Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
"Донбаський державний педагогічний університет"

Є.С. Сілін, О.С. Чуйко

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник

Дніпро — 2026

УДК 517.2(075.8)
С36

Сілін Є.С., Чуйко О.С.

Практичні заняття з диференціального числення. Навчальний посібник. Дніпро: ДДПУ, 2026. 207 с.

Навчальний посібник призначено для здобувачів вищої освіти, які вивчають математичний аналіз або вищу математику й присвячений проведенню практичних занять із диференціального числення, а також для надання допомоги студентам під час виконання індивідуальних завдань, при підготовці до контрольних робіт, заліків та іспитів. Посібник містить необхідні теоретичні відомості, задачі з детальними розв'язаннями й задачі для самостійної та індивідуальної робіт, ілюстрований довідник.

УДК 517.2(075.8)

ЗМІСТ

Передмова

Ця книга переслідує дві головні мети: допомогти студентам навчитися розв'язувати базові задачі та задачі підвищенної складності; сприяти більш глибокому засвоєнню теорії.

Саме тому до змісту включено багато задач, пов'язаних із поясненням понять похідної (зокрема, лівої та правої) і диференціала; диференційовності; зв'язку диференційовності та неперервності; монотонності, опуклості кривих. У посібнику наведено також певну кількість контрприкладів, які дозволяють з'ясувати необхідність тих чи інших умов у формулюваннях основних теорем.

Книга містить теоретичний та ілюстративний матеріал, систему зауважень (пояснень) навчально-методичного характеру, алгоритми розв'язування задач, які будуть корисними для студентів, що вивчають курс диференціального числення.

Матеріалом для посібника слугували як "класичні" задачі диференціального числення з багатьох підручників, так і деяка кількість маловідомих й оригінальних задач.

Посібник має наступну структуру.

На початку кожного розділу в конспективній формі наведено короткі теоретичні відомості — означення основних понять, формулювання тверджень та необхідні робочі формули і співвідношення.

Далі містяться повні й детальні розв'язання прикладів та задач, ступінь складності яких поступово зростає. Початок і кінець розв'язання приклада помічено значками $\square$ й $\blacksquare$ відповідно. Завдання підвищеної складності мають мітку *. Інколи наводиться декілька різних способів розв'язання задачі для порівняння ефективності методів.

У кінці кожного розділу розміщено завдання для самостійної роботи. До них відносяться питання типу "Чи будуть істинними такі твердження?", за допомогою яких читач зможе не лише перевірити засвоєні теоретичні знання, а й прослідкувати за взаємозв'язками понять, встановити нові факти. Після питань наведено приклади для самостійної роботи студентів, аналогічні до розглянутих у тексті.

Додаток A містить матеріал для самостійної роботи студентів: 10 варіантів по 19 завдань в кожному. Додаток B призначено для використання в якості довгострокового домашнього завдання, він містить 26 варіантів по 19 завдань в кожному. Зазвичай, останні 4 – 6 варіантів складаються з більш складних прикладів, ніж попередні варіанти. Поряд з прикладами, аналогічними до розв'язаних, посібник містить нетривіальні задачі, розміщені в Додатку C, які можуть бути корисними для роботи з найбільш здібними студентами. Нарешті, додаток D присвячено наочним, геометричним ілюстраціям і тлумаченням майже всіх понять та тверджень з курсу диференціального числення.

ЗАНЯТТЯ 1

Поняття похідної

1.1 Теоретичні відомості

Означення 1.1. *Нехай функція* $y = f(x)$ *визначена на інтервалі* $(a; b)$ *і* $x_0 \in (a; b)$, Δx *— довільний приріст аргументу в точці* x_0 *(*Δx *може бути як додатним, так і від'ємним), але такий, щоб точка* $x_0 + \Delta x \in (a; b)$. *Знайдемо приріст* $\Delta y = \Delta f(x_0)$ *функції* $f(x)$ *у точці* x_0 *:*

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Якщо існує границя відношення приросту $\Delta f(x_0)$ *функції* $f(x)$ *до приросту аргументу* Δx, *коли приріст аргументу прямує до нуля, то цю границю називають похідною функції* $f(x)$ *в точці* x_0 *та позначають* $f'(x_0)$.

Таким чином, якщо $-\infty < \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} < +\infty$, *то*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f\,(x_0)}{\Delta x}.$$

1.1. *Для заданої функції* $f(x)$ *знайти її приріст, якщо незалежний аргумент* x *отримує приріст* Δx.

а) $f(x) = e^{3x+1}$

$\square$ Згідно з означенням приросту функції, маємо

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = e^{3(x+\Delta x)+1} - e^{3x+1} = e^{3x+1}(e^{3\Delta x} - 1). \quad \blacksquare$$

б) $f(x) = \sin x^2$.

$\square$

$$\Delta f(x) = \sin(x+\Delta x)^2 - \sin x^2 =$$
$$= 2\sin\left(x\Delta x + \frac{\Delta x^2}{2}\right)\cos\left(x^2 + x\Delta x + \frac{\Delta x^2}{2}\right). \quad \blacksquare$$

1.2. *Знайти максимальний приріст* Δx *аргументу* x *та відповідний приріст* $\Delta f(x)$ *функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0, *якщо:*

а) $f(x) = \lg x$, $x_0 = 1$, x змінюється від 1 до 1000.

$\square$ Зрозуміло, що $\Delta x = 1000 - 1 = 999$, а

$$\Delta f(1) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \lg(1+999) - \lg 1 = 3 - 0 = 3. \quad \blacksquare$$

б) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$, $x_0 = 1$, $x \in [1; 1{,}2]$.

$\square$ Розмірковуючи, як і в попередньому прикладі, одержимо:

$$\Delta x = 1{,}2 - 1 = 0{,}2,$$

а

$$\Delta y = \frac{1}{(1+0{,}2)^2 + (1+0{,}2) - 6} - \frac{1}{1^2+1-6} = -\frac{1}{21}. \quad \blacksquare$$

1.3. *Знайти середню швидкість руху тіла за час* Δt, *якщо закон руху задано формулою* $S = t^2 - 2t - 3$ (t *— час,* S *— відстань). Визначити миттєву швидкість в момент часу* $t = 1,5$ *та середню швидкість для* $\Delta t = 1$ *с,* $\Delta t = 0{,}1$ *с,* $\Delta t = 0{,}001$ *с.*

$\square$ Відстань, яку тіло подолало за час Δt, може бути знайдена за формулою

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t) = ((t+\Delta t)^2 - 2(t+\Delta t) - 3) -$$

$$-(t^2 - 2t - 3) = (2t - 2)\Delta t + (\Delta t)^2.$$

Відношення знайденої відстані до проміжку часу Δt і буде середньою швидкістю

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{(2t-2)\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 2t - 2 + \Delta t. \qquad (1.1)$$

Зрозуміло, що миттєва швидкість може бути знайдена за умови $\Delta t \to 0$, тобто,

$$v_{\text{мит}} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t - 2 + \Delta t) = 2t - 2. \qquad (1.2)$$

Отже, миттєва швидкість у момент часу $t = 1{,}5\,$с дорівнює

$$v_{\text{мит}} = 2 \cdot 1{,}5 - 2 = 1 \text{ м/с}.$$

За допомогою формули (1.1) знайдемо середню швидкість у момент часу $t = 1{,}5$ для заданих значень Δt:

Δt	1	0,1	0,001
$v_{\text{ср}}$	2	1,1	1,001

.

Легко побачити, що при $\Delta t \to 0$ значення середньої швидкості прямує до значення миттєвої швидкості. З формул (1.1) та (1.2) випливає, що

$$v_{\text{мит}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'_t.$$

Таким чином, миттєва швидкість тіла — це похідна від пройденого шляху за часом. ■

1.4. *Кількість тепла, яка необхідна для того, щоб підняти температуру 1 грама речовини від* 0 *до* t *градусів визначається функцією* $Q(t)$. *Дати означення поняттям: середня теплоємність речовини в температурному проміжку* $[t, t + \Delta t]$ *та теплоємність речовини при заданій температурі* t_0.

□ Неважко зрозуміти, що кількість тепла, яку було витрачено для нагріву речовини від температури t до температури $t+\Delta t$ визначається як $\Delta Q(t) = Q(t+\Delta t) - Q(t)$. Отже, середня теплоємність речовини $C_{\text{ср}}$ являє собою формулу

$$C_{\text{ср}} = \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t}.$$

Теплоємність C речовини для певної фіксованої температури t_0 може бути одержана як середня теплоємність за умови, що температурний діапазон Δt дуже малий, тобто

$$C = \lim_{\Delta t \to 0} C_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t_0+\Delta t) - Q(t_0)}{\Delta t}.$$

Остання формула являє собою похідну функції $C_{\text{ср}}(t)$ у точці t_0.

Таким чином, середня теплоємність речовини — це відношення приросту кількості тепла до приросту температури

$$C_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t},$$

а теплоємність речовини C для певної фіксованої температури t_0 — похідна функції кількості тепла $Q(t)$ від температури t при $t = t_0$: $C = Q'_t(t_0)$. ■

1.5. *Знайти* $f'(1)$, *якщо:*

а) $f(x) = (x-1)(x-3)^2$.

□ За означенням похідної функції в точці

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x - 1)(1+\Delta x - 3)^2 - (1-1)(1-3)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} ((\Delta x)^2 - 4\Delta x + 4) = 4. \quad ■$$

б)

$$f(x) = x^2 + (x-1)\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

$\square$ Зрозуміло, що

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\left[(1+\Delta x)^2 + (1+\Delta x - 1)\arccos\sqrt{\frac{1+\Delta x}{1+\Delta x+1}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(1^2 + (1-1)\arccos\sqrt{\frac{1}{1+1}}\right)\right] : \Delta x\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 + \Delta x \cdot \arccos\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}} - 1}{\Delta x} =$$

$$= 2 + \arccos\sqrt{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

1.6. *Користуючись означенням, знайти похідну заданої функції:*

а) $y = 3x^2 - x$.

$\square$ 1. Знайдемо приріст функції y, якщо аргумент x дістав приріст Δx:

$$\Delta y = 3(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x) - (3x^2 - x) = (6x-1)\Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

2. Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(6x-1)\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6x - 1 + 3\Delta x.$$

3. Знаходимо шукану похідну як границю відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}(6x - 1 + 3\Delta x) = 6x - 1. \quad \blacksquare$$

б) $y = \sqrt{2x-1}$.

$\square$ 1. Знайдемо приріст функції y в точці x, що відповідає приросту Δx :

$$\Delta y = \sqrt{2(x+\Delta x)-1} - \sqrt{2x-1} = \frac{2\Delta x}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1} + \sqrt{2x-1}}.$$

2. Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{(\sqrt{2(x+\Delta x)-1}+\sqrt{2x-1})\Delta x} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1}+\sqrt{2x-1}}.$$

3. Отримаємо формулу для похідної функції y в точці x:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1}+\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}. \quad \blacksquare$$

в) * $y = \sin(x^2+e^x)$.

□ Знайдемо спочатку приріст функції:

$$\Delta y = \sin[(x+\Delta x)^2 + e^{x+\Delta x}] - \sin(x^2+e^x) =$$

$$= 2\sin\frac{1}{2}[(x+\Delta x)^2 + e^{x+\Delta x} - (x^2+e^x)]\times$$

$$\times\cos\frac{1}{2}[(x+\Delta x)^2 + e^{x+\Delta x} + (x^2+e^x)] =$$

$$= 2\sin[x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}e^x(e^{\Delta x}-1)]\times$$

$$\times\cos[x^2 + x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}e^x(e^{\Delta x}+1)]. \tag{1.3}$$

Оскільки за умови $\Delta x\to 0$ справедливі співвідношення:

$$x\Delta x\to 0, \quad \frac{1}{2}(\Delta x)^2\to 0, \quad \frac{1}{2}e^x(e^{\Delta x}-1)\to 0,$$

то на підставі рівності $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (перша чудова границя) маємо:

$$\sin[x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}e^x(e^{\Delta x}-1)] \backsim$$

$$\backsim [x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}e^x(e^{\Delta x}-1)]. \tag{1.4}$$

Порівнюючи співвідношення (1.3) та (1.4), згідно з означенням похідної функції в точці, знаходимо

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2[x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}e^x(e^{\Delta x}-1)]}{\Delta x}\times$$

$$\times \lim_{\Delta x\to 0}\cos[x^2 + x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}e^x(e^{\Delta x}+1)] =$$

$$= (2x+e^x)\cos(x^2+e^x).$$

Відмітимо, що ми скористалися відомою границею $\lim\limits_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t} = \ln a$.
■

г) * $y = \frac{\ln(x^2+2)}{x^3}$.

□ Спочатку знаходимо приріст функції:

$$\Delta y = \frac{\ln((x+\Delta x)^2+2)}{(x+\Delta x)^3} - \frac{\ln(x^2+2)}{x^3} =$$

$$= \frac{x^3\ln\frac{(x+\Delta x)^2+2}{x^2+2} - \ln(x^2+2)(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3)}{(x+\Delta x)^3x^3}.$$

Далі безпосередньо знаходимо шукану похідну функції y:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3\ln\frac{(x+\Delta x)^2+2}{x^2+2} - \ln(x^2+2)(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3)}{(x+\Delta x)^3x^3\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3\ln\left(1+\frac{(2x+\Delta x)\Delta x}{x^2+2}\right)}{(x+\Delta x)^3x^3\Delta x} -$$

$$- \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x^2+2)(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3)}{(x+\Delta x)^3x^3\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3\frac{(2x+\Delta x)\Delta x}{x^2+2}}{(x+\Delta x)^3x^3\Delta x} -$$

$$- \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x^2+2)(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{(x+\Delta x)^3x^3} = \frac{2x^4}{(x^2+2)x^6} -$$

$$- \frac{3x^2\ln(x^2+2)}{x^6} = \frac{\frac{2x^2}{x^2+2} - 3\ln(x^2+2)}{x^4}.$$

Під час розв'язання ми врахували, що $\ln(1+U(x)) \sim U(x)$ за умови $U(x) \to 0$. ■

1.7. * *Функція $f(x)$ визначена на проміжку $[1,\infty)$ та задана рівністю:*

$$f(x) = x^{\sqrt[n]{\log_x c_1 \log_x c_2 \ldots \log_x c_n}}, \quad c_1, c_2, \ldots, c_n \in [1,\infty).$$

Знайдіть похідну цієї функції.

□ Для довільного x_1 з області визначення функції $f(x)$ покладемо

$$x_2 = x_1^a \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Згідно з тотожністю

$$\log_{b^k} c = \frac{1}{k} \log_b c$$

маємо

$$f(x_2) = x_2^{\sqrt[n]{\log_{x_2} c_1 \log_{x_2} c_2 \ldots \log_{x_2} c_n}} =$$

$$= (x_1^a)^{\sqrt[n]{\log_{x_1^a} c_1 \log_{x_1^a} c_2 \ldots \log_{x_1^a} c_n}} = f(x_1).$$

Звідси, користуючись означенням похідної, знаходимо

$$f'(x) = f'(x_2) = \lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{x_1 \to x_2} \frac{0}{x_2 - x_1} = 0. \quad ■$$

1.8. *Довести, що похідна періодичної функції є функція періодична.*

□ Нехай $f(x+T) = f(x)$. Згідно з означенням похідної

$$f'(x+T) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+T+\Delta x) - f(x+T)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f((x+\Delta x)+T) - f(x+T)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

таким чином $f'(x+T) = f'(x)$, що і треба було довести. ■

1.9. *Довести, що похідна непарної функції є функція парна.*

□ Нехай задано непарну функцію $y = f(x)$, тобто, $f(-x) = -f(x)$, або, що одне й те саме, $-f(-x) = f(x)$. Тоді

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-f(-x-\Delta x) - (-f(-x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x+(-\Delta x)) - f(-x)}{-\Delta x} = f'(-x),$$

тобто, $f'(x) = f'(-x)$, що й треба було довести. ■

1.2 Завдання для самостійної роботи

Чи будуть істинними такі твердження?

1. Похідна деякої парної (непарної) функції є функція парна (непарна).

2. Похідна неперіодичної функції є функція періодична.

3. Похідна періодичної функції є функція неперіодична.

4. Справджується формула

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

1.10. *Знайти приріст функції* Δy *та відношення* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, *якщо:*

а) $y = \sqrt{x}$ при $x = 0$ та $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta x = 0{,}0001$;

б) $y = \frac{1}{\lg x}$ при $x = 1$ та $\Delta x = 99$, $\Delta x = 999$.

1.11. *Знайти швидкість матеріальної точки, рух якої підпорядковано закону* $S = \ln \frac{1}{1+t}$ *наприкінці 3 та 10 секунд.*

1.12. *Робота, яка виконана за одиницю часу, називається потужністю. Дати визначення поняття потужність у момент часу* t *та встановити зв'язок цього поняття з функцією* $A(t)$ *— робота, що виконана за проміжок часу* $[0, t]$.

1.13. *Обчислити похідні заданих функцій за означенням:*

а) $y = \cos^2 x$, **б)** $y = \ln^2(3x+1)$,

в) $y = \frac{1-x}{1+x}$. **г)*** $y = \sqrt[3]{x^2 + \sin(2x-1)}$

1.14. *Знайти* $f'(0)$, *якщо* $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-1000)$.

1.15. *Довести, що похідна парної функції є функція непарна.*

1.16.* *Чи буде мати функція* $F(x) = f(x) + g(x)$ *похідну в точці* x_0, *якщо функція* $f(x)$ *має похідну в цій точці, а функція* $g(x)$ *— ні? Якщо обидві функції не мають похідної в точці* x_0 *?*

1.17.* *Чи буде мати функція* $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ *похідну в точці* x_0, *якщо функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *не мають похідних у вказаній точці? Якщо одна з функцій має похідну в точці* x_0 *?*

1.18.* *Нехай* $f(x)$ *— неперервна та диференційовна в точці* $x = a$ *функція. Доведіть, що для такої функції виконується рівність*

$$\lim_{x \to a} \frac{(2x-a)f(x) - xf(a)}{x-a} = f(a) + af'(a).$$

ЗАНЯТТЯ 2

Похідна функції, що задана явно

2.1 Теоретичні відомості

Означення 2.1. *Функцію* $f(x)$ *називають диференційовною в точці* x_0, *якщо вона в цій точці має скінченну похідну* $f'(x_0)$.

Означення 2.2. *Функцію* $f(x)$ *називають диференційовною в інтервалі* $(a; b)$, *якщо вона диференційовна в кожній точці цього інтервалу.*

Теорема 2.1. *Якщо функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *диференційовні в точці* x_0, *то в цій точці диференційовна функція* $f(x) + g(x)$, *причому*

$$(f(x_0) + g(x_0))' = f'(x_0) + g'(x_0),$$

тобто, похідна суми диференційовних функцій у точці x_0 *дорівнює сумі похідних цих функцій у точці* x_0.

Теорема 2.2. *Якщо функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *диференційовні в точці* x_0, *то функція* $f(x) \cdot \varphi(x)$ *також диференційовна в точці* x_0, *причому*

$$(f(x_0) \cdot \varphi(x_0))' = f'(x_0) \cdot \varphi(x_0) + f(x_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

Теорема 2.3. *Якщо* $f(x) = C$ $(C \equiv const)$, $\forall x \in (a;b)$, *то* $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a;b)$, *тобто, похідна від сталої функції дорівнює нулю.*

Наслідок 2.1. *Якщо функція* $f(x)$ *диференційовна в точці* x, *то функція* $Cf(x)$, *де* C *— стале число, також диференційовна в цій точці* x, *причому*

$$(Cf(x))' = Cf'(x).$$

Наслідок 2.2. *Різниця двох функцій, диференційовних у точці* x, *є функція, диференційовна в цій точці, причому*

$$(f(x) - \varphi(x))' = f'(x) - \varphi'(x).$$

Теорема 2.4. *Якщо функції* $f(x)$ *та* $\varphi(x)$ *диференційовні в точці* x *і в цій точці* $\varphi(x) \neq 0$, *то функція* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *диферецiйовна в точці* x, *причому*

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \frac{f'(x)\varphi(x) - f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}.$$

Наслідок 2.3. *Якщо функція* $\varphi(x)$ *диференційовна в точці* x, *причому* $\varphi(x) \neq 0$, *то в точці* x *диференційовна функція* $\frac{1}{\varphi(x)}$, *причому*

$$\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)' = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}.$$

Теорема 2.5. *Якщо функція* $u = \varphi(x)$ *диференційовна в точці* x, *а функція* $y = f(u)$ *диференційовна в точці* $u = \varphi(x)$, *то складена функція* $y = f(\varphi(x))$ *диференційовна в точці* x, *причому*

$$(f[\varphi(x)])' = f'(u)\varphi'(x)$$

або

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

2.1. *Знайти похідну функції:*

а) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3}+2x^3}{1-3x} + \frac{2\sqrt[5]{x^2}-4}{e}$.

□ Замінимо знаки радикалів відповідними раціональними степенями та застосуємо правила диференціювання суми і частки двох функцій:

$$f'(x) = \left(\frac{x^{3/4}+2x^3}{1-3x}\right)' + \left(\frac{2x^{2/5}-4}{e}\right)' =$$

$$= \frac{(x^{3/4}+2x^3)'(1-3x)-(x^{3/4}+2x^3)(1-3x)'}{(1-3x)^2} + \frac{1}{e}(2x^{2/5}-4)' =$$

$$= \frac{(\frac{3}{4}x^{-1/4}+6x^2)(1-3x)-(x^{3/4}+2x^3)(-3)}{(1-3x)^2} + \frac{1}{e}\left(\frac{4}{5}x^{-3/5}\right) =$$

$$= \frac{(\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}+6x^2)(1-3x)+3\sqrt[4]{x^3}+6x^3}{(1-3x)^2} + \frac{4}{5e\sqrt[5]{x^3}}. \quad \blacksquare$$

б) $y = 2^{120} + 2e^x \cdot \ln x \cdot \operatorname{tg} x$.

□ За допомогою правил диференціювання суми та добутку функцій а також таблиці похідних елементарних функцій, маємо:

$$y' = (2^{120})' + (2e^x \cdot \ln x \cdot \operatorname{tg} x)' =$$

$$= 0 + 2[(e^x)' \cdot \ln x \cdot \operatorname{tg} x + e^x \cdot (\ln x)' \cdot \operatorname{tg} x + e^x \cdot \ln x \cdot (\operatorname{tg} x)'] =$$

$$= 2e^x \cdot \ln x \cdot \operatorname{tg} x + 2e^x \cdot \frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg} x + 2e^x \cdot \ln x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \blacksquare$$

в)

$$y = \frac{\pi}{\cos x + \frac{1}{x}} \cdot \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{arctg} x}{2^x - x^n}.$$

□ Скориставшись правилами диференціювання добутку й частки функцій, таблицею похідних елементарних функцій, одержимо

$$y' = \left(\frac{\pi}{\cos x + \frac{1}{x}}\right)' \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{arctg} x}{2^x - x^n} + \frac{\pi}{\cos x + \frac{1}{x}} \left(\frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{arctg} x}{2^x - x^n}\right)' =$$

$$= \frac{(\pi)'(\cos x + \frac{1}{x}) - \pi(\cos x + \frac{1}{x})'}{(\cos x + \frac{1}{x})^2} \cdot \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{arctg} x}{2^x - x^n} +$$

$$+\frac{\pi}{\cos x+\frac{1}{x}}\cdot\Big([(\operatorname{ctg}x)'\operatorname{arctg}x+\operatorname{ctg}x(\operatorname{arctg}x)'\,](2^x-x^n)-$$

$$-\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{arctg}x[(2^x)'-(x^n)']\Big):(2^x-x^n)^2=$$

$$=\frac{0-\pi(-\sin x-\frac{1}{x^2})}{(\cos x+\frac{1}{x})^2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{arctg}x}{2^x-x^n}+\frac{\pi}{\cos x+\frac{1}{x}}\times$$

$$\times\left(\left[\frac{-1}{\sin^2 x}\operatorname{arctg}x+\operatorname{ctg}x\frac{1}{1+x^2}\right](2^x-x^n)-\right.$$

$$\left.-\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{arctg}x(2^x\ln 2-nx^{n-1})\right):(2^x-x^n)^2.\quad\blacksquare$$

2.2. *Знайти похідну складеної функції:*

а) $y=\ln^3(\sin 2x),\ \ x\in[\pi/6,\pi/4]$.

$\square$ Маємо складену функцію, зовнішньою для неї є степенева функція ($\ln(\sin 2x)$ підноситься до третього степеню), тому, диференціюючи задану функцію за проміжним аргументом $\ln(\sin 2x)$, одержимо

$$y'=(\ln^3(\sin 2x))'_{\ln(\sin 2x)}=3\ln^2(\sin 2x). \tag{2.1}$$

Зрозуміло, що це не остаточна відповідь, оскільки проміжний аргумент $\ln(\sin 2x)$ також є складеною функцією: зовнішня функція — логарифмічна, а в ролі внутрішньої — функція $y=\sin 2x$. Тому праву частину формули (2.1) треба помножити на похідну функції $\ln(\sin 2x)$ за проміжним аргументом $\sin 2x$: $(\ln(\sin 2x))'_{\sin 2x}=\frac{1}{\sin 2x}$.

Але новий проміжний аргумент $\sin 2x$ також є складеною функцією, отже, враховуючи, що $(\sin 2x)'_{2x}=\cos 2x\cdot(2x)'_x=2\cos 2x$, остаточно одержуємо

$$y'_x=(\ln^3(\sin 2x))'_{\ln(\sin 2x)}(\ln(\sin 2x))'_{\sin 2x}(\sin 2x)'_{2x}(2x)'_x=$$

$$=6\ln^2(\sin 2x)\operatorname{ctg}2x.\quad\blacksquare$$

б) $y = \sqrt{\operatorname{tg}^3 2x + 2}, \ |x| < \frac{\pi}{8}.$

□ Цей приклад розв'яжемо, користуючись дещо іншими поясненнями. Запишемо $y(x)$ у вигляді ланцюга основних елементарних функцій: $y = h^{1/2}, \ h = t^3 + 2, \ t = \operatorname{tg} z, \ z = 2x.$

Відповідно

$$y'_x = y'_h \cdot h'_x = y'_h \cdot h'_t \cdot t'_x = y'_h \cdot h'_t \cdot t'_z \cdot z'_x = \frac{1}{2}h^{-1/2}3t^2\frac{1}{\cos^2 z} \cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{tg}^3 2x + 2)^{-1/2}3\operatorname{tg}^2 2x\frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{3\operatorname{tg}^2 2x}{\sqrt{\operatorname{tg}^3 2x + 2} \cdot \cos^2 2x}. \quad ■$$

Надалі будемо вважати, що похідну необхідно знайти в області визначення заданої функції, при цьому саму область визначення вказувати не будемо.

в) $y = \operatorname{arctg} 2^{3x+1}.$

□

$$y' = (\operatorname{arctg} 2^{3x+1})'_{2^{3x+1}}(2^{3x+1})'_{(3x+1)}(3x+1)'_x =$$

$$= \frac{1}{1 + (2^{3x+1})^2}2^{3x+1}\ln 2 \cdot 3 = \frac{3\ln 2 \cdot 2^{3x+1}}{1 + 2^{6x+2}}. \quad ■$$

У наступних прикладах будемо використовувати скорочену форму запису розв'язань без зазначення проміжних аргументів.

г) $y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^5}}}.$

□

$$y' = \frac{(1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^5}})'}{2\sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^5}}}} = \frac{\frac{1}{3}(1 + \sqrt[4]{1 + x^5})^{-\frac{2}{3}}(1 + \sqrt[4]{1 + x^5})'}{2\sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^5}}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(1 + x^5)^{-\frac{3}{4}} \cdot (1 + x^5)'}{6\sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^5}}} \cdot \sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{1 + x^5})^2}} =$$

$$= \frac{5x^4}{24\sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^5}}} \cdot \sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{1 + x^5})^2} \cdot \sqrt[4]{(1 + x^5)^3}}. \quad ■$$

д) * $y = e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}} \cdot \ln\frac{1+x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$.

□

$$y' = (e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}})' \cdot \ln\frac{1+x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} + e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(\ln\frac{1+x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}\right)' =$$

$$= e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}(\arcsin\sqrt{x^2-1})' \ln\frac{1+x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} +$$

$$+ e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{\frac{1+x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}} \left(\frac{1+x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}\right)' =$$

$$= e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)}}(\sqrt{x^2-1})' \ln\frac{1+x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{1+x} \cdot \frac{(1+x)'\sqrt{\operatorname{ctg} x} - (1+x)\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ctg} x}}(\operatorname{ctg} x)'}{\operatorname{ctg} x}\Big) =$$

$$= e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}\Big(\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}\sqrt{x^2-1}}(x^2-1)' \ln\frac{1+x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x} + \frac{1+x}{2\sqrt{\operatorname{ctg} x}\sin^2 x}}{(1+x)\sqrt{\operatorname{ctg} x}}\Big) =$$

$$= e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{x^2-1}} \ln\frac{1+x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} + \frac{\operatorname{ctg} x + \frac{1+x}{2\sin^2 x}}{(1+x)\operatorname{ctg} x}\right). \quad \blacksquare$$

2.3. *Знайти похідну функції*

$$y = \ln\sqrt{\frac{e^{\operatorname{tg} 5x}(x^2+4)^5}{(6x^3-2)^3(3x+1)}}.$$

□ Використовуючи властивості логарифмів, задану функцію неважко представити у такому вигляді:

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{e^{\operatorname{tg} 5x}(x^2+4)^5}{(6x^3-2)^3(3x+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 5x + \frac{5}{2}\ln(x^2+4) -$$

$$- \frac{3}{2}\ln(6x^3-2) - \frac{1}{2}\ln(3x+1). \qquad (2.2)$$

Диференцюючи одержану функцію, маємо:

$$y' = \frac{5}{2\cos^2 5x} + \frac{5x}{x^2+4} - \frac{27x^2}{6x^3-2} - \frac{3}{6x+2}. \blacksquare$$

Зауваження 2.1. *Ми щойно переконалися, що функцію, записану у вигляді* (2.2)*, було набагато простіше диференціювати, ніж задану.*

Зауваження 2.2. *Оскільки* y *є функцією змінної* x*, то*

$$(\ln y)'_x = \frac{1}{y} \cdot y'_x = \frac{y'}{y}.$$

Отже, якщо необхідно продиференціювати функцію виду

$$y = \left(\frac{\varphi(U)\psi(U)}{g(U)f(U)h(U)}\right)^{\alpha} \tag{2.3}$$

або подібного до нього, то, перед тим, як знаходити похідну y'_x, є сенс спочатку прологарифмувати обидві частини функції (2.3). Шукана похідна при цьому знаходиться наступним чином

$$\ln y = \alpha[\ln\varphi(U) + \ln\psi(U) - \ln g(U) - \ln f(U) - \ln h(U)],$$

$$\frac{y'}{y} = \alpha\left[\frac{\varphi'(U)}{\varphi(U)} + \frac{\psi'(U)}{\psi(U)} - \frac{g'(U)}{g(U)} - \frac{f'(U)}{f(U)} - \frac{h'(U)}{h(U)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \alpha\left(\frac{\varphi(U)\psi(U)}{g(U)f(U)h(U)}\right)^{\alpha}\Big[\frac{\varphi'(U)}{\varphi(U)} + \frac{\psi'(U)}{\psi(U)} - \frac{g'(U)}{g(U)} -$$

$$-\frac{f'(U)}{f(U)} - \frac{h'(U)}{h(U)}\Big].$$

2.4. *Знайти похідну функції*

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\cos^2 x \cdot \sqrt[5]{5-x}}}.$$

□ Прологарифмувавши задану функцію, маємо

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln x^3 + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) - \frac{1}{3}\ln(\cos^2 x) - \frac{1}{15}\ln(5-x).$$

Тепер продиференціюємо обидві частини одержаної рівності:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{2\cos x\sin x}{3\cos^2 x} + \frac{1}{15(5-x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\cos^2 x\cdot\sqrt[5]{5-x}}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x + \frac{1}{15(5-x)}\right). \quad ■$$

2.5. *Знайти похідну степенево-показникової функції*

$$\boxed{y = (U(x))^{V(x)}.}$$

□ Нехай задана функція y та функції $U(x)$, $V(x)$ мають похідні в області визначення функції $y = (U(x))^{V(x)}$. Тоді функція $\ln y$ також має в цій області похідну, причому .

$$(\ln y)' = [\ln U(x)^{V(x)}]' = [V(x)\ln U(x)]' =$$

$$= V'(x)\ln U(x) + V(x)\frac{U'(x)}{U(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = U(x)^{V(x)}\left(V'(x)\ln U(x) + \tfrac{V(x)}{U(x)}U'(x)\right).} \qquad (2.4)$$

■

2.6. *Знайти похідну функції:*

а) $y = (x\ln x^2 + 2)^{e^{x^2}}$.

□ Скористаємося формулою (2.4). У нашому випадку

$$U(x) = x\ln x^2 + 2, \quad V(x) = e^{x^2}.$$

Зрозуміло, що $U'(x) = \ln x^2 + 2$, $V'(x) = 2xe^{x^2}$, отже

$$y' = (x \ln x^2 + 2)^{e^{x^2}} \left(2xe^{x^2} \ln(x \ln x^2 + 2) + \frac{e^{x^2}}{x \ln x^2 + 2} (\ln x^2 + 2) \right). \blacksquare$$

б) * $y = \left(\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right)^{\operatorname{arctg} x^2}$.

□ Знову скористаємося формулою (2.4). У цьому випадку

$$U(x) = \frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}, \quad V(x) = \operatorname{arctg} x^2.$$

$$U'(x) = \Big(\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^4 x}} 2 \sin x \cos x \cdot \arccos(\cos^2 x) -$$

$$- \arcsin(\sin^2 x) \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^4 x}} 2 \cos x (-\sin x) \Big) : \arccos^2(\cos^2 x) =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin 2x \cdot \arccos(\cos^2 x)}{\sqrt{1 - \sin^4 x}} - \dfrac{\sin 2x \cdot \arcsin(\sin^2 x)}{\sqrt{1 - \cos^4 x}}}{\arccos^2(\cos^2 x)};$$

$$V'(x) = \frac{1}{1 + x^4} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^4}.$$

Тому

$$y' = \left(\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} \right)^{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \left\{ \frac{2x}{1 + x^4} \ln \left(\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{arctg} x^2 \cdot \sin 2x}{\arcsin(\sin^2 x)} \cdot \left(\frac{\arccos(\cos^2 x)}{\sqrt{1 - \sin^4 x}} - \frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\sqrt{1 - \cos^4 x}} \right) \right\}. \quad \blacksquare$$

2.2 Завдання для самостійної роботи

Чи будуть істинними такі твердження?

1. Операція диференціювання відображає відрізок $[a; b]$ у множину лінійних функцій.

2. Будь-яка функція, похідна якої дорівнює нулю, є функція стала.

3. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ не мають похідної в точці x_0, то функція $f(x) \pm g(x)$ також не має похідної в цій точці.

4. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ не мають похідної в точці x_0, то функція $f(x) \cdot g(x)$ також не має похідної в цій точці.

5. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u = \varphi(x)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ диференційовна в точці x.

2.7. *Знайти похідну функції:*

а) $y = \sqrt{x}(4x^3 + \sqrt[3]{3x} - \sqrt[12]{\ln^2 \pi})$;

б) $f(x) = \frac{1 - \frac{3x}{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$;

в) $f(x) = (e + 2x^2)(\ln x + 2^{15}x - \cos 56^\circ) \sin x$;

г) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\arccos x} + x \operatorname{tg} x$;

д) $y = \frac{e^x \sin x - 2^x \ln x}{1 + \cos x}$;

е) $y = \frac{\frac{\cos x + \sin x}{5^x + \operatorname{ctg} x}}{x + \cos 15^\circ}$.

2.8. *Знайти похідну складеної функції:*

а) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$;

б) $y = 2\sin(3x^2 + 5) \cdot \cos^2 5x$;

в) $y = \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\sin^3 x - \cos x^3}{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}} \right)$;

г) $y = \ln(\ln(\ln x))$;

д) $y = (e^{\operatorname{arctg} x} - e^{\arcsin x}) \arccos \left(\frac{e^x + e^{-x}}{x + 1} \right)$;

е) $y = \frac{\ln^3 \cos^2(4x - 1)}{\operatorname{arcctg}^3(\ln^2(e^{x^2} + 2))}$.

2.9.* *Знайти похідну складеної функції:*

а) $y = \sqrt[10]{e^{\cos 4x\cdot(x^2+x)^3} \cdot \mathrm{ctg}^2 x}$; **б)** $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x^3-2x+1)^2\cdot e^{\sin x+\cos x}}}{\sqrt[5]{(4x^3+e^2)^3}}$;

в) $y = \sqrt[x]{(2x\sin x+1)^3}$; **г)** $y = x^{\frac{x}{\ln^2 x}}$;

д) $y = (\sin x - 5^x)^{\mathrm{tg}\, x - x^5}$; **е)** $y = x^{x^{x+x^x}}$.

ЗАНЯТТЯ 3

Диференційовність функції

3.1 Теоретичні відомості

Означення 3.1. *Права границя*

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

називається правою похідною функції $f(x)$ в точці x_0 та позначається $f'_+(x_0)$.

Ліва границя

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

називається лівою похідною функції $f(x)$ в точці x_0 та позначається $f'_-(x_0)$.

Теорема 3.1. *(неперервність диференційовної функції).*

Якщо функція $f\left(x\right)$ диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

3.1. *Знайти ліву та праву похідні функції:*

а) $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

$\square$ Маємо

$$f'(x) = \frac{-e^{-x^2}(-2x)}{2\sqrt{1 - e^{-x^2}}} = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

Функція $f'(x)$ визначена для всіх $x \neq 0$. Якщо $x \to 0$, то

$$\sqrt{1 - e^{-x^2}} \sim \sqrt{x^2}.$$

Тому:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(\Delta x + 0) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = 1;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(\Delta x + 0) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = -1.$$

Таким чином,

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}, \quad x \neq 0, \quad f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1. \blacksquare$$

б) $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

$\square$ При $x \neq 0$ маємо

$$f'_-(x) = f'_+(x) = (1 + e^{\frac{1}{x}})^{-1} + e^{\frac{1}{x}} x^{-1} (1 + e^{\frac{1}{x}})^{-2}.$$

Обчислимо $f'_-(0)$ й $f'_+(0)$:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\Delta x}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} - f(0) \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0-} (1 + e^{\frac{1}{\Delta x}})^{-1} = 1;$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\Delta x}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} - f(0) \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0+} (1 + e^{\frac{1}{\Delta x}})^{-1} = 0. \quad \blacksquare$$

3.2. *Чи буде диференційовна функція $f(x)$ в точці x_0?*

а) $f(x) = \sqrt{x + 2}$, $x_0 = -2$.

$\square$ Знайдемо похідну даної функції, користуючись означенням:

$$\Delta f(-2) = f(-2+\Delta x) - f(-2) =$$
$$= \sqrt{(-2+\Delta x)+2} - \sqrt{-2+2} = \sqrt{\Delta x},$$
$$\frac{\Delta f(-2)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}.$$

Остаточно одержуємо

$$f'(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(-2)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = \infty.$$

Оскільки знайдена границя не є скінченою, то функція $f(x) = \sqrt{x+2}$ не диференційовна в точці $x_0 = -2$. $\blacksquare$

б) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ x^3, & x \geq 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0.$

$\square$ На проміжках $(-\infty, 0)$ та $[0, \infty)$ функція визначається за допомогою різних аналітичних виразів, тому знайдемо праву та ліву похідні в точці $x_0 = 0$.

Якщо $x \in (-\infty, 0)$, то $f(x) = x^2$ і

$$f'_{-}(0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{(\Delta x)^2 - 0}{\Delta x} = 0.$$

При $x \in [0, \infty)$ $f(x) = x^3$

$$f'_{+}(0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{(\Delta x)^3 - 0}{\Delta x} = 0.$$

Бачимо, що права та ліва похідні співпадають, а отже, задана функція диференційовна в точці $x_0 = 0$ і $f'(0) = 0$. $\blacksquare$

в) $f(x) = |\ln x|$, $x_0 = 1$.

$\square$ Будемо знаходити праву та ліві похідні заданої функції в точці $x_0 = 1$:

$$f'_{-}(1) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{|\ln(1+\Delta x)| - |\ln 1|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{-\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = -1.$$

(Ми скористалися відомою границею $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$). Аналогічно

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|\ln(1+\Delta x)| - |\ln 1|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = 1.$$

Оскільки ліва та права границі не співпадають, то функція $f(x) = |\ln x|$ не диференційовна в точці $x_0 = 1$. ■

3.3. *Дослідити функцію на диференційовність:*

а) $f(x) = x\sqrt{(1-x)^2 \sin x^2}, \quad x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

□ Формально застосовуючи правила диференціювання, одержимо

$$f'(x) = \sqrt{(1-x)^2 \sin x^2} + x \cdot \frac{2x\cos x^2 (1-x)^2 - 2(1-x)\sin x^2}{2\sqrt{(1-x)^2 \sin x^2}}. \quad (3.1)$$

Функція $f'(x)$ невизначена лише при $x = 0$ і $x = 1$. Тому для всіх x з множини $\{(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \setminus \{0\} \setminus \{1\}\}$ похідна існує та її значення знаходиться за формулою (3.1). Питання існування похідної в точках $x = 0$ і $x = 1$ розв'яжемо користуючись безпосередньо означенням похідної.

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \sqrt{(1-\Delta x)\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x} = 0.$$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (1+\Delta x)\sqrt{\sin(1+\Delta x)^2} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \sin 1 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x|.$$

Остання границя не існує.

Отже, функція $f(x) = x\sqrt{(1-x)^2 \sin x^2}, \quad x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ не диференційовна при $x = 1$, а при $x = 0$ має похідну, яка дорівнює нулю. ■

б) $f(x) = x\sqrt{\ln(1+x^2)}$

□ Знаходимо

$$f'(x) = \sqrt{\ln(1+x^2)} + \frac{x^2}{\sqrt{\ln(1+x^2)}} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Функція $f'(x)$ визначена для всіх $x \neq 0$. При $x = 0$ знаходимо

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(\Delta x + 0) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x\sqrt{\ln(1+(\Delta x)^2)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0+} \sqrt{\ln(1+\Delta x^2)} = 0;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \sqrt{\ln(1+\Delta x^2)} = 0.$$

Оскільки $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$, то $f'(0) = 0$. Отже, функція $f(x)$ диференційовна на всій числовій прямій та

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) = \begin{cases} \sqrt{\ln(1+x^2)} + \frac{x^2}{\sqrt{\ln(1+x^2)}(1+x^2)^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

■

в) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \geq 0; \\ x^2 + x, & x < 0. \end{cases}$

□ Функція $f(x)$ неперервна на всій числовій прямій. Для $x > 0$ маємо $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, для $x < 0$ $f'(x) = 2x + 1$, звідки випливає, що

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1+x^2} = 1, \quad f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} (2x+1) = 1.$$

Таким чином, функція $f(x)$ диференційовна на всій числовій прямій і

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x > 0; \\ 1, & x = 0; \\ 2x+1, & x < 0. \end{cases} \quad ■$$

г) * $f(x) = |\sin x|^{\cos x}$.

$\square$ Скористаємося формулою (2.4), поклавши $U(x) = |\sin x|$ та $V(x) = \cos x$. Одержимо

$$f'(x) = |\sin x|^{\cos x}\left(-\sin x \ln|\sin x| + \cos x \frac{1}{|\sin x|}(|\sin x|)'\right). \quad (3.2)$$

Залишилося знайти похідну функції $g(x) \stackrel{df}{=} |\sin x|$. Зрозуміло, що

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k); \\ -\sin x, & x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k); \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$(|\sin x|)' = \begin{cases} \cos x, & x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k); \\ -\cos x, & x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k); \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z},$$

тобто,

$$(|\sin x|)' = |\cos x| \quad \forall x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Похідну функції $g(x)$ в точках πk знайдемо, користуючись означенням лівої та правої границі.

$$g'_{\pm}(\pi k) = (|\sin(\pi k)|)'_{\pm} = \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{|\sin(\pi k + \Delta x)| - |\sin \pi k|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{|\sin(\pi k + \Delta x)|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{|\sin \pi k \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos \pi k|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{|\cos \pi k||\sin \Delta x|}{\Delta x} = \pm 1.$$

Оскільки $g'_+(\pi k) \neq g'_-(\pi k)$, то в точках $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ функція $g(x) = |\sin x|$, а з нею і задана функція $f(x) = |\sin x|^{\cos x}$ не диференційовні. В усіх інших точках згідно зі співвідношеннями (3.2), (3.3) справджується формула

$$f'(x) = |\sin x|^{\cos x}\left(\sin x \ln|\sin x| + \cos x \frac{1}{|\sin x|}|\cos x|\right). \quad \blacksquare$$

3.4.* *Довести, що функція* $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ *має розривну похідну.*

$\square$ Для випадку $x \neq 0$ будемо використовувати правила диференціювання добутку функцій та складеної функції й одержимо:

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Якщо ж $x = 0$, то за означенням похідної функції в точці знаходимо

$$\Delta f(0) = (0 + \Delta x)^2 \sin\frac{1}{0 + \Delta x} - 0 = (\Delta x)^2 \sin\frac{1}{\Delta x}$$

(за умовою $f(0) = 0$), тому

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x} = 0$$

(як границя добутку нескінченно малої функції на обмежену функцію). Звідси випливає, що функція $f(x)$ диференційовна на всій дійсній осі, а

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Дослідимо функцію $\varphi(x) \stackrel{df}{=} f'(x)$ на неперервність.

У випадку $x \neq 0$ функція неперервна.

Розглянемо випадок $x = 0$. Згідно до означення неперервності функції в точці, треба знайти границі $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0} \varphi(x)$, але це неможливо, оскільки, як добре відомо, $\lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$ не існує. Отже, приходимо до висновку, що функція $\varphi(x)$ має розрив в точці $x = 0$. $\blacksquare$

3.5.* *Для якого* n *функція*

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

має неперервну похідну в точці $x_0 = 0$?

□ З'ясуємо, за яких умов в точці $x_0 = 0$ існує похідна заданої функції $f(x)$. Відповідно до означення похідної функції в точці повинна виконуватися умова $f'_-(0) = f'_+(0)$, тобто, повинні існувати скінченні границі

$$\lim_{\Delta x \to 0 \pm 0} (\Delta x)^{n-1} \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Ці границі існують та дорівнюють нулю (як добуток нескінченно малої функції $y = (\Delta x)^{n-1}$ на обмежену функцію $y = \sin \frac{1}{\Delta x}$) при $n > 1$.

Для $x \neq 0$

$$f'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{\Delta x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{\Delta x}.$$

Зрозуміло, що функція $y = f'(x)$ неперервна за умови $x \neq 0$. Для неперервності цієї функції в точці $x = 0$ необхідно й достатньо виконання умов

$$\lim_{x \to 0-0} f'(x) = \lim_{x \to 0+0} f'(x) = f'(0),$$

якщо вказані границі існують, тобто

$$\exists \lim_{x \to 0 \pm 0} \left(nx^{n-1} \sin \frac{1}{\Delta x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{\Delta x} \right).$$

Це можливо, якщо $x^{n-2} \to 0$ при $x \to 0 \pm 0$. Тому $n-2$ повинно бути більше нуля, а отже $n > 2$.

Остаточно приходимо до висновку: задана функція $f(x)$ має неперервну похідну для всіх $n > 2$. ■

3.6. *Дослідити на диференційовність функцію*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}; \\ -x^2, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

□ Розглянемо два випадки.

а) $x \neq 0$. Нехай $\Delta x \to 0$, рухаючись по раціональним точкам, тоді

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x.$$

Якщо ж $\Delta x \to 0$, рухаючись по ірраціональним точкам, то

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x+\Delta x)^2 + x^2}{\Delta x} = -2x.$$

Оскільки для різних способів прямування до нуля величини Δx аналітичні вирази для похідної заданої функції не співпадають, то $f(x)$ не є диференційовною в точках $x \neq 0$.

б) $x = 0$. Тоді, для Δx, що прямує до нуля по раціональним точкам, маємо

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0+\Delta x)^2 - 0^2}{\Delta x} = 0.$$

При $\Delta x \to 0$ по ірраціональним точкам

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(0+\Delta x)^2 + 0^2}{\Delta x} = 0.$$

Отже, з випадків а) та б) бачимо, що задана функція є диференційовною лише в точці $x = 0$ та $f'(0) = 0$. ■

3.7. *Побудувати приклад неперервної функції, яка не має похідної в точках* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

□ Нехай $f(x) = |x-1||x-2||x-3|$. Зрозуміло, що ця функція неперервна для всіх дійсних значень аргументу. Знайдемо праву та ліву похідні в точці $x_1 = 1$.

$$f'_{\pm}(1) = \lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{|1+\Delta x - 1||1+\Delta x - 2||1+\Delta x - 3| - 0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{|\Delta x||\Delta x - 1||\Delta x - 2|}{\Delta x} = \pm 2.$$

Оскільки $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, то в точці $x_1 = 1$ функція $f(x)$ не має похідної. Аналогічно переконуємося, що ця функція також недиференційовна в точках $x_2 = 2$ й $x_3 = 3$. ■

3.8.* *Нехай*

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq a; \\ h(x), & x < a. \end{cases}$$

Якій умові повинні задовольняти неперервні функції $g(x)$ і $h(x)$ для того, щоб функція $f(x)$ була диференційовна на всій числовій прямій?

□ Оскільки $f(x) = g(x)$ для $x > a$ та $f(x) = h(x)$ для $x < a$, то умова диференційовності $g(x)$ для $x > a$ і $h(x)$ для $x < a$ є необхідною та достатньою для диференційовності $f(x)$ на множині $\{x < a\} \cup \{x > a\}$. Для диференційовності $f(x)$ в точці a необхідною є умова неперервності: $h(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, тобто, $\lim\limits_{x \to a-} h(x) = g(a)$.

Якщо $\Delta x > 0$, то

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x};$$

при $\Delta x < 0$

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{h(a + \Delta x) - h(a)}{\Delta x}.$$

Таким чином, для диференційовності $f(x)$ в точці a необхідно та достатньо, щоб виконувалися рівності

$$g(a) = h(a) \quad \text{й} \quad g'_+(a) = h'_-(a),$$

оскільки

$$f'_+(a) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x}$$

і

$$f'_-(a) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{h(a + \Delta x) - h(a)}{\Delta x}. \quad ■$$

3.2 Завдання для самостійної роботи

Чи будуть істинними такі твердження?

1. Клас неперервних функцій ширший за клас диференційовних функцій.

2. Похідна неперервної функції в свою чергу є функція неперервна.

3. Якщо скінченна похідна диференційовної функції $f(x)$ існує в деякому проміжку, то в кожній точці цього проміжку функція $f'(x)$ або неперервна, або має розрив другого роду.

3.9. *Знайти праву та ліву похідні заданої функції:*

а) $y = x^2 - 7|x| + 6$; **б)** $y = |\ln|x||,\ x \neq 0$;

в) $y = \begin{cases} x+1, & x \le 2; \\ -2x+1, & x > 2; \end{cases}$ **г)** $y = \cos\frac{\pi}{x}$.

3.10. *Чи буде диференційовною функція* $f(x)$ *в точці* x_0?

а) $f(x) = \sqrt[3]{x-1},\ x_0 = 1$; **б)** $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -2; \\ (x+2)^2, & x \ge -2; \end{cases}$

$x_0 = -2$;

в) $y = e^{\frac{1}{x+3}},\ x_0 = -3$; **г)** $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x},\ x_0 = 2/\pi$.

3.11. *Дослідити на диференційовність функцію:*

а) $f(x) = x|x|$;

б) $f(x) = e^{|x|}$;

в) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} x\arccos\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ \pi, & x = 0; \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{I}; \end{cases}$

е) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - 3x}$ $(x \neq 0)$.

3.12. *Побудувати не таку, як у прикладі 3.7 неперервну функцію, яка не має похідної в точках* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

3.13. * *Побудувати функцію, яка диференційовна в точках* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, *але розривна в усіх інших точках.*

ЗАНЯТТЯ 4

Застосування похідної

4.1 Теоретичні відомості

Означення 4.1. *Пряма, що проходить через дві точки кривої, називається січною.*

Означення 4.2. *Пряма M_0T, яка є граничним положенням січної M_0M, коли точка M вздовж кривої AB наближається до точки M_0, називається дотичною до кривої AB в точці M_0.*

Нехай крива AB задана за допомогою рівняння $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, де $f(x)$ — неперервна функція на проміжку $(a;b)$.

Рівняння дотичної M_0T в точці $M_0(x_0, y_0)$ до кривої AB має вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Означення 4.3. *Пряма, яка перпендикулярна дотичній до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_0, f(x_0))$, називається нормаллю до цієї кривої в точці $(x_0, f(x_0))$. Рівняння нормалі:*

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

4.2 Застосування похідної до задач геометрії

4.1. *Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої* $y = x^4 + 3x^2 - 16$ *в точках її перетину з параболою* $y = 3x^2$.

☐ Відшукаємо точки перетину заданих кривих

$$\begin{cases} y = x^4 + 3x^2 - 16 \\ y = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2; \ y_1 = 12; \\ x_2 = 2; \ y_2 = 12. \end{cases}$$

Значення похідної $y' = 4x^3 + 6x$ в точках x_1 та x_2: $y'(-2) = -44$, $y'(2) = 44$. Звідси випливає, що рівняння дотичних мають вигляд:

$$y - 12 = -44(x+2) \quad \text{або} \quad y + 44x + 76 = 0;$$
$$y - 12 = 44(x-2) \quad \text{або} \quad y - 44x + 76 = 0.$$

Відповідно, шукані рівняння нормалей:

$$y - 12 = \tfrac{1}{44}(x+2) \quad \text{або} \quad y - \tfrac{1}{44}x - 12\tfrac{1}{22} = 0;$$
$$y - 12 = \tfrac{-1}{44}(x-2) \quad \text{або} \quad y + \tfrac{1}{44}x - 12\tfrac{1}{22} = 0. \qquad ■$$

4.2. *У якій точці дотична до параболи* $y = -x^2 + 2x - 3$ *нахилена до вісі абсцис під кутом* $0°$, $45°$?

☐ Позначимо через x_1 і x_2 точки, в яких дотична до параболи нахилена до вісі абсцис під кутом $0°$ і $45°$. Відповідно до геометричного змісту похідної функції в точці, $y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, де α і є кут між дотичною до кривої в точці x_0 та додатнім напрямом вісі абсцис.

Похідна заданої кривої

$$y' = -2x + 2 = 2(1-x).$$

В силу умови, $y'(x_1) = \operatorname{tg} 0°$ або $2(1-x_1) = \operatorname{tg} 0°$, звідки $x_1 = 1$. Аналогічно $2(1-x_2) = \operatorname{tg} 45°$, тому $x_2 = \frac{1}{2}$. ■

4.3. *На кривій* $y = x^3 - 3x + 5$ *знайти точки, у яких дотична:*

а) перпендикулярна до прямої $y = -x$;

б) паралельна прямій $y = \frac{1}{2}x + 99$.

□ Зрозуміло, що $y' = 3x^2 - 3$.

а) Нехай координати шуканої точки (x_0, y_0). Тоді кутовий коефіцієнт k дотичної має вигляд $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 3$. Оскільки дотична за умовою перпендикулярна до прямої $y = -x$, то їх кутові коефіцієнти k та $k_1 = -1$ (де k_1 — кутовий коефіцієнт прямої $y = -x$) пов'язані відомим співвідношенням: $k \cdot k_1 = -1$, отже, приходимо до рівняння

$$(3x_0^2 - 3)(-1) = -1 \Rightarrow x_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Таким чином, ми знайшли дві точки, які задовольняють умову задачі. Ці точки мають такі координати: $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{8}{\sqrt{27}} - \frac{6}{\sqrt{3}} + 5\right)$, $\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}; \frac{-8}{\sqrt{27}} + \frac{6}{\sqrt{3}} + 5\right)$.

б) Оскільки дотична за умовою повинна бути паралельна до прямої $y = \frac{1}{2}x + 99$, то їх кутові коефіцієнти співпадають, а отже маємо рівняння

$$3x_0^2 - 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{7}{6}}.$$

Тому шукані точки мають такі координати: $\left(\sqrt{\frac{7}{6}}; \frac{7}{6}\sqrt{\frac{7}{6}} - 3\sqrt{\frac{7}{6}} + 5\right)$ і $\left(-\sqrt{\frac{7}{6}}; -\frac{7}{6}\sqrt{\frac{7}{6}} + 3\sqrt{\frac{7}{6}} + 5\right)$. ■

4.4. *Знайти кут, під яким перетинаються криві* $y = \sin x$ та $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

□ Кутом ϕ між двома кривими в точці їх перетину називається кут між дотичними до кривих, проведених у цій точці. З геометричних міркувань випливає, що шуканий кут ϕ є різницею кутів β і α під якими нахилені згадані дотичні до вісі абсцис (див. рис. 4.1).

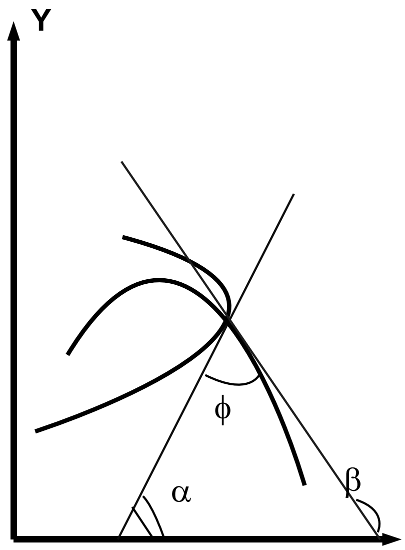


Рис. 4.1: кут між двома кривими

Таким чином,

$$\operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha + 1} = \frac{k_2-k_1}{k_1k_2+1},$$

де $k_1 = \operatorname{tg}\alpha$, $k_2 = \operatorname{tg}\beta$.

Знайдемо координати точки перетину заданих кривих на проміжку $[0,\pi]$:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases} \Rightarrow \quad \sin x - \cos x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

Далі обчислимо кутові коефіцієнти дотичних, проведених до кривих $y = \sin x$ та $y = \cos x$ у точці $x = \frac{\pi}{4}$:

$$k_1 = (\sin x)'_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad k_2 = (\cos x)'_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{2}{4} + 1} = -2\sqrt{2}$$

і

$$\varphi = -\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}. \quad \blacksquare$$

4.3 Застосування похідної до задач фізики

4.5. *Знайти швидкість точки наприкінці 5 та 10 секунд від початку руху, якщо закон руху визначено рівнянням* $S = t^3 - 9t^2 + 24t$.

$\square$ Оскільки швидкість v може бути знайдена за формулою

$$v = S'_t = (t^3 - 9t^2 + 24t)'_t = 3t^2 - 18t + 24,$$

то $v(5) = 3 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 + 24 = 9$ м/с, $v(10) = 144$ м/с. $\blacksquare$

4.6. *Колесо, що зупиняється гальмами, за* t *секунд повертається на кут* $\varphi = 8t - 0{,}5t^2$. *Знайти кутову швидкість у момент часу* t *та в момент часу* $t = 3$ *секунди. Визначити момент часу, коли обертання колеса припиниться.*

$\square$ Зрозуміло, що кут φ повороту колеса є функцією від часу t, тобто $\varphi = \varphi(t)$. Якщо за проміжок часу від моменту часу t до моменту $t+\Delta t$ колесо повернулося на кут $\Delta\varphi = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$, то відношення приросту кута $\Delta\varphi$ до приросту часу Δt природньо назвати середньою кутовою швидкістю обертання колеса за проміжок часу Δt.

Позначимо кутову швидкість літерою ω, тоді $\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Кутова швидкість ω у момент часу t визначається як границя середньої кутової швидкості за проміжок часу від моменту t до моменту $t+\Delta t$

при $\Delta t \to 0$, тобто як похідна кута повороту φ за часом t:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \varphi'_t.$$

Тому

$$\omega = (8t - 0{,}5t^2)'_t = 8 - t \quad \text{рад/сек.}$$

При $t = 3$ сек. одержимо $\omega(3) = (8 - 3) = 5$ рад/сек.

Обертання зупиниться в момент, коли кутова швидкість буде дорівнювати нулю:

$$\omega(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 - t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 8,$$

тобто за 8 секунд. ■

Зауваження 4.1. *Нехай довільна функція $y = f(x)$, незважаючи на фізичний сенс змінних x та y, описує процес зміни величини y в залежності від зміни величини x. Для знаходження закону швидкості зміни деякої фізичної величини y за відомим законом залежності $f(x)$ треба продиференціювати функцію $y = f(x)$.*

Проілюструємо вище сказане на прикладі.

4.7. *Залежність між кількістю речовини x, що одержується під час деякої хімічної реакції та часом реакції t задано рівнянням $x = A(1 - e^{-kt})$, де A і k — деякі константи. Визначити швидкість протікання хімічної реакції.*

□ Позначимо шукану швидкість реакції літерою v. Тоді

$$v = x'_t = (A(1 - e^{-kt}))'_t = Ake^{-kt}. \quad ■$$

4.8. *Довжина вертикально розташованої драбини складає 5 метрів. Нижній кінець драбини починає відсуватися від стіни зі сталою швидкістю 2 м/сек. З якою швидкістю падає в момент часу t верхній кінець драбини?*

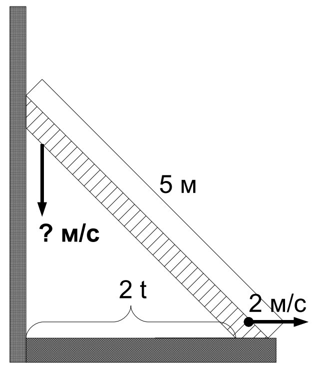


Рис. 4.2: схема до задачі 4.8

□ Оскільки нижня частина драбини рухається зі швидкістю 2 м/сек, то за час t вона пересунеться на $2t$ метрів. За теоремою Піфагора (див. рис. 4.2) верхня частина драбини при цьому буде знаходитися на висоті $h = \sqrt{25 - 4t^2}$.

Тому відстань S, яку подолає верхня частина драбини, дорівнює $5 - h$, тобто $S = 5 - h = 5 - \sqrt{25 - 4t^2}$. Відповідно, шукана швидкість падіння верхньої частини драбини

$$v = S'_t = (5 - \sqrt{25 - 4t^2})'_t = \frac{4t}{\sqrt{25 - 4t^2}}. \quad \blacksquare$$

4.9. *Тіло масою 10 кг рухається прямолінійно за законом* $S = 2t^2 + 3t + 1$. *Знайти кінетичну енергію тіла через 10 секунд після початку руху.*

□ Знайдемо швидкість руху тіла: $v = S'_t = 4t + 3$, тоді швидкість тіла наприкінці 10 секунди руху дорівнює $v(10) = 43$ м/сек а кінетична енергія $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{10 \cdot 43^2}{2} = 9245$ Дж. ■

4.4 Застосування похідної до задач алгебри

4.10. *Доведіть рівність*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^x-4x+4}{x-2}=\ln 16.$$

$\square$ Оскільки

$$\frac{x^x-4x+4}{x-2}=\frac{x^x-2^2}{x-2}-4,$$

то, за означенням похідної, маємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^x-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^x-2^2}{x-2}-4=(x^x)'_{x=2}-4.$$

За допомогою формули (2.4) остаточно одержимо

$$(x^x)'_{x=2}-4=(x^x(\ln x+1))_{x=2}-4=2^2(\ln 2+1)-4=\ln 16. \quad \blacksquare$$

4.11. *Знайти формули для наступних сум:*

а) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1},\ |x|<1.$

$\square$ За формулою суми скінченої геометричної прогресії маємо

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Диференціюючи обидві частини останньої рівності одержимо

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=$$

$$=\frac{(n+1)x^n(x-1)-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}=\frac{nx^n}{x-1}.$$

Таким чином, справджується рівність

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\frac{nx^n}{x-1},\quad |x|<1. \quad \blacksquare \qquad (4.1)$$

б) $1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1},\ |x|<1.$

□ Помножимо обидві частини формули (4.1) на x та продиференцюємо одержану рівність. У результаті дістанемо таку формулу

$$1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1} =$$
$$= \frac{n(n+1)x^n(x-1) - nx^{n+1}}{(x-1)^2} = \frac{nx^n(nx-n-1)}{(x-1)^2}, \quad |x| < 1. \blacksquare$$

в) $S_n(x) = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx, \ n \in \mathbb{N}.$

□ Помножимо обидві частини заданої рівності на $\sin\frac{x}{2}$ та скористаємося формулою $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$. Одержимо

$$S_n(x)\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\Bigg[\left(\cos\frac{x}{2} - \underline{\cos\frac{3x}{2}}\right) + \left(\underline{\cos\frac{3x}{2}} - \underline{\underline{\cos\frac{5x}{2}}}\right) +$$
$$+ \left(\underline{\underline{\cos\frac{5x}{2}}} - \cos\frac{7x}{2}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right)\Bigg] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x\right].$$

Звідси приходимо до остаточної формули

$$S_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad \sin\frac{x}{2} \neq 0. \quad \blacksquare$$

4.5 Завдання для самостійної роботи

Чи будуть істинними такі твердження?

1. Якщо похідна функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює нулю, то дотична до графіка функції $f(x)$ в точці x_0 паралельна до вісі абсцис.

2. Якщо дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 перпендикулярна до вісі Ox, то $f(x)$ не диференційовна в точці x_0.

3. Якщо $f'(x_1) = g'(x_2)$ $(x_1 \neq x_2)$, то дотичні до кривих $y = f(x)$ і $y = g(x)$, проведені в точках x_1 і x_2 відповідно, взаємно перпендикулярні.

4.12. *Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої* $y = x^3 + 2x^2 - 1$ *в точці її перетину з параболою* $y = 2x^2$.

4.13. *Скласти рівняння прямої, що проходить через точку* $A(2; -1)$ *і дотикається до параболи* $y = x^2 - 4$.

4.14.* *Знайти точки, в яких дотичні до кривих* $f(x) = x^3 - x - 1$ *і* $\varphi(x) = 3x^2 - 4x + 1$ *паралельні.*

4.15. *Який кут утворює в точці* $x = 2$ *задана крива з віссю абсцис? Ординат?*

а) $y = e^x$; **б)** $y = \ln x$.

4.16. *Довести, що гіперболи* $xy = 6$ *й* $x^2 - y^2 = 12$ *перетинаються під прямим кутом.*

4.17. *Під яким кутом синусоїда перетинає пряму* $y = \frac{1}{2}$?

4.18. *У якій точці дотична до кривої* $y = \ln x$ *паралельна прямій* $y = x - 1$? *Перпендикулярна цій же прямій?*

4.19. *Тіло масою 6 г рухається прямолінійно, за законом*

$$S = -1 + \ln(t + 1) + (t + 1)^3$$

(відстань S *виражена у сантиметрах, час* t *— у секундах). Обчислити кінетичну енергію через 1 секунду та через 1 хвилину після початку руху.*

4.20. *Яку масу повинно мати тіло, що рухається прямолінійно за законом* $S = e^{t+1} + t^2$ *для того, щоб через 10 секунд від початку руху воно мало кінетичну енергію 100 Дж?*

4.21.* *Довести, що для тіла, яке рухається за законом* $S = ae^t + be^{-t}$, $a > 0$, $b > 0$ *прискорення чисельно дорівнює пройденому* *шляху.*

4.22.* *Пліт підтягують до берега за допомогою каната, який намотують на вороток зі швидкістю 3 м/хв. Знайти швидкість руху плоту в той час, коли його відстань від берега буде дорівнювати 25 м, якщо вороток розташовано на березі вище рівня води на 4 м.*

4.23. $f(x) = 3x^5 - 15x^3 + 5x - 7$. *У якій точці* x *швидкість зміни функції найменша?*

4.24. *Знайти формули для наступних сум* (скористайтеся результатом приклада 4.11. в)):

а) $\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx$;

б) $\sin x + 2^2 \sin 2x + \ldots + n^2 \sin nx$;

в) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$;

г) $\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n\sin nx$.

ЗАНЯТТЯ 5

Диференціал функції

5.1 Теоретичні відомості

Означення 5.1. *Функція $f(x)$, визначена в деякому околі точки x_0, називається диференційовною в точці x_0, якщо приріст цієї функції в точці x_0 можна подати у вигляді:*

$$\Delta f(x_0) = A(x_0)\,\Delta x + \alpha(x_0;\Delta x)\,\Delta x, \tag{5.1}$$

де

$$\lim_{\Delta x \to x_0} \alpha(x_0;\Delta x) = 0,$$

а число $A = A(x_0)$ не залежить від Δx.

Теорема 5.1. *Означення 2.1 та 5.1 еквівалентні.*

Означення 5.2. *Головна частина приросту функції $f(x)$ в точці x (тобто, перший доданок правої частини рівності (5.1)), лінійна відносно Δx, називається диференціалом функції $f(x)$ в точці x і позначається $df(x)$. Таким чином,*

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x. \tag{5.2}$$

Означення 5.3. *Диференціалом незалежної змінної x називають приріст цієї незалежної змінної і позначають dx. Таким чином, $dx = \Delta x$.*

Відповідно, формулу (5.2) можна переписати у вигляді:

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

Звідси

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

тобто, похідна функції в точці x дорівнює відношенню диференціала цієї функції в точці x до диференціалу аргумента.

Означення 5.4. *Операцію знаходження диференціала функції, так само як і операція знаходження похідної функції, називають диференціюванням цієї функції.*

При досить малому Δx має місце наближена рівність

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x. \tag{5.3}$$

Формулу (5.3) зазвичай застосовують для наближеного обчислення значення $f(x_0 + \Delta x)$ за умови $f'(x_0) \neq 0$. Зрозуміло, що формулою (5.3) зручно користуватись тоді, коли відомо значення $f(x_0)$ і треба знайти значення $f(x_0 + \Delta x)$, де Δx є достатньо малим.

5.1. *Для функції $f(x) = x^3 - 2x + 1$ знайти приріст та диференціал у точці $x = 1$. Порівняти їх, якщо $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta x = 0{,}01$.*

☐ Знайдемо приріст $\Delta f(x)$ в точці $x = 1$:

$$\Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^3 - 2(1+\Delta x) + 1 - (1^3 - 2\cdot 1 + 1) =$$

$$= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3. \tag{5.4}$$

Головна частина приросту функції $f(x)$, яка є лінійною відносно Δx і є шуканим диференціалом заданої функції в точці $x = 1$:

$$df(1) = 1 \cdot \Delta x. \tag{5.5}$$

Користуючись формулами (5.4) і (5.5) складемо таблицю:

	$\Delta x = 1$	$\Delta x = 0{,}1$	$\Delta x = 0{,}01$
$\Delta f(1)$	5	0,131	0,010301
$df(1)$	1	0,1	0,01

. ■

5.2. *Знайти диференціал функції* $f(x) = x^2 - 4x$ *в точці* $x = 3$, *користуючись означенням.*

□ Відшукаємо приріст функції в точці $x = 3$:

$$\Delta f(3) = f(3 + \Delta x) - f(3) = (3 + \Delta x)^2 - 4(3 + \Delta x) - (3^2 - 4 \cdot 3) =$$

$$= 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Згідно з означенням, диференціалом функції в заданій точці буде головна частина останньої рівності, лінійна відносно приросту аргументу, а саме $2\Delta x$, тобто, $df(3) = 2\Delta x = 2dx$. ■

5.3. *Відомо, що приріст аргументу* Δx *в точці* x_0 *деякої функції* $f(x)$ *дорівнює* 0,4, *а диференціал цієї ж функції дорівнює* 0,8. *Чому дорівнює похідна функції* $f(x)$ *в точці* x_0?

□ Оскільки $df(x_0) = f'(x_0)dx$ і $dx = \Delta x = 0{,}4$, то

$$0{,}8 = f'(x_0) \cdot 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 2. \quad ■$$

5.4. *Знайти диференціал заданої функції:*

а) $y = x\sqrt{x^2 - 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

□ Безпосередньо використовуючи формули диференціювання, одержимо

$$dy = d(x\sqrt{x^2-1} + \ln(x+\sqrt{x^2-1})) =$$

$$= d(x)\cdot\sqrt{x^2-1} + x\cdot d(\sqrt{x^2-1}) + d(\ln(x+\sqrt{x^2-1})) =$$

$$= \sqrt{x^2-1}\cdot dx + x\cdot\frac{d(x^2-1)}{2\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}d(x+\sqrt{x^2-1}) =$$

$$= \sqrt{x^2-1}\cdot dx + \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(dx + \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}\right). \blacksquare$$

б) $y = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\ln x}$.

□ Цей приклад розв'яжемо іншим методом.

Оскільки $dy = y'dx$, то спочатку знайдемо похідну заданої функції:

$$y' = \frac{-1}{1+(\frac{x}{\ln x})^2}\cdot\frac{1\cdot\ln x - x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1-\ln x}{\ln^2 x + x^2}.$$

Відповідно,

$$dy = y'dx = \frac{1-\ln x}{\ln^2 x + x^2}dx. \quad \blacksquare$$

5.5. *Обчислити наближено:*

а) $\sqrt[3]{8{,}02}$.

□ Число 8,02 представимо як суму $8+0{,}02$ і покладемо $x_0 = 8$, $\Delta x = 0{,}02$. В якості x_0 ми взяли число, найбільш близьке до 8,02, але щоб був відомий $\sqrt[3]{x_0}$, при цьому Δx має бути достатньо малим. Тобто, наприклад, не можна покласти $x_0 = 1$, $\Delta x = 7{,}02$.

Розглянемо функцію $y = \sqrt[3]{x}$. Її похідна в точці $x = 8$

$$y'(8) = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)_{x=8} = \frac{1}{12}.$$

За формулою (5.3) (формулою малих приростів)

$$\sqrt[3]{8+0{,}02} \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{12}\cdot 0{,}02 = 3{,}001(6). \quad \blacksquare$$

б) $\sin 29°$.

□ Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$,

$$(\sin x)'_{x=30°} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тому

$$\sin 29° = \sin(30° - 1°) \approx \sin 30° + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{2 \cdot 180} \approx 0{,}484885. \quad \blacksquare$$

5.6. Довести наближенну формулу

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}}$$

□ Відзначимо, що

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a\sqrt[n]{1 + \frac{x}{a^n}}.$$

Розглянемо функцію $f(t) = \sqrt[n]{t}$ і обчислимо її похідну в точці $t = 1$: $f_t'(1) = \frac{1}{n}$. Використовуючи формулу (5.3), одержимо

$$\sqrt[n]{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n}.$$

Покладемо $\Delta x = \frac{x}{a^n}$, тоді

$$\sqrt[n]{1 + \frac{x}{a^n}} \approx 1 + \frac{x}{na^n} \quad \Rightarrow \quad a\sqrt[n]{1 + \frac{x}{a^n}} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}},$$

що і треба було довести. ■

Зауваження 5.1. *Якщо* a $(a \neq 0)$ *— це точне значення величини, яка вимірюється, а* x *— наближене значення цієї ж величини, то величина* $\Delta a = |x - a|$ *називається абсолютною похибкою, а* $\delta_a = \frac{|\Delta a|}{|a|}$ *— відносною похибкою величини, яка вимірюється.*

5.7. *З якою відносною похибкою необхідно вимірювати радіус R кулі для того, щоб її об'єм можна було б визначити з точністю до одного відсотка?*

$\square$ Об'єм кулі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Нехай ΔR — абсолютна похибка вимірювання радіуса кулі. Тоді

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi((R+\Delta R)^3 - R^3) = \frac{4}{3}\pi(3R^2\Delta R + 3R\Delta R^2 + \Delta R^3);$$

але за умовою $|\frac{\Delta V}{V}| \leq 0{,}01$, тому маємо нерівність

$$\left| 3\frac{\Delta R}{R} + 3\frac{\Delta R^2}{R^2} + \frac{\Delta R^3}{R^3} \right| \leq 0{,}01.$$

Позначимо відносну похибку вимірювання радіуса кулі $|\frac{\Delta R}{R}|$ через δ_R, тоді

$$\left| 3\frac{\Delta R}{R} + 3\frac{\Delta R^2}{R^2} + \frac{\Delta R^3}{R^3} \right| \leq 3\left|\frac{\Delta R}{R}\right| + 3\left|\frac{\Delta R^2}{R^2}\right| + \left|\frac{\Delta R^3}{R^3}\right| \leq$$

$$\leq 3\delta_R + 3\delta_R^2 + \delta_R^3 \leq 0{,}01.$$

Відзначимо, що $0 \leq \delta_R < 1$ і тому величини δ_R^2 й δ_R^3 набагато менші ніж δ_R. Відкидаючи доданки δ_R^2 та δ_R^3, отримаємо $\delta_R \leq 0{,}0033$, тобто, δ_R не перевищує 0,33 відсотка. $\blacksquare$

5.2 Завдання для самостійної роботи

Чи будуть істинними такі твердження?

1. Диференційовна функція завжди має диференціал.

2. Для досить малих приростів аргумента $dy = \Delta y$.

3. У рівності $dy = y'_x \Delta x$ величина Δx не обов'язково повинна бути нескінченно малою.

4. Якщо $\Delta f(x_0) = 0$, то функція $f(x)$ має диференціал у точці x_0.

5. За умови, що x — незалежна змінна, $dx = \Delta x$.

6. Нехай $x = x(t)$, тоді $dx \neq \Delta x$.

5.8. *Знайти приріст та диференціал функції* $y = 3x^3 + x - 1$ *в точці* $x = 1$ *при* $\Delta x = 0{,}1$. *Знайти абсолютну та відносну похибки, які виникають при заміні приросту функції її диференціалом.*

5.9. *Знайти наближено приріст функції* $y = x^3 - 7x^2 + 8$ *при зміні значення* x *від* 5 *до* $5{,}01$.

5.10. *У якій точці диференціал функції* $y = x^2 + 4$ *дорівнює* $-0{,}12$, *якщо* $\Delta x = 0{,}03$?

5.11. *Знайти за означенням диференціал функції* y *в точці* x_0:

а) $y = \sqrt{x^3 - 2x}$, $x_0 = 1$; **б)** $y = \cos(2x + 1)$, $x_0 = \alpha$.

5.12. *Двома методами знайти диференціал функції:*

а) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$; **б)** $y = \sqrt{\arccos 4x} + a^{-x^2} \ln(x^2 + 4)$;

в) $y = 5^{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \frac{\cos \sqrt{x^3}}{2x^3 + \pi^2}$.

5.13. *Обчислити наближено:*

а) $\operatorname{tg} 46^\circ$; **б)** $\lg 10{,}21$;

в) $\sqrt[5]{\frac{2 - 0{,}02}{2 + 0{,}02}}$; **г)** $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

5.14. *Мідний куб, ребро якого дорівнює 5 см, було відшліфовано з усіх сторін. При цьому його вага зменшилася на* $0{,}96$ *г. Визначити, на скільки скоротилося ребро куба. Питома вага міді дорівнює 8.*

5.15.* *Знайти співвідношення для визначення абсолютної похибки функцій через похибки їх аргументів:*

а) $y = \ln x$; **б)** $y = \sin x$ $(0 < x < \pi/2)$.

ЗАНЯТТЯ 6

Похідна та диференціал вищих порядків

6.1 Теоретичні відомості

Означення 6.1. *Нехай функція $f(x)$ диференційовна в інтервалі $(a;b)$. Тоді на цьому інтервалі буде визначеною й функція $f'(x)$. Якщо $f'(x)$, як функція від x, у деякій точці $x_0 \in (a;b)$ (а може навіть і в усіх точках цього інтервалу) має похідну, то її називають похідною другого порядку або другою похідною функції $f(x)$ у точці x_0 і позначають $f''(x_0)$ або $f^{(2)}(x_0)$.*

Отже, за означенням $f''(x) = [f'(x)]'$.

Аналогічно визначаються похідні третього, четвертого та вищих порядків:

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]', \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Формула Лейбніця. *Якщо U та V n-раз диференційовні функції, то*

$$(UV)^{(n)} = U^{(n)}V + nU^{(n-1)}V' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}U^{(n-2)}V'' + \ldots + UV^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k U^{(n-k)} V^{(k)},$$

де $U^{(0)} = U,\ V^{(0)} = V,\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Означення 6.2. *Нехай функція $f(x)$ диференційовна в інтервалі $(a;b)$. Тоді існує диференціал цієї функції, причому*

$$dy = df(x) = f'(x)\,dx, \quad \forall x \in (a;b).$$

Далі будемо називати dy диференціалом першого порядку або першим диференціалом функції $f(x)$. Якщо при фіксованому Δx диференціал $df(x)$, що розглядається як функція від x, є функцією, диференційовною в точці $x_0 \in (a;b)$, то можна говорити про диференціал цієї функції в точці x_0.

Диференціалом другого порядку функції $f(x)$ або другим диференціалом цієї функції, називається диференціал від диференціала функції $f(x)$.

Таким чином,

$$d^2 f(x) = d(df(x)), \quad x \in (a;b).$$

Або

$$d^2 f(x) = f''(x)\,dx^2 \quad \left(dx^2 \overset{df}{=} dx \cdot dx\right).$$

Аналогічно означаються диференціали третього, четвертого і ін. порядків. Зокрема,

$$d^n(f(x)) = d\left(d^{n-1} f(x)\right).$$

Зв'язок диференціала n-го порядку функції $f(x)$ з похідною того ж порядку виражається формулою:

$$d^n(f(x)) = f^{(n)}(x)\,(dx)^n \overset{df}{=} f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Звідси,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n},$$

тобто, похідну n-го порядку функції $f(x)$ можна розглядати як частку, знайдену від ділення диференціала n-го порядку цієї функції на n-ту степінь диференціала незалежної змінної.

Якщо $y = f(x)$ має диференціал другого порядку на інтервалі $(a;b)$ і x — незалежна змінна, то

$$d^2y = f''(x)\,dx^2. \tag{6.1}$$

Нехай функція $y = f(x)$ має диференціал другого порядку на інтервалі $(a;b)$, а функція $x = \varphi(t)$ має диференціал другого порядку на інтервалі $(\alpha;\beta)$, причому, $\forall t \in (\alpha;\beta)$ точка $x = \varphi(t) \in (a;b)$. Тоді складена функція $y = f(\varphi(t))$ буде мати диференціал другого порядку на інтервалі $(\alpha;\beta)$.

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2(x). \tag{6.2}$$

Співставляючи формули (6.1) і (6.2), бачимо, що форми диференціала другого порядку функції $f(x)$ у випадках, коли x – незалежна змінна і якщо x є функцією від t, відрізняються. Таким чином форма диференціала другого порядку (а тим більше порядку вищого двох) не є інваріантною відносно нелінійної заміни координат.

6.1. *Знайти похідні вказаного порядку:*

а) $y = x^4 + 2x^3 - x^2 + 4,\ \ y''' - ?$

□ Послідовно диференціюючи, знаходимо

$$y' = 4x^3 + 6x^2 - 2x, y'' = 12x^2 + 12x - 2, y''' = 24x + 12 \quad \blacksquare.$$

б) $y = x^2 \ln x,\ \ y^{IV} - ?$

□ Використовуючи правило диференціювання добутку двох функцій, маємо

$$y' = 2x\ln x + x, \quad y'' = 2\ln x + 3, \quad y''' = \frac{2}{x}, \quad y^{IV} = \frac{-2}{x^2}. \quad \blacksquare$$

в) $y = f(e^x)$, де f — тричі диференційовна функція, y''' — ?

□ Тричі диференціюючи задану складену функцію, одержимо

$$y' = e^x f', \quad y'' = f'e^x + e^{2x}f'', \quad y''' = (e^x f' + e^x f'' e^x) +$$
$$+ (2e^{2x}f'' + e^{2x}f'''e^x) = e^x f' + 3e^{2x}f'' + e^{3x}f'''. \quad \blacksquare$$

6.2. *Знайти похідні порядку n для заданих функцій:*

а) $y = a^{kx}$.

□ Як і раніше, неважко знайти наступні похідні:

$$y' = k\ln a \cdot a^{kx}, \quad y'' = (k\ln a)^2 a^{kx}, \quad y''' = (k\ln a)^3 a^{kx}, \ldots \quad .$$

Припустимо, що для $n = s$ справедлива рівність

$$y^{(s)} = (k\ln a)^s a^{kx}. \tag{6.3}$$

Далі, продиференціювавши співвідношення (6.3), одержимо

$$y^{(s+1)} = (k\ln a)^{(s+1)} a^{kx}.$$

Згідно з принципом математичної індукції, приходимо до шуканої формули

$$\boxed{(a^{kx})^{(n)} = (k\ln a)^n a^{kx}} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.4}$$

■

б) $y = \sin x$.

□ За допомогою формул зведення маємо

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \; y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \; \ldots \; .$$

Припустимо, що $y^{(s)} = \sin(x + s\frac{\pi}{2})$. Безпосереднім диференціюванням переконуємося в справедливості рівності

$$y^{(s+1)} = (y^{(s)})' = \cos\left(x + s\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (s+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Тому, за принципом математичної індукції

$$\boxed{(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\tfrac{\pi}{2})} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

■

Зауваження 6.1. *Аналогічно можна встановити наступні корисні формули:*

$$\boxed{(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin(ax + n\tfrac{\pi}{2})} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.6}$$

$$\boxed{(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos(ax + n\tfrac{\pi}{2})} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.7}$$

6.3. *Знайти диференціал вказаного порядку, якщо x незалежний аргумент.*

а) $y = x^5$, d^5y — ?

□ Оскільки x — незалежний аргумент, то скористаємося формулою $d^n y = f^{(n)} dx^n$:

$$y' = 5x^4, \quad y'' = 20x^3, \quad \dots, \quad y^V = 120.$$

Тому

$$d^5 y = 120 dx^5.$$

Цей же приклад також можна розв'язати шляхом безпосереднього відшукання диференціалу заданої функції:

$$dy = d(x^5) = 5x^4 dx,$$

$$d^2y = d(5x^4 dx) = 5d(x^4)dx = 20x^3 dx \cdot dx = 20x^3 dx^2,$$

$d^3y = d(20x^3dx^2) = 60x^2dx^2 \cdot dx = 60x^2dx^3, \ldots, \quad d^5y = 120dx^5.$ ■

б) $y = \sqrt{1+2x^2}$, d^2y — ?

□

$$dy = d(\sqrt{1+2x^2}) = \frac{2xdx}{\sqrt{1+2x^2}},$$

За правилом знаходження диференціалу частки та добутку

$$d^2y = d\left(\frac{2xdx}{\sqrt{1+2x^2}}\right) = 2\frac{d(xdx)\sqrt{1+2x^2} - xdx \cdot d(\sqrt{1+2x^2})}{1+2x^2} =$$

$$= 2\frac{dx^2\sqrt{1+2x^2} - xdx\frac{2xdx}{\sqrt{1+2x^2}}}{1+2x^2} = \frac{2dx^2}{\sqrt{(1+2x^2)^5}}. \quad ■$$

6.4. *Знайти d^2y для функції $y = e^x$, якщо x: 1) — незалежний аргумент, 2) — деяка функція від іншого аргументу.*

□ 1) $dy = d(e^x) = e^xdx$, $d^2y = d(e^xdx) = e^xdx^2$.

2) $dy = d(e^x) = e^xdx$,

$$d^2y = d(e^xdx) = d(e^x)dx + e^xd(dx) =$$

$$= e^xdx^2 + e^xd^2x. \quad ■$$

6.5. *Знайти диференціал вказаного порядку складеної функції:* $y = \ln u$, $u = u(x)$, d^3y — ?

□ Використовуючи інваріантність форми диференціала першого порядку, неважко знайти, що $dy = \frac{du}{u}$. Далі,

$$d^2y = d\left(\frac{du}{u}\right) = \frac{d(du)u - du \cdot du}{u^2} = \frac{ud^2u - du^2}{u^2};$$

$$d^3y = \frac{u^2d(ud^2u - du^2) - 2udu(u^2d^2u - du^2)}{u^4} =$$

$$= \frac{1}{u^3}\Big[u(dud^2u + ud^3u - 2d^2udu) - 2u^2dud^2u + 2du^3\Big] =$$

$$= \frac{1}{u^3}\Big[u^2d^3u - 2u^2dud^2u - udud^2u + 2du^3\Big]. \quad \blacksquare$$

6.6. *Знайти похідну порядку n заданої функції*:

а) $y = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$.

$\square$ За допомогою елементарних перетворень запишемо задану функцію у такому вигляді

$$y = \frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}.$$

Далі, за допомогою методу математичної індукції дійдемо до формул:

$$\begin{array}{ll}
\left(\frac{1}{x-1}\right)' = 1\cdot(x-1)^{-1}, & \left(\frac{1}{x+2}\right)' = 1\cdot(x+2)^{-1}, \\
\left(\frac{1}{x-1}\right)'' = -1\cdot(x-1)^{-2}, & \left(\frac{1}{x+2}\right)'' = -1\cdot(x+2)^{-2}, \\
\left(\frac{1}{x-1}\right)''' = 1\cdot 2(x-1)^{-3}, & \left(\frac{1}{x+2}\right)''' = 1\cdot 2(x+2)^{-3}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}; & \left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n}.
\end{array}$$

Оскільки

$$\boxed{(C_1U + C_2V)^{(n)} = C_1U^{(n)} + C_2V^{(n)},} \tag{6.8}$$

де C_1, C_2 — константи, то

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{(x-1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n}\right). \quad \blacksquare$$

б) $y = \sin 5x \cos 2x$.

$\square$ Зрозуміло, що

$$y = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 3x).$$

Застосовуючи до перетвореної функції y співвідношення (6.6) та (6.8), одержимо

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left(7^n \sin\left(7x + \frac{\pi n}{2}\right) + 3^n \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right)\right). \quad \blacksquare$$

6.7. *

а) *Знайти похідну* $y^{(30)}$ *функції* $y = x^2 e^{2x}$.

☐ Для розв'язання цього прикладу скористаємося формулою Лейбніца.

Введемо позначення: $U = x^2$, $V = e^{2x}$. Тоді

$$U' = 2x,\ U'' = 2,\ U''' = \ldots = U^{(30)} = 0;$$

$$V' = 2e^{2x},\ V'' = 4e^{2x}, \ldots, V^{(30)} = 2^{30} e^{2x}.$$

Остаточно, за формулою Лейбніца,

$$(x^2 e^{2x})^{(30)} = 0 \cdot e^{2x} + 30 \cdot 0 \cdot 2e^{2x} + \frac{30(30-1)}{1 \cdot 2} \cdot 0 \cdot 4e^{2x} + \ldots +$$

$$+ \frac{30!}{28!(30-28)!} \cdot 2 \cdot 2^{28} e^{2x} + \frac{30!}{29!(30-29)!} \cdot 2x \cdot 2^{29} e^{2x} +$$

$$+ x^2 \cdot 2^{30} \cdot e^{2x} = 2^{29} e^{2x} (2x^2 + 60x + 435). \quad \blacksquare$$

б) *Знайти похідну* $y^{(25)}$ *функції* $y = x^2 \sin x$.

☐ Знову скористаємося формулою Лейбніца, маючи на увазі, що

$$(x^2)''' = (x^2)^{(IV)} = \ldots = (x^2)^{(25)} = 0.$$

Тому

$$y^{(25)} = (\sin x \cdot x^2)^{(25)} = (\sin x)^{(25)} x^2 +$$

$$+ 25 (\sin x)^{(24)} (x^2)' + \frac{25 \cdot 24}{2} (\sin x)^{(23)} (x^2)''.$$

Звідси, за допомогою формули (6.5), остаточно одержуємо

$$y^{(25)} = x^2 \sin\left(x + 25\frac{\pi}{2}\right) + 50x \sin\left(x + 24\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ 600 \sin\left(x + 23\frac{\pi}{2}\right) = (x^2 - 600)\cos x + 50x \sin x. \quad \blacksquare$$

6.2 Завдання для самостійної роботи

Чи будуть істинними такі твердження?

1. Клас функцій, які мають похідну першого порядку ширший, ніж клас n раз диференційовних функцій.

2. $d^n x = dx^n$.

3. Будь-яка неперервна функція має диференціал другого порядку.

4. $d(dx) = 0$, якщо x — незалежний аргумент

5. Якщо $f^{(n)}(x) = 0$, то $f^{(n-2)}$ — лінійна функція.

6.8. *Знайти похідні вказаного порядку:*

а) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $y^{(n)}$—?

б) $y = \frac{x^2}{1-x}$, y'' — ?

в) $y = f(x^2)$, y''' — ? **г)** $y = \ln x$, $y^{(n)}$ — ?

д) $y = x^\alpha$, $y^{(n)}$ — ? **е)** $y = \frac{x}{x-1}$, $y^{(n)}$ — ?

є) $y = e^x(x^3 - 2)$, $y^{(10)}$ — ? **ж)** $y = e^{-2x} \sin x$, $y^{(6)}$ — ?

6.9. *Знайти диференціал вказаного порядку, якщо* x

1) *незалежний аргумент,*

2) *деяка функція іншого аргументу.*

а) $y = \frac{x^3-2x+1}{x^2}$, d^3y — ? **б)** $y = \operatorname{tg}^2 x \operatorname{arctg} x^2$, d^3y — ?

в) $y = \sqrt{\ln^2 x - \frac{\sin x}{x}}$, d^2y — ? **г)** $y = \operatorname{ctg} \frac{1-x^2}{1+x^2}$, d^2y — ?

ЗАНЯТТЯ 7

Диференціювання функцій, заданих неявно і в параметричній формі

7.1 Теоретичні відомості

Означення 7.1. *Задання функціональної залежності між змінними x і y у вигляді двох функцій $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ від однієї і тієї ж допоміжної змінної $t \in [a; b]$ називають параметричним заданням функції. Змінну t при цьому називають параметром.*

Теорема 7.1. *Нехай функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ визначені в деякому околі точки t_0, причому $\varphi'(t_0) \neq 0$.*

Якщо функція $x = \varphi(t)$ строго монотонна в цьому околі точки t_0, то параметрично задана функція $y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ в точці $x_0 = \varphi(t_0)$ має похідну, причому

$$y'_x(x_0) = \frac{\psi'_t(t_0)}{\varphi'_t(t_0)}.$$

Якщо, крім того, функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ в точці t_0 мають похідні другого порядку $\varphi''_{tt}(t_0)$ і $\psi''_{tt}(t_0)$, то параметрично задана функція

$y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ *в точці* $x_0 = \varphi(t_0)$ *має похідну другого порядку, причому*

$$y''_{tt}(x_0) = \frac{\psi''{}_{tt}(t_0)\,\varphi'_t(t_0) - \psi'_t(t_0)\,\varphi''_{tt}(t_0)}{\left(\varphi'(t_0)\right)^3}. \qquad (7.1)$$

7.2 Похідна функції, яка задана в параметричній формі

7.1. *Знайти* y'_x, *якщо:*

а) $x = e^t \sin t, \;\; y = e^t \cos t.$

□ Оскільки

$$x'_t = (e^t \sin t)'_t = e^t(\sin t + \cos t), \quad y'_t = (e^t \cos t)'_t = e^t(\cos t - \sin t),$$

то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}. \quad \blacksquare$$

б) $x = 2\ln(\operatorname{ctg} t), \;\; y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$

□ Зрозуміло, що

$$x'_t = \frac{2}{\operatorname{ctg} t} \cdot \frac{-1}{\sin^2 t}; \quad y'_t = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{1}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin^2 t \cos^2 t}.$$

Тоді

$$y'_x = \frac{\frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin^2 t \cos^2 t}}{\frac{-2}{\operatorname{ctg} t \sin^2 t}} = \operatorname{ctg} 2t. \quad \blacksquare$$

7.2. *Знайти похідну функції* $\rho = a(1+\cos\varphi)$, *яка задана в полярній системі координат,* $a > 0$.

□ За допомогою формул переходу від полярних координат до декартових

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$$

одержуємо

$$x = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi = a\cos\varphi + a\cos^2\varphi;$$

$$y = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi = a\sin\varphi + \frac{1}{2}a\sin 2\varphi.$$

Тому

$$x'_\varphi = -a\sin\varphi - 2a\cos\varphi\sin\varphi, \quad y'_\varphi = a\cos\varphi + a\cos 2\varphi.$$

А отже,

$$y'_x = \frac{a\cos\varphi + a\cos 2\varphi}{-a\sin\varphi - 2a\cos\varphi\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{-\sin\varphi - \sin 2\varphi}. \quad \blacksquare$$

7.3. *Знайти* y''_{xx}, *якщо:*

а) $x = a\cos^3 t, \; y = b\sin^3 t.$

☐ Легко побачити, що

$$x'_t = -3a\cos^2 t\sin t, \quad y'_t = 3b\sin^2 t\cos t \;\Rightarrow\; y'_x = \frac{-b}{a}\operatorname{tg} t.$$

За означенням

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

тоді

$$y''_{xx} = \frac{\left(\frac{-b}{a}\operatorname{tg} t\right)'_t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{\frac{-b}{a\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t}.$$

Цей приклад можна розв'язати трохи інакше, використовуючи формулу (7.1). Спочатку знаходимо

$$x''_{tt} = 3a\cos t(2\sin^2 t - \cos^2 t); \quad y''_{tt} = 3b\sin t(2\cos^2 t - \sin^2 t).$$

Далі

$$y''_{tt} = \frac{\psi''_{tt}\varphi'_t - \psi'_t\varphi''_{tt}}{(\varphi')^3} = \Big(3b\sin t(2\cos^2 t - \sin^2 t)(-3a\cos^2 t\sin t) -$$

$$-3b\sin^2 t\cos t\cdot 3a\cos t(2\sin^2 t-\cos^2 t)\Big) : (-3a\cos^2 t\sin t)^3 =$$
$$= \frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t}. \quad \blacksquare$$

б) $x = e^t\cos t,\ \ y = e^t\sin t.$

□ Маємо

$$x'_t = e^t\cos t - e^t\sin t,\ \ y'_t = e^t\sin t + e^t\cos t\ \Rightarrow\ y'_x = \frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t};$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}\right)'_t}{e^t(\cos t-\sin t)} = \frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}. \quad \blacksquare$$

7.4. *Знайти* y'''_{xxx}, *якщо* $x = e^{-t},\ \ y = t^3.$

□ Оскільки

$$x'_t = -e^{-t},\ \ y'_t = 3t^2,\ \ y'_x = \frac{3t^2}{-e^{-t}} = -3e^t t^2,$$

то

$$y''_{xx} = \frac{(-3e^t t^2)'_t}{-e^{-t}} = \frac{-(3e^t t^2+6te^t)}{-e^{-t}} = 3e^{2t}(t^2+2t)$$

і

$$y'''_{xxx} = \frac{(3e^{2t}(t^2+2t))'_t}{-e^{-t}} = \frac{3e^{2t}(2(t^2+2t)+2t+2)}{-e^{-t}} =$$
$$= -6e^{3t}(t^2+3t+1). \quad \blacksquare$$

7.3 Похідна неявно заданої функції

7.5. *Знайти похідну* y'_x *функції, що задана неявно:*

а) $\ln x + e^{\frac{-y}{x}} = \pi.$

□ Знайдемо похідну правої та лівої частин заданої функції, маючи на увазі, що y — функція від аргументу x. Далі одержимо шукану похідну y'_x як невідоме з лінійного рівняння:

$$(\ln x+e^{\frac{-y}{x}})'_x = (\pi)'_x\ \Rightarrow\ (\ln x)'_x+(e^{\frac{-y}{x}})'_x = 0\ \Rightarrow\ \frac{1}{x}+e^{\frac{-y}{x}}\left(\frac{-y}{x}\right)'_x = 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{x} + e^{\frac{-y}{x}} \cdot \frac{-y'_x \cdot x + y}{x^2} = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_x \cdot \frac{e^{\frac{-y}{x}}}{x} = \frac{e^{\frac{-y}{x}} \cdot y}{x^2} + \frac{1}{x} \ \Rightarrow \ y'_x = \frac{y + xe^{\frac{y}{x}}}{x}. \quad \blacksquare$$

б) $x + \sqrt{xy} + y = 2\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

$\square$

$$(x + \sqrt{xy} + y)'_x = (2\ln\sqrt{x^2+y^2})'_x \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 1 + \frac{y + xy'_x}{2\sqrt{xy}} + y'_x = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{2x + 2yy'_x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

або

$$1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}} + y'_x\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 1\right) = \frac{2x + 2yy'_x}{x^2+y^2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ y'_x = \frac{\dfrac{2x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{2\sqrt{xy}} - 1}{\dfrac{x}{2\sqrt{xy}} - \dfrac{2y}{x^2+y^2} + 1} = \frac{2\sqrt{xy}(2x - x^2 + y^2) - x^2y - y^3}{2\sqrt{xy}(x^2+y^2-2y) + x^3 + xy^2}. \blacksquare$$

7.6. *Знайти* y''_{xx}, *якщо:*

а) $e^x - e^y = y - x$.

$\square$ Знайдемо похідну першого порядку функції y щодо аргументу x

$$e^x - e^y y'_x = y'_x - 1, \tag{7.2}$$

$$y'_x = \frac{1 + e^x}{1 + e^y}. \tag{7.3}$$

Подальше розв'язання можна здійснювати двома шляхами.

Перший варіант: оскільки y'_x є явно заданою функцією від аргументу x, то користуючись правилом диференціювання частки двох функцій, згідно зі співвідношенням (7.3), маємо

$$y''_{xx} = \frac{(1+e^x)'(1+e^y) - (1+e^x)(1+e^y)'}{(1+e^y)^2} =$$

$$= \frac{e^x(1+e^y) - (1+e^x)e^y y'_x}{(1+e^y)^2} = \frac{e^x(1+e^y) - e^y(1+e^x)\frac{1+e^x}{1+e^y}}{(1+e^y)^2} =$$

$$= \frac{e^x(1+e^y)^2 - e^y(1+e^x)^2}{(1+e^y)^3}.$$

Другий варіант: диференціюючи обидві частини рівності (7.2), одержимо

$$e^x - (e^y(y'_x)^2 + e^y y''_{xx}) = y''_{xx} \;\Rightarrow\; y''_{xx} = \frac{e^x - e^y(y'_x)^2}{1+e^y}.$$

З урахуванням співвідношення (7.3) приходимо до шуканої похідної

$$y''_{xx} = \frac{e^x(1+e^y)^2 - e^y(1+e^x)^2}{(1+e^y)^3}. \quad \blacksquare$$

б) * $\sin(xy) + \cos(x+y) = y.$

$\square$ Продиференціювавши обидві частини заданої неявної функції, одержимо

$$\cos(xy)(y + xy') - \sin(x+y)(1+y') = y' \quad \Rightarrow \tag{7.4}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\sin(x+y) - y\cos(xy)}{x\cos(xy) - \sin(x+y) - 1}. \tag{7.5}$$

У цьому випадку більш доцільно скористатися другим варіантом подальшого розв'язання. Знову продиференціювавши ліву та праву частини рівності (7.4), отримаємо

$$y'\cos(xy) + y(-\sin(xy))(y+xy') + \cos(xy)y' +$$

$$+x(-\sin(xy))(y+xy')y' + x\cos(xy)y'' - \cos(x+y)(1+y') -$$

$$-\cos(x+y)(1+y') - \sin(x+y)y'' = y''.$$

Згрупувавши доданки, дістанемо

$$y'[\cos(xy) - 2xy\sin(xy) + \cos(xy) - \cos(x+y)] - x^2\sin(xy)(y')^2 -$$

$$-y^2\sin(xy) - 2\cos(x+y) = [\sin(x+y) - x\cos(xy) + 1]y''.$$

З урахуванням співвідношення (7.5), остаточно маємо

$$y'' = \Bigg(\frac{\sin(x+y) - y\cos(xy)}{x\cos(xy) - \sin(x+y) - 1}\cdot\Big(\cos(xy) - 2xy\sin(xy) +$$

$$+\cos(xy) - \cos(x+y)\Big) - x^2\sin(xy)\left(\frac{\sin(x+y) - y\cos(xy)}{x\cos(xy) - \sin(x+y) - 1}\right)^2 -$$

$$-y^2\sin(xy) - 2\cos(x+y)\Bigg)\cdot\Big(\sin(x+y) - x\cos(xy) + 1\Big)^{-1}. \quad \blacksquare$$

7.4 Завдання для самостійної роботи

Чи будуть істинними такі твердження?

1. Будь-яку явно задану функцію можна записати в параметричній формі.

2. Нехай функції $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ визначені в деякому околі точки t_0, причому $\varphi'(t_0) \neq 0$. Якщо функція $x = \varphi(t)$ неперервна в цьому околі точки t_0, то параметрично задана функція $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ в точці $x_0 = \varphi(t_0)$ має похідну.

7.7. *Знайти* y'_x, *якщо:*

а) $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$, $a > 0$;

б) $x = \ln(1 + t^2)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$;

в) $\rho = a\varphi$, $a > 0$, ρ та φ — полярні координати;

г) $\rho = ae^{m\varphi}$, $m > 0$.

7.8. *Знайти* y''_{xx}, *якщо:*

а) $x = \arcsin t$, $y = \sqrt{1 - t^2}$;

б) $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$;

в) $x = 1 + \frac{1}{2}\sin t$, $y = \sin^3 t$;

г)* $x = t^t$, $y = \frac{t^2 - t}{\cos t}$.

7.9. *Знайти* y'''_{xxx}, *якщо:*

а) $x = \ln t,\ y = e^t$; **б)** $x = t^5 - 4t^3 + 2t^2 - 1,\ y = \sqrt{t^2 + 2}$;

в) $x = \sin t,\ y = \cos t$; **г)** $\rho = 2\cos 3\varphi$,

ρ та φ — полярні координати.

7.10. *Знайти* y'_x, *якщо:*

а) $e^y + xy = e$ **б)** $e^x \sin y - e^{-y}\cos x = 0$

в) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln(xy)$ **г)*** $\frac{\sin y + \sqrt{xy}}{\ln^2(x+y)} = \sqrt[3]{y^2 + x^2 - 2xy}$

7.11.* *Знайти* y'''_{xxx}, *якщо:*

а) $x^2 + y^2 = 25$; **б)** $\sin x + \cos y = (x+y)^2$;

в) $\ln^2(x+y) - \frac{xy}{x+y} = 100\pi$; **г)** $\operatorname{arctg}(x+y) + \sqrt{x^2+y^2} = 0$.

ЗАНЯТТЯ 8

Теореми про середнє

8.1 Теоретичні відомості

Теорема 8.1. ***(Ферма).*** *Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку й у внутрішній точці x_0 цього проміжку має найбільше або найменше значення.*

Якщо в точці x_0 існує похідна $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Теорема 8.2. ***(Ролля)****. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умовам:*

1. $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$;

2. $f(x)$ диференційовна в інтервалі $(a; b)$;

3. $f(a) = f(b)$.

Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a; b)$ така, що $f'(c) = 0$.

Теорема 8.3. ***(Лагранжа)****. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в інтервалі $(a; b)$, то існує принаймні одна точка $c \in (a; b)$ така, що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Наслідок 8.1. ***(необхідна і достатня умова сталості функції на проміжку).*** *Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміж-*

ку $\langle a; b\rangle$ *і диференційовна в інтервалі* $(a; b)$. *Для того, щоб функція була сталою на проміжку* $\langle a; b\rangle$, *необхідно і достатньо, щоб* $f'(x) = 0, \ \forall x \in (a; b)$.

Теорема 8.4. ***(Коші)***. *Нехай для функцій* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *виконуються наступні умови:*

1. $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *неперервні на відрізку* $[a; b]$;
2. $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *диференційовні в інтервалі* $(a; b)$;
3. *причому* $\varphi'(x) \neq 0, \ \forall x \in (a; b)$.

Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a; b)$ *така, що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

8.1. *Перевірити правильність теореми Ферма для заданої функції:*

а) $f(x) = 3x^2 - 1, \ x \in [1, 2]$.

□ Ця функція монотонно зростає на відрізку $[1, 2]$ і тому приймає своє найбільше значення в точці $x = 2$, а найменше в точці $x = 1$, тобто, не у внутрішніх точках відрізка. Отже, теорема Ферма не є правильною для функції $f(x) = 3x^2 - 1$ на відрізку $[1, 2]$. ■

б) $y = |\ln x|$, на інтервалі $(0, 2)$.

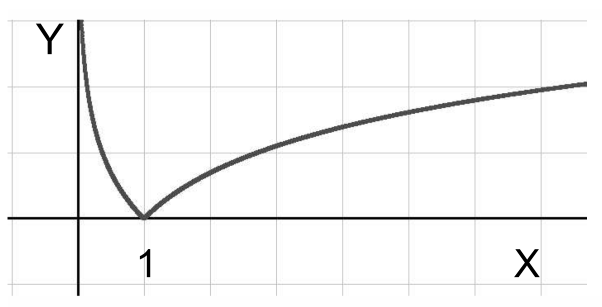


Рис. 8.1: графік функції $y = |\ln x|$

□ Графік заданої функції зображено на рис. 8.1. Бачимо, що функція приймає найменше значення на інтервалі $(0, 2)$ при $x = 1$.

Але, як було показано в прикладі 3.2 в), функція $y = |\ln x|$ не диференціовна в точці $x = 1$, тому теорема Ферма знову не є правильною. ■

8.2. *Перевірити правилність теореми Ролля для заданої функції:*

а) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на відрізку $[-1, 1]$.

□ Перша умова виконана: функція неперервна на заданому відрізку (і взагалі на всій дійсній осі). Друга умова також виконується: $f(1) = f(-1) = 0$. Третя умова не виконується: $f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$ не існує в точці $x = 0$. ■

б) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2,\ x \in [0, 1]$.

□ Перша умова виконана: функція неперервна на всій дійсній осі. Друга умова виконана: $f(0) = f(1) = 0$. Третя умова також виконується: $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$ існує в усіх точках x. ■

8.3. *Знайти значення сталої c з теореми Ролля для функції*

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

□ Перша умова виконана: функція неперервна на всій дійсній осі. Друга умова: $f(1) = f(2) = f(3) = 0$. Третя умова також виконується: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$ існує в усіх точках. Бачимо, що задана функція задовольняє всім умовам теореми Ролля на відрізках $[1, 2]$ і $[2, 3]$. З рівняння $3x^2 - 12x + 11 = 0$ одержуємо шукані точки $c_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ та $c_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$. При цьому $1 < c_1 < 2,\ 2 < c_2 < 3$. ■

8.4. *Чи задовольняє задана функція умовам теореми Лагранжа? Якщо так, то знайти точку c, яка фігурує в цій теоремі:*

а) $f(x) = 3x^2 - 5$ на відрізку $[-2, 0]$.

□ Функція неперервна на заданому відрізку — першу умову теореми Лагранжа виконано. Похідна $f'(x) = 6x$ скінченна в усіх точках відрізка $[-2, 0]$. Отже, існує така точка c ($-2 < c < 0$), для якої є справедливою рівність

$$f'(c) = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)}$$

або

$$6c = \frac{(3 \cdot 0^2 - 5) - (3 \cdot (-2)^2 - 5)}{2} \quad \Rightarrow \quad c = -1. \quad ■$$

б) $f(x) = \ln x$ на відрізку $[1, e]$.

□ На вказаному відрізку функція неперервна, а її похідна $f'(x) = \frac{1}{x}$ існує в усіх точках відрізка $[1, e]$. За теоремою Лагранжа

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln e - \ln 1}{e - 1} \quad \Rightarrow \quad c = e - 1. \quad ■$$

8.5. *Перевірити, чи задовольняють умовам теореми Коші задані функції. Якщо теорема має силу, знайти відповідне значення точки* c.

а) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = x^3 - 7x^2$ на відрізку $[1, 4]$.

□ 1. Зазначені функції неперервні на відрізку $[1, 4]$.

2. На всій дійсній осі існують скінченні похідні

$$f'(x) = 2x - 2 \quad \text{та} \quad g'(x) = 3x^2 - 14x.$$

3. $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in [1, 4]$.

Таким чином, для заданих функцій на відрізку $[1, 4]$ теорема Коші справедлива. Знайдемо точку c, про яку йдеться в теоремі:

$$\frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad 1 < c < 4;$$

$$\frac{11 - 2}{-48 + 6} = \frac{2c - 2}{3c^2 - 14c} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{7}{9} - \frac{1}{9}\sqrt{301}, \quad c_2 = \frac{7}{9} + \frac{1}{9}\sqrt{301}.$$

Бачимо, що $c_2 \in (1, 4)$. ■

б) $f(x) = e^x, \ g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ на відрізку $[-3, 3]$.

☐ Задані функції неперервні на всій осі, їх похідні $f'(x) = e^x$ і $g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ також існують всюди. Але $g'(0) = 0$, тому теорема Коші не буде правильною для функцій $f(x)$ та $g(x)$ на відрізку $[-3, 3]$. ■

8.6. *Довести, що рівняння* $3x^5+15x-8 = 0$ *має лише один дійсний корінь.*

☐ Оскільки заданий поліном $3x^5 + 15x - 8$ непарного степеня, то він має принаймні один дійсний корінь. Доведемо, що цей корінь буде єдиним.

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо: існує два корені x_1 та x_2 і, наприклад, $x_1 < x_2$. Тоді на відрізку $[x_1, x_2]$ функція $f(x) = 3x^5 + 15x - 8$ задовольняє всім умовам теореми Ролля (вона неперервна на цьому відрізку, $f(x_1) = f(x_2) = 0$ та існує скінченна похідна $f'(x) = 15x^4 + 15$). А отже, існує така точка $c \in [x_1, x_2]$, що $f'(c) = 0$. Остання рівність суперечить елементарній нерівності $f'(x) = 15x^4 + 15 > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Таким чином, висловлене припущення хибне, і рівняння

$$3x^5 + 15x - 8 = 0$$

має лише один дійсний корінь. ■

8.7. *На кривій* $y = x^3$ *знайти точку, в якій дотична паралельна до хорди, що з'єднує точку* $A(-1, -1)$ *з точкою* $B(2, 8)$.

☐ З геометричної інтерпретації теореми Лагранжа випливає, що на дузі AB існує хоча б одна точка M, у якій дотична паралельна до хорди AB. Застосуємо згадану теорему до функції $f(x) = x^3$:

$$f(2)-f(-1) = f'(c)(2-(-1)) \ \ \Leftrightarrow \ \ 8+1 = 9c^2 \ \ \Rightarrow c_1 = -1, \ \ c_2 = 1.$$

Знайдені значення параметру c є абсцисами шуканих точок, їм відповідають ординати: $y_1 = c_1^3 = -1$, $y_2 = c_2^3 = 1$.

Таким чином, ми знайшли дві точки $M_1(1,1)$ й $M_2(-1,-1)$, але лише M_1 є внутрішньою точкою дуги AB. Саме вона і є шуканою точкою. ■

8.8. *Відомо, що* $(e^x)' = e^x$. *Чи існують інші функції, для яких* $f'(x) = f(x)$?

□ Нехай існує функція $f(x)$ така, що $f'(x) = f(x)$. Розглянемо функцію $\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ та знайдемо її похідну, маючи на увазі, що $f'(x) = f(x)$.

$$\varphi'(x) = f'(x)e^{-x} - e^{-x}f(x) = f(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} \equiv 0.$$

Згідно з наслідком 8.1, $\varphi(x) = \mathrm{const}$, а отже, $f(x) = Ce^x$, де C — деяка стала.

Таким чином, множина функцій, для яких $f'(x) = f(x)$ складається лише з функцій виду Ce^x. ■

8.9.* *Довести тотожності:*

а) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

□ Введемо до розгляду функцію $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x$. Область визначення цієї функції — множина $\mathbb{R}$. Знайдемо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x) = 2\sin x \cos x - \sin 2x \equiv 0.$$

Згідно з наслідком із теореми Лагранжа (необхідна і достатня умова сталості функції на проміжку), $f(x) = C$. Знайдемо невідому сталу C.

Для цього покладемо $x = 0$, тоді $\sin^2 0 + \frac{1}{2}\cos 2\cdot 0 = C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Остаточно одержимо $\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}$, що і треба було довести. ■

б) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x, \ \ 0 \le x < \infty.$

□ Нехай

$$f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} - 2\operatorname{arctg} x.$$

Ця функція визначена на всій осі, оскільки $|\frac{1-x^2}{1+x^2}| \le 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{1+x^2} =$$

$$= \frac{4x}{2x(1+x^2)} - \frac{2}{1+x^2} \equiv 0 \ \ \forall x > 0.$$

За наслідком із теореми Лагранжа

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} - 2\operatorname{arctg} x = C.$$

Для того, щоб знайти невідому сталу C, покладемо $x = 1$. Тоді

$$\arccos 0 - 2\operatorname{arctg} 1 = 0,$$

отже $C = 0$. Якщо $x = 0$, то $\arccos 1 - 2\operatorname{arctg} 0 = 0$. Тотожність доведено. ■

8.10. *Довести нерівність* $\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 < x_2 - x_1, \ \ x_2 > x_1.$

□ Неважко переконатися, що функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ задовольняє всім умовам теореми Лагранжа на відрізку $[x_1, x_2]$. Застосовуючи цю теорему, одержимо

$$\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 = \frac{1}{1+c^2}(x_2 - x_1),$$

де $x_1 < c < x_2$. Оскільки $0 < \frac{1}{1+c^2} < 1$ та $x_2 - x_1 > 0$, то

$$\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 < x_2 - x_1. \quad ■$$

8.2 Завдання для самостійної роботи

Чи будуть істинними такі твердження?

1. Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;b]$ і
$$\max_{x\in[a;b]} f(x) = f(a),$$
то з цього випливає, що $f'(a) = 0$.

2. Теорема Ферма буде справедливою і для точки, яка не є внутрішньою.

3. Можна побудувати приклад розривної функції, для якої справедливий висновок із теореми Ролля.

4. Можна побудувати приклад функції, яка не має скінченної похідної в інтервалі $(a;b)$, але для цієї функції справедливий висновок із теореми Лагранжа.

5. Якщо для функцій $f(x)$ та $g(x)$ в проміжку $[a;b]$ виконані всі умови теореми Коші, то $g(b) \neq g(a)$; $f'(c) \neq 0 \ \ \forall c \in (a;b)$.

6. Неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна в інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$ задовольняє всім умовам теореми Ролля.

7. Для строго монотонних на відрізку $[a;b]$ функцій $f(x)$ та $g(x)$, які диференційовні в інтервалі $(a;b)$ і $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a;b)$ справедлива теорема Коші.

8.11. *На якому відрізку функція* $f(x) = 3x^2 - 1$ *задовольняє умовам теореми Ферма?*

8.12. *Перевірити справедливість теореми Ферма для функції:*

а) $f(x) = e^x$ на відрізку $[-3, 3]$;

б) $f(x) = e^{|x|}$ на відрізку $[-3, 3]$;

в) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ на відрізку $[-1, 1]$.

8.13. *Перевірити справедливість теореми Ролля для функції*

а) $f(x) = 2 - |2x|$ на відрізку $[-1, 1]$;

б) $f(x) = \cos x$ на відрізку $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

8.14. *Перевірити справедливість теореми Лагранжа для функції*

а) $f(x) = 2^x$ на відрізку $[0, 2]$;

б) $f(x) = (|x| - x)^0 \ \arcsin \frac{|x|}{x}$ на відрізку $[-1, 1]$.

8.15. *Розв'язати рівняння*

а) $2x + \sin x = 0$;

б) $x^5 + x^3 + 5x - 7 = 0$

8.16. *Довести, що всі нулі похідної функції*

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$$

дійсні та вказати межі, у яких вони знаходяться.

8.17.* *Довести тотожності:*

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \ \ x \in [0, 1]$;

б) $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arctg}\, \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, x > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, x < 0. \end{cases}$

8.18.* *Довести нерівності:*

а) $|\sin x_2 - \sin x_1| \le |x_2 - x_1|$;

б) $|\ln x_2 - \ln x_1| < \frac{|x_2 - x_1|}{a}, \ \ x_1, x_2 \in [a, +\infty), \ \ a > 0$.

ЗАНЯТТЯ 9

Правила Лопіталя

9.1 Теоретичні відомості

Означення 9.1. *Нехай функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *визначені в інтервалі* $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, *за винятком, можливо, самої точки* x_0. *Розкрити невизначеність виду* $"\frac{0}{0}"$ *(або* $"\frac{\infty}{\infty}"$ *) — це означає знайти границю* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *за умови, що* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ *(або за умови, що* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$ *).*

Теорема 9.1. ***(перше правило Лопіталя).*** *Нехай функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *диференційовні в інтервалах* $(x_0 - \delta; x_0)$, $(x_0; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$.

Якщо:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$*;* $\quad \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$;
2) $\varphi'(x) \neq 0, \ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$*;*
3) *існує границя* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *скінченна чи нескінченна, то*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Теорема 9.2. ***(друге правило Лопіталя).*** *Нехай функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *диференційовні в інтервалах* $(x_0 - \delta; x_0)$ *і* $(x_0; x_0 + \delta)$.

Якщо:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$;
2) $\varphi'(x) \neq 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$;
3) *існує границя* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *скінченна чи нескінченна, то*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження 9.1. *Теореми 9.1 і 9.2 є вірними й тоді, коли* $x \to \infty$.

9.1.1 Невизначеність виду «$\frac{0}{0}$»

9.1. *Знайти наступні границі:*

а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

☐ Ми маємо невизначеність вигляду "$\frac{0}{0}$". Застосовуючи правило Лопіталя, одержимо

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^x - x)'}{(\ln x - x + 1)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^x \ln x + x^x - 1}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1 - x}.$$

Бачимо, що знову має місце невизначеність виду "$\frac{0}{0}$". Тому, спочатку спростивши одержану границю, знову скористаємося правилом Лопіталя.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1 - x} = \lim_{x\to 1} x \cdot \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{1 - x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^x \ln x + x^x)(\ln x + 1) + x^{x-1}}{-1} = -2. \quad \blacksquare$$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2 - x)}$

☐ Шукана границя є невизначеністю виду "$\frac{0}{0}$", для її розкриття застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2 - x)} = \lim_{x\to 0} \frac{6x\cos 3x^2}{\frac{1}{\cos(2x^2 - x)}(-\sin(2x^2 - x))(4x - 1)} =$$

$$= -6 \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x^2 \cos(2x^2 - x)}{4x - 1} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(2x^2 - x)}.$$

Першу границю знаходимо безпосередньо, а до другої границі — невизначеності типу "$\frac{0}{0}$" — знову застосуємо правило Лопіталя. Одержимо

$$-6 \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x^2 \cos(2x^2 - x)}{4x - 1} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(2x^2 - x)} =$$

$$= -6 \cdot \frac{1 \cdot 1}{-1} \lim_{x\to 0} \frac{1}{(4x-1)\cos(2x^2 - 6)} =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{-1 \cdot 1} = -6. \quad \blacksquare$$

9.1.2 Невизначеність виду «$\frac{\infty}{\infty}$»

9.2. *Знайти наступні границі:*

а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg}(\pi x/2)}{\ln(1-x)}$.

$\square$ Це — невизначеність виду "$\frac{\infty}{\infty}$", користуючись правилом Лопіталя, одержимо

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg}(\pi x/2)}{\ln(1-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi/2}{\cos^2 x}}{\frac{-1}{1-x}} = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\cos^2 x} = 0. \quad \blacksquare$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{xe^{x/2}}{x+e^x}$.

$\square$ В цьому випадку також має місце невизначеність виду "$\frac{\infty}{\infty}$". За правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{x/2}}{x+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x/2}(1+\frac{x}{2})}{1+e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{x/2}(2+\frac{x}{2})}{e^x} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{x}{2}}{e^{x/2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}e^{x/2}} = 0.$$

Під час розв'язання цього прикладу ми тричі скористалися правилом Лопіталя. $\blacksquare$

9.1.3 Невизначеність виду «$\infty - \infty$»

9.3. *Знайти наступні границі:*

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

$\square$ Ця границя являє собою невизначеність виду "$\infty-\infty$". Представимо її у вигляді невизначеності типу "$\frac{0}{0}$" та двічі застосуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

$\square$ За допомогою елементарних перетворень зведемо невизначеність виду "$\infty-\infty$" до виду "$\frac{0}{0}$". Застосовуючи правило Лопіталя, знайдемо

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x}{x+\sqrt{1+x^2}}}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x}\cdot\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}-(1+x)(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}}{\dfrac{\ln(1+x)}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)+\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{(1+x)\ln(1+x)+\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-1\right):\left(\ln(1+x)+\frac{1+x}{1+x}+\right.$$

$$+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\sqrt{1+x^2}\,\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\Big)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(\ln(1+x)+1)+x\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{2}.$$

Відзначимо, що під час розв'язання цих прикладів, ми двічі скористалися правилом Лопіталя. ■

9.1.4 Невизначеність виду «$0\cdot\infty$»

9.4. *Знайти наступні границі:*

а) $\lim\limits_{x\to 0} x^n\ln x, \quad n>0.$

☐ Ця границя являє собою невизначеність виду "$0\cdot\infty$". Запишемо її у вигляді невизначеності типу "$\frac{\infty}{\infty}$" й застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0} x^n\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-n}}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-nx^{-n-1}}=-\frac{1}{n}\lim_{x\to 0} x^n=0,$$

оскільки $n>0$. ■

б) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(1+\sin^2 x)\operatorname{ctg}\ln^2(1+x)].$

☐ Знову зведемо невизначеність "$0\cdot\infty$" до невизначеності виду "$\frac{0}{0}$" та двічі застосуємо правило Лопіталя.

$$\lim_{x\to 0}[\ln(1+\sin^2 x)\operatorname{ctg}\ln^2(1+x)]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\operatorname{tg}\ln^2(1+x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\sin^2 x}\sin 2x}{\frac{1}{\cos^2\ln^2(1+x)}\frac{2\ln(1+x)}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1/(1+x)}=1.$$

Ми скористалися наступними співвідношеннями

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)\cos^2\ln^2(1+x)}=1.\quad ■$$

9.1.5 Невизначеність виду «0^0»

9.5. *Знайти наступні границі:*

а) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\ln x}$.

□ При $x \to 1$ маємо невизначеність "0^0". Скористаємося тотожністю

$$u^v = e^{v\ln u}, \quad u>0, v>0,$$

яка в цьому випадку має вигляд

$$(x-1)^{\ln x} = e^{\ln x\cdot\ln(x-1)},$$

а також співвідношенням $\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$.

Двічі застосовуючи правило Лопіталя, маємо

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^{\ln x} = \lim_{x\to 1} e^{\ln x\cdot\ln(x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(1-x)} = (e^{0\cdot\infty}) =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{1/\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1/(x-1)}{-1/(x\ln^2 x)}} = e^{-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln^2 x}{x-1}} = (e^{\frac{0}{0}}) =$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x + 2x\ln x\cdot(1/x)}{1}} = e^{-\lim\limits_{x\to 1}(\ln^2 x + 2\ln x)} = (e^0) = 1. \blacksquare$$

б) $\lim\limits_{x\to 0+}(x^{x^x}-1)$.

□ У цьому прикладі ми також маємо невизначеність виду "0^0", тому скористаємося формулою $u^v = e^{v\ln u}$ $(u>0,\ v>0)$. Одержимо

$$\lim_{x\to 0+}(x^{x^x}-1) = \lim_{x\to 0+}(e^{x^x\cdot\ln x}-1) = e^{\lim\limits_{x\to 0+}x^x\cdot\lim\limits_{x\to 0+}\ln x} - 1 =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}e^{x\ln x}\cdot\lim\limits_{x\to 0+}\ln x} - 1 = -1.$$

При цьому ми врахували, що

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0, \quad \lim_{x\to 0+}\ln x = -\infty. \quad \blacksquare$$

9.1.6 Невизначеність виду «1^∞»

9.6. *Знайти наступні границі:*

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

$\square$ Має місце невизначеність типу "1^∞". За допомогою формули $u^v = e^{v\ln u}$ $(u > 0,\ v > 0)$ й переходу до границі в показниковій функції знаходимо

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin^2 2x}{\operatorname{tg} x\cos^2 x}} = e^{-1}. \quad \blacksquare$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

$\square$ Розв'язуючи цей приклад за тією ж схемою, що і в попередньому прикладі, одержимо

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}} = \left(e^{\infty\cdot 0}\right) =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}} =$$

$$= \left(e^{\frac{0}{0}}\right) = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}. \quad \blacksquare$$

9.1.7 Невизначеність виду «∞^0»

9.7. *Знайти наступні границі:*

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

$\square$ Неважко зрозуміти, що має місце невизначеність типу "∞^0". Оскільки

$$(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = e^{\operatorname{ctg} x\ln\operatorname{tg} x}$$

та

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{ctg} x\ln\operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 0,$$

то

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x} = e^0 = 1. \quad \blacksquare$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$\square$ Має місце невизначеність виду "∞^0". Використовуючи ті ж прийоми, що й при розв'язанні попередніх прикладів, будемо мати

$$\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}} = (e^{0\cdot\infty}) =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1})^{-1}\cos^{-2}\frac{\pi x}{2x+1}\frac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2}} =$$

$$= e^{2\pi\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2\pi x}{2x+1})^{-1}(2x+1)^{-2}} = e^{2\pi\cdot 0} = 1.$$

9.8. Довести, що при $x\to+\infty$ функція $y = e^{\sqrt{x}}$ зростає швидше будь-якої степеневої функції.

Зауваження 9.2. *Кажуть, що при $x\to+\infty$ функція $f(x)$ зростає швидше функції $g(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.*

$\square$ Нехай $x = t^2$. Для будь-якого n маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^n} = \lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t^{2n}} = \lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{2nt^{2n-1}} = \ldots = \lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{(2n)!} = +\infty.$$

Звідси і випливає, що при $x\to+\infty$ функція $y = e^{\sqrt{x}}$ зростає швидше будь-якої функції $g = x^n$. $\blacksquare$

9.9. Довести, що за умови існування другої похідної функції $f(x)$ має місце рівність

$$\boxed{f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.}$$

☐ За правилом Лопіталя

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+f(x-h)-2f(x))'_h}{(h^2)'_h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)+f'(x-h)}{2h}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}-\frac{f'(x)-f'(x-h)}{h}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(f''(x)+f''(x))=f''(x).\quad\blacksquare$$

9.2 Завдання для самостійної роботи

Чи будуть істинними такі твердження?

1. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ задовольняють усім умовам теорем Лопіталя (теорем 9.1, 9.2), то вони неперервні на деякому відрізку.

Знайти наступні границі:

9.10.

а) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin 2x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})}{\ln(1-x)}$.

9.11.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{3/x}-1}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3xe^x+3x^2}{\operatorname{arctg}x-\sin x-x^3/6}$.

9.12.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{p}{1-x^p}-\frac{q}{1-x^q}\right)$, $p>0$, $q>0$.

9.13.

а) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\cdot\operatorname{ctg}\pi x)$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln^3(1+\operatorname{ctg} x)\sqrt{1-\cos^3 x})$

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin^2 x\cdot(\sin x-\sqrt{\ln(1+x^2)}\,))$.

9.14.

а) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}(e^{x-2}-\log_2 x)^{\sin\left(\frac{x-2}{2}\right)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{x^x-1}$.

9.15.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

9.16.

а) $\lim\limits_{x\to 0+}(\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x^2}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x}}$,

$a>0,\ b>0$.

9.17. *Порівняти функції* $f(x)=\log_a x$ *і* $\varphi(x)=a^x$ *(*$a>0,\ a\neq 0$*) за умови, що* $x\to\infty$.

9.18. *Дослідити можливість застосування правил Лопіталя до наступних границь:*

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$.

ЗАНЯТТЯ 10

Монотонність функції. Точки екстремуму. Найбільше та найменше значення функції на множині

10.1 Теоретичні відомості

Теорема 10.1. ***(необхідна і достатня умова монотонності функції на проміжку).***

Нехай функція $f(x)$ *неперервна на проміжку* $\langle a;b\rangle$ *і диференційовна в інтервалі* $(a;b)$. *Для того, щоб функція* $f(x)$ *не спадала (не зростала) на проміжку* $\langle a;b\rangle$, *необхідно і достатньо, щоб* $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ *для всіх* $x\in(a;b)$.

Теорема 10.2. ***(необхідна і достатня умова зростання і спадання функції на проміжку).***

Нехай функція $f(x)$ *неперервна на проміжку* $\langle a;b\rangle$ *і диференційовна в інтервалі* $(a;b)$. *Для того, щоб функція* $f(x)$ *зростала (спадала) на проміжку* $\langle a;b\rangle$, *необхідно і достатньо, щоб* $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ *для всіх* $x\in(a;b)$, *причому ті точки*

$x \in (a;b)$, в яких $f'(x) = 0$, не утворювали б ніякого відрізка.

Наслідок 10.1. *(достатня умова зростання і спадання функції на проміжку).*

Якщо $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a;b)$, то в інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$ зростає.

Якщо $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a;b)$, то в інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$ спадає.

Означення 10.1. *Вважають, що функція $f(x)$ в точці x_0 має максимум (мінімум), якщо існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ цієї точки такий, що для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, є вірною нерівність $f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$.*

Означення 10.2. *Максимум і мінімум функції в точці називаєтьcя екстремумом (локальним екстремумом) цієї функції в цій точці.*

Означення 10.3. *Точку x_0 із області визначення функції $f(x)$ називають точкою екстремуму функції $f(x)$, якщо в цій точці функція $f(x)$ має екстремум.*

Теорема 10.3. *(необхідна умова існування екстремуму функції в точці).*

Якщо функція $f(x)$ має в точці екстремум і якщо в цій точці існує похідна цієї функції, то ця похідна дорівнює нулю.

Означення 10.4. *Якщо функція $f(x)$ має екстремум у точці x_0, то точку x_0 називають точкою екстремуму функції $f(x)$.*

Означення 10.5. *Точку x_0, в якій $f'(x_0) = 0$, називають стаціонарною точкою функції $f(x)$.*

Означення 10.6. *Стаціонарні точки функції і точки, в яких похідна функції не існує, називаються критичними точками цієї функції.*

Означення 10.7. *Вважають що функція $f(x)$ змінює знак при переході точки x через точку x_0, якщо існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 такий, що $f(x) < 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ і $f(x) > 0$, $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$, або навпаки.*

Теорема 10.4. ***(достатня умова існування екстремуму функції в точці).***

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, в якій функція $f(x)$ неперервна. Якщо при переході точки x через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак, то в цій точці x_0 існує екстремум функції, причому максимум, якщо похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, і мінімум, якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс.

Теорема 10.5. ***(достатня умова існування екстремуму функції в точці).***

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі своєї стаціонарної точки x_0, а в самій точці x_0 має похідну другого порядку.

Якщо $f''(x_0) > 0$, то функція $f(x)$ в точці x_0 має мінімум.

Якщо $f''(x_0) < 0$, то функція $f(x)$ в точці x_0 має максимум.

10.2 Монотонність. Точки екстремуму

10.2.1 Перший алгоритм знаходження точок екстремуму функції

1. Знайти похідну даної функції $f(x)$.

2. Прирівняти похідну до нуля. Знайти корені одержаного рівняння $f'(x) = 0$ — стаціонарні точки.

3. Знайти точки, у яких похідна не існує.

4. Дослідити знак похідної в околі кожної критичної точки (знайдених в пунктах 2 – 3).

5. Визначити точки екстремуму та обчислити значення функції в точках екстремуму.

Розглянемо застосування алгоритма на прикладах.

10.1. *Встановити інтервали монотонності та точки екстремуму функції:*

а) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$.

☐ 1) $f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x = 3x(x+2)(x-3)$;

2) $3x(x+2)(x-3) = 0$, стаціонарні точки $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$;

3) $f'(x)$ існує на всій дійсній осі.

4) знак похідної в околах критичних точок зображено на рисунку 10.1.

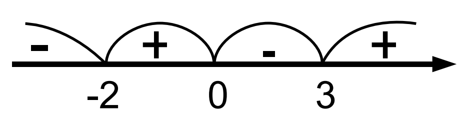


Рис. 10.1: знаки похідної функції $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$

Бачимо, що функція спадає на проміжках $(-\infty, -2)$ і $(0, 3)$; зростає на проміжках $(-2, 0)$ і $(3, +\infty)$.

5) При цьому $x_1 = -2$ та $x_3 = 3$ — це точки мінімуму, а $x_2 = 0$ — точка максимуму. Екстремальні значення функції $f(x)$ (тобто, зна-

чення функції в точках екстремуму) наступні: $f_{\min 1} = f(x_1) = -9$, $f_{\max} = f(x_2) = 7$, $f_{\min 2} = f(x_3) = -40{,}25$. ■

б) $f(x) = e^x + e^{-x}$.

□ 1) $f'(x) = e^x - e^{-x}$; 2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$; 3) похідна існує в усіх дійсних точках; 4) методом пробних точок знаходимо знак похідної у відповідних інтервалах:

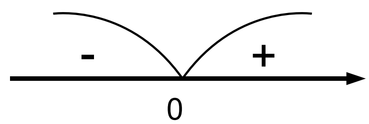


Рис. 10.2: знаки похідної функції $f(x) = e^x + e^{-x}$

Функція спадає на проміжку $(-\infty, 0)$ та зростає на проміжку $(0, +\infty)$. 5) $x_0 = 0$ — точка мінімуму, $f_{\min} = f(0) = 2$. ■

в)

$$f(x) = \frac{14}{x^4 - 5x^2 + 6}.$$

□ 1) $f'(x) = \frac{-28x(2x^2-5)}{((x^2-2)(x^2-3))^2}$;

2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{\frac{5}{2}},\ x_3 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$;

3) похідна не існує в точках $x_{4,5} = \pm\sqrt{2}$ та $x_{6,7} = \pm\sqrt{3}$.

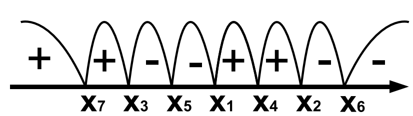


Рис. 10.3: знаки похідної функції $f(x) = \frac{14}{x^4-5x^2+6}$

4) функція спадає на інтервалах $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{2}\right)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{3}\right)$, $(3, +\infty)$;

зростає $\forall x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup \left(-\sqrt{3}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \cup (0, \sqrt{2}) \cup \left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

5) $x_1 = 0$ — точка мінімуму, при цьому $f_{\min} = f(0) = \frac{7}{3}$. Точки максимуму: $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ і $f_{\max} = f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -56$. ■

10.2.2 Другий алгоритм знаходження точок екстремуму функції

1. Знайти похідну даної функції $f(x)$.
2. Прирівняти похідну до нуля. Знайти корені одержаного рівняння $f'(x) = 0$ — стаціонарні точки.
3. Знайти точки, в яких похідна не існує.
4. Знайти другу похідну заданої функції.
5. Обчислити значення другої похідної в критичних точках.
6. Встановити тип точок екстремуму та обчислити значення функції в цих точках.

Знову розглянемо алгоритм на конкретних прикладах.

10.2. *Дослідити на екстремум задану функцію:*

а) $f(x) = x^2 \ln x$.

□ 1) $f'(x) = x(2\ln x + 1)$;
2) $f'(x) = 0$ якщо $x_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}$;
3) $f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ (тобто, на проміжку $(0, +\infty)$);
4) $f''(x) = 2\ln x + 3$;
5) – 6) $f''(x_0) = 2\ln e^{-\frac{1}{2}} + 3 = 2 > 0$ тому $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$ — точка мінімуму, $f_{\min} = f(e^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2e}$. ■

б) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$.

☐ Оскільки період заданої функції дорівнює 2π, то при розв'язанні обмежимося розглядом відрізка $[0, 2\pi]$.

1) $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x(1 - 2\sin x)$;

2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{\pi}{2},\ x_3 = \frac{5\pi}{6},\ x_4 = \frac{3\pi}{2}$;

3) Похідна існує в усіх точках відрізку $[0, 2\pi]$;

4) $f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x$;

5) – 6) $f''(\frac{\pi}{6}) = -3 < 0$, тому $x_1 = \frac{\pi}{6}$ — точка максимуму, $f_{\max 1} = f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}$, $f''(\frac{\pi}{2}) = 2 > 0$, тому $x_2 = \frac{\pi}{2}$ — точка мінімуму, $f_{\min 1} = f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f''(\frac{5\pi}{6}) = -3 < 0$, тому $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ — точка максимуму, $f_{\max 2} = f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{3}{2}$, $f''(\frac{3\pi}{2}) = 6 > 0$, тому $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ — точка мінімуму, $f_{\min 2} = f(\frac{3\pi}{2}) = -3$. ■

10.3. *Знайти точки екстремуму функції:*

а) $y = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!})e^{-x},\ n \in \mathbb{N}$.

☐ Скористаємося першим алгоритмом розв'язання:

1)
$$y' = \left(1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} \ldots + \frac{nx^{n-1}}{n!}\right) e^{-x} -$$
$$- \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x} =$$
$$= \left[\left(\frac{2x}{2!} - x\right) + \left(\frac{3x^2}{3!} - \frac{x^2}{2!}\right) + \ldots +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{nx^{n-1}}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right] = \frac{-x^n}{n!} e^{-x}.$$

2) Похідна перетворюється в нуль при $x_0 = 0$.

3) Областю визначення похідної заданої функції y є множина всіх дійсних чисел;

4) Якщо число n парне, то $y' > 0$ на всій дійсній осі $\mathbb{R}$, якщо ж n непарне, то $y' < 0\ \ \forall x \in (-\infty, 0)$ і $y' > 0\ \ \forall x \in (0, +\infty)$;

5) Таким чином, у випадку парного n точок екстремуму немає, для n непарного $x_0 = 0$ — точка мінімуму, $y_{\min}(0) = 1$. ■

б) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0; \\ 3x + 5, & x \geq 0. \end{cases}$

□ 1)

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & x < 0; \\ 3, & x > 0. \end{cases}$$

2) $f'(x) \neq 0$ $\forall x \neq 0$; 3) $f'(x)$ існує в усіх точках, за винятком $x = 0$; 4) Бачимо, що $f'(x) < 0$ при $x < 0$ та $f'(x) > 0$ при $x > 0$; 5) Але точка $x = 0$ не буде точкою мінімуму, оскільки функція має розрив в цій точці (дійсно, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 5$). ■

в) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3\ , & x \neq 0; \\ 4{,}5\ , & x = 0. \end{cases}$

□ 1) $f'(x) = \begin{cases} 4x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ 2) $f'(x) = 0$ при $x = 0$; 3) $f'(x)$ існує в усіх точках; 4) Зрозуміло, що $f'(x) < 0$ при $x < 0$ та $f'(x) > 0$ при $x > 0$; 5) Точка $x = 0$ буде не точкою мінімуму, а максимуму, що випливає з графіка функції, який неважко побудувати (рис. 10.4). ■

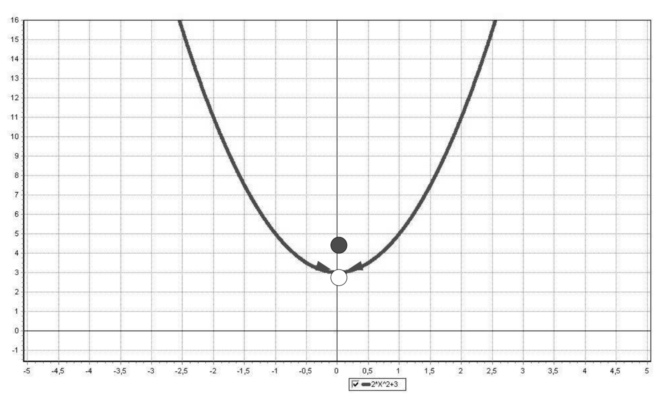


Рис. 10.4: графік функції з прикладу 10.3 в)

10.4. *Круглим діловим лісом називають колоди правильної форми без дефектів деревини з відносно невеликою різницею діаметрів товстого й тонкого кінців. При визначенні об'ємів круглого ділового лісу зазвичай використовують спрощену формулу* $V = lS$, *де* l *— довжина колоди,* S *— середня площа її перетину. З'ясуйте, завишаеться або занижується при цьому реальний об'єм; оціните відносну погрішність.*

☐ Форма круглого ділового лісу близька до усіченого конуса. Нехай R — радіус більшого, r — меншого кінця колоди. Її точний об'єм (об'єм усіченого конуса) можна знайти по формулі

$$V = \frac{1}{3}\pi l(r^2 + R^2 + rR).$$

Нехай V_1 — значення об'єму, обчислене по спрощеній формулі. Тоді

$$V_1 = \pi l \left(\frac{R + r}{2}\right).$$

Позначимо $\Delta V = V - V_1$. Оскільки $\Delta V = \frac{\pi l}{12}(R - r)^2 > 0$, то $V > V_1$. А отже, спрощена формула дає заниження величини об'єму. Покладемо тепер $\frac{R}{r} = x$ і розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2. \tag{10.1}$$

З (10.1) бачимо, що відносна погрішність не залежить від довжини колоди, а визначається відношенням $\frac{R}{r}$. Дослідимо функцію $f(x)$ на монотонність за першим алгоритмом. 1)

$$f'(x) = 4\frac{x - 1}{(x + 1)^3}.$$

2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. 3) Похідна не існує при $x = -1$. 4) $f'(x) > 0$ коли $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$.

Оскільки функція зростає на проміжку $[1;\infty]$, то $\forall x \in [1;2]$ виконується нерівність $f(x) < f(2) < \frac{1}{27}$. Таким чином, відносна похибка не перевершує 3,7 відсотка, що в практиці лісознавства вважається цілком припустимим. ■

10.3 Найбільше та найменше значення

10.3.1 Алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значень функції на проміжку

1. Знайти точки екстремуму функції на заданому проміжку.
2. Обчислити значення функції в точках екстремуму та на кінцях проміжку.
3. Обрати серед знайдених чисел найбільше та найменше.

10.5. *Знайти найбільше та найменше значення функції на вказаному проміжку:*

а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на відрізку $[-2, \frac{5}{2}]$.

□ 1)

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12; \quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1, x_2 = 2.$$

Зрозуміло, що $x_1, x_2 \in [-2, \frac{5}{2}]$. Знайдемо другу похідну функції $f(x)$: $f''(x) = 12x$. Оскільки $f''(-1) = -12 < 0$, то x_1 — точка максимуму; $f''(2) = 24 > 0$, отже, x_2 — точка мінімуму.

2) Обчислимо значення функції в точках екстремуму та на кінцях відрізку: $f(-1) = 8$, $f(2) = -19$, $f(-2) = -3$, $f(\frac{5}{2}) = -\frac{33}{2}$.

3) Функція $f(x)$ приймає найбільше значення, а саме, 8, на відрізку $[-2, \frac{5}{2}]$ в точці $x = -1$; найменше значення, яке дорівнює -19, функція приймає в точці $x = 2$. ■

б) $f(x) = xe^{-x}$ на проміжку $[0, +\infty)$.

□ 1) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$; $f'(x) = 0$ при $x_0 = 1$. $f'(x) > 0$ на проміжку $(-\infty, 1)$ і $f'(x) < 0$ на проміжку $(1, +\infty)$. Таким чином, $x_0 = 1$ — точка максимуму.
2) Знайдемо значення функції в точці максимуму та на кінцях заданого проміжку:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{1}{e}, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

3) Задана функція приймає найменше значення, яке дорівнює 0, в точці $x = 0$ та при $x \to \infty$; найбільше значення, яке дорівнює $\frac{1}{e}$ — в точці $x = 1$. ■

в) $f(x) = \sin x \sin 2x$ на проміжку $(-\infty, +\infty)$.

□ Неважко зрозуміти, що

$$f(x) = \sin x \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x).$$

Оскільки задана функція парна та її період дорівнює 2π, то при розв'язанні обмежимося відрізком $[0, \pi]$.

1) $f'(x) = \frac{1}{2}(3\sin 3x - \sin x)$. Похідна перетворюється в нуль у точках $x_1 = 0$, $x_2 = \arccos\frac{-1}{\sqrt{3}}$, $x_3 = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_4 = \pi$.

З'ясуємо, чи будуть точки x_2, x_3 екстремальними. Для цього скористаємося другим алгоритмом.

$$f''(x) = \frac{1}{2}(9\cos 3x - \cos x),$$

$$f''(x_2) = f''\left(\arccos\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}} > 0,$$

відповідно, x_2 — точка мінімуму;

$$f''(x_3) = f''\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-4}{\sqrt{3}} < 0,$$

тому x_3 — точка максимуму. Точки x_1 та x_4 — кінці відрізку, отже вони не можуть бути точками екстремуму.

2) $f(0) = f(\pi) = 0$, $f\left(\arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \pm\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

3) Найменше значення функція приймає в точці $x_2 = \arccos\frac{-1}{\sqrt{3}}$, найбільше — в точці $x_3 = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Остаточно одержуємо, що найменше значення задана функція приймає в точках $\arccos\frac{-1}{\sqrt{3}} + 2\pi k$ і $2\pi - \arccos\frac{-1}{\sqrt{3}} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а найбільше — в точках $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi k$ та $2\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

10.4 Завдання для самостійної роботи

Чи будуть істинними такі твердження?

1. Якщо функція $f(x)$ визначена в інтервалі $(a;b)$, має скінченну похідну в цьому інтервалі і $\exists c \in (a;b)\colon\ f(c) = 0$, то за умови $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a;b)$ функція $f(x)$ зростає на $(a;b)$.

2. Будь-яка стаціонарна точка деякої функції є точкою екстремуму цієї функції.

3. Якщо x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0) \to \pm\infty$.

4. Клас функцій, для яких застосовна перша достатня умова існування екстремуму функції в точці (теорема 10.4), вужче за клас функцій, для яких застосовна друга достатня умова існування екстремуму функції в точці (теорема 10.5).

5. Будь-яка диференційовна в інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$, для якої $f'(x) \geq 0$ в усіх точках інтервалу не спадає на інтервалі

$(a;b)$.

6. Похідна монотонної функції може перетворюватися в нуль в окремих точках.

7. Не диференційовна в інтервалі $(a;b)$ функція може бути монотонна в інтервалі $(a;b)$.

8. Точки розриву функції не можуть бути точками екстремуму цієї ж функції.

9. У кожній критичній точці функція має екстремум.

10. За умови $f''(x_0)=0$ функція $f(x)$ в точці x_0 має максимум.

10.6. *Дослідити функцію на монотонність та точки екстремуму:*

а) $f(x)=-x^2\sqrt[5]{(x-2)^2}$; **б)** $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}$;

в) $f(x)=\cos 2x-2\sin x$; **г)** $f(x)=\operatorname{tg} x-x$;

д) $y=x^4e^{-x^2}$; **е)** $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$;

є) $f(x)=\begin{cases}-2x, & x<0,\\ 3x+5, & x\geq 0;\end{cases}$

ж) $y=\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}$.

10.7.* *Знайти точки екстремуму функції:*

а) $f(x)=|x^2-3x+2|$; **б)** $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

10.8. *Знайти найбільше та найменше значення функції на вказаному проміжку:*

а) $y=x^4-8x^2+3$ на відрізку $[-2,2]$;

б) $y=\sqrt{4-x^2}$ на відрізку $[-2,2]$;

в) $y=x+2\sqrt{x}$ на відрізку $[0,4]$;

г) $y=x-2\ln x$ на проміжку $(1,e)$;

д) $y=\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln x$ на проміжку $[1,e^4)$;

е) * $y = x^x$ на проміжку $[1, +\infty)$;

є) * $y = e^{-x^2} \cos x^2$ на проміжку $(-\infty, +\infty)$;

ж) * $y = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$ на відрізку $[-3, 3]$.

10.9. * *Довести, що* $\forall\ a, b, c, d$ *функція* $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ *не має точок екстремуму.*

ЗАНЯТТЯ 11

Задачі на найбільше (найменше) значення функції

11.1 Теоретичні відомості

11.1. *Доведіть, що при* $\alpha,\ \beta \geq 0$ *має місце нерівність*

$$\sin(\alpha + \beta) \leq \sin\alpha + \beta.$$

□ Розглянемо функцію $f(x) = x - \sin x$, визначену на всій осі, та дослідимо її на мінімум на проміжку $[0, \infty)$. Оскільки $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ на цьому проміжку й дорівнює нулю при $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, то функція $f(x)$ зростає та приймає найменше значення, яке дорівнює нулю при $x = 0$.

Тому, для довільного значення $\beta \geq 0$ виконується співвідношення

$$f(\alpha) \leq f(\alpha + \beta)$$

або

$$\alpha - \sin\alpha \leq \alpha + \beta - \sin(\alpha + \beta) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\alpha + \beta) \leq \sin\alpha + \beta.$$

Рівність має місце при $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta = 0$. ■

11.2.* *Доведіть нерівність*

$$\frac{2x}{x+2} \leq \ln(x+1) \leq \frac{x(x^2+8x+8)}{4(x+1)(x+2)}, \quad x \geq 0.$$

□ Розглянемо дві функції:

$$f(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} \quad \text{та} \quad g(x) = \frac{x(x^2+8x+8)}{4(x+1)(x+2)} - \ln(x+2).$$

Їх похідні

$$f'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \quad \text{та} \quad g'(x) = \frac{x^4+2x^3+6x^2+12x+8}{4(x+1)^2(x+2)^2}$$

при $x \geq 0$ невід'ємні, тому функції монотонно зростають. При цьому найменше значення кожна з них приймає якщо $x = 0$, тобто

$$f(x) \geq f(0) = 0, \quad \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} \geq 0$$

й

$$g(x) \geq g(0) = 0, \quad \frac{x(x^2+8x+8)}{4(x+1)(x+2)} - \ln(x+2) \geq 0.$$

Таким чином

$$\frac{2x}{x+2} \leq \ln(x+1) \leq \frac{x(x^2+8x+8)}{4(x+1)(x+2)}, \quad x \geq 0.$$

Рівність виконується при $x = 0$. ■

11.3.* *Що більше:* a^b *чи* b^a, *якщо а)* $0 < a < b < e$; *б)* $e < a < b$?

□ Розглянемо функцію $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ та з'ясуємо питання її монотонності.

$$\ln f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad (\ln f(x))' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)', \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1-\ln x}{x^2},$$

$$f'(x) = (1-\ln x)x^{\frac{1}{x}-2}.$$

Звідси знаходимо, що при $x \in (0, e)$ $f'(x) > 0$, тобто $f(x)$ — монотонно зростаюча функція, а при $x \in (e, \infty)$ $f'(x) < 0$, тобто $f(x)$ — монотонно спадна функція. Таким чином, при $0 < a < b < e$ $a^b < b^a$, а при $e < a < b$ $a^b > b^a$. ■

11.4. *Знайти число, яке, додане до свого квадрата, дає найменшу суму.*

□ Нехай шукане число x. Розглянемо функцію:

$$f(x) = x + x^2.$$

Область визначення цієї функції — всі дійсні числа.

Дослідимо функцію $f(x) = x + x^2$ на найменше значення при $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 2x + 1$, $x = -\frac{1}{2}$ — стаціонарна точка. При цьому $f''(x) = 2 > 0$ для всіх x, тому в точці $x = -\frac{1}{2}$ функція має мінімум, $f_{\min} = -\frac{1}{4}$.

Якщо $x \to \pm\infty$, то $f(x) \to +\infty$. Таким чином, найменше значення функція приймає при $x = -\frac{1}{2}$. Шукане число — це $-\frac{1}{2}$. ■

11.5. *Під час n вимірювань невідомої величини A були одержані числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В якості значення A приймають таке значення x, для якого сума квадратів його відхилень від чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найменша. Знайти значення x.*

□ Нам треба дослідити функцію

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

на найменше значення.

$$f'(x) = 2((x - x_1) + (x - x_2) + \ldots + (x - x_n)).$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

$f''(x) = 2n > 0$, тому $f(x)$ має мінімум у точці $x = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$. Інших точок екстремуму функція не має. Оскільки

$$f(x) \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty,$$

то своє найменше значення функція приймає в знайденій точці $x = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

Таким чином, найкращим, з точки зору методу найменших квадратів, наближеним значенням невідомої величини A є середнє арифметичне значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$. ■

11.6. *У дану сферу вписати циліндр, який має найбільшу бічну поверхню.*

☐ Нехай R — радіус сфери, r — радіус основи циліндра. Тоді висота циліндра h може бути знайдена за формулою $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ (див. рис. 11.1), а площа бічної поверхні $S = 2\pi r h$. Остаточно маємо

$$S(r) = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}, \quad r \in [0, R].$$

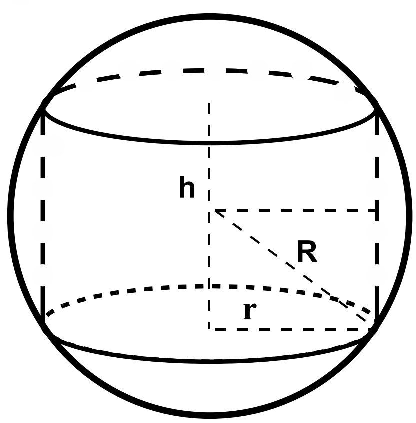


Рис. 11.1: до задачі 11.6

Далі дослідимо функцію $S(r)$ на найбільше значення в проміжку

$[0, R]$.

$$S'(r) = 4\pi\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{4\pi r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi\frac{R^2 - 2r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

$S'(r) = 0$ за умови, що $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Похідна не існує при $r \geq R$. $S'(r) > 0$ якщо $r \in [0, \frac{R}{\sqrt{2}})$ і $S'(r) < 0$ за умови $r \in (\frac{R}{\sqrt{2}}, R)$. Тому $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ — точка максимуму.

$S(r) \to 0$ при $r \to 0$; $S(r) \to 0$ при $r \to R$; $S(\frac{R}{\sqrt{2}}) = 2\pi R^2$.

Приходимо до висновку, що радіус шуканого циліндра дорівнює $\frac{R}{\sqrt{2}}$, висота — $R\sqrt{2}$. ■

11.7. *Які розміри повинна мати консервна банка, що має найбільший об'єм при заданій площі поверхні?*

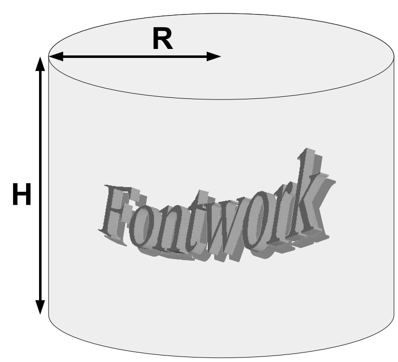


Рис. 11.2: до задачі 11.7

□ Нехай висота циліндра H, а радіус основи — R. Відомо, що повна площа поверхні циліндра обчислюється за формулою

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2.$$

Тому

$$H = \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R}.$$

Відповідно, об'єм циліндра

$$V = \pi R^2 H = \pi R^2 \cdot \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R} = \frac{1}{2}R(S - 2\pi R^2).$$

Далі встановимо область визначення функції $V = V(R)$. Зрозуміло, що $R > 0$. З іншого боку, оскільки $V > 0$, то $S - 2\pi R^2 > 0$ звідки $R < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$. З цього випливає, що областю визначення функції $V(R)$ є інтервал $\left(0, \sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right)$.

Дослідимо функцію $V(R)$ на найбільше значення за умови $R \in \left(0, \sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right)$.

$$V' = \frac{1}{2}(S - 2\pi R^2) - \frac{1}{2}4\pi R^2 = \frac{1}{2}(S - 6\pi R^2).$$

Похідна існує для всіх R зі вказаного проміжку, тому знайдемо лише стаціонарні точки:

$$V' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

При цьому

$$V'' = -6\pi R \quad \text{і} \quad V''\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) = -\sqrt{6\pi S} < 0,$$

тобто, точка $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ є точкою мінімуму функції V на інтервалі $(0, \sqrt{\frac{S}{2\pi}})$.

Оскільки $V \to 0$ при $R \to 0$ та $R \to \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$, то найбільше значення на проміжку $(0, \sqrt{\frac{S}{2\pi}})$ функція V приймає в точці $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. Висота банки H повинна дорівнювати $2R$, тобто, $\frac{\sqrt{2S}}{3\pi}$. ■

11.8. *На якій висоті над центром круглого стола радіусу a необхідно повісити електричну лампу, виходячи з умови найбільшої освітленості краю стола?*

□ Освітленість I визначається за формулою $I = k\frac{\sin\varphi}{r^2}$, де $k = \text{const}$, r — відстань від джерела світла до точки спостереження, кут φ зображено на рисунку 11.3.

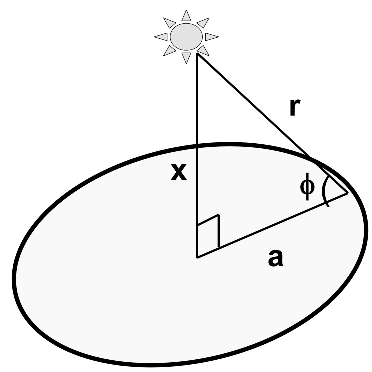


Рис. 11.3: до задачі 11.8

Позначимо шукану висоту через x. Зрозуміло, що $x \in [0, +\infty)$. З відповідного прямокутного трикутника маємо

$$r = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \sin\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Тому

$$I(x) = k\frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Далі дослідимо одержану функцію $I(x)$ на найбільше значення коли $x \in [0, +\infty)$.

$$I'(x) = k\frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}2x}{(a^2 + x^2)^3} = k\frac{a^2 - 2x^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

При $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ похідна функції $I(x)$ дорівнює нулю. На інтервалі $(0, \frac{a}{\sqrt{2}})$ функція $I(x)$ зростає, а на проміжку $(\frac{a}{\sqrt{2}}, +\infty)$ — спадає. Отже, $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ — точка максимуму.

Оскільки $I(0) = 0$ та $I(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то найбільше значення функція $I(x)$ приймає в точці $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. ■

11.9.* *До річки (з паралельними берегами) шириною a метрів побудовано під прямим кутом канал шириною b метрів. Якої максимальної довжини кораблі можуть входити в цей канал?*

☐ Нехай α — кут, під яким корабель входить у канал, $\alpha \in [0°, 90°]$. Довжину корабля позначимо літерою l. Спираючись на властивості прямокутних трикутників (рис. 11.4), далі маємо

$$l = l(\alpha) = \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\cos\alpha}.$$

$$l'(\alpha) = \frac{-b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{a\sin^3\alpha - b\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

$$l'(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}^3\,\alpha = \frac{b}{a}, \text{ або } \alpha = \mathrm{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

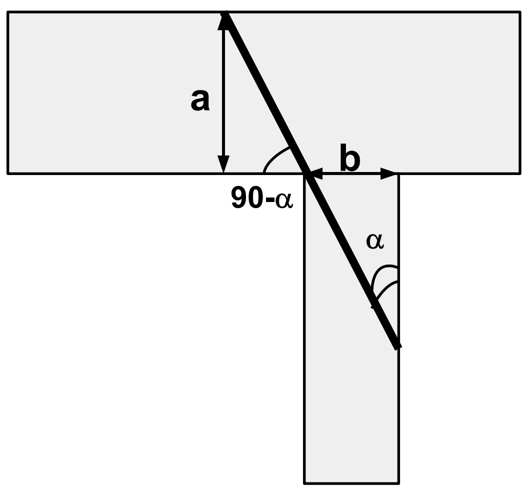


Рис. 11.4: до задачі 11.9

Неважко переконатися, що в точці $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ функція $l(\alpha)$ досягає найменшого значення на проміжку $[0°, 90°]$, оскільки на кінцях цього проміжку $l(\alpha) \to +\infty$.

Шукана довжина корабля складає $l\left(\mathrm{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ метрів. ■

11.10. *Три резистори з опором R_1, R_2, R_3 з'єднані паралельно. Опір R_1 в 9 разів більше опору R_2. Якщо всі три резистори з'єднати послідовно, то опір ланцюга дорівнюватиме R. Визначити* *опір кожного з резисторів при яких опір паралельного ланцюга буде найбільшим.*

□ При паралельному з'єднанні резисторів еквівалентний опір знаходиться за формулою:

$$1/R_{\text{екв}} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3.$$

Згідно умови $R_1 = 9R_2$, $R = R_1 + R_2 + R_3$ (резистори з'єднані послідовно), тому $R_3 = R - R_1 - R_2 = R - 10R_2$. Отже

$$1/R_{\text{екв}} = \frac{10R - 91R_2}{9R_2(R - 10R_2)} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{екв}} = \frac{9R_2(R - 10R_2)}{10R - 91R_2}.$$

За фізичним змістом $R_{\text{екв}} > 0$, що приводить нас до системи нерівностей

$$\begin{cases} R_2 > 0 \\ R - 10R_2 > 0 \\ 10R - 91R_2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad R_2 \in (0; R/10).$$

Таким чином, задача зведена до знаходження найбільшого значення функції $R_{\text{екв}} = R_{\text{екв}}(R_2)$ в інтервалі $(0; R/10)$. Візьмемо похідну від $R_{\text{екв}}$ по R_2 :

$$R'_{\text{екв}} = \frac{10(91R_2^2 - 20RR_2 + 10R^2)}{(10R - 91R_2)^2}.$$

Критичними точками функції є такі значення R_2 : $\frac{10}{91}R$, $R/7$, $R/13$. В інтервалі $(0; R/10)$ міститься тільки одна критична точка $R_2 = R/13$. При переході через цю точку похідна $R'_{\text{екв}}$ міняє знак з додатного на від'ємний. Тому при $R_2 = R/13$ досягається максимум функції $R_{\text{екв}}$. Оскільки за умов $R_2 \to 0$ або $R_2 \to R/10$ $R_{\text{екв}} \to 0$, то найбільший опір ланцюга з паралельно з'єднаними резисторами буде при $R_1 = 9R/13$, $R_2 = R/13$, $R_3 = 3R/13$;

$R_{\text{екв найбільше}} = 9R/169$. ■

11.11.* *Підприємство D необхідно з'єднати шосейною дорогою з прямолінійною залізничною колією на якій розташовано місто A. Відстань DB до залізничної колії a км, відстань AB залізничною колією дорівнює l км. Вартість перевезень по шосе в m раз дорожче вартості перевезень залізницею ($m > 1$).*

Яким чином провести шосе DP до залізничної колії за умови мінімізації загальної вартості перевезень?

☐ Зрозуміло, що шосе буде прямолінійним. Точка P (місце з'єднання шосе та залізниці) повинна міститися між точками A та B. Нехай x — відстань AP, $x \in [0, l]$.

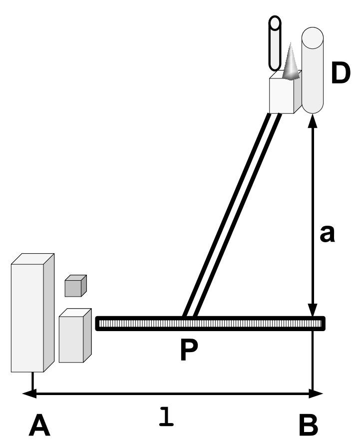


Рис. 11.5: до задачі 11.10

Згідно з умовами задачі та на основі елементарних геометричних міркувань маємо $PB = l - x$, $DB = a$, $DP = \sqrt{a^2 + (l-x)^2}$ (рис. 11.5).

Нехай вартість перевезень по залізниці дорівнює k грошових одиниць. Тоді вартість перевезень по шосе становить km грошових одиниць. Загальна вартість V перевезень з пункту D до пункту

A складає
$$V = V(x) = kx + km\sqrt{a^2 + (l-x)^2},$$
при цьому $x \in [0, l]$.
$$V'(x) = k\left(1 + \frac{m(x-l)}{\sqrt{a^2 + (x-l)^2}}\right).$$
Бачимо, що похідна дорівнює нулю при
$$x_0 = l - \frac{a}{\sqrt{m^2-1}}.$$
Інших критичних точок немає.

Переконаємося, що x_0 є точкою мінімуму функції $V(x)$. Для цього знайдемо значення другої похідної згаданої функції в точці x_0:
$$V''(x) = \frac{a^2km}{(a^2 + (x-l)^2)^{\frac{3}{2}}};$$
$$V''\left(l - \frac{a}{\sqrt{m^2-1}}\right) = \frac{k(m^2-1)^{\frac{3}{2}}}{am^2} > 0,$$
оскільки за умовою $m > 1$. На відрізку $[0, l]$ функція $V(x)$ має лише одну точку мінімуму, тому залишається знайти значення функції $V(x)$ на кінцях цього відрізку та в точці мінімуму.
$$V(0) = km\sqrt{a^2 + l^2},\ V(l) = kl + kma,\ dV(x_0) = kl + ka\sqrt{m^2-1}.$$

Неважко переконатися, що $V(l) > V(x_0)$. В залежності від конкретних значень параметрів a, l та m можливі нерівності як $V(0) > V(x_0)$ так і $V(0) < V(x_0)$.

В першому випадку найменша загальна вартість перевезень буде досягнута за умови, що точка P з'єднання залізниці та шосе розташована на відстані $l - \frac{a}{\sqrt{m^2-1}}$ км від міста A. У другому випадку найменша вартість перевезень досягається за умови $x_0 = 0$, тобто залізничну колію необхідно прокласти до міста A. ■

11.12.* *Робота деякого магазину характеризується наступними вимогами: інтенсивність споживання є апріорно відомою та постійною величиною; замовлення доставляється зі складу, на якому зберігається раніше вироблений товар; час постачання замовлення є відомою та постійною величиною; кожне замовлення поставляється у вигляді однієї партії; витрати на здійснення замовлень не залежать від його розміру; витрати на збереження запасу товару пропорційні розміру запасу; відсутність запасу (дефіцит) є неприйнятним.*

Побудувати модель, яка описує витрати, пов'язані з наявністю певних запасів за весь період їх зберігання. Тривалість цього періоду значення не має: це може бути один день, місяць, рік і т.д. У даному випадку ми виберемо період, який дорівнює одному року.

□ Уведемо наступну систему позначень: D — обсяг щорічного попиту на запас продукції; C_0 — вартість подачі одного замовлення (грн./замовлення); C_h — вартість збереження одиниці продукції в запасі (грн. на одиницю продукції в рік); q — обсяг замовлення (одиниць продукції/замовлення).

У прийнятих за умовою припущеннях справедлива рівність

Загальна вартість запасів у рік = загальна вартість подачі замовлень у рік + загальна вартість зберігання запасів у рік.

У свою чергу,

Загальна вартість подачі замовлень у рік = вартість подачі одного замовлення × кількість замовлень у рік $= C_0(D/q)$.

За припущеннями, рівень запасів змінюється лінійно і належить проміжку від q до нуля, отже, середній рівень запасів дорівнює $q/2$.

Тому,

Загальна вартість зберігання запасів у рік = вартість збереження одиниці продукції в рік × середній розмір запасу= $= C_h(q/2)$.

З цього випливає, що загальна вартість $V = V(q)$ запасу продукції в рік визначається формулою

$$V = \frac{C_0 D}{q} + \frac{C_h q}{2} \quad \text{(грн. у рік)}.$$

Одержане рівняння називається `рівнянням загальної вартості основної моделі керування запасами (модель Уілсона).`

Ми повинні знайти значення q, при якому будуть досягатися мінімальні витрати. Для цього дослідимо функцію $V(q)$ на екстремум.

$$V'(q) = \frac{-C_0 D}{q^2} + \frac{C_h}{2}, \quad V''(q) = \frac{2C_0 D}{q^3}.$$

$V'(q) = 0$ при $q^* = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_h}}$. Похідна не існує при $q = 0$, але обсяг замовлення у нуль одиниць товару не має сенсу. Тому з'ясуємо, чи буде точка q^* екстремальною.

$$V''(q^*) = 2C_0 D \left(\sqrt{\frac{2C_0 D}{C_h}} \right)^{-3} > 0,$$

таким чином, в точці q^* функція $V(q)$ має мінімум. Оскільки $V(q) \to \infty$ при $q \to \infty$, то мінімального значення функція вартості запасів набуває при $q = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_h}}$.

Отриманий обсяг замовлення

$$\boxed{q^* = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_h}}}$$

називають `економічним розміром замовлення.` Якщо протягом року з рівними інтервалами замовляти дану кількість продукції, то річна вартість збереження запасів буде мінімальною. ■

11.2 Завдання для самостійної роботи

11.13. *Доведіть, що при* $\alpha \geq 0, \ \beta \geq 0$ *має місце нерівність*

$$\cos(\alpha + \beta) \geq \cos\alpha - \beta.$$

11.14. *Знайти найбільший член числової послідовності*

$$a_n = \frac{n^2}{n^3 + 200}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad .$$

11.15. *Знайти додатне число, яке в сумі з оберненим йому числом дає*

а) *найменшу суму,*

б) *найбільшу суму (якщо це можливо).*

11.16. *Яке із десяти чисел*

$$1^{10}, \ 2^9, \ 3^8, \ 4^7, \ 5^6, \ 6^5, \ 7^4, \ 8^3, \ 9^2, \ 10^1$$

найбільше?

11.17. *Необхідно побудувати відкритий циліндричний резервуар, що вміщує* V_0 *літрів. Товщина стінок й дна дорівнює* d. *Якими повинні бути розміри резервуара, виходячи з мінімізації використаного матеріалу?*

11.18. *Визначити найбільшу площу прямокутника, який вписано в півколо радіуса* a.

11.19. *Знайти відношення висоти конічного шатра до радіуса основи за умови, що його бічна поверхня найменша при заданій місткості.*

11.21. *У дану сферу вписати конус найбільшого об'єму.*

11.22. *На сторінці книги текст повинен займати* S *см*^{2}. *Верхній та нижній береги повинні бути по* b *см, а правий та лівій — по* a *см. Якщо взяти до уваги лише економію паперу, то якими повинні бути розміри сторінки?*

11.23.* *Вартість плавання судна протягом однієї години виражено емпіричною формулою вигляду* $a + bv^3$, *де* a *і* b *— сталі для даного судна,* v *— швидкість. У наведеній формулі стала частина витрат* a *відноситься до амортизації та утримання команди, а другий член* bv^3 *— до вартості пального. З якою швидкістю судно пропливе задану відстань з найменшими витратами? (Така швидкість називається крейсерською).*

11.24. *Три пункти* A, B *і* C *розташовані не на одній прямій;* $\angle ABC = 60^\circ$. *З точки* A *виїжджає автомобіль. Одночасно з точки* B *виїжджає потяг. Автомобіль рухається до пункту* B *зі швидкістю* 80 *км/год, потяг — у напрямку до* C *зі швидкістю* 50 *км/год. У який момент часу (від початку руху) відстань між потягом та автомобілем буде найменшою, якщо* $AB = 200$ *км?*

ЗАНЯТТЯ 12

Інтервали опуклості графіка функції. Асимптоти

12.1 Теоретичні відомості

Означення 12.1. *Вважають, що крива* $y = f(x)$, $x \in (a;b)$ *обернена опуклістю вгору (вниз) в інтервалі* $(a;b)$, *якщо вона лежить нижче (вище), ніж будь-яка дотична, проведена в довільній точці цієї кривої (виключаючи, природньо, саму точку дотику, яка лежить на кривій).*

Теорема 12.1. ***(достатня умова опуклості вгору (вниз) кривої).*** *Нехай функція* $f(x)$ *в інтервалі* $(a;b)$ *має похідну другого порядку. Якщо* $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$, $\forall x \in (a;b)$, *то крива* $y = f(x)$ *в інтервалі* $(a;b)$ *обернена опуклістю вниз (вгору).*

Наслідок 12.1. *Нехай в околі точки* c *функція* $f(x)$ *має другу похідну, неперервну в точці* c. *Якщо* $f''(c) > 0$ $(f''(c) < 0)$, *то в досить малому околі точки* c *крива* $y = f(x)$ *обернена опуклістю вниз (вгору).*

Означення 12.2. *Інтервал* $(a; b)$, *у якому крива* $y = f(x)$ *обернена опуклістю вгору (вниз), називається інтервалом опуклості вгору (вниз) для цієї кривої.*

Означення 12.3. *Нехай функція* $f(x)$ *диференційовна в інтервалі* $(a; b)$, *за винятком, можливо, точки* $c \in (a; b)$, *у якій* $f(x)$ *неперервна, і нехай у точці* $(c; f(c))$ *існує дотична. Точка* $(c; f(c))$ *називається точкою перегину кривої* $y = f(x)$, *якщо існує такий окіл точки* c, *що крива* $y = f(x)$ *обернена опуклістю вниз (вгору) в інтервалі* $(c; c + \delta)$ *і ця крива обернена опуклістю вгору (вниз) в інтервалі* $(c - \delta; c)$.

Теорема 12.2. ***(необхідна умова для точки перегину).***

Нехай функція $f(x)$ *в околі точки* c *має похідну другого порядку, неперервну в точці* c. *Якщо точка* $(c; f(c))$ *є точкою перегину кривої* $y = f(x)$, *то* $f''(c) = 0$.

Точки перегину кривої $y = f(x)$ треба шукати серед тих точок, у яких похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує. Такі точки будемо називати *критичними на перегин.*

Теорема 12.3. ***(достатня умова існування у кривої точки перегину).***

Нехай функція $f(x)$ *має другу похідну* $f''(x)$ *в деякому околі* $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ *точки* x_0, *за винятком, можливо, точки* x_0, *у якій функція* $f(x)$ *неперервна, причому крива* $y = f(x)$ *має в точці* $(x_0; f(x_0))$ *дотичну. Якщо* $f''(x)$ *при переході точки* x *через точку* x_0 *змінює знак, то* $(x_0; f(x_0))$ *є точкою перегину кривої* $y = f(x)$.

Нехай крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, де $f(x)$ — неперервна функція на відрізку $[a; b]$. Тоді за теоремою Вейєр-

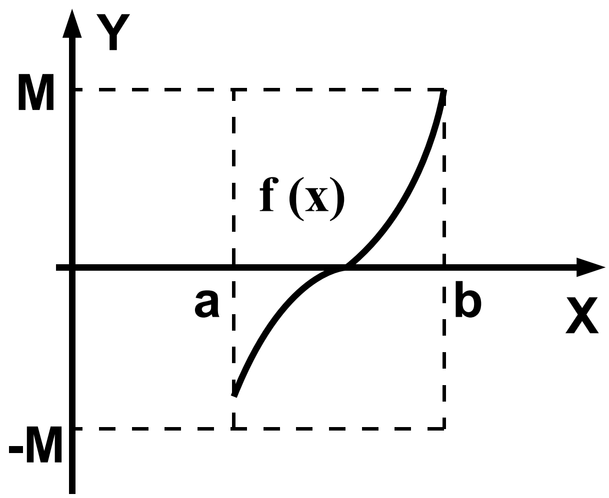


Рис. 12.1: графік обмеженої функції

штрасса $f(x)$ обмежена на відрізку $[a;b]$, тобто існує число $M>0$ таке, що $|f(x)| \leq M, \ \forall x \in [a;b]$. Внаслідок цього всі точки кривої $y=f(x), \ x \in [a;b]$, лежать у прямокутнику, який обмежений прямими: $x=a, \ x=b, \ y=-M, \ y=M$ (див. рис. 12.1). Якщо ж $f(x)$ визначена на нескінченному інтервалі чи на скінченному, який містить точки розриву другого роду функції $f(x)$, то криву $y=f(x)$ не завжди можна розмістити в прямокутнику. Така крива або її частини можуть уходити в нескінченність. При цьому крива на нескінченності може наближатися до деякої прямої, яку називають асимптотою цієї кривої.

Означення 12.4. *Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;+\infty)$ (або на інтервалі $(-\infty;a)$). Пряму $y=kx+b$ називають асимптотою (похилою асимптотою) кривої $y=f(x), \ (a;+\infty)$, якщо відстань точки $M(x;f(x))$ цієї кривої до вказаної прямої прямує до нуля при $x \to \infty$ або $x \to -\infty$ (див. рис. 12.2).*

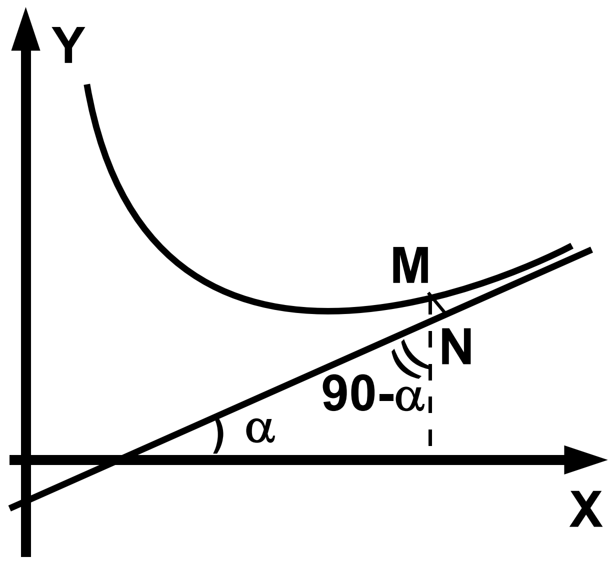


Рис. 12.2: асимптота кривої

Теорема 12.4. *Нехай функція* $f(x)$ *визначена в інтервалі* $(a;+\infty)$. *Для того, щоб пряма* $y=kx+b$ *була асимптотою кривої* $y=f(x)$, $x\in(a;+\infty)$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:*

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Теорема 12.5. *Нехай функція* $f(x)$ *визначена в інтервалі* $(-\infty;a)$. *Для того, щоб пряма* $y=kx+b$ *була асимптотою кривої* $y=f(x)$, $x\in(-\infty;a)$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:*

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Означення 12.5. *Нехай функція* $f(x)$ *визначена в інтервалі* $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, $\delta>0$, *за винятком, можливо, точки* x_0. *Якщо*

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\pm\infty \tag{12.1}$$

або

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty, \tag{12.2}$$

або співвідношення (12.1) і (12.2) виконуються водночас, то пряму $x = x_0$ *називають вертикальною асимптотою кривої* $y = f(x)$.

Зауваження 12.1. *Аналогічно визначаються вертикальні асимптоти, якщо* $f(x)$ *визначена в інтервалі* $(x_0; x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, *або в інтервалі* $(x_0 - \delta; x_0)$, $\delta > 0$.

12.2 Опуклість кривої. Точки перегину

12.1. *Знайти інтервали опуклості догори та донизу, точки перегину графіків таких функцій:*

а) $y = x^4(12 \ln x - 7)$.

☐ Знайдемо похідні першого та другого порядку заданої функції:

$$y' = 12x^3 + 4x^3(12 \ln x - 7) = 12x^3 + 48x^3 \ln x - 28x^3 =$$

$$= 48x^3 \ln x - 16x^3;$$

$$y'' = 48x^2 + 144x^2 \ln x - 48x^2 = 144x^2 \ln x.$$

Далі знайдемо критичні на перегін точки (точки, в яких друга похідна дорівнює нулю або не існує).

Зрозуміло, що функція $\varphi(x) = y''$ неперервна на всій області визначення заданої функції y (це проміжок $(0, +\infty)$) та

$$y'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1.$$

Проміжок $(0, +\infty)$ розбивається точкою x_1 на два інтервали.

Методом пробних точок встановлюємо знак другої похідної на кожному з інтервалів і робимо висновок про напрямок опуклості графіка функції. Результати занесемо в наступну таблицю:

x	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
y''	$-$	$+$
Висновок	опуклий догори	опуклий донизу

Оскільки при переході через точку $x_1 = 1$ змінюється напрямок опуклості графіка функції, то ця точка є точкою перегину. ■

б) $y = \sqrt[3]{x^5}$.

□

$$y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, \quad y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

$y'' \neq 0$ для всіх x. У точці $x = 0$ друга похідна не існує. Але, оскільки $y'' < 0$ при $x < 0$ і $y'' > 0$ при $x > 0$, то в точці $x = 0$ графік функції має точку перегину (таку точку перегину називають `кутовою`). Графік функції є опуклим догори для від'ємних x й опуклим донизу для додатних значень x. ■

в) $y = 2 - |x^5 - 1|$.

□ Оскільки

$$y = \begin{cases} 2 - (x^5 - 1), & x \geq 1, \\ 2 + (x^5 - 1), & x < 1, \end{cases} \quad \text{то} \quad y' = \begin{cases} -5x^4, & x > 1, \\ 5x^4, & x < 1. \end{cases}$$

У точці $x = 1$ перша похідна не існує.

Далі знаходимо похідну другого порядку:

$$y'' = \begin{cases} -20x^3, & x > 1; \\ 20x^3, & x < 1. \end{cases}$$

Критичні на перегин точки: $x_1 = 0$ (похідна другого порядку дорівнює нулю) та $x_2 = 1$ (похідна другого порядку не існує).

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
y''	$-$	$+$	$-$
Висновок	оп. догори	оп. донизу	оп. догори

$y(0) = 1$, а $y(1) = 2$. Остаточно приходимо до висновку, що точка $(0,\ 1)$ є точкою перегину, точка $(1,\ 2)$ — кутовою точкою. ■

12.2. *При яких умовах для параметрів задана крива має точки перегину?*

$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$

□ Як завжди, знайдемо похідну другого порядку заданої функції:

$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d, \quad y'' = 12ax^2 + 6bx + 2c.$$

Крива має точки перегину тоді і лише тоді, коли рівняння $6ax^2 + 3bx + c = 0$ має різні дійсні корені, тобто за умови, що дискримінант $D = 9b^2 - 24ac > 0$.

Таким чином, параметри a, b, c повинні задовольняти нерівність $3b^2 - 8ac > 0$, усі інші параметри можуть обиратися довільно. ■

12.3 Асимптоти кривої

12.3. *Знайти асимптоти заданої кривої:*

а) $y = \frac{2x^2+3x-5}{x^2-4x}$.

□ Спочатку знайдемо вертикальні асимптоти.

У нашому випадку $D_y = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$. Оскільки

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+3x-5}{x^2-4x} = -\infty \quad \text{і} \quad \lim_{x\to 4} \frac{2x^2+3x-5}{x^2-4x} = \infty,$$

то прямі $x = 0$ та $x = 4$ — вертикальні асимптоти.

Похилі асимптоти — це прямі вигляду $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3x-5}{(x^2-4x)x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+3x-5}{x^2-4x} - 0\right) = 2.$$

У силу того, що кутовий коефіцієнт $k = 0$, похила асимптота вироджується в горизонтальну асимптоту (яка є частковим випадком похилої) $y = 2$. ■

б) $y = \frac{2x}{x+1} + 3x$.

□ $x = -1$, — вертикальна асимптота, оскільки

$$\lim_{x\to-1\pm0}\left(\frac{2x}{x+1} + 3x\right) = \mp\infty.$$

Похилі асимптоти.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x}{(x+1)x} + \frac{3x}{x}\right) = 3,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x}{x+1} + 3x - 3x\right) = 2.$$

Отже, похила асимптота має рівняння $y = 3x + 2$. ■

в) $y = 2x + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

□ Як добре відомо, функція $y = \operatorname{arctg} x$ обмежена, звідси випливає, що $2x + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} \to \infty$ лише за умови $x \to \infty$ і тому вертикальних асимптот задана крива не має.

Знайдемо похилі асимптоти:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x} = 2;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y - 2x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2x + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} - 2x\right) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, задана крива має дві похилі асимптоти: $y = 2x + \frac{\pi}{2}$, $y = 2x - \frac{\pi}{2}$. ■

г) $y = \sqrt{1 + x^2} + 2x$.

□ Як і в попередньому прикладі, $y \to \infty$ лише за умови $x \to \infty$, отже, вертикальних асимптот дана крива не має.

Далі,

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = 3,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}+2x-3x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0.$$

Рівняння правої похилої асимптоти: $y = 3x$.

Знайдемо, нарешті, рівняння лівої похилої асимптоти:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = \frac{|x|\sqrt{1/x^2+1}+2x}{x} = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x^2}+2x-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0.$$

Тому $y = x$ — ліва асимптота. ■

12.4 Завдання для самостійної роботи

Чи будуть істинними такі твердження?

1. Будь-яка двічі диференційовна в інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$ має обернений опуклістю вгору чи вниз графік (*якщо це не так, то навести приклад).*

2. Існують криві $y = f(x)$, обернені опуклістю вгору (вниз) на всьому інтервалі $(a;b)$, такі, що $f''(x) = 0$, $\forall x \in (a;b)$.

3. Не диференційовна в інтервалі $(a;b)$ функція може бути обернена опуклістю вгору (вниз) в інтервалі $(a;b)$.

4. У кожній критичній на перегін точці графік функції змінює характер опуклості.

5. Точки розриву функції не можуть бути точками перегину цієї ж функції.

6. За умови $f''(x_0) = 0$ графік функції $f(x)$ в точці x_0 має перегин.

7. Якщо x_0 — точка розриву першого (другого) роду функції $f(x)$, то пряма $x = x_0$ завжди буде вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$.

8. Графік функції $f(x)$, яка визначена та неперервна на відрізку $[a; b]$, а також обмежена на цьому відрізку, не має ні вертикальних, ні похилих асимптот $\forall x \in (a; b)$.

12.4. *Знайти інтервали опуклості догори та донизу, точки перегину графіків наступних функцій:*
а) $y = x^4 - 6x^2 + 5$; **б)** $y = \ln(1 + x^3)$;
в) $y = x + x^{5/3}$; **г)** $y = \frac{x}{1+x^2}$.

12.5. *Довести, що графік будь-якого парного полінома з додатними коефіцієнтами обернений опуклістю вниз.*

12.6. *Знайти асимптоти заданої кривої:*
а) $y = \frac{x^2+5}{x^2-1} + 2x$; **б)** $y = \frac{\ln x}{x}$;
в) $y = 3x - \arccos \frac{1}{x}$; **г)** $y = \frac{\sin x^2}{\cos x}$.

ЗАНЯТТЯ 13

Повне дослідження функції та побудова її графіка

13.1 Теоретичні відомості

Схема дослідження функції

1. Визначити область існування функції. Встановити точки розриву й інтервали неперервності функції, вертикальні асимптоти.

2. Дослідити функцію на парність (непарність), періодичність.

3. Знайти точки максимуму та мінімуму функції, обчислити значення функції в цих точках. Встановити інтервали монотонності функції.

4. Знайти точки перегину графіка функції. Встановити інтервали опуклості функції.

5. З'ясувати поведінку функції при $x \to \pm\infty$, якщо функція визначена на нескінченних інтервалах $(-\infty; a)$, $(b; +\infty)$. Знайти похилі асимптоти.

6. Знайти значення функції на одному чи обох кінцях проміжку, якщо функція визначена на відрізку чи піввідрізку.

7. Знайти точки перетину графіка з вісями координат, декілька

інших характеристичних точок графіка функції.

13.1. *Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:*

а) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$.

$\square$

1) Функція визначена та неперервна якщо

$$x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty).$$

Оскільки

$$\lim_{x\to\sqrt{3}\pm 0} \frac{x^3}{x^2-3} = \pm\infty \quad \text{і} \quad \lim_{x\to-\sqrt{3}\pm 0} \frac{x^3}{x^2-3} = \mp\infty,$$

то $x = \pm\sqrt{3}$ — вертикальні асимптоти.

2) Функція непарна, неперіодична.

3) Знайдемо похідні першого та другого порядку заданої функції:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-3) - 2x \cdot x^3}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2};$$

$$f''(x) = \frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}.$$

Перша похідна дорівнює нулю, коли

$$x^2(x^2-9) = 0,$$

звідки одержуємо стаціонарні точки: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$. Перша похідна не існує в точках $x_4 = -\sqrt{3}$ та $x_5 = \sqrt{3}$, але вони є точками розриву другого роду функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$ і тому не можуть бути екстремальними точками. Дослідимо знаки другої похідної в стаціонарних точках x_1, x_2, x_3 :

$$f''(-3) = \frac{6(-3)(9+9)}{(9-3)^3} < 0, \quad f''(3) = \frac{6 \cdot 3(9+9)}{(9-3)^3} > 0,$$

$$f''(0) = 0.$$

Таким чином, $x_1 = -3$ є точкою максимуму, $f_{\max} = f(-3) = -\frac{9}{2}$, $x = 3$ — точкою мінімуму, $f_{\min} = f(3) = \frac{9}{2}$.

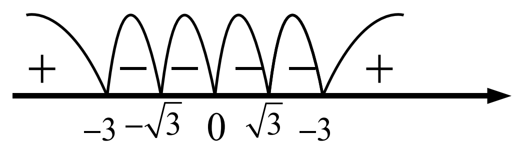


Рис. 13.1: знаки першої похідної функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$

Оскільки $f''(0) = 0$, то скористаємося першим алгоритмом знаходження екстремуму. При цьому також встановимо проміжки монотонності функції $f(x)$. Знаки першої похідної в околах критичних точок зображено на рисунку 13.1.

Бачимо, що функція зростає в проміжках $(-\infty, -3)$ і $(3, \infty)$ та спадає в проміжках $(-3, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ й $(\sqrt{3}, 3)$.

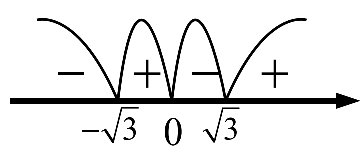


Рис. 13.2: знаки другої похідної функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$

4) Знайдемо точки перегину та інтервали опуклості. Друга похідна дорівнює нулю при $x = 0$ та змінює знак при переході через цю точку. Отже, точка $(0, 0)$ є точкою перегину. Оскільки $f'(0) = 0$, то дотична в цій точці співпадає з віссю Ox.

Друга похідна не визначена при $x = \pm\sqrt{3}$, тобто у тих точках, в яких не визначена й сама функція. Оскільки $f''(x) < 0$, коли

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $0 < x < \sqrt{3}$; $f''(x) > 0$ при $-\sqrt{3} < x < 0$ і $\sqrt{3} < x < \infty$, то графік функції обернений опуклістю вгору в інтервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$ і обернений опуклістю вниз в інтервалах $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, \infty)$.

5) З'ясуємо поведінку функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$ при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-3} = \pm\infty.$$

Визначимо похилі асимптоти кривої:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2-3)} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-3} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{3x}{x^2-3} - x \right) = 0.$$

Отже, пряма $y = x$ — похила асимптота.

6) Графік функції перетинає вісі координат у точці $(0, 0)$.

Результати дослідження зведемо в наступну таблицю:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},3)$	3	$(3,\infty)$
y	$-$	$-\frac{9}{2}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	$\frac{9}{2}$	$+$
y'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$
Висн.	зростає	max	спадає		спадає		спадає		спадає	min	зростає
Висн.	оп. вгору		оп. вгору		оп.вниз	перег.	оп. вгору		оп. вниз		оп. вниз

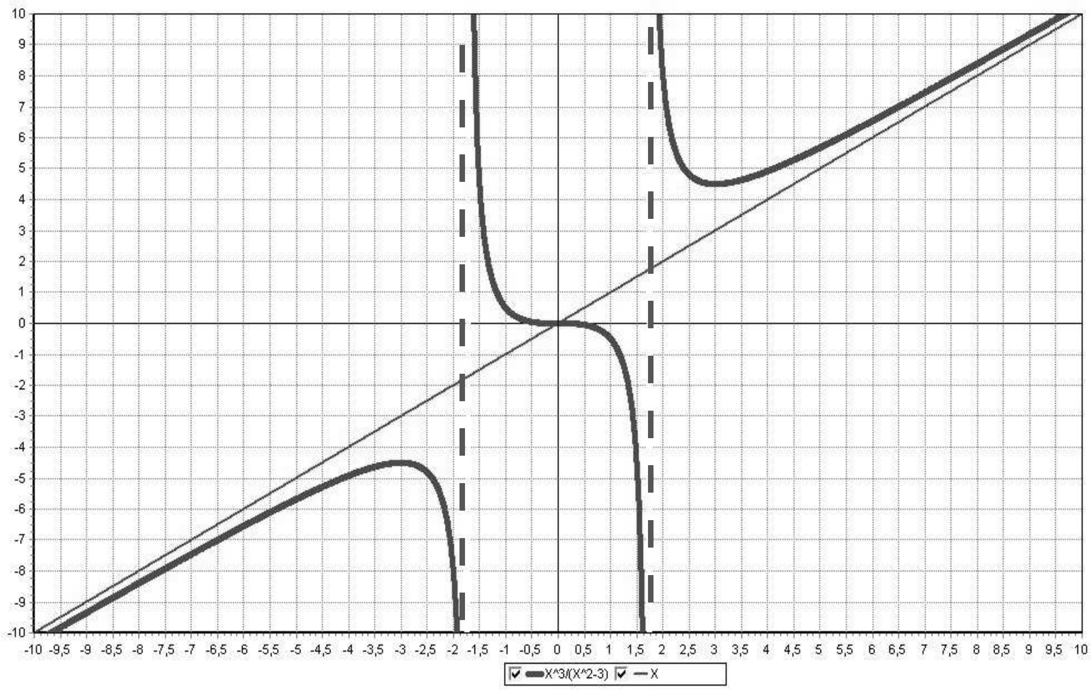


Рис. 13.3: графік функції $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$

Користуючись даними таблиці, креслимо графік заданої функції. Його зображено на рис. 13.3. ■

б) $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$. □

1) Функція визначена та неперервна на всій числовій осі, вертикальних асимптот немає.

2) Функція загального вигляду, неперіодична.

3) Перша похідна

$$y' = \frac{12x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}} = \frac{4 - x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}$$

існує всюди, за винятком точок $x_1 = 0$ і $x_2 = 6$, $y' = 0$ якщо $x = 4$. Методом пробних точок встановлюємо, що на проміжках $(-\infty, 0)$, $(4, 6)$, $(6, \infty)$ $y' < 0$ — функція спадає, на проміжку $(0, 4)$ $y' > 0$ — функція зростає. Відповідно в точці $x_1 = 0$ функція має мінімум, в точці $x_3 = 4$ функція має максимум. Точка $x_2 = 6$ не є точкою екстремуму, оскільки в околі цієї точки похідна від'ємна. При цьому $y_{\min} = 0$, $y_{\max} = 2\sqrt[3]{4}$.

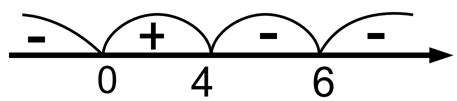


Рис. 13.4: знаки першої похідної функції $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$

4) Знайдемо точки перегину та інтервали опуклості. Друга похідна

$$y'' = -\frac{8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$$

в нуль не перетворюється в жодній точці, а в точках $x_1 = 0$ й $x_2 = 6$ вона не визначена. Оскільки $y'' < 0$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 6)$ і $y'' > 0$ за умови $x \in (6, \infty)$, то крива опукла догори, коли $-\infty < x < 6$ й опукла вниз, коли $x > 6$. Відповідно, точка $(0, 0)$ не є точкою перегину (але вона є точкою мінімуму, тому називається `точкою повернення`), а $(6, 0)$ — точка перегину.

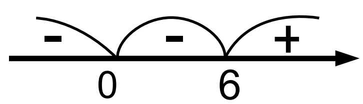


Рис. 13.5: знаки другої похідної функції $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$

5) З'ясуємо поведінку функції $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{6x^2 - x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} x\sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} = \mp\infty.$$

Визначимо похилі асимптоти кривої:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{6x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{6x^2 - x^3} - (-x)) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x^3} = 2.$$

Отже, пряма $y = -x + 2$ — похила асимптота заданої кривої $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$.

6) Точки перетину з вісями координат: $(0, 0)$ й $(6, 0)$.

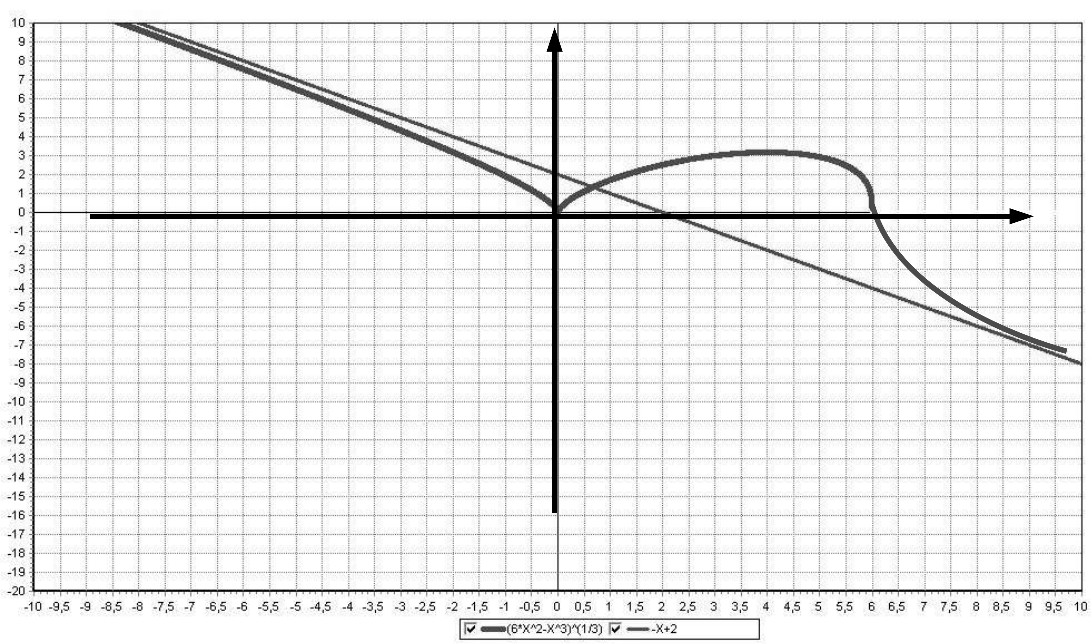


Рис. 13.6: графік функції $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$

Результати дослідження відображені в таблиці:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,4)$	4	$(4,6)$	6	$(6,\infty)$
y	$+$	0	$+$	$2\sqrt[3]{4}$	$-$	0	$-$
y'	$+$	$\nexists$	$-$	-1	$-$	$\nexists$	$+$
y''	$-$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$+$
Висновок	зростає оп. вгору	min перегин	зростає оп. вгору	max	спадає оп. вгору	перегин	спадає оп. вниз

Користуючись даними таблиці, креслимо графік заданої функції. Його зображено на рис. 13.6. ■

13.2. *Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:*

а) $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$.

□

1) Функція визначена та неперервна на інтервалі $(-\infty,\infty)$. Вертикальних асимптот немає.

2) Функція загального вигляду:

$$y(-x) = \frac{1}{2}\sin 2(-x) + \cos(-x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + \cos x.$$

Функція має період 2π. Отже, графік функції достатньо побудувати на будь-якому відрізку довжини 2π, наприклад на відрізку $[-\pi,\pi]$.

3)

$$y'(x) = \cos 2x - \sin x.$$

Визначимо стаціонарні точки з рівняння

$$\cos 2x - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0.$$

Нехай $\sin x = t$, розв'язуючи квадратне рівняння $2t^2 + t - 1 = 0$

маємо $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Тому

$$\sin x = -1 \quad \text{і} \quad \sin x = \frac{1}{2}. \tag{13.1}$$

Нам необхідно знайти лише ті корені рівнянь (13.1), які належать відрізку $[-\pi, \pi]$. Це точки $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$, $x_3 = \frac{5\pi}{6}$. Інших критичних точок немає. Для встановлення характеру стаціонарних точок знайдемо $y''(x)$:

$$y''(x) = -2\sin 2x - \cos x.$$

Тоді

$$y''\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -2\sin(-\pi) - \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0,$$

$$y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0, \quad y''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0.$$

У точці $x_2 = \frac{\pi}{6}$ функція досягає максимуму, в точці $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ — мінімуму. При цьому

$$y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad y_{\min} = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Для визначення характеру критичної точки $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ знайдемо $y'''(x)$:

$$y'''(x) = -4\cos 2x + \sin x;$$

підставимо значення $x_1 = -\frac{\pi}{2}$: $y'''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3 \neq 0$. У точці $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ перша відмінна від нуля похідна третього (непарного) порядку, тому в цій критичній точці немає екстремуму.

Функція зростає на проміжках $(-\pi, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \pi)$ та спадає на інтервалі $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$.

4) Знайдемо критичні на перегін точки:

$$y''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -2\sin 2x - \cos x = 0, \;\Leftrightarrow\; \cos x(1 + 4\sin x) = 0.$$

З останнього рівняння одержуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 1 + 4\sin x = 0.\end{array}\right.$$

Знову знайдемо лише ті з коренів рівнянь, які містяться у відрізку $[-\pi, \pi]$ — це точки $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_4 = \frac{\pi}{2}$, $x_5 = \arcsin(-\frac{1}{4}) \approx -\frac{\pi}{12}$, $x_6 \approx -\frac{11\pi}{12}$. Усі ці точки є точками перегину, оскільки друга похідна змінює знак при переході через кожну з них.

5) Дослідимо задану функцію на наявність похилих асимптот:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{x} + \frac{\cos x}{x}\right) = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \cos x\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\sin 2x + \lim_{x\to\pm\infty}\cos x,$$

останні границі, як добре відомо, не існують. З врахуванням п.1 бачимо, що графік функції $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$ не має асимптот.

6) Обчислимо значення функції на кінцях проміжку $(-\pi, \pi)$:

$$y(-\pi) = y(\pi) = -1.$$

Графік функції проходить через точки з координатами $(-\pi, -1)$ й $(\pi, -1)$. Знайдемо точки перетину графіка функції з вісями координат. При $x = 0$ $y = 1$. Графік функції проходить через точку $(0, 1)$. Нехай $y = 0$, тоді

$$\frac{1}{2}\sin 2x + \cos = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos x(1 + \sin x) = 0,$$

що еквівалентно сукупності

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 1 + \sin x = 0.\end{array}\right.$$

Легко бачити, що $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Графік функції перетинає вісь Ox в точках з координатами $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ і $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

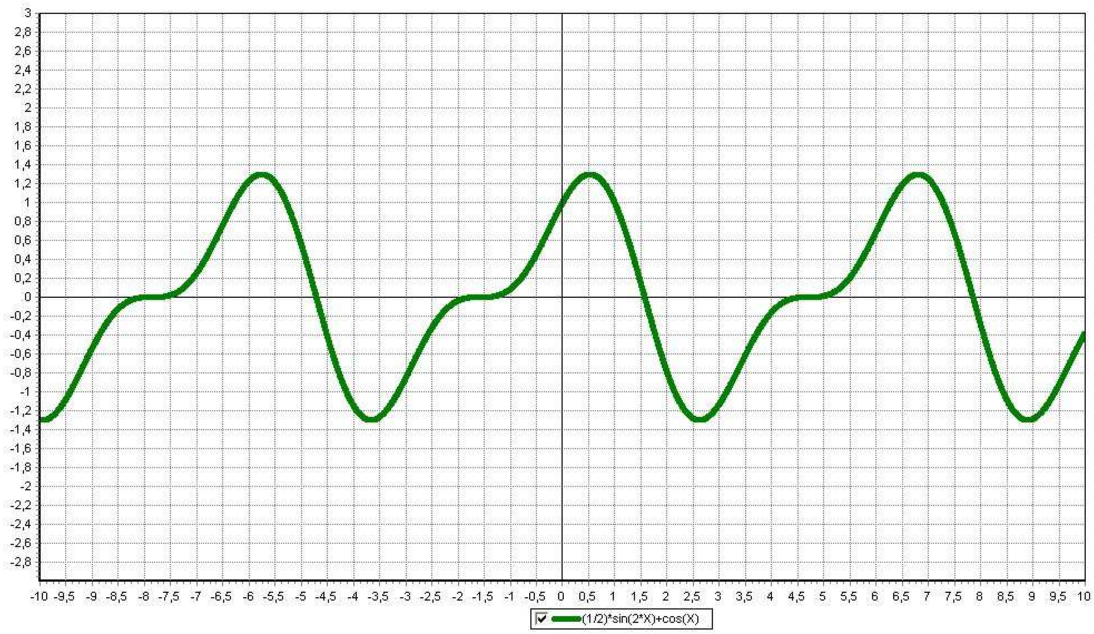


Рис. 13.7: графік функції $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$

Графік зображено на рис. 13.7. ■

б) $y = \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

□

1) Оскільки $2 + \cos x \neq 0 \ \ \forall x$, то $D_y = \mathbb{R}$. Функція неперервна для всіх значень аргументу x. Вертикальних асимптот графік не має.

2) Функція непарна, оскільки область визначення симетрична відносно початку координат і

$$\frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{2+\cos x}.$$

Функція періодична, основний період $T = 2\pi$.

У зв'язку з періодичністю, подальші дослідження проведемо на відрізку $[0, 2\pi]$.

3)

$$y' = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}.$$

Похідна існує на всій D_y, $y' = 0$ в точках $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{4\pi}{3}$.

Методом пробних точок з'ясовуємо, що $y' > 0$ на інтервалах $(0, \frac{2\pi}{3})$, $(\frac{4\pi}{3}, 2\pi)$ — графік функції зростає. На інтервалі $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ $y' < 0$ — графік функції спадає. Точка максимуму має координати $(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, а точка мінімуму — $(\frac{4\pi}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3})$.

4) Точки перегину, інтервали опуклості графіка функції.

$$y'' = \frac{2\sin x(\cos x - 1)}{(2 + \cos x)^3}.$$

Друга похідна існує на всій осі. Критичні на перегин точки: $x_3 = 0$, $x_4 = \pi$, $x_5 = 2\pi$. При цьому $y'' < 0$, якщо $x \in (0, \pi)$ і $y'' > 0$, якщо $x \in (\pi, 2\pi)$. Графік функції опуклий вгору на інтервалі $(0, \pi)$ і вниз, якщо $x \in (\pi, 2\pi)$.

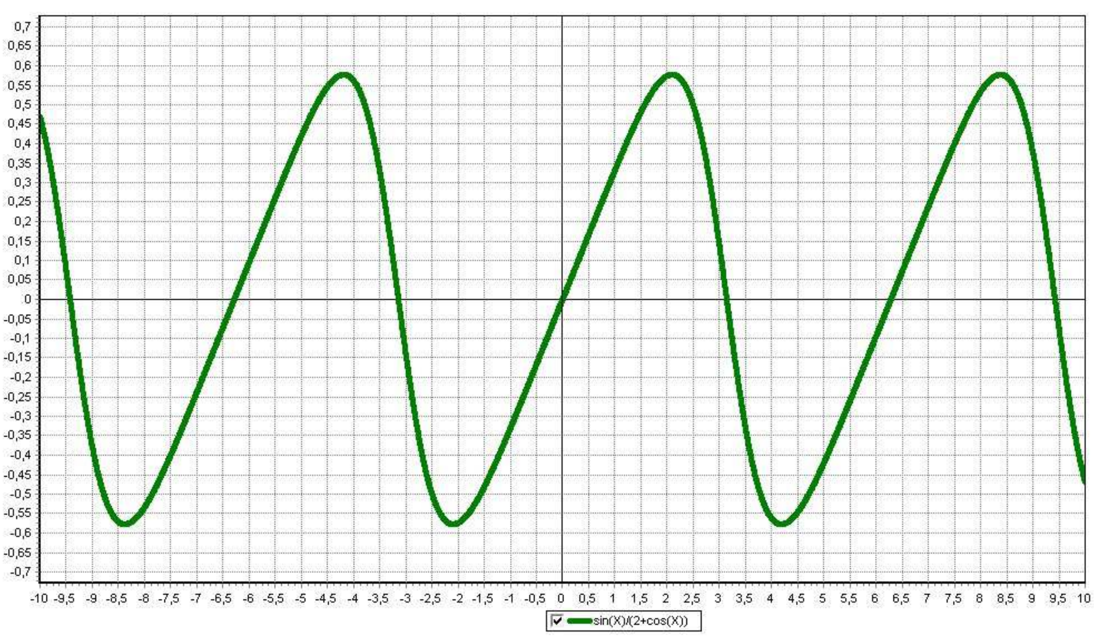


Рис. 13.8: графік функції $y = \frac{\sin x}{2+\cos x}$

5) Знайдемо рівняння похилих асимптот.

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{(2 + \cos x)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2 + \cos x}.$$

Ці границі не існують, оскільки не існують границі $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\cos x$. Таким чином, графік функції не має асимптот.

6) На кінцях відрізку $[0, 2\pi]$ функція дорівнює нулю.

7) Нулі функції: $(k\pi; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Користуючись проведеними дослідженнями, креслимо графік функції $y = \frac{\sin x}{2+\cos x}$ (рис. 13.8). ■

13.3. *Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:*

а) $y = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}$.

□

1) Область визначення: $D_y = (0, \infty)$. Зрозуміло, що на цьому ж проміжку функція неперервна. Оскільки

$$\lim_{x\to 0+} 3\ln x = -\infty \quad \text{і} \quad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

то

$$\lim_{x\to 0+}\frac{3\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$$

і пряма $x = 0$ — вертикальна асимптота.

2) Область визначення не симетрична відносно нуля, отже, функція загального вигляду. Функція неперіодична.

3)

$$y' = 3\cdot\frac{1-\frac{1}{2}\ln x}{x^{3/2}}.$$

Зрозуміло, що точка $x_1 = e^2$ є стаціонарною, а точка $x_2 = 0$, в якій похідна не існує, не належить до області визначення функції. Функція зростає при $x \in (0, e^2)$ та спадає при $x \in (e^2, \infty)$. Точка $x_1 = e^2$ є точкою максимуму, $f_{\max} = \frac{6}{e}$.

4)

$$y''(x) = 3\cdot\frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{x}x^{3/2}-\frac{3}{2}x^{1/2}(1-\frac{1}{2}\ln x)}{x^3} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{8-3\ln x}{x^{5/2}}.$$

$y''(x) = 0$ при $x = e^{8/3}$. Інших критичних на перегин точок не існує. При $0 < x < e^{8/3}$ крива обернена опуклістю вниз, а при $x > e^{8/3}$ крива обернена опуклістю вгору. Точка $x = e^{8/3}$ — точка перегину.

5)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(3\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = 3\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Таким чином, графік функції поступово наближається до вісі абсцис.

Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(3\ln x)'}{(x\sqrt{x})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x\sqrt{x}} = 0, \quad b = 0.$$

Бачимо, що похила асимптота вироджується в горизонтальну $y = 0$.

6) Графік функції перетинає вісь абсцис в точці $(1;0)$, а вісь ординат не перетинає.

Графік досліджуваної функції зображено на рис. 13.9. ■

б) $y = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

□

1) Функція не визначена при $x = -1$ та $x = 1$. Область визначення складається з трьох інтервалів: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm 1} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \mp\infty,$$

то прямі $x = -1$ і $x = 1$ — вертикальні асимптоти.

2) Функція непарна, оскільки область визначення симетрична відносно нуля і

$$y(-x) = \ln\left|\frac{-x-1}{-x+1}\right| = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-1} = -y(x).$$

Рис. 13.9: графік функції $y = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}}$

Зрозуміло, що функція неперіодична.

3) Похідна функції

$$y' = \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{2}{x^2-1}$$

не дорівнює нулю в жодній точці. Похідна не існує при $x_1 = -1$ та $x_2 = 1$, але в цих точках не визначена і сама функція. Отже, дана функція екстремумів не має.

При $x < -1$ $y' > 0$, при $-1 < x < 1$ $y' < 0$, при $x > 1$ $y' > 0$, звідки випливає, що функція зростає в інтервалі $(-\infty, -1)$, спадає в інтервалі $(-1, 1)$ і зростає в інтервалі $(1, \infty)$.

4) Друга похідна

$$y'' = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

обертається в нуль при $x = 0$ та не існує при $x = \pm 1 \notin D_y$. При $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ $y'' > 0$, коли $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, то $y'' < 0$, отже, $x = 0$ — точка перегину.

5)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0.$$

Далі відшукаємо похилі асимптоти.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - 0 \cdot x\right) = 0.$$

Таким чином, графік кривої має горизонтальну асимптоту $y = 0$.

6) Для знаходження точок перетину графіка функції з осями координат необхідно розв'язати системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|; \\ y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|; \\ x = 0. \end{cases}$$

Обидві системи мають одне і теж саме розв'язання: $x = 0$, $y = 0$.

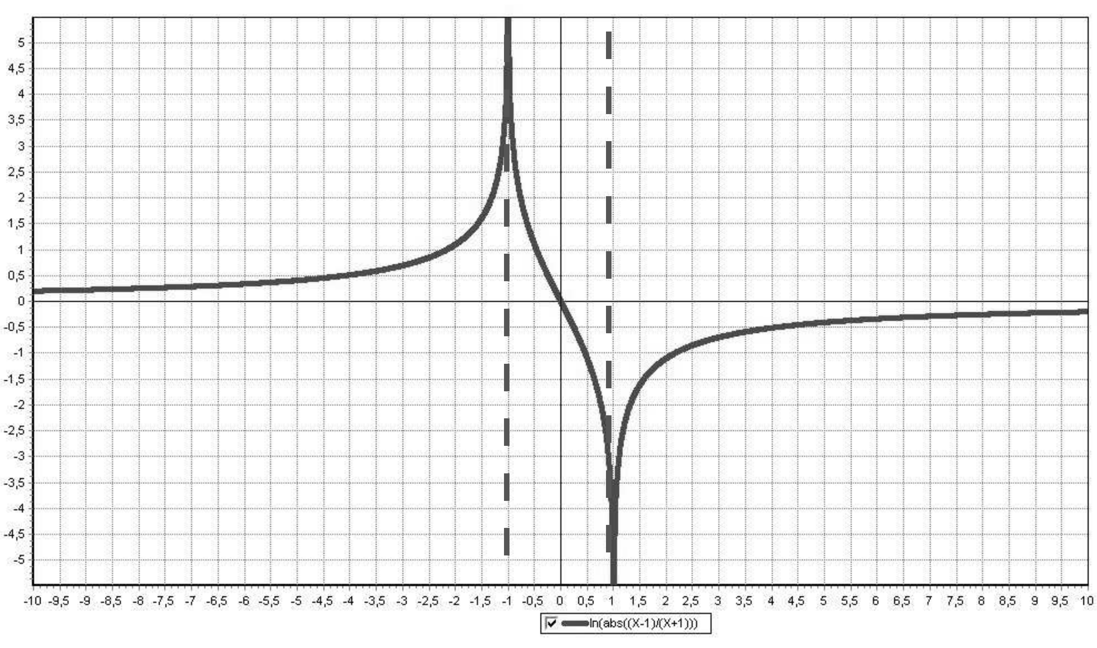


Рис. 13.10: графік функції $y = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

Графік заданої функції наведено на рис. 13.10. ■

13.4.* *Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:*

а) $y = x - 2\operatorname{arctg} x$.

□

1) Область визначення функції $D_y = \mathbb{R}$. Функція неперервна для всіх $x \in D_y$, вертикальних асимптот не має.

2) Функція непарна, оскільки область визначення симетрична відносно нуля і

$$y(-x) = -x - 2\operatorname{arctg}(-x) = -(x - 2\operatorname{arctg} x) = -y(x).$$

Функція неперіодична.

3) Похідна функції

$$y' = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

існує при всіх x. $y' = 0$, якщо $x = \pm 1$. Тому область визначення функції розбивається стаціонарними точками на інтервали $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ й $(1, \infty)$.

Оскільки $y' > 0$ $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, то на цих інтервалах функція зростає. Якщо ж $x \in (-1, 1)$, то $y' < 0$ і, відповідно, функція спадає на цьому інтервалі. Локальний максимум функція досягає за умови $x = -1$, мінімум — за умови $x = 1$. Знайдемо координати точок екстремуму: $y(-1) = \frac{\pi}{2} - 1$, $y(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$. Тому точка $(-1, \frac{\pi}{2} - 1)$ є точкою максимуму, $(1, 1 - \frac{\pi}{2})$ — точкою мінімуму.

4) Похідна другого порядку

$$y'' = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

визначена на всій дійсній осі, перетворюється на нуль в точці $x = 0$. При $x < 0$ $y'' < 0$ — графік обернений опуклістю вгору, при $x > 0$

$y'' > 0$ — графік функції обернений опуклістю вниз. Бачимо, що точка з координатами $(0, 0)$ — точка перегину.

Результати досліджень пунктів 3 та 4 зведемо у наступну таблицю:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
y'	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$
y''	$-$	-2	$-$	0	$+$	2	$+$
Висн.	зрост.	max	спадає		спадає	min	зрост.
Висн.	оп. вгору		оп. вгору	т. пер.	оп. вниз		оп. вниз

5) Оскільки функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ обмежена, то досліджувана функція $y = x - 2\operatorname{arctg} x$ прямує до нескінченності лише за умови $x \to \pm\infty$, тобто

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x - 2\operatorname{arctg} x) = \pm\infty.$$

Складемо рівняння похилих асимптот.

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x - 2\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

$$b_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty}(x - 2\operatorname{arctg} x - x) = \mp\pi.$$

Таким чином, прямі $y = x + \pi$ та $y = x - \pi$ — похилі асимптоти заданої функції.

6) Зрозуміло, що графік заданої функції перетинає вісі координат в точці (0,0). Для відшукання інших точок перетину графіка з вісями скористаємося графічним методом: побудуємо графіки функцій $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = x/2$. З рисунка 13.11 бачимо, що корені рівняння

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} x$$

наближено дорівнюють числам $\pm 2{,}4$.

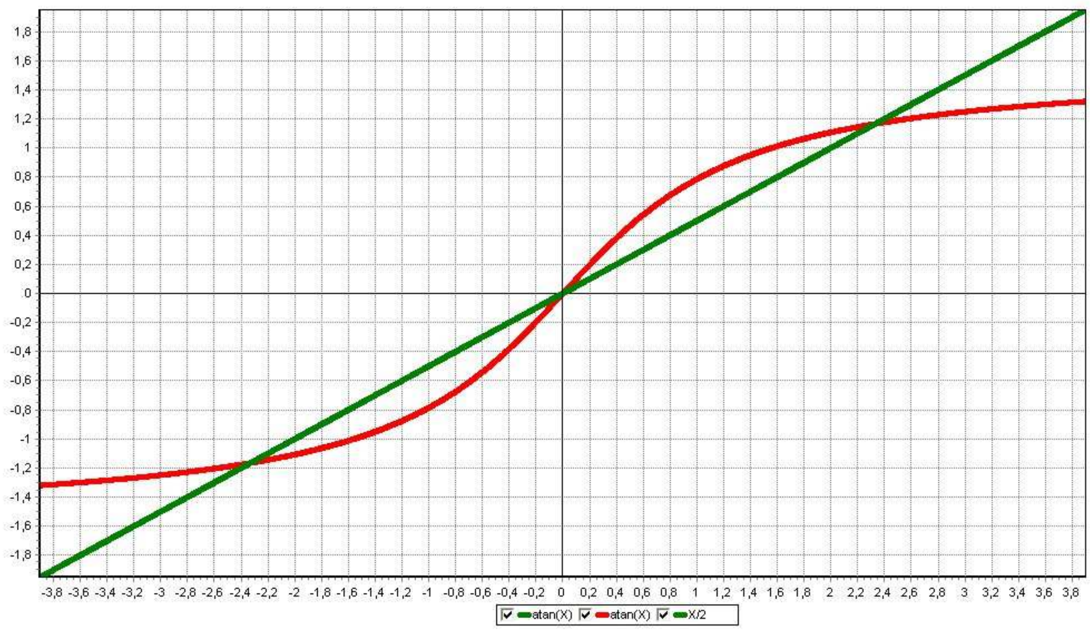


Рис. 13.11: графіки функцій $y = x/2$ і $y = \operatorname{arctg} x$

Рис. 13.12: графік функції $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$

Використовуючи встановлені вище особливості заданої функції $y = x - 2\operatorname{arctg} x$, креслимо її графік (рис. 13.12). ■

б) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

□

1) Для того, щоб знайти область визначення заданої функції, треба розв'язати нерівність

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

Оскільки при всіх x $|2x| \leq 1+x^2$, то нерівність справджується для будь-яких x — функція визначена та неперервна всюди. Вертикальних асимптот немає.

2)

$$f(-x) = \arcsin \frac{-2x}{1+(-x)^2} = -\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -f(x),$$

отже, функція непарна. Задана функція неперіодична.

3) Знайдемо похідну

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & -1 < x < 1; \\ -\frac{2}{1+x^2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

Критичними точками виступають точки $x = -1$, $x = 1$, у яких похідна не визначена. Маємо

$$\lim_{x \to 1-0} f'(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{2}{1+x^2} = 1,$$

$$\lim_{x \to 1+0} f'(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{-2}{1+x^2} = -1.$$

Тому, в точці $x = 1$ функція досягає максимуму, причому, оскільки похідна при $x = 1$ не визначена, то точка максимуму має характер загострення. У силу непарності функції при $x = -1$ маємо мінімум (точка із загостренням). $f(x)$ зростає на інтервалі $(-1, 1)$ і спадає на інтервалах $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$.

4) Друга похідна

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(1+x^2)^2}, & -1 < x < 1; \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & |x| > 1 \end{cases}$$

перетворюється в нуль при $x = 0$ та не існує в точках $x = \pm 1$. На проміжку $(0, 1)$ $f''(x) < 0$ і тому графік обернений опуклістю вгору. На проміжку $(1, +\infty)$ $f''(x) > 0$ — графік обернений опуклістю вниз. У силу непарності функції в проміжку $(-\infty, -1)$ графік обернений опуклістю вгору, а в інтервалі $(-1, 0)$ — вниз. Точка перегину має координати $(0, 0)$.

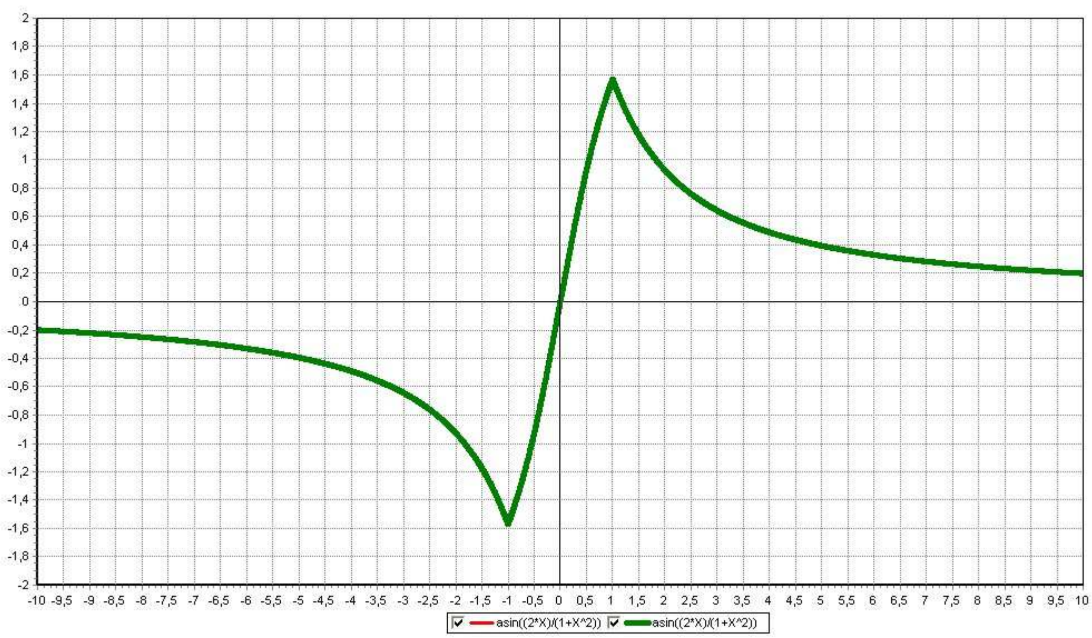


Рис. 13.13: графік функції $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

5) Зрозуміло, що

$$\lim_{x \to \pm\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \arcsin 0 = 0.$$

Тому горизонтальною асимптотою є вісь абсцис. Інших асимптот графік функції не має.

6) При $x = 0$ маємо $y = 0$. Інших точок перетину з вісями координат графік не має.

Користуючись вищезазначеним, креслимо графік функції — рис. 13.13. ■

13.5.* *Провести повне дослідження та побудувати графік функції, яка задана параметрично:* $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

□

1) Функції $x(t)$ та $y(t)$ визначені й неперервні при $t \in (-\infty, \infty)$. Функція $x(t)$ не є однозначною. При цьому $x \in (-\infty, 1]$, оскільки $x(t)$ — квадратична функція і $x(t) = -(t-1)^2 + 1$. У той же час $y(t) \in (-\infty, \infty)$. Таким чином, функція $y(x)$ (як функція від аргументу x) має область визначення $D_y = (-\infty, 1]$.

2) $x'_t = 2 - 2t$, $y'_t = 3 - 3t^2$ і

$$y'_x = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-t^2}{1-t}.$$

$y'_x(x) = 0$ при $t_1 = -1$ (при цьому $x_1 = -3$), а при $t_2 = 1$ ($x_2 = 1$) має усувний розрив і $\lim\limits_{t \to 1} y'_x = 3$.

3) Похідна другого порядку функції $y(x)$:

$$y''_{xx}(x) = \frac{3(1-t^2)^2}{4(1-t)^3}.$$

Бачимо, що $y''_{xx}(x)$ дорівнює нулю та має розрив у тих же точках

$t_1 = -1$ і $t_2 = 1$, що і похідна першого порядку. Складемо таблицю:

t	$(-\infty,-1)$	-1	(-1, 1)	1	$(1,\infty)$
$x(t)$	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(-\infty,1)$
$y(t)$	$(-2,\infty)$	-2	$(-2,2)$	2	$(-\infty,2)$
$y'_x(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
$y''_{xx}(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
Висновок	спадає	min	зростає	max	спадає

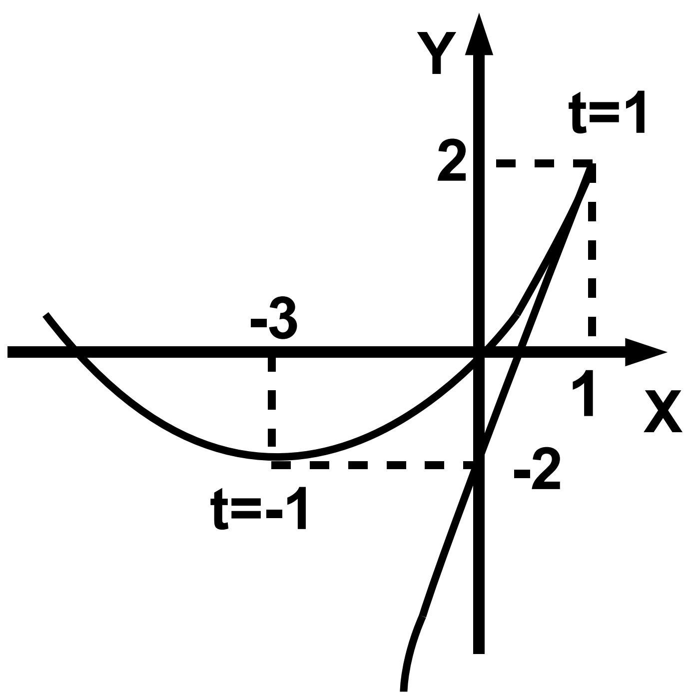


Рис. 13.14: графік функції $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$

Якщо x зростає від $-\infty$ до 1, то графік функції $y = y(x)$ обернений опуклістю вниз, якщо x спадає від 1 до $-\infty$, то опуклість обернена вгору; $(1,2)$ — точка перегину.

4) Зрозуміло, що при $t \to \pm\infty$

$$x(t) \to -\infty, \quad y(t) \to \mp\infty, \quad \frac{y(t)}{x(t)} \to \pm\infty,$$

тому графік функції $y(x)$ асимптот не має.

5) $x = 0$ за умов $t = 0$ і $t = 2$, при цьому $y(0) = 0$ і $y(2) = -2$. $y = 0$ у точках $t = 0$ та $t = \pm\sqrt{3}$, відповідно $x(\pm\sqrt{3}) = \pm 2\sqrt{3} - 3$. Бачимо, що графік функції $y(x)$ перетинає вісі координат у наступних точках: $(0, 0)$; $(0, -2)$; $(-2\sqrt{3} - 3, 0)$; $(2\sqrt{3} - 3, 0)$.

Користуючись одержаними відомостями, будуємо графік (рис. 13.14). ■

13.6. *На рисунку 13.15 зображено графік функції $f(x)$. Зобразити схематично графік її похідної.*

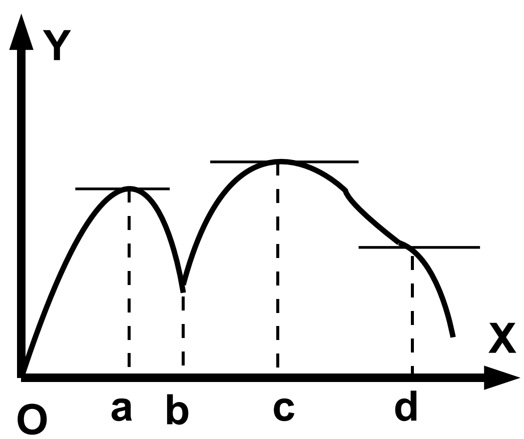


Рис. 13.15: графік функції $f(x)$

□ На відрізку $[0, a]$ функція зростає. Тому її похідна на цьому відрізку додатна. При цьому, оскільки графік функції обернений опуклістю вниз, то похідна при $0 \leq x \leq a$ спадає від значення $f'(0)$ до нуля. Оскільки дотична до графіка функції при $x = 0$ утворює кут $\alpha \approx \frac{\pi}{4}$ з віссю абсцис, то $f'(0) \approx \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

На проміжку (a, b) функція спадає, а тому її похідна від'ємна. При цьому в точці $x = b$ похідна не існує, а $\lim\limits_{x \to b-0} f'(x) = -\infty$. Тому для $x = b$ графік функції $y = f'(x)$ має вертикальну асимптоту.

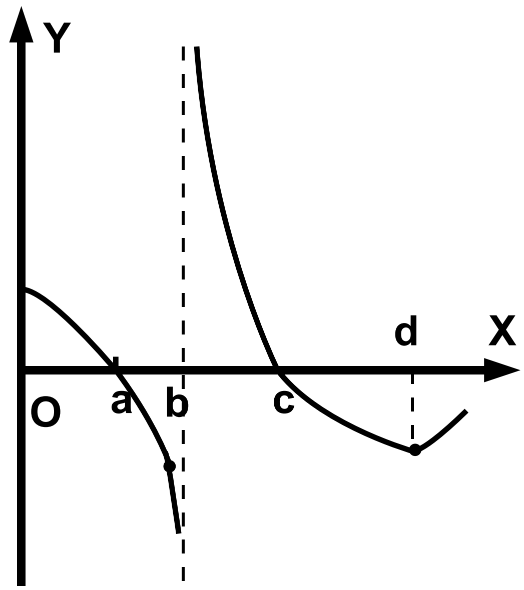


Рис. 13.16: графік функції $f'(x)$

Якщо $x \to b+0$, то $\lim\limits_{x \to b+0} f'(x) = +\infty$.

На проміжку (b, c) похідна спадає від $+\infty$ до нуля. Похідна додатна на цьому проміжку, оскільки функція $f(x)$ зростає при $b < x < c$.

На проміжку (c, d) похідна від'ємна, оскільки на цьому проміжку функція $f(x)$ спадає. Точкою мінімуму є точка $x = d$, яка відповідає точці перегину графіка функції $f(x)$.

Схематичний графік похідної функції $f(x)$ зображено на рисунку 13.16. ■

13.2 Завдання для самостійної роботи

13.7. *Побудувати графіки наступних раціональних функцій:*

а) $y = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$; **б)** $y = 4x^2 - x^6 + \frac{1}{x^2}$;

в) $y = \frac{1-x^3}{x^2}$; **г)** $y = \frac{(x-1)^4}{x(x^2-4)}$.

13.8. *Побудувати графіки наступних ірраціональних функцій:*

а) $y=(x-3)\sqrt{x}$; **б)** $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$;

в) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; **г)** $y=\frac{x^2+1-\sqrt{x^4+6x^2+1}}{x+2}$.

13.9. *Побудувати графіки наступних тригонометричних функцій:*

а) $y=\sin^2 x+\cos x$; **б)** $y=\cos 3x-3\cos x$;

в) $y=\frac{1}{\sin x+\cos x}$; **г)** $y=\sin^3 x+\cos^3 x$.

13.10. *Побудувати графіки наступних показникових та логарифмічних функцій:*

а) $y=\sqrt[3]{x^2}e^{-x}$; **б)** $y=e^{\frac{1-x^2}{x^4}}$;

в) $y=x^3\ln^2 x$; **г)** $y=\ln(x-\frac{1}{x})$.

13.11.* *Побудувати графіки наступних складених функцій:*

а) $y=\ln\sin x$; **б)** $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-1}$;

в) $y=e^{-2x}\sin 3x$; **г)** $y=x\arcsin\frac{x}{1-x^2}$.

13.12. *За графіком функції з'ясувати вигляд графіків її першої та другої похідної:*

а) рис. 13.17; **б)** рис. 13.18.

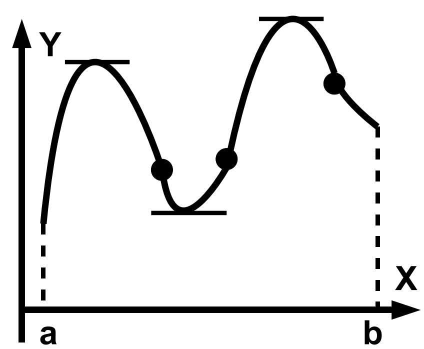


Рис. 13.17: до задачі 13.12 а)

13.13. *З'ясувати вигляд графіка функції за даним графіком її похідної:*

а) рис. 13.19; **б)** рис. 13.20.

13.14.* *Зобразити графік функції $f(x)$ в околі точки $x=a$, якщо:* $a=1,\ f(1)=2,\ \lim\limits_{x\to 1-0} f'(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 1+0} f'(x)=+\infty.$

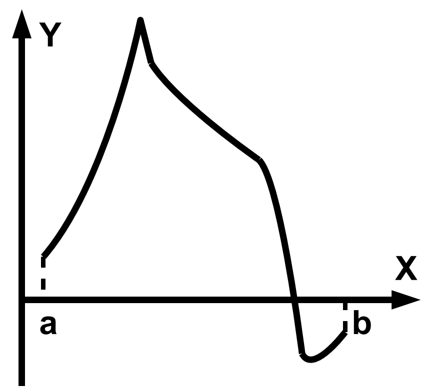


Рис. 13.18: до задачі 13.12 б)

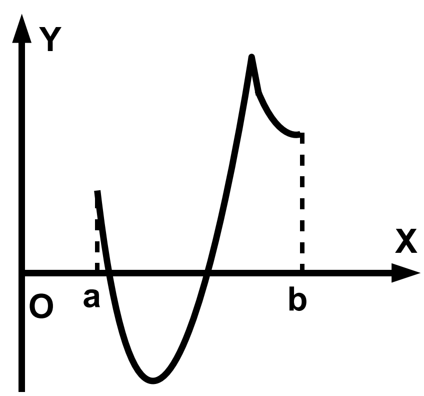


Рис. 13.19: до задачі 13.13 а)

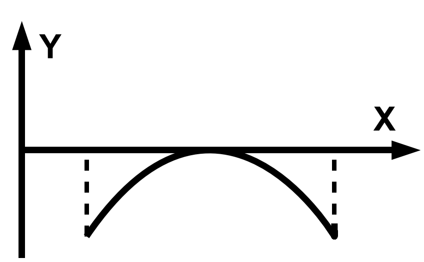


Рис. 13.20: до задачі 13.13 б)

ДОДАТОК А

Індивідуальні домашні завдання I

1. Знайти похідну заданої функції, користуючись означенням:

1. $y=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$	2. $y=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$
3. $y=\sin^2\frac{x}{2}$	4. $y=\operatorname{tg}x-x^2$
5. $y=\ln(2x-1)^2$	6. $y=\ln\sqrt{x^2+1}$
7. $y=\arcsin\sqrt{x}$	8. $y=\cos(1-x)^2$
9. $y=3^{\sin x}$	10. $y=e^{x^2+3x+2}$

2. Знайти $\frac{dy}{dx}$:

1. $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$	2. $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}$
3. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	4. $y=x\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$
5. $y=\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$	6. $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$
7. $y=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$	8. $y=5\sqrt{x^2+\sqrt{x}+\frac{1}{x}}$
9. $y=\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2$	10. $y=\sqrt[3]{\frac{x^3+1}{3x-2}}$

3. Знайти $\frac{dy}{dx}$:

1. $y = \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$
2. $y = \cos 2x \sin^2 x$
3. $y = \sin^3 5x \cos^5 3x$
4. $y = e^{\cos^2 3x}$
5. $y = e^{\operatorname{tg} x} \cos x$
6. $y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$
7. $y = e^{\cos x} \sin^2 x$
8. $y = \ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$
9. $y = \frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$
10. $y = \frac{e^x}{\cos^2 x}$

4. Знайти $\frac{dy}{dx}$:

1. $y = 5^{\operatorname{arctg}^2 x}$
2. $y = \ln \operatorname{arctg} x$
3. $y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}$
4. $y = \ln \arcsin x$
5. $y = 2^{\arcsin 3x}$
6. $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$
7. $y = \ln(x^2 + \sqrt{1 + x^4})$
8. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $y = \operatorname{arctg} e^{3x}$
10. $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$

5. Знайти $\frac{dy}{dx}$:

1. $y = x^{2/\ln^2 x}$
2. $y = \sqrt[x]{x}$
3. $y = x^{\ln x}$
4. $y = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$
5. $y = (\cos 3x)^x$
6. $y = (x + x^2)^x$
7. $y = x^{\operatorname{arctg} x}$
8. $y = (\sin 3x)^x$
9. $y = x^{\sqrt{x+1}}$
10. $y = x^{\operatorname{tg} x}$

6. Знайти $\frac{dy}{dx}$:

1. $e^{x+y} - xy = 0$
2. $e^{xy} - (x + 3y) = 0$
3. $y \sin(x + y) - x = 0$
4. $y \operatorname{tg}(x + y) - xy = 0$
5. $\operatorname{ctg}(2x - 3y) + (2x - 3y)^2 = 0$
6. $\operatorname{tg}(x + 2y) - 3x + y = 0$

7. $\ln(x+y) - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = 0$

8. $(x+y)^2 + (x-3y)^2 = 10^{10}$

9. $\ln\frac{x}{y} - x + 2y = 0$

10. $\sin(2x+y) + 2x - 3y = 0$

7. Знайти $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо

1. $y = x\sqrt{1+x^2}$	2. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $y = \frac{\ln x}{x}$	4. $y = x^2 \ln x$
5. $y = xe^{-x}$	6. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$
7. $y = e^x \cos x$	8. $y = e^{-x}\sin x$
9. $y = xe^{1/x}$	10. $y = xe^{-x^2}$

8. Знайти $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо

1. $x = 2t - t^2;\ \ y = 3t - t^3$

2. $x = 3\cos t;\ \ y = 4\sin^2 t$

3. $x = 2\cos^3 t;\ \ y = 4\sin^3 t$

4. $x = \cos t + t\sin t;\ \ y = \sin t - t\cos t$

5. $x = 2\cos t - \cos 2t;\ \ y = 2\sin t - \sin 2t$

6. $x = 2t^3 + t;\ \ y = \ln t$

7. $x = 3t - t^3;\ \ y = 3t^2$

8. $x = 2t - t^3;\ \ y = 2t^2$

9. $x = \operatorname{ctg} t;\ \ y = \frac{1}{\cos^2 t}$

10. $x = \ln t;\ \ y = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$

9. Продиференціювати задану функцію:

1. $y = \begin{cases} x+1, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 2; \\ \frac{1}{2}x+3, & x > 2. \end{cases}$ 2. $y = \begin{cases} -x, & x \le 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \frac{\pi}{4}; \\ 2, & x \ge \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

3. $y = \begin{cases} x+1, & x < 0; \\ x^2+1, & 0 \le x < 1; \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$ 4. $y = \begin{cases} x^2+1, & x < 0; \\ 1-x, & 0 \le x \le 2; \\ 2, & x > 2. \end{cases}$

5. $y = \begin{cases} -2x, & x \le 0; \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 4; \\ 3, & x \ge 4. \end{cases}$ 6. $y = \begin{cases} x, & x \le 0; \\ \operatorname{ctg} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \ge \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

7. $y = \begin{cases} x^2, & x \le 0; \\ x, & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$ 8. $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \le 0; \\ 2, & 0 < x \le 2; \\ x, & x > 2. \end{cases}$

9. $y = \begin{cases} -x, & x \le 0; \\ \sin x, & 0 < x \le \pi; \\ x-2, & x > \pi. \end{cases}$ 10. $y = \begin{cases} 2x, & x \le 0; \\ x^2+1, & 0 < x \le 1; \\ 2, & x > 1. \end{cases}$

10. Розв'язати наступні задачі:

1. Довести, що еліпс $3x^2 + 4y^2 = 48$ і гіпербола $3x^2 - y^2 = 3$ перетинаються під прямим кутом.

2. Під яким кутом перетинаються задані криві
$x^2 - y^2 = 7$ та $x^2 + y^2 = 25$?

3. На параболі $y^2 = 6x$ знайти точку, дотична до якої була б перпендикулярна прямій $4x + 3y - 12 = 0$.

4. Знайти кут між дотичними, проведеними до кола $x^2+y^2 = 25$ в точках $(4; 3)$ і $(3; -4)$.

5. На колі $x^2 + y^2 = 169$ знайти точки, дотичні в яких пара-

лельні прямій $y = \frac{5}{12}x$.

6. Знайти кут між дотичними, проведеними до гіперболи $x^2 - 2y^2 = 8$ в точці, абсциса якої дорівнює 4, а ордината додатна.

7. Задані криві $y = x^2$ та $y = x^2 - 2x + 4$. Знайти кут між дотичними, проведеними до цих кривих у точці їх перетину.

8. Скласти рівняння дотичних й нормалей до гіперболи $x^2 - y^2 = 12$ в точках, ордината яких дорівнює 2.

9. На кривій $y = \cos x$ знайти точки, у яких дотична паралельна вісі Ox.

10. Під яким кутом перетинаються криві $y = \operatorname{tg} x$ й $y = \cos x$ при $x \in (-\pi/2; \pi/2)$?

11. Обчислити наближено:

1. $(0{,}998)^3$	2. $\frac{1}{(1{,}06)^2}$	3. $\ln 1{,}024$	4. $\ln(1{,}02)^3$
5. $\sqrt[8]{0{,}984}$	6. $\frac{1}{\sqrt[5]{1{,}05}}$	7. $\ln \sqrt[8]{1{,}06}$	8. $\ln \sqrt[3]{0{,}997}$
9. $\sin 60^\circ 3'$	10. $\operatorname{tg} 45^\circ 5'$		

12. Методами диференціального числення довести, що:
   1. $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$
   2. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1; 1]$
   3. $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} x$
   4. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}, x > -1$
   5. $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2, x > 0$
   6. $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}, x \in [0; 1]$
   7. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, x < 0$
   8. $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi - 2 \operatorname{arctg} x, x \geq 1$
   9. $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2}, x \in (-1; 1)$
   10. $\sin x > x - \frac{1}{6}x^3, x > 0$

13. Знайти границю за допомогою правил Лопіталя:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\operatorname{arctg} 3x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{tg} 3x\operatorname{ctg}^2 2x$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 5x$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\operatorname{tg} 3x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{5x}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}$ 9. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin x\operatorname{ctg}^2 x$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg} 2x}$

14. Знайти границю за допомогою правил Лопіталя:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)(\ln(2x-3)-\ln(2x+1))$
2. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{2x/(x-3)}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)(\ln(x+1)-\ln(x-2))$
4. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{2x/(x^2-4)}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)(\ln(3-2x)-\ln(4-2x))$
6. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{x/(x-2)}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)(\ln(1-3x)-\ln(2-3x))$
8. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{2x/(x-1)}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)(\ln(x+3)-\ln(x+4))$
10. $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x/(3x-3)}$

15. Знайти найбільше та найменше значення функції на вказаному відрізку:

1. $f(x)=x^3-12x+7; [0;3]$ 2. $f(x)=\frac{x-3}{x^2+7}; [2;8]$
3. $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos x; [0;\frac{\pi}{2}]$ 4. $f(x)=x^3-12x+7; [-3;0]$
5. $f(x)=\frac{x-2}{x^2+5}; [2;8]$ 6. $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x; [0;\frac{\pi}{2}]$
7. $f(x)=\frac{x-3}{x^2+7}; [-2;5]$ 8. $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos x; [\frac{\pi}{2};\pi]$
9. $f(x)=\frac{x-2}{x^2+5}; [-2;3]$ 10. $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x; [-\frac{\pi}{2};0]$

16. Розв'язати текстову задачу:

1. Виготовити прямокутну коробку (без кришки), відношення сторін основи якої дорівнює k, заданої місткості V з найменшими витратами матеріалу.

2. З усіх прямокутників, які мають даний периметр, знайти найбільший за площею.

3. Переконатися, що серед всіх рівнобедрених трикутників, які вписані в коло, найбільший периметр має рівносторонній трикутник.

4. Розділити число 6 на дві частини так, щоб сума потроєної однієї частини та куба іншої частини була найменшою.

5. Знайти конус об'єму V з найменшою повною поверхнею.

6. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат, а повна поверхня дорівнює S. Визначити розміри цього паралелепіпеда при яких він має найбільший об'єм.

7. Визначити розміри конуса найбільшого об'єму, при умові, що його бічна поверхня дорівнює S.

8. З усіх прямокутних трикутників із заданою площею S знайти такий, гіпотенуза якого має найменше значення.

9. В коло радіуса r вписано прямокутник. Якими повинні бути розміри прямокутника для того, щоб його площа була найбільшою?

10. З усіх рівнобедрених трикутників, які мають даний периметр, знайти найбільший за площею.

17. Розв'язати текстову задачу:

1. З усіх прямокутників із заданою площею S знайти такий, периметр, якого має найменше значення.

2. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює $2p$. Якими повинні бути його сторони для того, щоб об'єм тіла, яке утворюється обертанням цього трикутника навколо його основи, був найбільшим?

3. Розділити число 12 на дві частини таким чином, щоб сума їх квадратів була найменшою.

4. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c. Якими повинні бути катети для того, щоб периметр трикутника був найбільшим?

5. З квадратної заготівки товщиною d вирізають квадрати в кожному куті. Якого розміру повинні бути ці квадрати для того, щоб фігуру, яка залишилася, зігнути в коробку найбільшої місткості?

6. Зі всіх трикутників з однаковими основами та одним й тим же протилежним кутом при вершині знайти найбільший за площею.

7. Визначити розміри конуса з найменшою боковою поверхнею за умовою, що його об'єм дорівнює V.

8. Якими повинні бути висота та радіус основи конуса з твірною l для того, щоб об'єм конуса був найбільшим?

9. Знайти розміри циліндричного бака найбільшої місткості з поверхнею S.

10. Намет має форму циліндру, який завершено зверху прямим

круговим конусом. При заданій повній поверхні намету визначити його розміри таким чином, щоб об'єм був найбільшим.

18. Дослідити методами диференціального числення функції та побудувати їх графіки:

1. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+2x+3}$ 2. $f(x) = \frac{3x^2-7x-16}{x^2-x-6}$ 3. $f(x) = \frac{x^3-8}{2x^2}$
4. $f(x) = \frac{4x}{4-x^2}$ 5. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ 6. $f(x) = \frac{1}{x^2+2x}$
7. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$ 8. $f(x) = \frac{1-2x}{x^2-x-2}$ 9. $f(x) = \frac{4x^3+5}{x}$
10. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

19. Дослідити методами диференціального числення функції та побудувати їх графіки:

1. $y = x + \ln(x^2 - 4)$ 2. $y = \ln(1 + x^2)$
3. $y = x^2 e^{-x}$ 4. $y = \ln \frac{x}{x-1}$
5. $y = xe^{-x^2}$ 6. $y = (x + 4)e^{2x}$
7. $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$ 8. $y = xe^{2x-1}$
9. $y = \ln \frac{x-1}{x-2}$ 10. $y = e^{1/(2-x)}$

ДОДАТОК В

Індивідуальні домашні завдання II

1. Користуючись означенням, знайти похідні наступних функцій:

1. $y = \cos 2x$	2. $y = (5x^2 - 2x)^2$
3. $y = \sqrt{2x+1}$	4. $y = \ln 2x$
5. $y = e^{2x}$	6. $y = 3x^2 + 2x$
7. $y = \ln(3x+1)$	8. $y = \sin \frac{x}{2}$
9. $y = \sqrt{3x-3}$	10. $y = (2x-3)^2$
11. $y = \frac{2}{x}$	12. $y = e^{x+1}$
13. $y = \cos(2x+1)$	14. $y = \sin(x^2-1)$
15. $y = 2x^3 - 2x$	16. $y = 2^{x+1}$
17. $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$	18. $y = 3^{x-1}$
19. $y = \cos(x^2+2)$	20. $y = \sin(x-1)$
21. $y = 2(x+5)^2$	22. $y = \ln^2 x$
23. $y = \sin^2 x$	24. $y = \cos^2 x$
25. $y = \mathrm{tg}(x+1)$	26. $y = \lg(3x-1)$

2. Продиференціювати задані функції:
   1. $y = \sin^5 3x \cdot \arccos 2x^3$
   2. $y = 4^{-x} \ln^5(x^2+4)$
   3. $y = \sqrt{\arccos 2x} \cdot \operatorname{arctg}^3 5x$
   4. $y = \log_2(x+3) \arcsin^2 3x$
   5. $y = 4(x-7)^6 \cdot \operatorname{arcctg} 7x^3$
   6. $y = 2^{-\sin x} \cdot \arcsin 3x^5$
   7. $y = \operatorname{tg}^3 4x \cdot \operatorname{arctg} x^2$
   8. $y = \operatorname{ctg}^5 8x \cdot \arcsin \sqrt{x}$
   9. $y = \frac{\sqrt{7x^3-5x+2}}{e^{-\sin 2x}}$
   10. $y = \frac{e^{\cos 5x}}{\sqrt[3]{3x^2-4x-4}}$
   11. $y = \frac{\operatorname{ctg}^3(3x-1)}{\lg(x+5)}$
   12. $y = \frac{\lg(x^2-x+4)}{\operatorname{tg}^4(2x)}$
   13. $y = \frac{\operatorname{arctg}^4 5x}{\sin \sqrt{x}}$
   14. $y = \frac{\sqrt{\cos(3x-1)}}{\operatorname{arcctg}(x+2)}$
   15. $y = \frac{9 \operatorname{arctg}(x+7)}{(x-1)^2}$
   16. $y = \frac{\arcsin(x+5)}{2\ln(3x-10)}$
   17. $y = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} \log_2(x-3x^2)$
   18. $y = \sqrt[8]{\frac{7x-4}{7x+4}} \cos(2x^3+4)$
   19. $y = \frac{3\log_3(2x^2+5)}{\cos(3x^2+4)}$
   20. $y = \frac{\lg(x^2+4x)}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}$
   21. $y = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \log_5(3x^2+\sin x)$
   22. $y = \sqrt[9]{\frac{(x-3)^4}{(x+2)}} \cos(3x^2-\ln x)$
   23. $y = \sqrt[5]{\frac{3x^4-4x^2+2x-\pi}{x+2}} \arcsin(2x+3)$

24. $y = (\sin 3x)^{\arccos x}$

25. $y = (\cos(x+2))^{\ln x}$

26. $y = (\arccos x)^{\sin 3x}$

3. Продиференціювати задані функції:

1. $y = \frac{\sqrt{x+7}(x-3)}{(x+2)^5}$

2. $y = \frac{(x-3)^5(x+2)^2}{\sqrt{(x-1)^3}}$

3. $y = \frac{(x-3)^3\sqrt{(x+1)^5}}{(x-4)^3}$

4. $y = \frac{(x+3)\sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+1)^7}$

5. $y = \frac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+5)^5}}$

6. $y = \frac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$

7. $y = \frac{(x-3)^2\sqrt{x+7}}{(x+2)^7}$

8. $y = \frac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+3)^5}$

9. $y = \frac{(x+1)^8(x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^6}}$

10. $y = \frac{(x+2)(x-7)^4}{(3x+2)^3}$

11. $y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$

12. $y = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^6}}{(x+1)^5(x-5)^3}$

13. $y = \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)^4}}{(x+2)^5}$

14. $y = \frac{\sqrt{(x-2)^5}(x+3)^2}{(x-7)^3}$

15. $y = \frac{\sqrt[4]{x-8}(x+4)^6}{(x-1)^5}$

16. $y = \frac{\sqrt[5]{x+1}(x-3)^7}{(x+8)^4}$

17. $y = \frac{\sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2(x-6)^5}$

18. $y = \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{(x-3)^4(x-4)^3}$

19. $y = \frac{\sqrt{x+10}(x-8)^3}{(x-1)^5}$

20. $y = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+3)^7\sin^2 x}$

21. $y = \frac{(x+7)^2\ln^2 x}{\sqrt{x^2+3x-1}}$

22. $y = \frac{\sqrt{\cos^5 x}(x^2+2x-1)^n}{(x-3)^7}$

23. $y = \frac{\sqrt[n]{x^2+2}}{e^{2x}(x-1)^2}$

24. $y = \frac{\sqrt[n]{x-1}}{(x+3)^4\cos^3 x}$

25. $y = \frac{\sqrt[n]{x^3-4x^2+2x-1}(x^2-3)^5}{(2^x-1)^2}$

26. $y = \frac{\sqrt[n]{\ln(x^2+3)}\sqrt{\sin x}}{(\operatorname{tg} x-x)^4}$

4. Продиференціювати задані функції:

1. $y = \sqrt[5]{\frac{x\,(3x-1)^2\ln^3 x}{\cos x\cdot\sqrt{x^3+2}}}$

2. $y = \sqrt{\frac{x^3\ \sin 3x\,\sqrt{x^5+3}}{(2x+1)^3\ \ln^5 x}}$

3. $y = \sqrt[4]{\frac{tg^3 x\ \ \sqrt[3]{5x+2}}{x\,(x^3-1)^5\ \ln x}}$

4. $y = \sqrt[3]{\frac{x\sqrt{\ln^3 x\cdot\cos x}}{(x^7+2)^4\ \sqrt[3]{2-3x}}}$

5. $y = \sqrt[5]{\frac{x\ \cos^2 x\sqrt{x^2+5}}{(3x+1)\,\sqrt{\ln x}}}$

6. $y = \sqrt[7]{\frac{\arcsin x\sqrt{x^4+4}}{x^5(5+2x)^2\ \ln x}}$

7. $y = \sqrt{\frac{\sqrt{(x^5+5)^5\ln^5 x}}{x\sin x\,(5x+1)^3}}$

8. $y = \sqrt[6]{\frac{x\ln^5 x\sqrt{x^3+3}}{\cos x\ \ (2x^2+3)^7}}$

9. $y = \sqrt[9]{\frac{x\,(4x-1)^3\ln^2 x}{\cos x\cdot\sqrt{x^5+2}}}$

10. $y = \sqrt{\frac{x^5\ s3x\ \sqrt{x^3+5}}{(7x+1)^5\ \ln^3 x}}$

11. $y=\sqrt[7]{\dfrac{tg^2x\ \sqrt[5]{7x+7}}{x\,(x^3+5)^2\ \ln x}}$ 12. $y=\sqrt[4]{\dfrac{x\sqrt{\ln^3 x}\cdot\cos x}{(x^5+2)^5\ \sqrt[3]{8-3x}}}$

13. $y=\sqrt[6]{\dfrac{x^{\,2}\sin x\sqrt{x^2+5}}{(x+1)^3\sqrt{\ln^5 x}}}$ 14. $y=\sqrt[9]{\dfrac{arctg^2x\,\sqrt{x^3+9}}{x^7(5+3x)^4\ \ln x}}$

15. $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{(x^5+5)^3}\ln x}{xtgx\,(2x+1)^5}}$ 16. $y=\sqrt[8]{\dfrac{x\ln^3 x\sqrt{x^5+9}}{ctgx\ (2x^4+5)^5}}$

17. $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^5\,(x+1)^3\ln x}{ctgx\cdot\sqrt{x^5+3}}}$ 18. $y=\sqrt{\dfrac{\sin 5x\,\sqrt{x^3+1}}{x\,(5x+1)^5\ \ln^9 x}}$

19. $y=\sqrt[8]{\dfrac{tg^5x\ \sqrt[3]{x^3+2}}{x\,(x^2-2)^7\ \ln x}}$ 20. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x\sqrt{\ln x\cdot ctg^3x}}{(x^5+9)^8\ \sqrt[3]{2-3x}}}$

21. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x\ \ln^2 x\sqrt{x^2+5}}{(3x+1)\sqrt{\sin^3 x}}}$ 22. $y=\sqrt[7]{\dfrac{\ln^2 x\sqrt{x^4+4}}{x(5+2x)^2\,arctgx}}$

23. $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{(x^9+7)^{-3}}\ln x}{x\cos^2 x\,(7x+1)^5}}$ 24. $y=\sqrt[10]{\dfrac{x\ln^3 x\sqrt{x^7+1}}{ctgx\ (3x^3+3)^7}}$

25. $y=\sqrt[5]{\dfrac{(7x-1)^2\ln^3 x}{x\sin^3 x\cdot\sqrt{x^7+1}}}$ 26. $y=\sqrt{\dfrac{x^3\,tg5x\,\sqrt{x^9+1}}{(5x+1)^9\ \ln^4 x}}$

5. Продиференціювати задані функції:

1. $y=(\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arcctg} 3x}$
2. $y=(\cos 5x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$
3. $y=(\log_2(x+4))^{\operatorname{ctg} 7x}$
4. $y=(\frac{1}{\sin 3x})^{\operatorname{arctg}(x+2)}$
5. $y=(\ln(x+7))^{\operatorname{ctg} 1/x}$
6. $y=(\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$
7. $y=(1/\operatorname{tg}\sqrt{x+1})^{\operatorname{arctg} 2x}$
8. $y=(\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$
9. $y=(\operatorname{tg} 3x^4)^{\sqrt{x+3}}$
10. $y=(\operatorname{ctg}\sqrt{x})^{\sin(x+3)}$
11. $y=(\arccos(x+2))^{\operatorname{tg} 3x}$
12. $y=(\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg}(x+1)}$
13. $y=(\operatorname{arctg}(x+7))^{\cos 2x}$
14. $y=(\operatorname{arcctg}(x-3))^{\sin 4x}$

15. $y = (\lg(8x+3))^{\operatorname{tg} 5x}$

16. $y = (\log_2(2x+5))^{\operatorname{arctg} x}$

17 .$y = (\log_4(3x+2))^{\arcsin x}$

18. $y = (\log_{0,5}(3x+1))^{\log_2(x+3)}$

19. $y = (\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$

20. $y = (\cos 2x^7)^{\sqrt{x+3}}$

21. $y = (\arcsin(5x))^{\ln(x+3)}$

22. $y = ((x-3)^5(x+2)^3)^{\sqrt{(x-1)^3}}$

23. $y = (\sqrt[3]{(x-1)^7})^{(x+1)^5(x-5)^3}$

24. $y = (\sin 3x^2)^{\cos^2 3x}$

25. $y = (\ln(5x-4))^{\arccos^2 x}$

26. $y = (\log_5(5x-3))^{\ln(\ln x)}$

6. Дослідити функцію на диференційовність:

1. $a)$ $y = 5^{\frac{4}{x^2-1}}$ $\quad b)$ $y = (2x^2-5)/\sqrt{x^2-2}$

2. $a)$ $y = 6^{\frac{x}{x^2-9}}$ $\quad b)$ $y = \frac{3x^2-10}{\sqrt{4x^2-1}}$

3. $a)$ $y = \operatorname{arctg}\frac{3}{x-3}$ $\quad b)$ $y = \frac{8-x^2}{\sqrt{x^2-4}}$

4. $a)$ $y = \frac{1}{\lg|x|}$ $\quad b)$ $y = \frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}$

5. $a)$ $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ $\quad b)$ $y = \frac{x^2-3}{\sqrt{3x^2-2}}$

6. $a)$ $y = 3^{\frac{x}{4-x^2}}$ $\quad b)$ $y = \frac{9-10x^2}{\sqrt{4x^2-1}}$

7. $a)$ $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{|x+2|}$ $\quad b)$ $y = \frac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}$

8. $a)$ $y = \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ $\quad b)$ $y = \frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}$

9. $a)$ $y = 2^{\frac{2}{x^2-9}}$ $\quad b)$ $y = \frac{4-x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

10. $a)$ $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ $\quad b)$ $y = \frac{2x^2-3}{\sqrt{9x^2-4}}$

11. $a)$ $y = \frac{x^2}{x^2-4}$ $\quad b)$ $y = \frac{3-x^2}{\sqrt{2x^2-1}}$

12. $a)$ $y = \frac{2^x+1}{2^x-1}$ $\quad b)$ $y = \frac{x^2-6}{\sqrt{x^2-4}}$

13. $a)$ $y = 5^{\frac{1}{x^2-4}}$ $\quad b)$ $y = \frac{2-x^2}{\sqrt{4x^2-1}}$

14. $a)$ $y = 6^{\frac{x}{4-x^2}}$ $\quad b)$ $y = \frac{2x^2-3}{\sqrt{3x^2-1}}$

15. $a)$ $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{2-x}$ $b)$ $y = \frac{9-4x^2}{\sqrt{x^2-1}}$
16. $a)$ $y = \frac{1}{\ln|x-2|}$ $b)$ $y = \frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-9}}$
17. $a)$ $y = \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-2}}}$ $b)$ $y = \frac{9-x^2}{\sqrt{x^2-4}}$
18. $a)$ $y = 2^{\frac{x}{x^2-9}}$ $b)$ $y = \frac{3-x^2}{\sqrt{4x^2-1}}$
19. $a)$ $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{|x-3|}$ $b)$ $y = \frac{x^2-4}{\sqrt{9x^2-4}}$
20. $a)$ $y = \frac{2\cdot 3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{x+1}{x}}+3}$ $b)$ $y = \frac{4-x^2}{\sqrt{x^2-1}}$
21. $a)$ $y = 3^{\frac{2}{x^2-4}}$ $b)$ $y = \frac{x^2-3}{\sqrt{2x^2-1}}$
22. $a)$ $y = 5^{\frac{2}{x-3}}$ $b)$ $y = \frac{3-2x^2}{\sqrt{4x^2-1}}$
23. $a)$ $y = \frac{x^2}{9-x^2}$ $b)$ $y = \frac{x^2-1}{\sqrt{9x^2-5}}$
24. $a)$ $y = \frac{1+5^x}{1-5^x}$ $b)$ $y = \frac{7-x^2}{\sqrt{x^2-4}}$
25. $a)$ $y = 4^{\frac{1}{x^2-1}}$ $b)$ $y = \frac{3x^2-2}{\sqrt{4x^2-1}}$
26. $a)$ $y = 2^{-\frac{x}{x^2-1}}$ $b)$ $y = \frac{8-2x^2}{\sqrt{9x^2-7}}$

7. Розв'язати наступні задачі:

1. Під яким кутом перетинаються криві $y = \sin x$ та $y = \frac{1}{2}$?
2. Під яким кутом перетинаються криві $xy = 8$ та $x^2 - y^2 = 8$?
3. Під яким кутом перетинаються криві $x^2+y^2 = 8$ та $y^2 = 2x$?
4. Під яким кутом перетинаються криві $y = \frac{1}{x}$ та $y = \sqrt{x}$?
5. Під яким кутом перетинаються криві $y = x - x^3$ та $y = 5x$?
6. Під яким кутом перетинаються криві $y = 1+\sin x$ та $y = 1$?
7. Під яким кутом перетинаються криві $y = \sqrt{2}\sin x$ та $y = \sqrt{2}\cos x$?
8. Під яким кутом перетинаються криві $y = x^3$ та $y = \frac{1}{x^2}$?
9. Під яким кутом перетинаються криві $y = (x-2)^2$ та $y = -4+6x-x^2$?
10. Під яким кутом перетинаються крива $y = \frac{x-1}{1+x^2}$ та вісь абсцис?
11. З'ясувати, у якій точці (точках) кривої $y = \sin 2x$ дотична

(дотичні) складає (складають) з віссю Ox кут $\frac{\pi}{4}$.

12. З'ясувати, у якій точці (точках) кривої $y = 2x^3 - 1$ дотична (дотичні) складає (складають) з віссю Ox кут $\frac{\pi}{3}$.

13. З'ясувати, у якій точці (точках) кривої $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 7x + 9$ дотична (дотичні) складає (складають) з віссю Ox кут $-\frac{\pi}{4}$.

14. З'ясувати, у якій точці (точках) кривої $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x + 4$ дотична (дотичні) складає (складають) з віссю Ox кут $\frac{\pi}{4}$.

15. З'ясувати, у якій точці (точках) кривої $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 20x - 7$ дотична (дотичні) паралельна (паралельні) вісі Ox.

16. З'ясувати, у якій точці (точках) кривої $y = \frac{x^4}{4} - 7$ дотична паралельна прямій $y = 8x - 4$.

17. З'ясувати, у якій точці (точках) кривої $y = 3x^2 - 4x + 6$ дотична паралельна прямій $8x - y - 5 = 0$.

18. З'ясувати, у якій точці кривої $y = -3x^2 + 4x + 7$ дотична перпендикулярна прямій $x - 20y + 5 = 0$.

19. З'ясувати, у якій точці кривої $y = 5x^2 - 4x + 1$ дотична перпендикулярна прямій $x + 6y + 15 = 0$.

20. З'ясувати, у якій точці кривої $y = -x^2 + 7x + 16$ дотична паралельна прямій $y = 3x + 4$.

21. При якому значенні параметра a парабола $y = ax^3$ дотикається до кривої $y = \ln x$?

22. При якому значенні a крива $y = (ax + x^3)/4$ перетинає вісь Ox під кутом $\frac{\pi}{4}$?

23. Знайти відстань від вершини параболи $y = x^2 - 4x + 5$ до дотичної, що проведена до цієї параболи в точці перетину кривої з віссю Oy.

24. У рівнянні параболи $y = x^2 + bx + c$ визначити параметри b та c, якщо ця парабола дотикається до прямої $y = x$ в точці

$x=2$.

25. Скласти рівняння тієї нормалі до кривої $y=\ln(2x+1)$, яка перпендикулярна до бісектриси першого та третього координатних кутів.

26. На параболі $y=x^2+5x+3$ обрано дві точки з абсциссами $x=-2$ і $x=3$. У якій точці параболи дотична до неї буде паралельна січній, що проведена через ці точки?

8. Обчислити наближено:

1. $(2{,}01)^3+(2{,}01)^2$	2. $(3{,}03)^5$	3. $\cos 151^\circ$
4. $(4{,}01)^{1{,}5}$	5. $\operatorname{tg} 44^\circ$	6. $\operatorname{arcctg} 0{,}98$
7. $\lg 11$	8. $e^{2{,}01}$	9. $\operatorname{tg} 59^\circ$
10. $\operatorname{ctg} 29^\circ$	11. $\log_2 1{,}9$	12. $\lg 101$
13. $\cos 31^\circ$	14. $e^{0{,}2}$	15. $\sin 93^\circ$
16. $\sin 31^\circ$	17. $\operatorname{arctg} 0{,}54$	18. $\lg 9{,}5$
19. $\arcsin 0{,}6$	20. $\operatorname{arctg}\sqrt{0{,}97}$	21. $\ln(e^2+0{,}2)$
22. $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$	23. $\ln \operatorname{tg} 47^\circ 15'$	24. $\frac{2{,}9}{\sqrt{(2{,}9)^2+16}}$
25. $\sin(e^{0{,}25})$	26. $\arccos 1{,}021$	

9. Для заданої функції знайти $y'''(x)$:

1. $y=\sin^2 x$	2. $y=\operatorname{arctg} x$
3. $y=\ln(2+x^2)$	4. $y=e^x\cos x$
5. $y=e^x\sin 2x$	6. $y=e^{-x}\sin x$
7. $y=\sin 2x$	8. $y=(2x+1)^5$
9. $y=\ln(1+x)$	10. $y=\frac{1}{2}x^2e^x$
11. $y=\arcsin x$	12. $y=(5x-4)^5$
13. $y=x\sin x$	14. $y=x^2\ln x$
15. $y=x\sin 2x$	16. $y=x\cos 2x$

17. $y = x^4 \ln x$ 18. $y = x + \operatorname{arctg} x$
19. $y = \cos^2 x$ 20. $y = \ln(x^2 - 4)$
21. $y = x^2 \cos x$ 22. $y = x \arccos x$
23. $y = (x + 1) \ln(x + 1)$ 24. $y = 2^{x^2}$
25. $y = x \sin 2x$ 26. $y = x \operatorname{arcctg} x$

10. Знайти похідні першого та другого порядків функції, заданої неявно:

1. $y^2 = 8x + y$ 2. $x^2/5 + y^2/7 = 1$
3. $y = x + \operatorname{arctg} y$ 4. $x^2/5 + y^2/3 = 1$
5. $y^2 = 25x - 4$ 6. $\operatorname{arcctg} y = 4x + 5y$
7. $y^2 - x = \cos y$ 8. $3x + \sin y = 5y$
9. $\operatorname{tg} y = 3x + 5y$ 10. $xy = \operatorname{ctg} y$
11. $y = e^y + 4x$ 12. $\ln y - y/x = 7$
13. $y^2 + x^2 = \sin y$ 14. $e^y = 4x - 7y$
15. $4\sin^2(x + y) = x$ 16. $\sin y = 7x + 3y$
17. $\operatorname{tg} y = 4y - 5x$ 18. $y = 7x - \operatorname{ctg} y$
19. $xy - 6 = \cos y$ 20. $3y = 7 + xy^3$
21. $y^2 = x + \ln(y/x)$ 22. $xy^2 - y^3 = 4x - 5$
23. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 = \sqrt{7}$ 24. $y^2 = (x - y)/(x + y)$
25. $x^3 + y^3 = 5x$ 26. $\sin^2(3x + y^2) = 5$

11. Знайти похідні першого та другого порядків функції, заданої в параметричній формі:

1. $\begin{cases} x = (2t + 3)\cos t; \\ y = 3t^3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t; \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t; \\ y = 2\sin^2 t. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x = 1/(t + 2); \\ y = (t/(t + 2))^2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = e^{-2t}; \\ y = e^{4t}. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = 2t/(1+t^3); \\ y = t^2/(1+t^2). \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1}; \\ y = (t+1)/\sqrt{t^2-1}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 4t+2t^2; \\ y = 5t^3-3t^2. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x = (\ln t)/t; \\ y = t\ln t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = e^t\cos t; \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x = t^4; \\ y = \ln t. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 5\cos t; \\ y = 4\sin t. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t; \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = 3(t-\sin t); \\ y = 3(1-\cos t). \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t); \\ y = 3(\cos t + t\sin t). \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \sin 2t; \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x = e^{3t}; \\ y = e^{-3t}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = (\ln t)/t; \\ y = t^2\ln t. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x = \arccos t; \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 1/(t+1)^2; \\ y = (t/(t+1))^2. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x = 5\sin^3 t \\ y = 3\cos^3 t. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \ln^2 t \\ y = t+\ln t. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x = te^t \\ y = t/e^t. \end{cases}$

12. За допомогою формули Лейбніця знайти вказану похідну заданої функції:

1. $y = \left(x^4 + 1\right)\cos 3x \qquad y^{(10)} =?$
2. $y = \frac{2x^3-5}{e^{3x-1}} \qquad y^{(15)} =?$
3. $y = \left(5x^2 - x - 3\right)\sin 2x \qquad y^{(13)} =?$
4. $y = \left(3x^4 - 1\right)\cdot 4^{2x+1} \qquad y^{(17)} =?$
5. $y = \left(2x^4 + 3\right)\sin \frac{x}{2} \qquad y^{(12)} =?$
6. $y = \frac{4x^3+7}{e^{3-2x}} \qquad y^{(16)} =?$
7. $y = \left(2x^3 + x - 1\right)\cos 3x \qquad y^{(19)} =?$
8. $y = \left(x^4 + 7\right)\cdot 5^{2-3x} \qquad y^{(11)} =?$
9. $y = \left(8 - x^4\right)\sin \frac{x}{4} \qquad y^{(14)} =?$
10. $y = \frac{2x^4-x-5}{e^{6x+1}} \qquad y^{(15)} =?$
11. $y = \left(x^3 + 2x - 1\right)\sin 3x \qquad y^{(9)} =?$
12. $y = \left(3x - 3x^3 - 1\right)\cdot \sin 5x \qquad y^{(13)} =?$
13. $y = \left(3x^2 - x + 1\right)\cdot 6^{7x+1} \qquad y^{(17)} =?$
14. $y = \left(2x^2 + x^3 - 5\right)\cdot \sin \frac{x}{4} \qquad y^{(12)} =?$
15. $y = \frac{x^3+7x^2-8}{e^{3-5x}} \qquad y^{(16)} =?$
16. $y = \left(2x^3 + x^2 + 9\right)\cos \frac{2x}{3} \qquad y^{(19)} =?$
17. $y = \left(x^4 + 3x^2 - 4\right)\cdot 6^{2-5x} \qquad y^{(11)} =?$
18. $y = \left(2x^4 + 3\right)\cdot \sin \frac{x}{2} \qquad y^{(12)} =?$
19. $y = \frac{4+2^2+^3}{e^{3-2x}} \qquad y^{(16)} =?$
20. $y = \left(2x^4 + x^2 - 1\right)\cos \frac{3}{2} \qquad y^{(19)} =?$
21. $y = \left(x^4 - \ + 3\right)\cdot 9^{2-7} \qquad y^{(11)} =?$
22. $y = \left(1 + 2 - x^4\right)\cdot s\frac{x}{5}y^{(14)} =?$
23. $y = \frac{2x^4+3x-15}{e^{8x+1}} \qquad y^{(15)} =?$
24. $y = \left(x - 5x^3 + 1\right)\cdot \sin 4x \qquad y^{(13)} =?$
25. $y = \left(3x - 4x^2 + 1\right)\cdot e^{-2x+1} \qquad y^{(17)} =?$
26. $y = \left(x^2 + 2x^3 - 3\right)\cdot \sin \frac{4x}{3} \qquad y^{(12)} =?$

13. Записати формулу для похідної n-го порядку вказаної функції:

1. $y = \lg x$	2. $y = 1/x$
3. $y = 2^{x+1}$	4. $y = \cos(x+1)$
5. $y = \sin(x+1)$	6. $y = 1/(x+5)$
7. $y = e^{-x+1}$	8. $y = \ln(3+x)$
9. $y = \sqrt{x+1}$	10. $y = \log_4(x+1)$
11. $y = 1/(x-3)$	12. $y = \ln(5+x)$
13. $y = e^{4x+1}$	14. $y = 1/(x-7)$
15. $y = 5^{x-1}$	16. $y = e^{-5x-2}$
17. $y = \ln(4+x)$	18. $y = 1/(x-6)$
19. $y = 10^{x-\pi}$	20. $y = \cos(x+2)$
21. $y = x/(x+5)$	22. $y = (1+x)/\sqrt{x}$
23. $y = xe^{6x}$	24. $y = \sqrt{x+7}$
25. $y = \cos x e^{2x}$	26. $y = (2+\sqrt{x})/x^2$

14. Обчислити вказані границі за допомогою правил Лопіталя:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$	2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{1/x^2}-1}{2\,\mathrm{arctg}\,x^2-\pi}$
3. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \frac{1/\cos^2 x-2\,\mathrm{tg}\,x}{1+\cos 4x}$	4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^{\ln x}-x}{x-1}$	6. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \ln(x-1)$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$	8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^2 2x}$	10. $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2})$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x}$	12. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \frac{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}-1}{2\sin^2 x-1}$
13. $\lim\limits_{x\to 1/2} (\frac{x}{2x-1}-\frac{1}{\ln 2x})$	14. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-0{,}01x}$
15. $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x/\,\mathrm{tg}\,x$	16. $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(1/x))^x$
17. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$	18. $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^{x-1}$
19. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$	20. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$
22. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\operatorname{tg} x}{x})^{1/x^2}$
23. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{1+2x}$
24. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{\operatorname{tg} x}$
25. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x)^x$
26. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{1/\cos x}$

15. Знайти найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку.

1. $y = x\, e^{-2x^2}$, $[-2, 0]$
2. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$, $\left[\frac{1}{e}, e\right]$
3. $y = x^4 - 8x^2 + 3$, $[-3, 1]$
4. $y = \sin 2x - 2x$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
5. $y = \frac{{}^4+27}{5}$, $[-4, -1]$
6. $y = 3^4 - 8^3 - 30^2 + 1$, $[-1, 2]$
7. $y = 3^4 - 4^3 - 36^2 + 4$, $[1, 2]$
8. $y = \sqrt{6 - {}^2}$, $[-1, \sqrt{6}]$
9. $y = \frac{}{9} + \frac{1}{}$, $[-4, -1]$
10. $y = x + \cos^2 x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
11. $y = 2x^2 - \ln x$, $[1, e]$
12. $y = 3\sqrt[3]{(7x-1)^2} + 7x$, $\left[-\frac{26}{7}, 0\right]$
13. $y = x + \frac{8}{x^4}$, $[1, 3]$
14. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}$, $[1, 4]$
15. $y = (2-x)\cdot e^{-x}$, $[0, 4]$
16. $y = x^2 e^{-\frac{2}{3}x^3}$, $[-1, 1]$
17. $y = \frac{\ln x}{x}$, $\left[\frac{1}{e}, e^2\right]$
18. $y = 3x^4 - 24x^2 + 1$, $[-3, 1]$
19. $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
20. $y = \frac{{}^2-3}{3}$, $[-4, -1]$
21. $y = {}^5 - {}^3 - 2 + 1$, $[-2, 0]$
22. $y = {}^4 - 4^3 + 4^2 + 4$, $[0, 3]$

23. $y = {}^{2}\sqrt{1+}\,,$ $[-3, 0]$
24. $y = \frac{}{2} + \frac{4}{},$ $[-5, -1]$
25. $y = x\sqrt{3} + 2\sin^2 x,$ $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$
26. $= 8\ln x - x^2,$ $[1, e]$

16. (a) Чи задовольняє на відрізку $[a; b]$ задана функція умовам теореми Лагранжа? Якщо так, то знайти точку c, яка фігурує в цій теоремі;

    (b) Знайти найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку.

1. $y = \ln(x^2 - 2x + 2),\ [0; 3]$
2. $y = \frac{3x}{x^2+1},\ [0; 5]$
3. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2},\ [-0{,}5; 0]$
4. $y = (x+2)e^{1-x},\ [-2; 2]$
5. $y = \ln(x^2 - 2x + 4),\ [-1; 1{,}5]$
6. $y = \frac{x^3}{x^2-x+1},\ [-1; 1]$
7. $y = ((x+1)/x)^3,\ [1; 2]$
8. $y = \sqrt{x - x^3},\ [-2; 2]$
9. $y = 4 - e^{-x^2},\ [0; 1]$
10. $y = \frac{x^3+4}{x^2},\ [1; 2]$
11. $y = xe^x,\ [-2; 0]$
12. $y = \frac{x}{9-x^2},\ [-2; 2]$
13. $y = (x-1)e^{-x},\ [0; 3]$
14. $y = (x-2)e^x,\ [-2; 1]$
15. $y = \frac{1+\ln x}{x}, [1/e; e]$
16. $y = e^{4x-x^2},\ [1; 3]$
17. $y = \frac{x^5-8}{x^4},\ [-3; -1]$
18. $y = \frac{e^{2x}+1}{e^x},\ [-1; 2]$

19. $y = x\ln x, [1/e^2; 1]$
20. $y = x^3 e^{x+1},\ [-4; 0]$
21. $y = \frac{\ln x}{x},\ [1; 4]$
22. $y = e^x + \cos x,\ [0; \pi]$
23. $y = e^{6x-x^2} + \sin x,\ [-3; 3]$
24. $y = \frac{5x^3+1}{x^4-3x^2+2},\ [-1; 5]$
25. $y = \sqrt{\ln^2 x + e^x},\ [1; 5]$
26. $y = \frac{e^{2x} - \operatorname{tg} x}{\ln(x^2+2)},\ [-2; 2]$

17. Розв'язати текстову задачу:

1. У дану сферу вписати паралелепіпед найбільшого об'єму.

2. У дану сферу вписати паралелепіпед з найбільшою бічною поверхнею.

3. У дану сферу вписати конус найбільшого об'єму.

4. У дану сферу вписати конус з найбільшою бічною поверхнею.

5. У дану сферу вписати тетраедр (правильну трикутну піраміду) найбільшого об'єму.

6. У дану сферу вписати тетраедр з найбільшою бічною поверхнею.

7. У даний тетраедр вписати циліндр з найбільшою бічною поверхнею.

8. У даний тетраедр вписати циліндр найбільшого об'єму.

9. У даний конус вписати тетраедр з найбільшою бічною поверхнею.

10. У даний конус вписати тетраедр найбільшого об'єму.

11. У даний циліндр вписати паралелепіпед найбільшого об'єму.

12. У даний циліндр вписати паралелепіпед з найбільшою біч-

ною поверхнею.

13. У даний циліндр вписати тетраедр найбільшого об'єму.

14. У даний циліндр вписати тетраедр з найбільшою бічною поверхнею.

15. У даний конус вписати паралелепіпед з найбільшою бічною поверхнею.

16. У даний конус вписати паралелепіпед найбільшого об'єму.

17. У даний конус вписати циліндр найбільшого об'єму.

18. У даний конус вписати циліндр з найбільшою бічною поверхнею.

19. В яких системах логарифмів існують числа, які дорівнюють своєму логарифму?

20. Світлова точка перебуває на лінії центрів двох куль, що не перетинаються, радіусів R та r $(R > r)$ й розташована поза цими кулями. При якому положенні світлової точки сума площ освітлених частин поверхонь куль буде найбільшою?

21. Два кораблі пливуть зі сталими швидкостями u і v по прямим лініям, які складають кут α між собою. Знайти найменшу відстань між кораблями, якщо в деякий момент їх відстані від точки перетину шляхів були рівні a та b відповідно.

22. Яка найменша площа може бути в трикутника OAB, якщо його сторони OA і OB лежать на графіку функції $y = (|x| - x)/2$, а пряма AB проходить через точку $M(0;1)$?

23. "Звивистістю"замкненого контура, який обмежує площу S, називається відношення периметра цього контура до довжини кола тієї ж площі S. Яка форма рівнобедреної трапеції $ABCD$ $(AD \| BC)$, що має найменшу "звивистість", якщо основа $AD = 2a$ і гострий кут $BAD = \alpha$?

24. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребрами $CD = 24$, $AD = 6$ і $DD_1 = 4$ проведена площина через центр симетрії грані $A_1B_1C_1D_1$, вершину A и точку P, що лежить на ребрі DC. Яку найменшу площу може мати перетин паралелепіпеда цією площиною? На які частини ділить точка P ребро DC у цьому випадку?

25. Висота піраміди $TABC$ з основою ABC проходить через середину ребра AC. Виберіть на AC точку M так, щоб площа перетину піраміди площиною, що проходить через точку M, середину ребра TC і вершину B, була найменшою, якщо $AB = BC = AC = TC = 2$.

26. У сферу радіусом R вписана правильна трикутна піраміда, висота якої в 1,5 рази менше висоти основи. Між бічною гранню піраміди й сферою розташована правильна чотирикутна призма, одна з основ якої (ближня до центра сфери) лежить у площині бічної грані піраміди, а вершини іншої основи належать сфері. Якою повинна бути висота призми, щоб її об'єм був найбільшим? Знайти цей об'єм.

18. Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки:

1. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$	2. $y=\ln(x^2+1)$
3. $y=-\ln\frac{1+x}{1-x}$	4. $y=x\ln x$
5. $y=(e^{2x}+1)/e^x$	6. $y=xe^{1/x}$
7. $y=xe^x$	8. $y=x^2e^{1/x}$
9. $y=\ln(1-1/x^2)$	10. $y=1-\ln^3 x$
11. $y=\ln(x^2-2x+6)$	12. $y=-x\ln^2 x$
13. $y=(x-1)e^{4x+2}$	14. $y=x^3e^{x+1}$
15. $y=x^2+1/x^2$	16. $y=\sqrt[3]{x}(x-5)$
17. $y=x^3/(x^4-1)$	18. $y=(x^3+4)/x^2$
19. $y=\frac{(x-1)^4}{x(x^2-4)}$	20. $y=2x^2-2/x^3$
21. $y=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$	22. $y=x-\ln(1+x^2)$
23. $y=x^2(1+\sqrt{x})$	24. $y=\frac{\sqrt{x^3+1}}{x}$
25. $y=x+\operatorname{arctg} x$	26. $y=\frac{\sin x}{x}$

19. Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки:

1. $y=e^{1/(5+x)}$	2. $y=\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(x-5)$
3. $y=2^{\sqrt{x}}\frac{x+2}{x-2}$	4. $y=\frac{x^3}{x^2-x+1}$
5. $y=\ln(x^2+1)$	6. $y=x\ln x$
7. $y=\frac{5x^4+3}{x}$	8. $y=\ln(x^2-2x+6)$
9. $y=\frac{e^x}{x}$	10. $y=e^{2x-x^2}$
11. $y=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$	12. $y=e^{1/(2-x)}$
13. $y=x-\ln(1+x^2)$	14. $y=1-\ln^3 x$
15. $y=\ln(x^2-2\lvert x\rvert+6)$	16. $y=-\ln\frac{1+x}{1-x}$
17. $y=x^3e^{-x^2/2}$	18. $y=x^2-2\ln x$
19. $y=x+\frac{x}{3x-1}$	20. $y=\ln(e+\frac{1}{x})$
21. $y=x+\sin x$	22. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$
23. $y=x+\frac{\ln x}{x}$	24. $y=\frac{x}{\cos x}$
25. $y=x^2+\cos x$	26. $y=x^23^{x+1}$

ДОДАТОК С

Додаткові завдання підвищеної складності

1. Знайти похідну функції $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (1 + \sin \frac{k^2 x}{n^3})$.

2. Обчислити ліву та праву похідні функції $y = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} (4^{|x|-1}, x^2)$.

3. За якої умови функція $f(x) = |x|^{2\alpha}[|x|^{2\beta}]$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ диференційовна при $x = 0$ ($[x]$ — ціла частина числа x)?

4. Обчислити $d^2y(0)$ функції $y = |x|^\alpha \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|}$ ($x \neq 0$, $y(0) = 0$).

5. Знайти $y^{(50)}(0)$, якщо $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

6. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції

$$y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| \leq 1; \\ -\sqrt{4-(3-|x|)^2}, & 1 < |x| \leq 2. \end{cases}$$

7. Чи виконується теорема Лагранжа для диференційовної на $[a, b]$ функції $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, де $i = \sqrt{-1}$?

8. Довести, що функція Дирихле не є ні зростаючою, ні спадною.

9. Чи буде зростати на відрізку $[1, 2]$ функція $y = [x]$ ($[x]$ — ціла частина числа x)?

10. Дослідити на монотонність функцію $y = \frac{e^x}{x^x}$, $\quad x \geq 1$.

11. Дослідити на монотонність функцію $\rho = \varphi \operatorname{tg} \varphi$, де ρ та φ —

полярні координати, $\varphi > 0$.

12. Дослідити напрямок опуклості графіка функції $x = (1+t)^{\frac{1}{t}}$, $y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}$, $t \in \mathbb{R}$.

13. Дослідити напрямок опуклості графіка функції $\rho = \varphi - \varphi^2$, ρ та φ — полярні координати, $\varphi \geq 0$.

14. Чи можливе застосування правил Лопіталя для послідовностей?

15. За допомогою правила Лопіталя знайти

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{ctg} x - \frac{15-6x^2}{15x-x^3})}{x(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2})}.$$

16. За допомогою правила Лопіталя знайти

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^{x^x} - 1}{x-1} \right)^{(x-1)^{-1}}.$$

17. За допомогою правила Лопіталя знайти

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^{100} x}{x^{99} \sin x} \right)^{\frac{2}{3x^2}}.$$

18. Дослідити на екстремум функцію $y = \begin{cases} |x|, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

19. Дослідити на екстремум функцію Діріхле.

20. Дослідити на екстремум функцію $x = 3t - t^3$; $y = 4t - t^4$, $t \in [0,1]$.

21. Дослідити на екстремум функцію $\rho = (1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

22. Дослідити на екстремум функцію $x^3 + y^3 + x^2 y + 1 = 0$.

23. Побудувати графік функції $y = \sup\{\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x\}$.

24. Побудувати графік функції $y = \inf\{\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x\}$.

ДОДАТОК D

Геометричні інтерпретації деяких понять диференціального числення

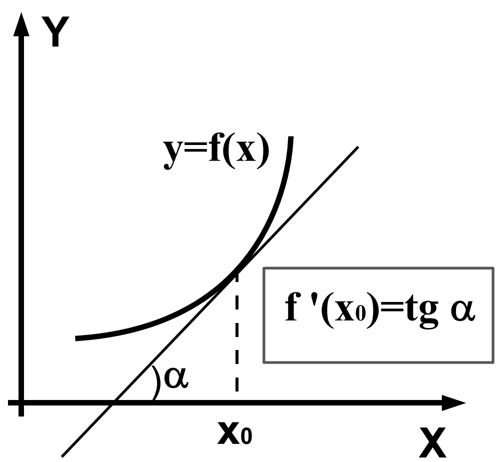
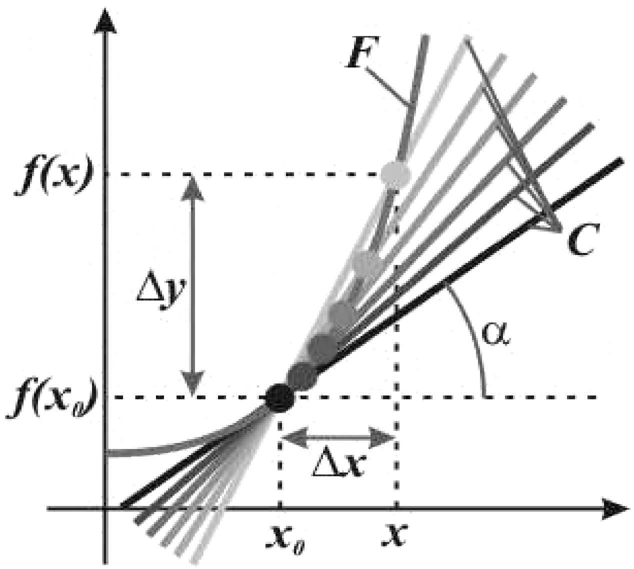


Рис. D.1: похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0.



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Рис. D.2: похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0.

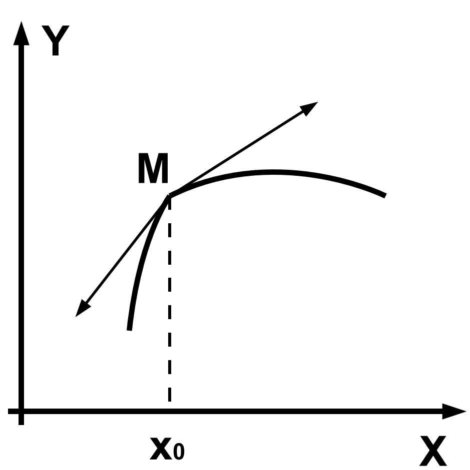


Рис. D.3: однобічні похідні функції в точці x_0; M — кутова точка.

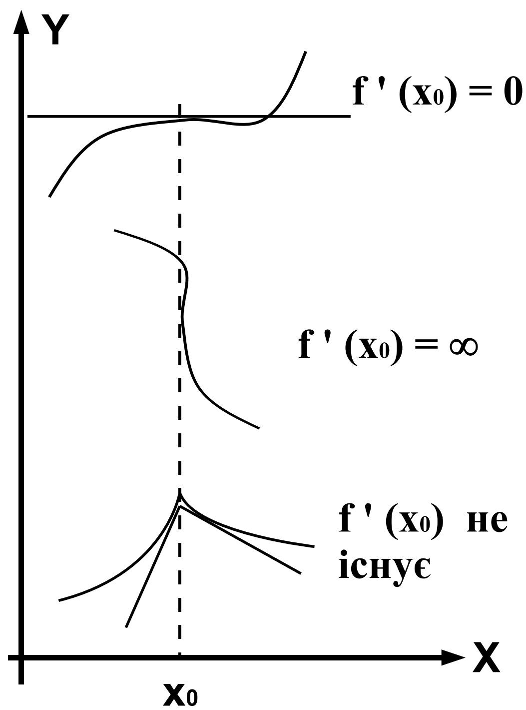


Рис. D.4: похідна функції в точці x_0: дорівнює нулю, прямує до нескінченності, не існує.

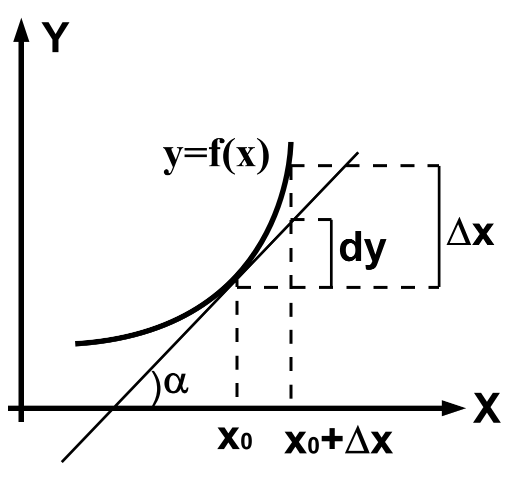


Рис. D.5: диференціал та приріст функції.

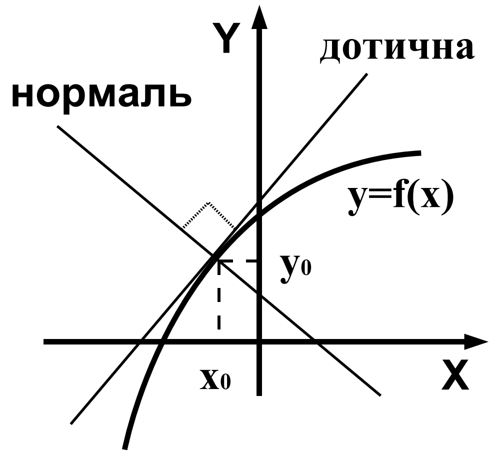


Рис. D.6: дотична та нормаль до графіку функції $y = f(x)$.

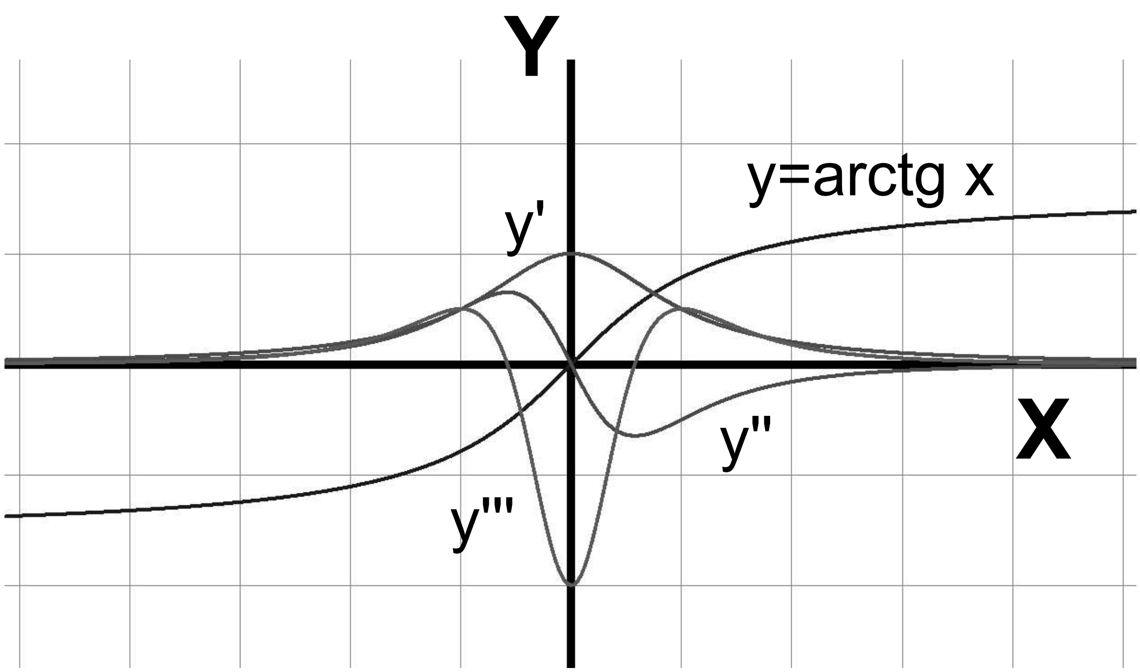


Рис. D.7: графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ та її похідні першого, другого та третього порядків.

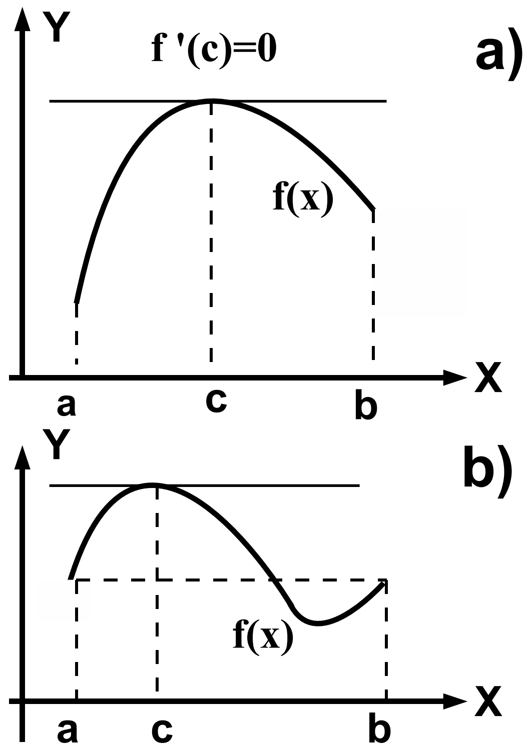


Рис. D.8: a): теорема Ферма; b): теорема Ролля.

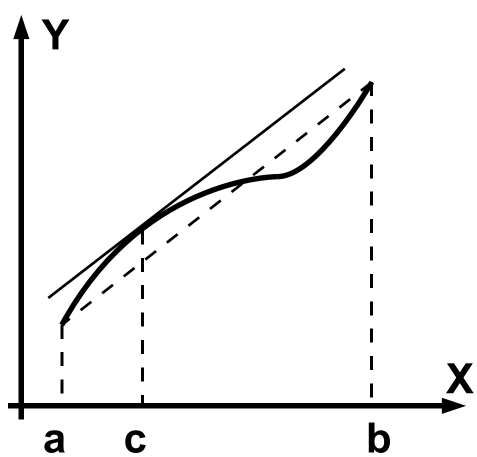


Рис. D.9: теорема Лагранжа.

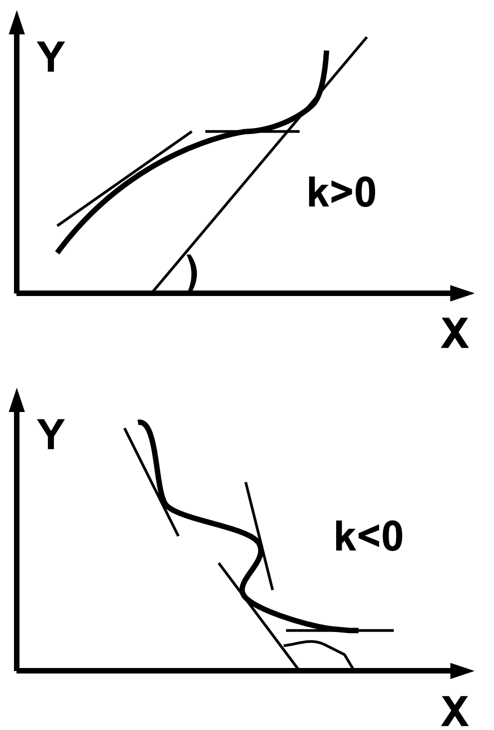


Рис. D.10: знак кутового коефіцієнта показує нахилена дотична вгору чи вниз і, відповідно, зростає чи спадає крива.

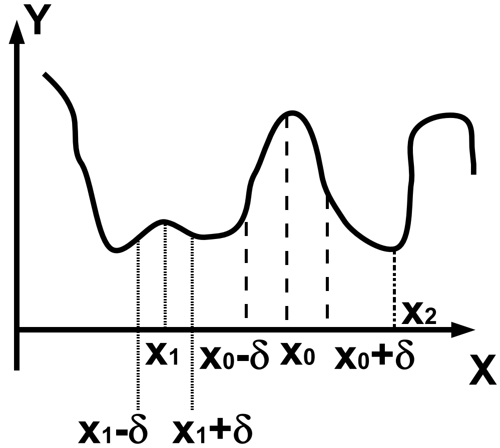


Рис. D.11: x_0 та x_1 — точки максимуму, x_2 — точка мінімуму.

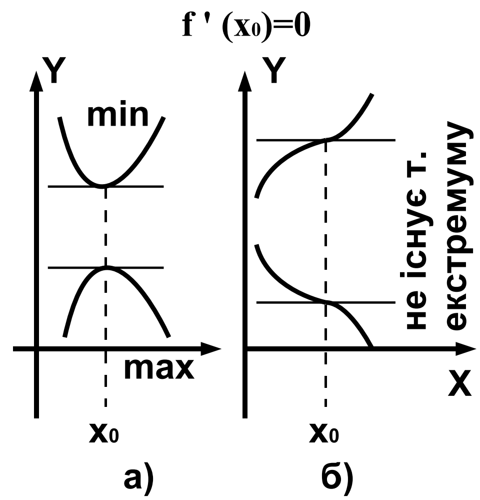


Рис. D.12: Похідна функції дорівнює нулю. Випадок а): крива має точки екстремуму. Випадок б): точок екстремуму не існує.

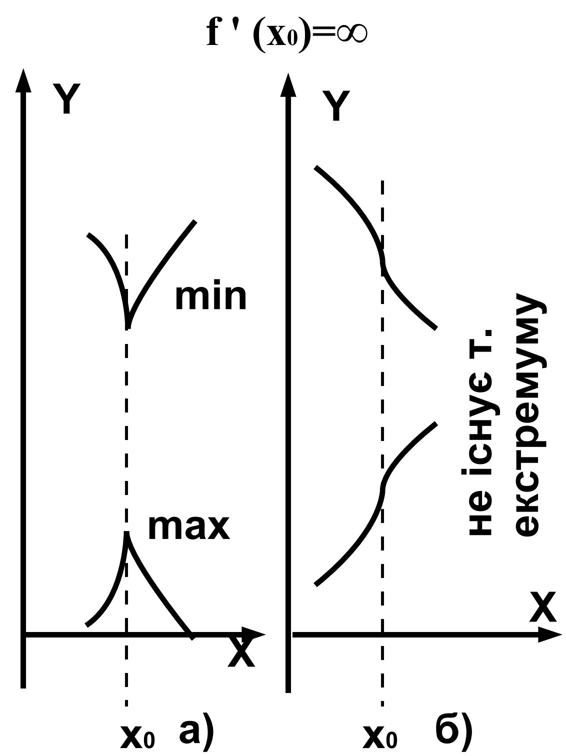


Рис. D.13: Похідна функції прямує до нескінченності. Випадок а): крива має точки екстремуму. Випадок б): точок екстремуму не існує.

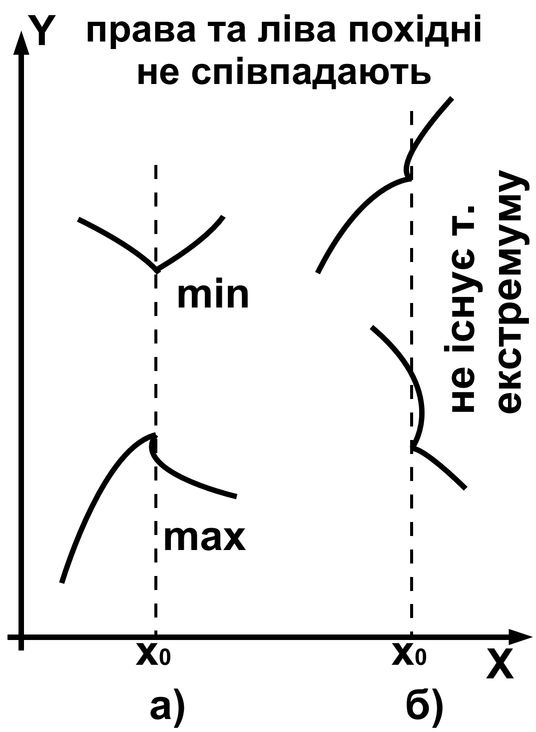


Рис. D.14: Похідна функції не існує, оскільки права та ліва похідні не співпадають. Випадок а): крива має точки екстремуму. Випадок б): точок екстремуму не існує.

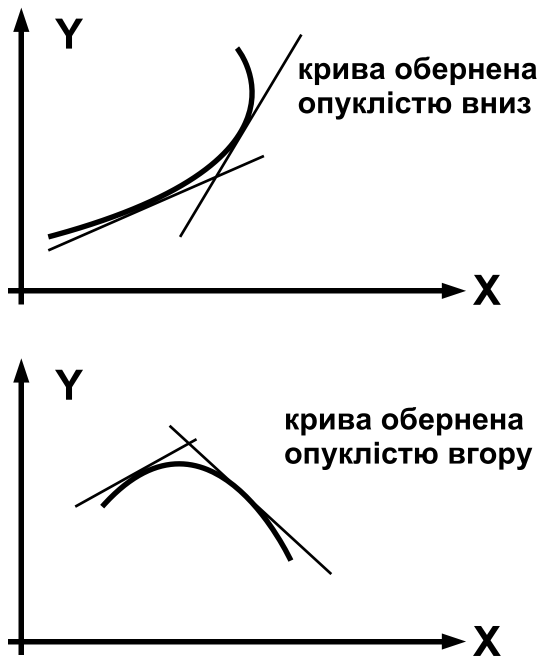


Рис. D.15: опуклість кривої.

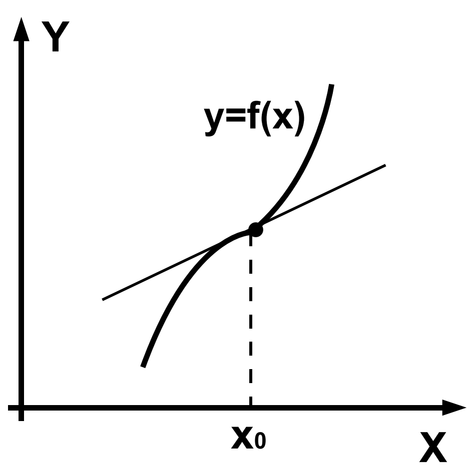


Рис. D.16: Якщо x_0 — точка перегину кривої $y = f(x)$, то дотична, проведена в точці x_0, поділяє криву на дві частини, які лежать в деякому околі точки дотику по різні сторони від дотичної.

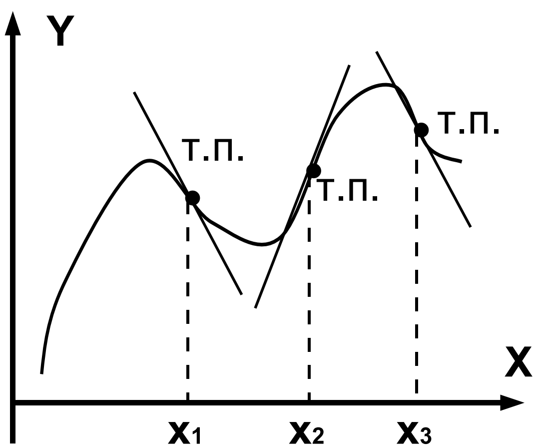


Рис. D.17: x_1, x_2, x_3 — точки перегину.

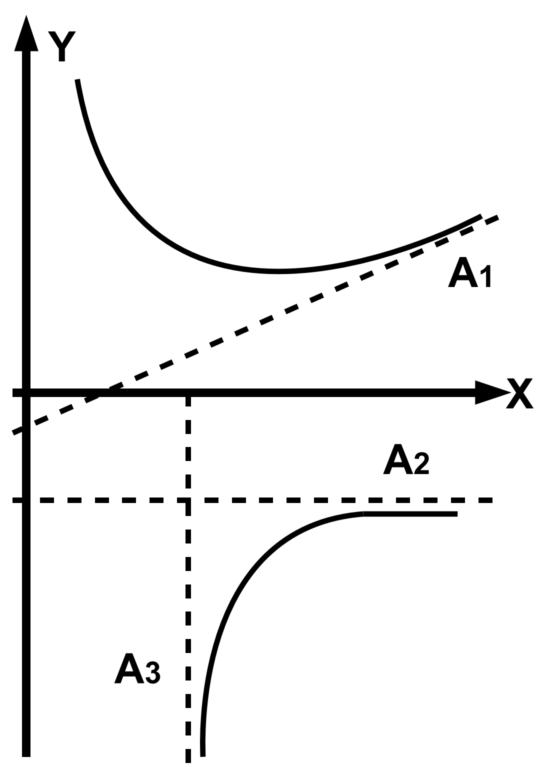


Рис. D.18: A_1 — похила асимптота, A_2 — горизонтальна асимптота, A_3 — вертикальна асимптота.

ДОДАТОК Е

Похідна в економіці

Розглянемо задачу про продуктивність праці. Нехай функція $u = u(t)$ відображає кількість виробленої продукції u за час t та ставиться задача знайти продуктивність праці в момент часу t_0.

За період часу від t_0 до $t_0 + \Delta\,\mathrm{t}$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $u(t_0)$ до значення $u(t_0 + \Delta t)$; тоді середня продуктивність праці за цей період часу $z_{\text{сер}}$ знаходиться за формулою

$$z_{\text{сер}} = \frac{\Delta u}{\Delta t},$$

де, як звичайно, $\Delta u = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$.

Вочевидь, продуктивність праці в момент t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta\,\mathrm{t}$ при $\Delta t \to 0$, тобто

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z\ \text{сер} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t_0).$$

Таким чином, продуктивність праці є похідна від обсягу виробленої продукції по часу.

Далі розглянемо ще одне поняття, яке ілюструє економічний зміст похідної.

Витрати виробництва y будемо розглядати як функцію кількості продукції x, що виробляється. Нехай Δ — приріст продукції, тоді Δy — приріст витрат виробництва і $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — середній приріст витрат виробництва продукції на одиницю продукції. Похідна

$$y' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

виражає граничні витрати виробництва і наближено характеризує додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Граничні витрати залежать від рівня виробництва (кількість продукції, що випускається) і визначаються не постійними виробничими затратами, а лише змінними (на сировину, паливо та ін.). Аналогічним чином можуть бути означені гранична виручка, граничний прибуток, гранична продуктивність та інші граничні величини.

Застосування диференціального числення для дослідження економічних об'єктів та процесів на основі аналізу граничних величин дістало назву граничного аналізу. Граничні величини характеризують не стан (як сумарна чи середня величини), а процес зміни економічного об'єкта. Таким чином, похідна виступає як швидкість зміни деякого економічного об'єкта (процесу) за часом або відносно іншого об'єкта дослідження.

Для дослідження економічних процесів та інших прикладних задач широко використовується поняття еластичності функції.

Означення Е.1. *Еластичністю функції $E_x(y)$ називається границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta \to 0$:*

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'. \qquad \text{(E.1)}$$

Еластичність функції наближено відображає, на скільки відсотків зміниться функція $y = f(x)$ якщо незалежна змінна x змінилась на 1%.

Властивості еластичності функції:

1. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної на темп зміни функції $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, тобто

$$E_x(y) = x \cdot T_y.$$

2. Еластичність добутку (частки) двох функцій дорівнює сумі (різниці) еластичностей цих функцій:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v), \quad E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

3. Еластичності взаємообернених функцій — взаємообернені величини:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \tag{E.2}$$

Еластичність функції застосовується при аналізі попиту та пропозиції. Наприклад, еластичність попиту y відносно ціни x (або доходу x — коефіцієнт, що визначається за формулою (E.1) і наближено відображає, на скільки відсотків зміниться попит (обсяг пропозиції) при зміні ціни (або доходу) на 1%.

Якщо еластичність попиту (за абсолютною величиною) $|E_x(y)| > 1$, то попит вважають еластичним, якщо $|E_x(y)| < 1$ — нееластичним відносно ціни (або доходу). Якщо $|E_x(y)| = 1$, то мова йде про попит з одиничною еластичністю.

Визначимо, наприклад, як впливає еластичність попиту відносно ціни на сумарний прибуток $z = pq$ при реалізації продукції, де ціна одиниці продукції позначається літерою p, а кількість продукції — q.

Припустимо, що відома крива попиту $= p(q)$. Знайдемо граничний прибуток

$$z'_q = (pq)'_q = p'_q \cdot q + p \cdot 1 = p\left(1 + \frac{q}{p}p'_q\right) = p(1 + E_q(p)).$$

Відповідно з формулою (Е.2) для еластичності взаємообернених функцій еластичність попиту відносно ціни обернена еластичності ціни відносно попиту, тобто Е $_q$ (р)$= \frac{1}{E_p(q)}$, враховуючи також те, що $E_p(q) < 0$, отримаємо

$$r'_q = p\left(1 - \frac{1}{|E_p(q)|}\right). \tag{Е.3}$$

Якщо попит не є еластичним, тобто $|E_p(q)| < 1$, то відповідно до (Е.2) граничний прибуток r'_q буде від'ємний при будь-якій ціні; якщо попит еластичний, тобто $|E_p(q)| > 1$, то граничний прибуток r'_q додатний. Таким чином, для нееластичного попиту зміна ціни та граничного прибутку відбуваються в одному напрямку, а для еластичного попиту — в різних. Це означає, що зі зростанням ціни для продукції еластичного попиту сумарний прибуток від реалізації продукції збільшується, а для товарів нееластичного попиту — зменшується.

Приклад 1: *Залежність між витратами виробництва y і обсягом продукції x, що випускається, визначається функцією* $= 50 - 0,05^3$ *(грош. од.). Визначити середні та граничні витрати за умови, що обсяг продукції 10 одиниць.*

☐ Функція середніх витрат (на одиницю продукції) виражається відношенням $y_{\text{сер}} = \frac{y}{x} = 50 - 0{,}05^2$; при $= 10$ середні витрати (на одиницю продукції) дорівнюють $y_{\text{сер}}(10) = 50 - 0{,}05 \cdot 10^2 = 45$ (грош. од.).

Функція граничних витрат виражається похідною $y'(x) = 50 - 0{,}15x^2$; при $= 10$ граничні витрати складають $y'(10) = 50 - 0{,}15 \cdot 10^2 = 35$ (грош. од.). Отже, якщо середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 45 грош. од., то граничні витрати, тобто додаткові затрати на виробництво додаткової одиниці продукції за умови даного рівня виробництва (обсягу продукції, що випускається 10 од.), складають 35 грош. од. ■

Приклад 2: *Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис. грош. од.) та випуском продукції (млрд. грош, од.) виражається функцією* $= 0{,}5 + 80$. *Знайти еластичність собівартості за умови випуску продукції в розмірі 60 млрд. грош. од.*

□ За формулою (Е.1) еластичність собівартості

$$E_x(y) = \frac{-0{,}5}{-0{,}5 + 80} = \frac{}{- 160}.$$

При $= 60$ $E_{=60}(y) = -0{,}6$, тобто при виробництві продукції в розмірі 60 млн. грош. од., збільшення її на 1% викличе зменшення собівартості на 0,6%. ■

Приклад 3. *Обсяг продукції* u, *виробленої бригадою робітників, може бути описаний рівнянням*

$$u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50 (\textit{од}), \quad 1 \le t \le 8,$$

де t *— робочий час в годинах. Обчислить продуктивність праці, швидкість і темпи її зміни через годину після початку роботи і за годину до її закінчення.*

□ Продуктивність праці виражається похідною

$$z(t) = u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100 (\text{од/год}),$$

а швидкість і темп зміни продуктивності — відповідно похідною $z'(t)$

і логарифмічною похідною $T_z(t) = [\ln z(t)]'$:

$$T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2+15t+100} = \frac{2t-6}{t^2-6t-40}(\text{од/год}),$$

де $z'(t) = -5t + 15$ (од/год^2)

В задані моменти часу $t_1 = 1$ і $t_2 = 8 - 1 = 7$ відповідно маємо:

$z(1) = 112{,}5$ (од/год)

$z'(1) = 10$ (од/год^2)

$T_z(1) = 0{,}09$ (од/год)

і

$z(7) = 82{,}5$ (од/год)

$z'(7) = -20$ (од/год^2)

$T_z(7) = -0{,}24$ (од/год).

Отже, на кінець роботи продуктивність праці суттєво знижується; при цьому зміна знаку $z'(t)$ і $T_z(t)$ із плюса на мінус свідчить про те, що підвищення продуктивності праці в перші години робочого дня змінюється її зниженням в останні години. ■

Приклад 4: *За допомогою досліду були встановлені функції попиту* $q = \frac{p+8}{p+2}$ *та пропозиції* $s = p + 0{,}5$, *де* q *та* s *— кількість товарів, відповідно що купується і пропонується для продажу за одиницю часу, — ціна товару. Знайти: а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якої попит та пропозиція врівноважуються; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну доходу при збільшенні ціни на 5% від рівноваженої.*

□ а) Рівноважна ціна визначається з умови $q = s$, $\frac{p+8}{p+2} = p+0{,}5$, звідки $= 2$, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 грош. од.

б) Знайдемо еластичності по попиту і пропозиції за формулою (1) (E.1):

$$E_p(q) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}; \quad E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для рівноважної ціни $= 2$ маємо $E = 2(q) = -0{,}3$, $E_p = 2(s) = 0{,}8$.

Оскільки отримані значення еластичності по абсолютній величині менше 1, тоді і попит і пропозиції даного товару при рівноважній (ринковій) ціні нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту і пропозиції. Так, при збільшенні ціни p на 1% попит зменшиться на $0{,}3\,\%$, а пропозиція збільшиться на $0{,}8\,\%$.

в) При збільшенні ціни на $5\,\%$ від рівноважної попит зменшиться на $5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5\,\%$, тобто прибуток зросте на 3,5%. ■