УДК 517.925

Божко В.О., Бенюх О.В.

[1] *канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу, СДПУ*

[2] *студентка 5 курсу фізико-математичного факультету, СДПУ*

e-mail: olga.benjukh@mail.ru

ПРО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ І ПРО МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядаються питання про існування, побудову і про аналітичну структуру періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром ε при старшій похідній. В некритичному випадку розглядаються спочатку лінійні системи, а потім системи загального вигляду. В критичному випадку розглядається скалярне рівняння (лінійне, а потім нелінійне). Показано, що періодичні розв'язки існують для більшості (по мірі Лебега) значень ε в деякому інтервалі.

Ключові слова: *мажоранта, рівномірна збіжність, ітерації ньютонівського типу, власні значення, амплітуда зміни, радіус збіжності.*

Вступ

В цій статті розглядається ряд питань існування, методів побудови і аналітичної структури періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь, загальний вигляд яких такий:

$$\varepsilon \cdot \frac{dx}{dt} = P(t)x + \varepsilon \cdot F(t,x), \tag{1}$$

де ε — малий параметр, $P(t)$ — T-періодична матриця, $P(t,x)$ — нелінійна, диференційована функція x, що представляється степеневим рядом або скінченним поліномом по x і T-періодична по t.

Основна частина

1. Розглянемо спочатку простий частинний випадок системи (1), а саме лінійну неоднорідну систему

$$\varepsilon \cdot \frac{dx}{dt} = Ax + F(t), \tag{2}$$

де A — стала матриця, що не має власних значень з нульовою дійсною частиною (некритичний випадок). Аналіз цієї системи дозволяє виявити ряд цікавих фактів.

Як випливає з відомих властивостей лінійних систем, періодичний розв'язок $x(t,\varepsilon)$ системи (2) існує для всіх ε і може бути виражений

$$x(t,\varepsilon) = R(t,T,\varepsilon) \cdot \int\limits_t^{t+T} e^{-\frac{A}{\varepsilon}\cdot\theta} \cdot F(\theta)\, d\theta, R(t,T,\varepsilon) = \\ = \frac{1}{\varepsilon} \left[e^{-\frac{A}{\varepsilon}\ (t+T)} - e^{-\frac{A}{\varepsilon}\ t} \right]^{-1} \tag{3}$$

На підставі (3) може бути отримана оцінка

$$\|x(t,\varepsilon)\| \leq M \sup_t \|F(t)\|, \tag{4}$$

де стала M в деякому сенсі слабко залежить від ε і залишається скінченною при $\varepsilon \to 0$. Наприклад, нехай власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матриці A всі від'ємні, а найменше серед них за модулем (позначимо його через λ_*) відповідає простому елементарному дільнику матриці A. Тоді $\|e^{At}\| \leq ce^{-\alpha t}\cdot$ $\cdot\alpha = |\lambda_*|$, c — деяка стала, і можна отримати $M = \frac{c}{\alpha} \cdot \frac{1-Q}{1-cQ}$, $Q = e^{-\frac{\alpha T}{\varepsilon}}$ для тих значень ε, для яких $cQ < 1$. При $\varepsilon \to 0$ маємо $M \to \frac{c}{\alpha}$.

Можна сказати, що оцінка амплітуди зміни $x(t,\varepsilon)$ залежить, в основному, від глобальних властивостей правої частини $F(t)$ вихідного рівняння (від $\sup\limits_t \|F(t)\|$ і слабко від ε (тим менше, чим менше ε).

Звернемось до питання про розвинення $x(t,\varepsilon)$ в степеневий ряд по ε, якщо $F(t)$ – нескінченно диференційована функція. З цією метою застосовуючи до (3) інтегрування частинами, здобудемо розвинення

$$x(t,\varepsilon) = -A^{-1}F(t) - (A^{-1})^2 \frac{dF}{dt} - \ldots - \varepsilon^{n-1}(A^{-1})^n \frac{d^{n-1}F}{dt^{n-1}} + R_n, \tag{5}$$

де R_n — залишковий член

$$R_n = \varepsilon^{n-1} R(t,T,\varepsilon) \int\limits_t^{t+T} e^{-\frac{A}{\varepsilon}\cdot\theta} (A^{-1})^n \frac{d^n F}{dt^n}\, d\theta, \tag{5*}$$

$R(t,T,\varepsilon)$ – та ж функція, що і в (3). Цей же ряд (без залишкового члена) ми дістанемо, знаходячи формальне розвинення періодичного розв'язку (2) за степенями ε. Вираз (5*) відрізняється від (3) тільки додатковими членами, і ми отримаємо для R_n оцінку

$$\|R_n\| \leqslant \varepsilon^n M \|A^{-1}\|^n \sup_t \left\| \frac{d^n F(t)}{dt^n} \right\|, \tag{6}$$

де M – та ж стала, що і в (4). Значить тоді, достатня умова збіжності ряду (5) до періодичного розв'язку (2):

$$\varepsilon^n \|A^{-1}\|^n \sup_t \left\| \frac{d^n F(t)}{dt^n} \right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \text{рівномірно по } t \tag{6*}$$

Істотно підкреслити, що (6*) є і необхідною умовою рівномірної збіжності по t ряда (5), оскільки, якщо вона не виконується, то загальний член ряда (5) не прямує рівномірно по t при $n \to \infty$ до нуля.

Умова (6*) дозволяє, таким чином, визначити радіус збіжності по ε ряда (5) для $x(t, \varepsilon)$. Ми бачимо, що цей радіус збіжності залежить від властивостей похідних функції $F(t)$ (а не від глобальних властивостей).

Наприклад, якщо (2) — скалярне рівняння ($A = a$ - скаляр, $Re\ a \neq 0$) і $F(t) = \sin mt$, то радіус збіжності $\overline{\varepsilon} = \frac{|a|}{m}$ і зменшується разом з m.

Якщо $F(t)$ представляється повним (нескінченним) рядом Фур'є, то $\overline{\varepsilon} = 0$, тобто ряд (5) - без залишкового члена - розбігається і не представляє шуканий періодичний розв'язок. Між іншим факт існування самого періодичного розв'язку і оцінки амплітуди (4) не порушуються при довільному вигляді $F(t)$.

Таким чином розвинення періодичного розв'язку $x(t, \varepsilon)$ системи (2) є його досить специфічною властивістю, залежною від тонкої структури правої частини $F(t)$ і, по суті, не зв'язаною з самим існуванням і амплітудою зміни $x(t, \varepsilon)$. Можна висловити думку, що степеневі ряди по ε мало ефективні для побудови і аналізу періодичних розв'язків (2) і тим більше для рівнянь загального вигляду (1).

2. Розглянемо тепер систему з періодичними коефіцієнтами

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = P(t)x + F(t) \tag{7}$$

в некритичному випадку (відповідні характеристичні показники всі відмінні від нуля). В принципі питання існування, оцінки і розвинення в ряд за степенями ε періодичного розв'язку розв'язуються так, як і для системи (2). Ми дістанемо для цього розв'язку (існуючого при всіх ε) вираз

$$x(t, \varepsilon) = R(t, T, \varepsilon) \int_t^{t+T} \Phi^{-1}\left(\frac{\Theta}{\varepsilon}\right) F(\Theta)\, d\Theta,$$

$$R(t, T, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{t+T}{\varepsilon}\right) - \Phi^{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{-1}\right], \tag{8}$$

де $\Theta(t)$ – фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи $\frac{dx}{dt} = P(t)x$. Має місце аналогічна (4) оцінка. Можна також дістати аналогічне (5) розвинення:

$$x(t,\varepsilon) = -P^{-1}(t)F(t) - \varepsilon^{n-1}P^{-1}(t)\frac{d}{dt}\,(P^{-1}F) - \\ - \varepsilon^2 P^{-1}(t)\frac{d}{dt}\,\left(P^{-1}\frac{d}{dt}\,(P^{-1}F)\right) - \ldots + R_n, \tag{9}$$

де

$$R_n = \varepsilon^{n-1}R(t,T,\varepsilon)\int\limits_t^{t+T}\Phi^{-1}\left(\frac{\Theta}{\varepsilon}\right)\overbrace{\frac{d}{d\Theta}\left(P^{-1}\frac{d}{d\Theta}\,\left(P^{-1}\ldots\frac{d}{d\Theta}\left(P^{-1}F\right)\right)\right)}^{n\text{ разів}}d\Theta \tag{10}$$

При цьому

$$\|R_n\| \le \varepsilon^n M\sup_t\left\|\frac{d}{dt}\left(P^{-1}\frac{d}{dt}\left(P^{-1}\ldots\frac{d}{dt}(P^{-1}F)\right)\right)\right\|. \tag{11}$$

Умова (необхідна і достатня) збіжності ряда (9) $R_n \to 0, n \to \infty$. Перевірка її виконання більш складна, ніж у випадку (6), навіть для простих $P(t), F(t)$. Нами не отриманий приклад (нетривіальний) скінченного радіуса збіжності $\overline{\varepsilon}$ для якої-небудь конкретної системи (7), хоча такі приклади, напевне, можна знайти. Але як би то не було, можна висловити думку про неефективність розвинень за степенями ε. Більш доцільно використовувати або скінченну формулу (8) або безпосередньо шукати $x(t,\varepsilon)$ у вигляді ряда Фур'є.

3. Розглянемо загальну систему (1) в некритичному випадку. Застосуємо для побудови періодичного розв'язку метод простих ітерацій, визначаючи послідовність періодичних функцій $x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon), \ldots,$ що задовольняють рівнянням

$$\varepsilon\frac{dx_j}{dt} = P(t)x_j + \varepsilon F(t, x_{j-1}),\ j = 1,2,3,\ldots,\ x_0 \equiv 0. \tag{12}$$

Ми маємо оцінки вигляду (4)

$$\|x_j(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon M\sup_t\|F(t,x_{j-1})\| \tag{13}$$

Для аналізу збіжності послідовності $\{x_j(t,\varepsilon)\}$ застосуємо метод функціональних мажорантних рівнянь (див., напр., [5]). Згідно цьому складається на підставі оцінок (13) функціональне рівняння

$$u = \varepsilon MU(u), \tag{14}$$

де $U(u)$ — відповідна мажоранта для $F(t,x)$. Це рівняння визначає u як функцію ε. Збіжність послідовності $\{x_j(t,\varepsilon)\}$ до розв'язку вихідного рівняння гарантується при всіх ε, для яких (14) має додатний (дійсний) розв'язок $u(\varepsilon)$, а це має місце при $0 \le \varepsilon \le \overline{\varepsilon}$, причому $\overline{\varepsilon}$ ефективно знаходиться при аналізі (14) (див., напр., [3]). Таким чином при $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}]$ можна представити шуканий розв'язок у вигляді збіжного ряда:

$$x(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + [x_2(t,\varepsilon) - x_1(t,\varepsilon)] + [x_3(t,\varepsilon) - x_2(t,\varepsilon)] + \ldots, \tag{15}$$

причому $x_k - x_{k-1}$ мають порядок ε^k. Ми дістали ряд, k-й член якого має порядок ε^k, але це не чистий степеневий ряд по ε.

4. Перейдемо до аналізу критичного випадку, але обмежимось одним скалярним рівнянням. Спочатку розглянемо лінійне рівняння:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = ax + f(t),\ a = \sigma i,\ \sigma \text{ — ціле число} \tag{16}$$

і нехай період по t дорівнює 2π.

Періодичний розв'язок (16) існує при всіх таких ε, що відношення $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ не дорівнює цілому числу. Цей розв'язок виражається також формулою (3). Проте на довільному $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ знайдеться нескінченна множина значень ε, для яких $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ дорівнює цілому числу.

Дістати з (3) для всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ оцінку вигляду (4), яка зв'язує $x(t,\varepsilon)$ і $\sup|f(t)|$, неможна. Цей факт добре ілюструється формулою для періодичного розв'язку рівняння (16) у вигляді формального ряда Фур'є:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f_k}{(\varepsilon k - \sigma)i} e^{ikt}, \tag{17}$$

де f_k — коефіцієнти ряда Фур'є (в комплексній формі) для $f(t)$. Збіжність цього ряда для всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ гарантувати неможна, оскільки знаменник $\varepsilon k - \sigma$ при відповідних k і ε можуть бути рівними або близькими до нуля. Різниці $\varepsilon k - \sigma$ можна розглядати як частинний випадок довільних комбінацій $k_1\varepsilon + k_2\sigma$ з довільними цілими числами k_1, k_2.

Ми зустрічаємось, таким чином, з проблемою так званих «малих знаменників», характерною для теорії умовно-періодичних розв'язків. Тому для аналізу цього випадку застосуємо методи цієї теорії.

Згідно теорії дійсних чисел ми маємо на довільному відрізку $[0, \varepsilon^*]$ для більшості (по мірі Лебега) значень ε:

$$|\varepsilon k - \sigma| \ge K(1 + |k|)^{-2}, \tag{18}$$

де K — деяка стала, яка обернено пропорційна мірі вказаної більшості. Якраз для цієї множини значень ε (позначимо її L_ε) можна гарантувати існування періодичного розв'язку рівняння (16) і наступну оцінку, яку отримуємо при аналізі ряда (17) з врахуванням (18) і оцінок (див.[4]) коефіцієнтів Фур'є f_k для $f(t)$.

Якщо $|f(t) \leq M$ в смузі $|Im\, t| \leq \rho$, то для $\varepsilon \in L_\varepsilon$

$$|x(t,\varepsilon)| \leq \frac{MQ}{\delta^3},\ Q = \frac{4e}{K} \tag{19}$$

в більш вузькій смузі $|Im\, t| \leq \rho - 2\delta$, де δ — довільне число, менше $\frac{\rho}{2}$.

5. З метою наступного аналізу нелінійного рівняння розглянемо рівняння вигляду

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = (a + \varepsilon\rho(t))x + f(t), \tag{20}$$

де $a, f(t)$ – ті ж, що і в (16), а $p(t)$ — неперервна періодична функція. Оскільки періодичний розв'язок $x(t,\varepsilon)$ виражається в скінченній формі, то виявляється можливим отримати при $\varepsilon \in L_\varepsilon$, якщо $|f(t)| \leq M,\ |Im\ t| \leq \rho$, оцінку

$$|x(t,\varepsilon)| \leq \frac{MQQ_1}{\delta^3},\ |Im\, t| \leq \rho - 2\delta, \tag{21}$$

де M, Q – ті ж, що в (15), а стала Q_1 визначається лише по функції $p(t)$. Ця оцінка груба, але якісно задовільна.

6. Перейдемо до аналізу нелінійного (скалярного) рівняння:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = ax + f(t,x) \tag{22}$$

в критичному випадку ($a = \sigma i$, σ — ціле число). Нехай в деякій (комплексній) області $x \in D$ і при $|Im\, t| \leq \rho$

$$|f(t,0)| \leq M_0,\ |f'_x(t,x)| \leq M_1,\ |f''_{xx}(t,x)| \leq 2N, \tag{23}$$

де M_0, M_1, N – деякі сталі. Будуємо ітерації $x_j(t,\varepsilon), j = 1,2,3,\ldots$ ньютоновського типу, що володіють прискореною збіжністю (див. [1]) і визначаються з рівнянь

$$\varepsilon\frac{dx_1}{dt} = ax_1 + \varepsilon f(t,0) \tag{24}$$

$$\varepsilon\frac{dy_2}{dt} = (a+\varepsilon f'_x(t,x_1))y_2 + \varepsilon[f(t,x_1) - f(t,0)],\ x_2 = x_1 + y_2 \tag{25}$$

$$\varepsilon\frac{dy_3}{dt} = (a+\varepsilon f'_x(t,x_2)y_3 + \varepsilon[f(t,x_1+y_2) - f(t,x_1) - f'_x(t,x_1)y_2],$$
$$x_3 = x_2 + y_3 \tag{26}$$

. . . .

При $\varepsilon \in L_\varepsilon$ ми дістанемо для періодичних розв'язків оцінки за допомогою (19), (21) і (23):

$$|x_1(t,\varepsilon)| \le \varepsilon\frac{M_0Q_0}{\delta^3} = m_0, \quad |Im\, t| \le \rho - 2\delta,\ Q_0 = \frac{4e}{K},$$

$$|y_2(t,\varepsilon)| \le \varepsilon m_0\frac{M_1Q_0Q_1}{\delta^3} = m_1, \quad |Im\, t| \le \rho - 4\delta, \tag{27}$$

$$|y_3(t,\varepsilon)| \le \varepsilon N m_1^2\frac{Q_0Q_1}{\delta_1^3} = m_2, \quad |Im\, t| \le \rho - 4\delta - 2\delta_1, \quad \delta_1 = m_1^{\frac{1}{T}},$$
$$|y_4(t,\varepsilon)| \le \varepsilon N m_2^2\frac{Q_0Q_1}{\delta_2^3} = m_3, \quad |Im\, t| \le \rho - 4\delta - 2\delta_1 - 2\delta_2, \quad \delta_2 = m_2^{\frac{1}{T}},$$

. . . .

де $Q_1 = e^{2M_1}$ і T-деяке число. Можна показати, що, коли

$$\varepsilon N Q_0 Q_1 \delta_1 < 1,\ T > \frac{4}{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1, \tag{28}$$

то $m_2 < m_1^{1-\alpha},\ m_3 < m_2^{1-\alpha}, \dots$ і ряд $\sum\limits_{s=2}^{\infty} y_s(t,\varepsilon)$, а разом з тим і послідовність $\{x_j(t,\varepsilon)\}$ збігається до періодичного розв'язку рівняння (22). Це – прискорена збіжність, близька до квадратичної збіжності. Умови (28) дають оцінку (правда, грубу) області збіжності по ε.

Таким чином ми маємо конструктивне доведення існування для $\varepsilon \in L_\varepsilon$ і методику побудови періодичних розв'язків рівняння (22) в критичному випадку.

Висновки

Результати проведених досліджень дозволяють констатувати, що розвинення періодичних розв'язків в степеневий ряд по малому параметру, взагалі кажучи, мало ефективні. А доведення, приведене у випадку одного рівняння (22), безпосередньо не годиться у випадку системи рівнянь загального вигляду в критичному випадку. Але, напевне, аналогічний результат справедливий і у випадку систем (див. [2]).

Література

[1] *Ryabov Ju.F.* The method for construction of semianalytical periodic and quasiperiodic solution in the theory of nonlinear oscillations / Ju.A. Ryabov // Proceed of 4 Conf. on Nolinear Oscillations. – Prague, 1968. – P. 231 – 236.

[2] *Божко В.А.* О периодических решениях системы дифференциальных уравнений в критическом случае / В.А. Божко, Л.Г. Федоренко // 3-я Уральская региональная конференция «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения» : тезисы докладов. – Пермь, 1988. – С. 216.

[3] *Божко В.О.* Метод ітерацій для побудови періодичних розв'язків сингулярно збурених нелінійних диференціальних рівнянь / В.О. Божко, В.І. Ковальов // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки : збірник наукових праць за матеріалами наукової конференції СДПУ, 20 – 22 квітня 2010 р. – Слов'янськ, 2010. – Т. 1. – С. 25 – 27.

[4] *Гребеников Е.А.* Новые качественные методы небесной механики / Е.А. Гребеников, Ю.А. Рябов. – М.: Наука, 1971. – 252 с.

[5] *Рябов Ю.А.* Об одном способе оценки области применимости метода малого параметра в теории нелинейных колебаний / Ю.А. Рябов // Инженерный журнал АН СССР. – 1961. – Т. 1, № 1. – С. 5 – 32.