли $n_i + m_i \geq d$. Нехай $i = k - 2$, тоді наша сума $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ буде мати такий вигляд: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = n_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + n_{k-2} \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0 + m_k \cdot d^k + {}$ $+ m_{k-1} \cdot d^{k-1} + m_{k-2} \cdot d^{k-2} + \ldots + m_1 \cdot d + m_0 = (n_k + m_k) \cdot d^k + (n_{k-1} + m_{k-1}) \cdot d^{k-1} + {}$ $+ (n_{k-2} + m_{k-2}) \cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 + m_1) \cdot d + (n_0 + m_0)$. Але $n_{k-2} + m_{k-2} \geq d$, тому її можна записати $n_{k-2} + m_{k-2} = d + r$, тому $(n_{k-2} + m_{k-2}) \cdot d^{k-2} = (d + r) \cdot d^{k-2} = {}$ $= d^{k-1} + r \cdot d^{k-2}$. Підставивши отриманий вираз у попередній запис, отримаємо:

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (n_k + m_k) \cdot d^k + (n_{k-1} + m_{k-1}) \cdot d^{k-1} + d^{k-1} + r \cdot d^{k-2} + \ldots + (n_0 + m_0)$. Замінивши суми $n_i + m_i$ на r_i, отримаємо: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = r_k \cdot d^k + r_{k-1} \cdot d^{k-1} + d^{k-1} + r_{k-2} \cdot d^{k-2} + \ldots + r_1 d + r_0 = r_k \cdot d^k + (r_{k-1} \cdot d^{k-1} + d^{k-1}) + r_{k-2} \cdot d^{k-2} + r_1 d + r_0 = r_k \cdot d^k + (r_{k-1} + 1) \cdot d^{k-1} + r_{k-2} \cdot d^{k-2} + \ldots + r_1 d + r_0$. Як бачимо, у результаті додавання у цьому варіанті коефіцієнт попереднього одночлена $n_{k-1} + m_{k-1} = r_{k-1}$ збільшився на 1, а коефіцієнт наступного одночлена r_{k-2} виявився як різниця $(n_{k-2} + m_{k-2}) - d$. Отже, якщо в процесі додавання двох чисел сума деяких розрядів виявляється більша за основу системи числення, то сума сусідніх розрядів більшого порядку збільшується на 1, а число, яке відповідає цій сумі буде дорівнювати різниці цієї суми й основи системи числення. Наприклад, нехай треба додати числа 7348 і 581 у десятковій системі числення. Сума їх буде виглядати як $(7 + 0) \cdot 10^3 + (3 + 5) \cdot 10^2 + (4 + 8) \cdot 10 + \ldots + (8 + 1) = 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^3 + {} + 12 \cdot 10 + 9$. Оскільки в розряді десятків сума розрядів склала число 12, що більше основи числення – числа 10, то коефіцієнт попереднього розряду (сотень) збільшуємо на 1, а коефіцієнт розряду десятків буде дорівнювати різниці між сумою розрядів – числа 12 і основою системи числення – числом 10, тобто $12 - 10 = 2$. Отже, отримане в результаті додавання число буде дорівнювати $7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 9$ або 7929.

Описаний механізм виконання операції до давання лежить і в основі одного з найбільш уживаних зручних способів додавання – додавання в стовпчик.

Аналогічно виконується додавання і в інших системах численнях. Але тут треба враховувати їхні особливості, для чого зручно мати перед очима невеличку табличку. Наприклад, для двійкової системи треба враховувати, що 0 + 0 = 0, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 10, 1 + 1 + 1 = 11, 1 + 1 + 1 + 1 = 100 і т.д.

Наприклад, додамо числа 110010110 + 100111101.

$$\begin{array}{r} _{+}\,110010110 \\ \underline{100111101} \\ 1011010011 \end{array}$$

Аналогічно, виконуючи додавання, наприклад, у трійковій системі, треба знати, що 0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 10, 2 + 2 = 11, 1 + 2 + 1 = 11, 2 + 2 + 1 = 12, 0 + 2 = 2, ...

Віднімання

Нехай задані два натуральних числа $\boldsymbol{a} = n_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$ і $\boldsymbol{b} = m_p \cdot d^p + m_{p-1} \cdot d^{p-1} + \ldots + m_1 \cdot d + m_0$. Відповідно до умови операції віднімання, різниця $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ можлива лише тоді, коли $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$. Але оскільки $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ є окремим випадком, зосередимося на випадку, коли $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$. Згідно з означенням, віднімання є дією, протилежною додаванню. Тому технологія виконання дії віднімання тісно пов'язана з технологією виконання дії додавання. У результаті аналогічних додаванню перетворень отримаємо такий вираз:

$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (n_k - m_k) \cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1}) \cdot d^{k-1} + (n_{k-2} - m_{k-2}) \cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 - m_1) \cdot d + (n_0 - m_0)$. Якщо $n_i \geq m_i$ для всіх i, то операція віднімання виконується просто: цифра кожного розряду числа $\boldsymbol{b}$ віднімається від відповідної цифри розряду числа $\boldsymbol{a}$ і різниця записується на відповідному місці результату.

Дещо складніше виконується ця дія, коли для якихось значень i $n_i < m_i$. У цьому разі зробимо так: нехай у різниці $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ $n_{k-2} < m_{k-2}$. Тоді маємо: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (n_k - m_k)\cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1})\cdot d^{k-1} + (n_{k-2} - m_{k-2})\cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 - m_1)\cdot d + (n_0 - m_0) = (n_k - m_k)\cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1})\cdot d^{k-1} - d^{k-1} + d^{k-1} + (n_{k-2} - m_{k-2})\cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 - m_1)\cdot d + (n_0 - m_0) = (n_k - m_k)\cdot d^k + [(n_{k-1} - m_{k-1})\cdot d^{k-1} - d^{k-1}] + [(n_{k-2} - m_{k-2})\cdot d^{k-2} + d^{k-1}] + \ldots + (n_1 - m_1)\cdot d + (n_0 - m_0) = (n_k - m_k)\cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1} - 1)\cdot d^{k-1} + [(n_{k-2} - m_{k-2})\cdot d^{k-2} + \ldots + d\cdot d^{k-2}] + \ldots + (n_1 - m_1)\cdot d + (n_0 - m_0) = (n_k - m_k)\cdot d^k + (n_{k-1} - m_{k-1} - 1)\cdot d^{k-1} + \ldots + (d + n_{k-2} - m_{k-2})\cdot d^{k-2} + \ldots + (n_1 - m_1)\cdot d + (n_0 - m_0)$. Оскільки ж $d > m_i$, будь-яка сума $d + n_i > m_i$. Тому різниця $d + n_i - m_i$ завжди існує, а оскільки $n_i < m_i$, то $d + n_i - m_i < d$, тобто отримане число вписується у нумерацію заданої системи числення.

Таким чином, щоб виконати віднімання в цьому разі, треба до n_i додати основу системи числення число d, відповідно зменшивши попереднє число n_{i+1} на одиницю. Якщо $n_{i+1} = 0$, то n_{i+2} треба зменшити на 1.

Наприклад, віднімемо в десятковій системі від числа 2748 число 583. Аналіз цих чисел показує, що у від'ємного числа 2748 розряд десятків менший за розряд десятків числа 583. Тоді, згідно з виведеним правилом віднімання, виконаємо так:

$2748 - 583 = (2 - 0)\cdot 10^3 + (7 - 5)\cdot 10^2 + (4 - 8)\cdot 10 + (8 - 3) = 2\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + (4 - 8)\cdot 10 + 5 = 2\cdot 10^3 + (2 - 1)\cdot 10^2 + +(10 + 4 - 8)\cdot 10 + 5 = 2\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 5 = 2165.$

Віднімання в стовпчик виглядає так:

$$\begin{array}{r} _{-}2748 \\ \underline{583} \\ 1165 \end{array}$$

Аналогічно виконується віднімання і в будь-якій системі числення. Наприклад, у двійковій. Нехай нам треба відняти 1100101110 – 10011010. Найбільш легко для розуміння проілюструвати це в стовпчик. Для цього треба знати, що 0 – 0 = 0, 1 – 0 = 1, 1 – 1 = 0, 10 – 1 = 1. 11 – 1 = 10, 100 – 1 = 11, 1000 – 1 = 111, 10000 – 1 = 1111.

$$\begin{array}{r} \_\ 1100101110 \\ \underline{10011010} \\ 1010010100 \end{array}$$

Інший приклад:

$$\begin{array}{r} \_\ 110000111 \\ \underline{1110111} \\ 100010000 \end{array}$$

Аналогічно і для трійкової системи. Тут теж треба знати, що 0 – 0 = 0, 1 – 0 = 1, 1 – 1 = 0, 2 – 1 = 1, 2 – 2 = 0, 10 – 1 = 2, 10 – 2 = 1, 11 – 2 = 2, 20 – 1 = 12, 20 – 2 = 11, 100 – 1 = 22, 100 – 2 = 21, 100 – 10 = 20. Це легко вивести з таблиці додавання, яку кожний може скласти сам.

Наведемо приклад. Нехай нам треба відняти в трійковій системі 221201 – 12012. Найбільш зрозуміло це робити в стовпчик.

$$\begin{array}{r} \_\ 221201 \\ \underline{12012} \\ 202112 \end{array}$$

Множення.

Механізм виконання множення натуральних чисел дещо більш складний, ніж додавання і віднімання, але він будується на тих же основах. Розглянемо його.

За одним із означень, за яким множення розглядається в початкових класах, ця операція представляється як процес знаходження суми декількох однакових доданків, тобто $n + n + \ldots + n$ з m доданків і записується $n \cdot m$. Для спрощення добутки однозначних чисел зібрані в спеціальній таблиці (*таблиці множення*). Спираючись на неї, розглянемо множення багатозначних чисел.

Нехай задані два натуральних числа:

$\boldsymbol{a} = n_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$ і $\boldsymbol{b} = m_p \cdot d^p + m_{p-1} \cdot d^{p-1} + \ldots + m_1 \cdot d + m_0$.

Утворимо їх добуток $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (n_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0) \cdot (m_p \cdot d^p + m_{p-1} \cdot d^{p-1} + \ldots + m_1 \cdot d + m_0) =$
$= n_k \cdot d^k \cdot m_p \cdot d^p + n_{k-1} \cdot d^{k-1} \cdot m_p \cdot d^p + \ldots + n_1 \cdot d \cdot m_p \cdot d^p + n_0 \cdot m_p \cdot d^p + n_k \cdot d^k \cdot m_{p-1} \cdot d^{p-1} +$
$+ n_{k-1} \cdot d^{k-1} \cdot m_{p-1} \cdot d^{p-1} + \ldots + n_1 \cdot d \cdot m_{p-1} \cdot d^{p-1} + n_0 \cdot m_{p-1} \cdot d^{p-1} + \ldots + n_k \cdot d^k \cdot m_1 \cdot d +$
$+ n_{k-1} \cdot d^{k-1} \cdot m_1 \cdot d + \ldots + n_1 \cdot d \cdot m_1 \cdot d + n_0 \cdot m_1 \cdot d + n_k \cdot d^k \cdot m_0 + n_{k-1} \cdot d^{k-1} \cdot m_0 + \ldots +$
$n_1 \cdot d \cdot m_0 + + n_0 \cdot m_0 = n_k \cdot m_p \cdot d^{k+p} + \ldots + n_{k-1} \cdot m_p \cdot d^{k+p-1} + \ldots + n_1 \cdot m_p \cdot d^{p+1} + n_0 \cdot m_p \cdot d^p +$
$n_k \cdot m_{p-1} \cdot d^{p+k-1} + \ldots + n_{k-1} \cdot m_{p-1} \cdot d^{p+k-2} + \ldots + n_1 \cdot m_{p-1} \cdot d^p + n_0 \cdot m_{p1} \cdot d^{p-1} + \ldots + n_k \cdot m_1 \cdot d^{k+1}$
$+ n_{k-1} \cdot m_1 \cdot d^k + \ldots + n_1 \cdot m_1 \cdot d^2 + n_0 \cdot m_1 \cdot d + n_k \cdot m_0 \cdot d^k + n_{k-1} \cdot m_0 \cdot d^{k-1} + \ldots$
$+ n_1 \cdot m_0 \cdot d + n_0 \cdot m_0 = n_k \cdot m_p \cdot d^{k+p} + (n_{k-1} \cdot m + n_k \cdot m_{p-1}) \cdot d^{p+k-1} + (n_{k-1} \cdot m_{p-1} +$
$+ n_k \cdot m_{p-2} + n_{k-2} \cdot m_p) \cdot d^{p+k-2} + \ldots + (n_0 \cdot m_p + n_1 \cdot m_{p-1}) \cdot d^p + (n_k \cdot m_0 + n_{k-1} \cdot m_1) \cdot d^k + \ldots$
$+ (n_0 \cdot m_1 + n_1 \cdot m_0) \cdot d + n_0 \cdot m_0$.

Утворений у результаті вказаних перетворень вираз і є алгоритмом операції множення. Розглянемо його на конкретному прикладі множення двох чисел у десятковій системі. Перемножимо числа 748 і 213. Для цього представимо їх у вигляді многочленів.

$748 = 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8, \qquad 213 = 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 3.$

$748 \cdot 213 = (7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8) \cdot (2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 3) = 14 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 21 \cdot 10^2 +$
$+ 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10 + 16 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 24.$

Перетворивши двозначні коефіцієнти многочлена в однозначні по типу $14 = 1\cdot 10 + 4$, отримаємо такий многочлен:

$1\cdot 10^5 + 4\cdot 10^4 + 7\cdot 10^3 + 2\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 8\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 1\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 2\cdot 10 + 4 = 1\cdot 10^5 + 4\cdot 10^4 + (7+2+8+1)\cdot 10^3 + (1+4+1+6)\cdot 10^2 + (2+8+2)\cdot 10 + 4 = 1\cdot 10^5 + 4\cdot 10^4 + 18\cdot 10^3 + 12\cdot 10^2 + 12\cdot 10 + 4 = 1\cdot 10^5 + 4\cdot 10^4 + 1\cdot 10^4 + 8\cdot 10^3 + 1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 4 = 1\cdot 10^5 + 5\cdot 10^4 + 9\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 4 = 159324.$

Але такий метод множення надто вже громіздкий. Тому на практиці користуються більш зручною формою множення “в стовпчик”. Суть його в тому, що співмножники записуються один над одним і по черзі відбувається множення кожного розряду одного числа на розряди іншого. При цьому, при переході множення з одного розряду на інший, добуток зміщується на один розряд вліво, що відповідає збільшенню степеня основи *d* на одиницю. Попередній приклад у цьому разі буде мати такий вигляд:

$$
\begin{array}{r}
\times 748 \\
\underline{213} \\
2244 \\
748 \\
\underline{1496} \\
159324
\end{array}
$$

Зазначимо, що якщо якийсь співмножник закінчується числом 0, то множення на нього не виконується, бо буде в результаті нуль, тому множення відбувається незважаючи на нього, а в результаті він дописується в розряді одиниць.

Аналогічно виглядає множення і в інших системах числення. Наведемо приклад множення у двійковій системі чисел 10110110 і 1010111. Тут треба лише пам’ятати, що $0\cdot 0 = 0$, $0\cdot 1 = 0$, $1\cdot 1 = 1$ та таблицю додавання.

```
×10110110
     1010111
     --------
      10110110
     10110110
    10110110
  10110110
10110110
--------------
11110111011010
```

Ділення

Операція ділення базується на загальному означенні і видається на практиці найбільш складною. Розглянемо її в декілька етапів.

1. *Ділення однозначного числа на однозначне.* Нехай задані два числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, і $a = \underbrace{b + b + ... b}_{q} + r$. Тобто $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}q + r$. Це означає, що число $\boldsymbol{b}$ можна відняти від числа $\boldsymbol{a}$ q разів і при цьому залишиться остача $r < \boldsymbol{b}$. Дія, за допомогою якої ми встановлюємо, скільки разів можна відняти число $\boldsymbol{b}$ від числа $\boldsymbol{a}$, тобто скільки разів число $\boldsymbol{b}$ міститься в числі $\boldsymbol{a}$ – і є операцією ділення. При цьому, якщо число $r = 0$, то говорять, що число $\boldsymbol{a}$ ділиться на число $\boldsymbol{b}$ цілком, якщо ж $r \neq 0$, то говорять, що число $\boldsymbol{a}$ ділиться на число $\boldsymbol{b}$ з остачею.

2. *Ділення багатозначного числа на однозначне.* Нехай задано два числа $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, де число $\boldsymbol{b}$ однозначне, тобто $1 \leq b \leq d$, де

$$\boldsymbol{a} = n_k \cdot d^{\,k} + n_{k-1} \cdot d^{\,k-1} + \quad n_{k-1} \cdot d^{\,k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0.$$

Розділимо число $\boldsymbol{a}$ на число $\boldsymbol{b}$, виходячи при цьому з властивості, "щоб розділити суму на число, треба розділити кожний доданок на це число". Окрім цього, ми знаємо, що ділення є дія, зворотна до множення. Оскільки множення ми виконуємо, починаючи з меншого розряду до більшого, то ділення будемо виконувати навпаки. Тобто спочатку розділимо на $\boldsymbol{b}$ розряд $n_k \cdot d^k$. Тут можливі три випадки: а) $n_k \geq b$, б) $n_k < b$ і в) $n_k \vdots b$.

Розглянемо спочатку випадок <u>а) $n_k \geq b$.</u> Тоді розділимо n_k на b з остачею: $n_k = bq_k + r_k$, тоді $\boldsymbol{a} = (bq_k + r_k) \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0 = bq_k \cdot d^k + r_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + n_{k-2} \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$. (*****) Об'єднаємо в групу $r_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} = (r_k \cdot d + n_{k-1}) \cdot d^{k-1}$. Оскільки $r < b < d$, то $r_k \cdot d + n_{k-1} > b$. Розділимо це число на b з остачею. Отримаємо $r_k \cdot d + n_{k-1} = b \cdot q_{k-1} + r_{k-1}$. Підставимо цей вираз у (*****). Отримаємо:

$\boldsymbol{a} = bq_k \cdot d^k + (b \cdot q_{k-1} + r_{k-1}) \cdot d^{k-1} + n_{k-2} \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0 = bq_k \cdot d^k + b \cdot q_{k-1} \cdot d^{k-1} + r_{k-1} \cdot d^{k-1} + n_{k-2} \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$. (******) Аналогічно об'єднаємо в групу наступну пару доданків $r_{k-1} \cdot d^{k-1} + n_{k-2} \cdot d^{k-2} = (r_{k-1} \cdot d + n_{k-2}) \cdot d^{k-2}$. І знов на тих же умовах $r_{k-1} \cdot d + n_{k-2} > b$. Розділимо його на b з остачею. Отримаємо: $r_{k-1} \cdot d + n_{k-2} = b \cdot q_{k-2} + r_{k-2}$. Підставимо його у (**) і отримаємо: $bq_k \cdot d^k + b \cdot q_{k-1} \cdot d^{k-1} + (r_{k-1} \cdot d + n_{k-2}) \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0 = bq_k \cdot d^k + b \cdot q_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + (b \cdot q_{k-2} + r_{k-2}) \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0 = bq_k \cdot d^k + b \cdot q_{k-1} \cdot d^{k-1} + b \cdot q_{k-2} \cdot d^{k-2} + r_{k-2} \cdot d^{k-2} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$. І так до останнього розряду. В остаточному вигляді цей многочлен буде мати вигляд $\boldsymbol{a} = b \cdot q_k \cdot d^k + b \cdot q_{k-1} \cdot d^{k-1} + b \cdot q_{k-2} \cdot d^{k-2} + b \cdot q_{k-3} \cdot d^{k-2} + \ldots + b \cdot q_1 \cdot d + bq_0 + r_0 = \boldsymbol{b} \cdot (q_k \cdot d^k + q_{k-1} \cdot d^{k-1} + q_{k-2} \cdot d^{k-2} + q_{k-3} \cdot d^{k-2} + \ldots + q_1 \cdot d + q_0) + r_0$, де $\boldsymbol{a}$ – ділене, $\boldsymbol{b}$ – дільник, $q_k \cdot d^k + q_{k-1} \cdot d^{k-1} + q_{k-2} \cdot d^{k-2} + q_{k-3} \cdot d^{k-2} + \ldots + q_1 \cdot d + q_0$ – частка і r_0 – остача. Якщо $r_0 \neq 0$, то маємо ділення з остачею, а якщо $r_0 = 0$, то маємо ділення без остачі, тобто

$$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = q_k \cdot d^k + q_{k-1} \cdot d^{k-1} + q_{k-2} \cdot d^{k-2} + q_{k-3} \cdot d^{k-2} + \ldots + q_1 \cdot d + q_0.$$

Тепер звернемося до випадку б) $n_k < b$. Об'єднаємо в групу перші два розряди $n_k \cdot d^k + n_{k-1} \cdot d^{k-1} = (n_k \cdot d + n_{k-1}) \cdot d^{k-1}$. Оскільки $n_k < b < d$, то число $n_k \cdot d + n_{k-1} > b$, а тому розділимо його на $\boldsymbol{b}$ з остачею. Отримаємо: $n_k \cdot d + n_{k-1} = b \cdot q_{k-1} + r_{k-1}$. Підставивши в $\boldsymbol{a}$, одержимо:

$$\boldsymbol{a} = (bq_{k-1} + r_{k-1}) \cdot d^{k-1} + \ldots + n_{k-1} \cdot d^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot d + n_0$$

і далі як у попередньому випадку.

У випадку ж в) низка відповідних перетворень приводить до випадку а) або випадку б).

Отриманий висновок дає нам алгоритм виконання ділення.

Розглянемо конкретний приклад у десятковій системі. Розділимо, наприклад, число 7344 на 6.

$7344 = 7\cdot10^3 +3\cdot10^2 + 4\cdot10 +4$. $7 = 6\cdot1 +1$, тому $7344 = (6\cdot1 + 1)\cdot10^3+ + 3\cdot10^2 + 4\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + (1\cdot10^3+3\cdot10^2) + 4\cdot10+4 = 6\cdot1\cdot10^3+(1\cdot10 + 3)\cdot10^2+ + 4\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 13\cdot10^2 + 4\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + (1\cdot10^2 + 4\cdot10) + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + 14\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + +(6\cdot2 + 2)\cdot10 + 4 = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + 6\cdot2\cdot10 + (2\cdot10 + 4) = 6\cdot1\cdot10^3 + 6\cdot2\cdot10^2 + 6\cdot2\cdot10 + 24 = 6\cdot1\cdot10^3+ 6\cdot2\cdot10^2+ 6\cdot2\cdot10 + 6\cdot4 = 6\cdot(1\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 2\cdot10 + 4) = 6\cdot1224$.

Отже, 7344 : 6 = 1224.

Така форма ділення надто громіздка, але вона визначає алгоритм значно простішої форми ділення “куточком”. Розглянемо той же приклад у такій формі ділення.

```
_ 7344 | 6
  6      1224
 ____
_ 13
  12
  ___
  _14
   12
  ____
   _24
    24
     0
```

Якщо ж число ***b*** багатозначне, то алгоритм виконання ділення такий же, як і для однозначного ***b***. Різниця лише в тому, що треба вибрати першу групу розрядів, яка буде найменшим діленим для числа ***b***. Наприклад, розділимо 13206 на 31.

```
_13206 | 31
 124    426
    _80
     62
   _186
    186
      0
```

Аналогічно виконується ділення і в інших системах числення.

Покажемо це на прикладі ділення у двійковій системі числення.

Розділимо, наприклад, число 111101111 на 101101.

```
_111101111  | 101101
 101101       1011
  _01000011
      101101
   _0101101
     101101
          0
```

Отже, створення штучної двійкової числової системи було викликане як засіб функціонування технічних пристроїв при обчисленні та програмуванні реальних процесів. Числові системи створили базу для розробки і впровадження в практику цифрових систем, на яких базуються сучасні програмні продукти.

В п р а в и.

1. Перевести число 617 з десяткової системи у двійкову, трійкову та вісімкову системи.
2. Перевести числа а)11010011 б) 1000001101 в) 1010111111 з двійкової в десяткову систему.
3. Перевести число а) 122102 б) 10102 в) 21021 з трійкової до десяткової системи.
4. Перевести число 11100111001 з двійкової у п'ятіркову систему.
5. Перевести число 1021 з трійкової системи у двійкову.
6. Обчислити: а) 1101101 + 100011; б) 10111011 + 10001101;

   в) 10010101 – 11110101; г) 110100100 – 111011;

   д) 1001110 · 110111; є) 1011110 · 101101;

   ж) 10010000111 : 111101; з) 110111001 : 10101.
7. Обчислити: а) $10010110_2 + 2102_3 = x_8$ б) $127_8 + 112_3 = x_2$

   в) $1102_3 + 1011_3 = x_5$ г) $110100_2 – 222_3 = x_5$

Список використаної літератури

1. Бельский А. А., Калужнин Л. А. . Деление с остатком. К.: Вища школа, 1977. 89 с.

2. Боровик В. Н., Вивальнюк Л. М. та ін. Математика К.: Вища школа, 1980. 445 с.

3. Бородін О. І. Історія розвитку поняття про число і системи числення. К:, Кондор, 2008. 104 с.

4. Вивальнюк Л. М. Алгебра та теорія чисел. К.: Вища школа, 1972. 316 с.

5. Вивальнюк Л. М. Числові системи. К.: Вища школа, 1977. 168 с.

6. Завало С. Т., Костарчук В. М., Хацет Б. І. Алгебра і теорія чисел: у 2 т. Т.2. К.: Вища школа, 1980. 407 с.

7. Затула Н. І., Зуб А. М., Коберник Г. І., Нещадим. А. Ф. Математика: Навчальний посібник. К.: Кондор, 2006. 560 с.

8. Касаткин В. Н. Новое о системах счисления. К.: Вища школа, 1982. 184 с.

9. Сарієнко В. К., Сарієнко В. В. Математика: навчальний посібник для студентів спеціальності 013 «Початкова освіта». ДДПУ, 2013. 152 с.

10. Сарієнко В. В., Сарієнко В. К., Пучков І. Р. Математичні основи інформатики: Навчально-методичний посібник. ДВНЗ „ДДПУ”, 2021. 60 с.

З М І С Т

Сарієнко Володимир Владиславович
Кандидат педагогічних наук, доцент

Пучков Ігор Русланович
Кандидат педагогічних наук, доцент

Числові системи

Методичні рекомендації з навчального курсу
«Основи інформатики з елементами програмування»
для студентів спеціальності 013 «Початкова освіта»

Рекомендовано до видання ученою радою ДВНЗ «ДДПУ» 25.11.2023 р.

Обсяг 2 друк. арк.