

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»  
кафедра методики навчання математики та методики навчання інформатики

Методичні вказівки до практичних занять  
з курсу «Числові системи» для студентів  
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Слов'янськ – 2022

УДК 378.016:511(072)  
М54

Затверджено на засіданні Вченої ради  
Протокол № 9 від 27.06.2022 р.

**Рецензенти:**

*Решетова І.В.*, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри управління та адміністрування ДВНЗ «ДДПУ»

*Пучков І.Р.*, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри природничо-математичних дисциплін та інформатики в початковій освіті ДВНЗ «ДДПУ»

«Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Числові системи» для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Математика) / Н.В. Кайдан, Т.В. Турка – Слов'янськ: ДВНЗ «ДДПУ», 2022, – 50 с.

Методичні вказівки розроблено для практичних занять вивчення дисципліни «Числові системи». Кожен параграф відповідає одному практичному заняттю і має наступну структуру: тема заняття, мета заняття, необхідні теоретичні відомості, основні задачі для аудиторної роботи та завдання для самостійної роботи. Також вказівки містять у собі індивідуальні завдання, питання до колоквиуму та список рекомендованої літератури.

Рекомендовано для студентів математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

# Зміст

Передмова	3
Позначення	6
Заняття 1. Відношення та функції.	7
Заняття 2. Основні класичні алгебраїчні системи	12
Заняття 3. Гомоморфізми та ізоморфізми	17
Заняття 4. Аксиоматична теорія натуральних чисел	20
Заняття 5. Упорядковані алгебраїчні системи	23
Заняття 6. Цілі числа	26
Заняття 7. Аксиоматична теорія раціональних чисел.	28
Заняття 8. Раціональні числа	30
Заняття 9. Дійсні числа. Зображення дійсних чисел.	32
Заняття 10. Дійсні та комплексні числа	34
Заняття 11. Аксиоми комплексних чисел	36
Заняття 12. Лінійні алгебри скінченного рангу	38
Контрольна робота з дисципліни «Числові системи»	40
Індивідуальне практичне завдання.	41
Питання до іспиту з курсу «Числові системи»	43
Література	44

## Передмова

Коли школярі вперше знайомляться з математикою, їм говорять, що математика — це наука про число та геометричні фігури. Вузівський курс математики включає аналітичну геометрію, головна мета якої — представити геометричні об'єкти мовою чисел. Таким чином виходить, що числа — це основний предмет вивчення в математиці.

Поняття числа є початковим для багатьох математичних теорій, а задача побудови основних числових систем — одна з найважливіших задач як шкільного курсу математики, так і математики взагалі.

Основними числовими системами є:

- сукупність натуральних чисел  $\mathbb{N}$ ,
- сукупність цілих чисел  $\mathbb{Z}$ ,
- сукупність раціональних чисел  $\mathbb{Q}(\frac{a}{b}$ , де  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ ),
- сукупність дійсних чисел  $\mathbb{R}$ , яка складається з раціональних та ірраціональних чисел,
- сукупність комплексних чисел  $\mathbb{C}$ , яка складається із дійсних, уявних чисел та їх комбінацій.

Історично склалося так, що розуміння та використання цих числових систем розвивалося протягом кількох тисячоліть, більш-менш в тому порядку, який вказано. Існують деякі переконливі причини того, що комплексні числа стали в якомусь розумінні завершенням цього розвитку. Ми будемо намагатися дати систематичний розгляд цього розвитку, і з'ясуємо, що не було нічого випадкового.

Єдиною випадковістю в цьому питанні є лише використання деяких слів, таких як «раціональний», «ірраціональний», «дійсний», «комплексний». Але сила звички утримує нас від заміни їх на більш підходящі.

Ми з вами трохи розуміємо природу різних чисел та вміємо проводити з ними арифметичні дії. Але виникають деякі питання, наприклад, звідки ми знаємо, що число  $\sqrt{2}$  не раціональне? Що

маємо на увазі, коли говоримо, що  $\pi$  приблизно дорівнює  $\frac{22}{7}$  і, що більш точноше, це наближення дорівнює 3,1416, а ще більш точноше 3,14159? Ми звикли думати про дійсні числа, що це числа, які вимірюють довжину, а їх добуток (наприклад  $\pi\sqrt{2}$ ) — як числа, які вимірюють площу прямокутника. Чому ми в якості міри площі беремо дійсне число? Ось деякі з питань, на які ми будемо намагатися відповідати.

Основна мета курсу «Числові системи» — побудова і вивчення систем натуральних, цілих, раціональних, дійсних і комплексних чисел на аксіоматичній основі.

Для досягнення основної мети в курсі «Числові системи» розв'язуються основні завдання:

- поглиблюється розуміння принципово важливих питань обґрунтування математики;

- остаточно формуються знання про відношення, алгебраїчні операції, алгебраїчні системи та їх ізоморфізм;

- поглиблюються знання про аксіоматичний метод у математиці, етапи його розвитку, про проблеми несуперечливості, категоричності та незалежності системи аксіом;

- розглядаються принципово важливі питання розширення алгебраїчних систем, у тому числі і числових систем та, зокрема, системи комплексних чисел до системи гіперкомплексних чисел.

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні знати:

- означення, основні властивості, класифікацію відношень та алгебраїчних систем;

- сутність аксіоматичного методу, етапи його розвитку;

- означення інтерпретації та моделі аксіоматичної теорії, проблем несуперечливості, категоричності та незалежності системи аксіом;

- означення та основні факти упорядкованих напівгруп, груп, напівкілець, кілець і полів;

- означення та основні властивості нормованих кілець і полів, властивості норми;

- аксіоматичні теорії систем натуральних, цілих,

раціональних, дійсних та комплексних чисел;

— теорему Фробеніуса про алгебри скінченного рангу з діленням над полем дійсних чисел.

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні вміти:

— формулювати означення та наводити приклади відношень різних типів;

— формулювати означення та наводити приклади упорядкованих алгебраїчних систем, зокрема, кілець і полів з архімедівським і неархімедівським порядком;

— формулювати аксіоматичні означення числових систем, доводити теореми про несуперечливість та категоричність систем аксіом;

— формулювати і доводити теореми про зв'язки чисел системи, що отримана в результаті мінімального розширення з числами попередньої числової системи;

— наводити приклади лінійних алгебр нескінченного і скінченного рангів, алгебр з діленням, вміти доводити теорему Фробеніуса та її аналоги для поля раціональних та поля комплексних чисел.

Навчальні завдання даного посібника повністю охоплюють всі теми курсу «Числові системи», що виносяться на практичні заняття у V семестрі на фізико-математичному факультеті.

У посібнику наводяться розробки практичних занять з курсу «Числові системи», зміст контрольної роботи з прикладами розв'язання типових завдань та індивідуальне завдання для кожного студента.

Кожне заняття крім визначеної теми містить мету, необхідні означення, основні задачі (вони розв'язуються в аудиторії) та задачі для самостійної роботи.

У вступі до кожного заняття наводиться перелік понять і тверджень, без знання яких неможливо розв'язувати завдання. Останній може використовуватися для довідок, однак знайомство з ним жодним чином не може замінити опрацювання відповідних розділів з підручника чи конспекту лекцій.

## Позначення

- $|a|$  — порядок елемента  $a$ ;  
 $\text{Aut } G$  — група всіх автоморфізмів групи  $G$ ;  
 $\mathbb{C}$  — множина (або адитивна група, або поле) комплексних чисел;  
 $E$  — одинична підгрупа групи;  
 $e$  — одиничний (нейтральний) елемент групи;  
 $G/H$  — фактор-група групи  $G$  за нормальною підгрупою  $H$ ;  
 $\text{Inn } G$  — група всіх внутрішніх автоморфізмів групи  $G$ ;  
 $\text{Im } \varphi$  — образ гомоморфізму  $\varphi$ ;  
 $\text{Ker } \varphi$  — ядро гомоморфізму  $\varphi$ ;  
 $M_n(P)$  — адитивна група матриць порядку  $n$  з коефіцієнтами з поля  $P$ ;  
 $\mathbb{N}$  — множина (або адитивна напівгрупа) натуральних чисел;  
 $\mathbb{Q}$  — множина (або адитивна група, або поле) раціональних чисел;  
 $\mathbb{Q}^*$  — мультиплікативна група поля раціональних чисел;  
 $\mathbb{Q}^+$  — множина (або мультиплікативна група) всіх додатних раціональних чисел;  
 $Q_8$  — група кватерніонів;  
 $\mathbb{R}$  — множина (або адитивна група, або поле) дійсних чисел;  
 $\mathbb{R}^+$  — множина (або мультиплікативна група) всіх додатних дійсних чисел;  
 $\mathbb{R}^*$  — мультиплікативна група поля дійсних чисел;  
 $S_n$  — симетрична група всіх підстановок степеня  $n$ ;  
 $T$  — мультиплікативна група комплексних чисел, модуль яких дорівнює 1;  
 $\mathbb{Z}$  — множина (або адитивна група, або кільце) цілих чисел;  
 $\mathbb{Z}_n$  — множина (або адитивна група, або кільце) класів лишків за модулем числа  $n$ ;  
 $\varphi \circ \psi$  — композиція відображень  $\varphi$  і  $\psi$  (тобто  $(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$ ).

# Заняття 1. Найпростіші логічні і теоретико-множинні поняття. Відношення та функції.

## Основні види відношень

*Мета заняття:* розглянути основні теоретико-множинні поняття, відношення та основні види відношень.

*Необхідні означення.*

**Прямим (декартовим) добутком** множини  $A$  і  $B$  називається множина  $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ .

При цьому  $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$ .

Будь-яка підмножина  $S$  прямого добутку  $A \times B$  називається **бінарним відношенням**, заданим у множинах  $A$  і  $B$ .

Бінарне відношення  $\alpha$ , визначене в множинах  $A$  і  $B$ , називається **функціональним**, якщо

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B)((a, b) \in \alpha).$$

Розрізняють **відображення**:

1) **сюр'єктивне (мономорфне)**, якщо

$$\forall b \in B \exists a \in A (\alpha(a) = b)$$

при цьому множина  $A$  відображається на всю множину  $B$ ;

2) **ін'єктивне (епіморфне)**, якщо

$$\forall a_1, a_2 \in A (a_1 \neq a_2 \Rightarrow \alpha(a_1) \neq \alpha(a_2)),$$

тобто різні елементи з  $A$  відображаються в різні елементи з  $B$ ;

3) **бієктивне (ізоморфне)**, якщо воно одночасно сюр'єктивне і ін'єктивне.

Функція  $S : A^n \rightarrow A$  називається  **$n$ -арною алгебраїчною операцією**.

Бінарне відношення  $\alpha$ , задане в множині  $A$ , називають:

1) **Зв'язним**, якщо  $\forall a, b \in A (a = b \vee (a, b) \in \alpha \vee (b, a) \in \alpha)$ .

- 2) **Нев'язним**, якщо  $\forall a, b \in A (a \neq b \vee \overline{(a, b) \in \alpha} \vee \overline{(b, a) \in \alpha})$ .
- 3) **Рефлексивним**, якщо  $\forall a \in A ((a, a) \in \alpha)$ .
- 4) **Антирефлексивним**, якщо  $\forall a \in A (\overline{(a, a) \in \alpha})$ .
- 5) **Симетричним**, якщо  $\forall a, b \in A ((a, b) \in \alpha \Rightarrow (b, a) \in \alpha)$ .
- 6) **Антисиметричним**, якщо

$$\forall a, b \in A ((a, b) \in \alpha \wedge (b, a) \in \alpha \Rightarrow a = b).$$

- 7) **Асиметричним**, якщо  $\forall a, b \in A ((a, b) \in \alpha \Rightarrow \overline{(b, a) \in \alpha})$ .
- 8) **Транзитивним**, якщо

$$\forall a, b, c \in A ((a, b) \in \alpha \wedge (b, a) \in \alpha \Rightarrow (a, c) \in \alpha).$$

Нехай  $\rho, \sigma$  — бінарні відношення на множині  $A$ .

Під **композицією відношень**  $\rho$  і  $\sigma$  розуміють таке бінарне відношення  $\tau$ , що пара  $(a, b)$  належить до  $\tau$  тоді і тільки тоді, коли знайдеться такий елемент  $c \in A$ , що  $(a, c) \in \rho$  і  $(c, b) \in \sigma$ .

Якщо  $\tau$  — композиція відношення  $\rho$  і  $\sigma$ , то  $\tau = \rho \circ \sigma$ .

Бінарне відношення  $\alpha$ , задане в множині  $A$ , називається

- 1) відношенням **толерантності**, якщо воно рефлексивне і симетричне;
- 2) відношенням **еквівалентності**, або просто еквівалентністю на  $A$ , якщо воно має властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності;
- 3) відношенням **строго лінійного порядку**, якщо воно транзитивне, антирефлексивне, асиметричне і зв'язне;
- 4) відношенням **нестрогого лінійного порядку**, якщо воно транзитивне, рефлексивне і антисиметричне і зв'язне.
- 5) відношенням **строго часткового порядку**, якщо воно транзитивне, антирефлексивне, асиметричне і незв'язне;
- 6) відношенням **нестрогого часткового порядку**, якщо воно транзитивне, рефлексивне і антисиметричне і незв'язне.

## Основні задачі

- Що можна сказати про множини  $A$  і  $B$ , якщо:
  - в  $A \times B$  є елементи виду  $(x, x)$ ;    б)  $A \times B = B \times A$ ;
  - $A \times B$  має лише один елемент;
  - $A \times B$  має рівно 5 елементів?
- Нехай  $A, B, C$  – довільні множини. Довести, що
  - $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$ ;
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;
  - $A \setminus B = A \iff A \cap B = \emptyset$ .
- Дослідити та класифікувати бінарні відношення:
  - $\forall x, y \in R \ (xSy \iff |x| = |y|)$ ;
  - $\forall x, y \in R \ (xSy \iff x > y + 1)$ .
  - $M$  – довільна множина,  $P(M)$  – її булеан і  $\forall A, B \in P(M) \ (ASB \iff A \subseteq B)$ .
  - $\forall (a, b), (c, d) \in (Z \times Z \setminus \{0\}) \ ((a, b)S(c, d) \iff ad = bc)$ .
- З'ясувати, які з наступних відношень будуть відношеннями порядку (строного порядку):
  - в множині студентів групи дві людини знаходяться у відношенні  $\rho$ , якщо перший з них за зростом більший другого;
  - в множині  $N$  числа  $a$  і  $b$  знаходяться у відношенні  $\rho$ , якщо кількість цифр в десятковому записі першого числа не більша кількості цифр другого числа;
  - в множині  $R$  відношення  $\rho = \{(a, b) | a^2 > b^2, a, b \in \mathbb{R}\}$ ;
  - в множині  $Z^+$  відношення  $a\rho b \iff (a - b)$  – парне число.
- Нехай  $P$  – відношення паралельності прямих площини, а  $T$  – відношення перпендикулярності прямих цієї ж площини. Знайти:
  - $P \circ T$ ;    2)  $T \circ P$ ;    3)  $P \circ P$ ;    4)  $T \circ T$ .
- Знайти  $S_1 \circ S_2$ , якщо
$$S_1 = \{(x, y) | x, y \in R \wedge y = x - 1\}, \quad S_2 = \{(x, y) | x, y \in R \wedge y = |x|\}.$$

7. Які з наведених відношень є функціями? Вказати область визначення і область значень цих функцій.

1)  $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \wedge y = x^3\}$ , 2)  $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \wedge x < y < x + 5\}$ .

8. Чи буде  $T$  відношенням порядку в  $\mathbb{N}$ , якщо

$$\{T = (x, y) | x, y \in \mathbb{N} \wedge (x, y) \in T \Leftrightarrow x = y \vee (x, y) = 1\}$$

9. Знайти графічно композицію графіків функцій  $y = x - 1$  і  $y = |x|$ .

10. Які з відображень множини всіх цілих чисел у множину цілих невід'ємних чисел є сюр'ективними, бієктивними відображеннями:

1)  $f(n) = n^2$ ; 2)  $f(n) = |n|$ ;

$$3) f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{якщо } n \geq 0; \\ 2|n| - 1, & \text{у протилежному разі.} \end{cases}$$

### Завдання для самостійної роботи

11. Нехай  $A, B, C$  – довільні множини. Довести, що

- 1)  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ ;
- 2)  $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ ;
- 3)  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ ;
- 4)  $A \subseteq B \Leftrightarrow ((A \times C) \subseteq (B \times C)) \wedge ((C \times A) \subseteq (C \times B))$ .

12. Нехай  $A$  є множина людей, які будь-коли жили на Землі,  $T$  є відношенням «... є батьком ...», а  $S$  – відношення «... є матір'ю ...». Що означають відношення  $T \circ S$  і  $S \circ T$ ?

13. Дослідити та класифікувати бінарні відношення:

- 1)  $\forall x, y \in \mathbb{R} (xSy \Leftrightarrow [x] = [y])$ ;
- 2)  $\forall x, y \in \mathbb{Z} (xSy \Leftrightarrow x \leq y + 1)$ ;
- 3)  $\forall x, y \in \mathbb{Z} (xSy \Leftrightarrow x = y^2)$ ;
- 4)  $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2 ((a, b)S(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c)$ ;

5) у множині  $A = \{0, 1\}$  введемо відношення « $\succ$ » наступним чином:  $0 \succ 0$ ,  $1 \succ 0$ ,  $\overline{1} \succ \overline{1}$ ,  $\overline{0} \succ \overline{1}$ . Довести, що відношення « $\succ$ » є відношенням лінійного порядку, яке є ні строгим, ні нестрогим.

14. Які з відношень, визначених у  $\mathbb{Z}$  є функціональними:

1)  $x \cdot y$ , 2)  $x + y = 0$ , 3)  $x + 1 = y$ , 4)  $|x| + |y| = 1$ ?

15. На множині  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  задайте відношення порядку:

- 1) нестрогого та нелінійного,
- 2) строгого та нелінійного,
- 3) нестрогого та лінійного,
- 4) строгого та лінійного.

16. Побудуйте лінійний порядок на множині  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

17. Назвемо два слова «схожими», якщо їх можна утворити одне з одного, замінивши не більше однієї букви. За допомогою таких «схожих» слів перетворити «муху» в «слона».

## Заняття 2. Основні класичні алгебраїчні системи

*Мета:* розглянути основні класичні алгебраїчні системи: напівгрупи, групи, напівкільця, кільця, поля.

*Необхідні означення.*

**Групоїдом** називається непорожня множина  $G$  з визначеною бінарною алгебраїчною операцією.

**Напівгрупою** називається непорожня множина  $G$  з бінарною алгебраїчною операцією « $*$ », яка задовольняє умові асоціативності: для довільних  $a, b, c \in G$

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Напівгрупа називається **моноїдом** якщо існує нейтральний елемент: існує такий елемент  $e \in G$ , що для довільного  $a \in G$

$$a * e = e * a = a.$$

Моноїд називається **групою** якщо існує оборотний елемент: для кожного  $a \in G$  існує такий елемент  $a^{-1} \in G$ , що

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Нехай  $K$  — непорожня множина, з двома заданими бінарними операціями: додавання « $+$ » і множення « $\cdot$ ».

Алгебраїчна система  $(K, +, \cdot)$  називається **напівкільцем**, якщо:

- 1)  $(K, +)$  — комутативна напівгрупа;
- 2)  $(K, \cdot)$  — напівгрупа;

3) дві операції пов'язані дистрибутивним законом:

$$\forall a, b, c \in K ((a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \wedge c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b).$$

Алгебраїчна система  $(K, +, \cdot)$  називається **кільцем**, якщо:

1)  $(K, +)$  — комутативна група;

2)  $(K, \cdot)$  — напівгрупа;

3) дві операції пов'язані дистрибутивним законом:

$$\forall a, b, c \in K ((a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \wedge c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b).$$

4) якщо  $(K, \cdot)$  — комутативна напівгрупа, то  $(K, +, \cdot)$  називається **комутативним кільцем**;

5) якщо  $(K, \cdot)$  — комутативна напівгрупа з одиницею (комутативний моноїд), то  $(K, +, \cdot)$  називається **комутативним кільцем з одиницею**.

Алгебраїчна система  $(K, +, \cdot)$  називається **тілом**, якщо:

1)  $(K, +, \cdot)$  — кільце;

2)  $K \setminus \{0\} \neq \emptyset \wedge (K \setminus \{0\}, \cdot)$  — група.

Алгебраїчна система  $(K, +, \cdot)$  називається **полем**, якщо:

1)  $(K, +, \cdot)$  — кільце;

2)  $K \setminus \{0\} \neq \emptyset \wedge (K \setminus \{0\}, \cdot)$  — комутативна група.

**Поле** — це комутативне тіло.

## Основні задачі

1. Чи є бінарною алгебраїчною операцією:

1) віднімання на  $\mathbb{N}$ ;

2) додавання на множині  $A_m$  цілих чисел, більших деякого цілого числа  $m$ ;

3) перетин підмножин на множині  $P(M)$  всіх підмножин даної множини  $M$ .

2. Чи будуть наступні операції на множині дійсних чисел комутативними та асоціативними:

$$1) a * b = 7a|b|, \quad 2) a * b = a(b + 1) + b, \quad 3) a * b = 2a + b.$$

3. З'ясувати, чи утворюють групоїд, напівгрупу, моноїд, групу наступні множини з заданими на них операціями:

$$1) (Z, *), \text{ де } n * m = n + m + nm = (1 + n)(1 + m) - 1;$$

$$2) (N, *), \text{ де } a * b = a^b + 1;$$

$$3) (R, *), \text{ де } a * b = a + b + 5;$$

$$4) (R, -), \text{ де «-» — звичайне віднімання};$$

5) множина  $A$  пар  $(x, y)$  дійсних чисел, де  $x \neq 0$ , відносно операції «\*», якщо  $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2 + y_1)$ .

6) множина  $SL_n(R)$  всіх матриць порядку  $n$  з дійсними елементами і визначником, що дорівнює одиниці, відносно множення матриць.

7) множина невідроджених матриць виду  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$  з дійсними елементами відносно операції множення.

4. З'ясувати, яка з заданих множин є кільцем, комутативним кільцем, полем відносно заданих алгебраїчних операцій додавання та множення:

$$1) \{a + b\sqrt{7} | a, b \in Z\}; \quad 2) \{a + b\sqrt{3} | a, b \in Q\};$$

3) множина квадратних матриць порядку  $n > 1$  відповідно з натуральними, цілими, раціональними, дійсними, комплексними елементами;

$$4) \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Z \right\};$$

$$5) (Z, \oplus, \otimes), \text{ де } a \oplus b = a + b, a \otimes b = -ab.$$

5. Довести, що множина  $P(M)$  всіх підмножин множини  $M$  (булеан множини  $M$ ) з операціями  $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ,  $A \cdot B = A \cap B$ ,  $A, B \in P(M)$  є кільцем з одиницею, кожний елемент якого задовольняє рівнянню  $x^2 = x$ .

6. Довести, що множина  $Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$  є комутативним кільцем з одиницею відносно операції додавання і множення за модулем  $n$ :

$$a \oplus b = r, a \otimes b = s,$$

$$\text{де } a + b = nq + r, 0 \leq r < n, ab = nt + s, 0 \leq s < n.$$

### Завдання для самостійної роботи

7. Чи є бінарною алгебраїчною операцією:

- 1) ділення на  $Q$ ;
- 2) множення на множині  $Z \setminus 5Z$  цілих чисел, не кратних 5,
- 3) множення на множині  $A_m$  цілих чисел, більших деякого цілого числа  $m$ ;
- 4) об'єднання підмножин на множині  $P(M)$  всіх підмножин даної множини  $M$ .

8. Чи будуть наступні операції на множині дійсних чисел комутативними та асоціативними:

- 1)  $a * b = a + b + 7$ ,
- 2)  $a * b = [a] + b$ ,  $[a]$  – ціла частина числа  $a$ ,
- 3)  $a * b = a(b + 1) + b(a + 1)$ .

9. З'ясувати, чи утворюють групоїд, напівгрупу, моноїд, групу наступні множини з заданими на них операціями:

- 1)  $(N, *)$ , де  $a * b = \max\{a, b\}$ ;
- 2)  $(R^+, *)$ , де  $a * b = a^2 b^2$ ;

- 3) множина всіх матриць виду  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in R \setminus \{0\} \right\}$

відносно операції множення;

4) множина всіх векторів площини відносно операції додавання векторів.

10. На множині  $P$  пар  $(a, b)$  дійсних чисел визначено операції « $\oplus$ » і « $\otimes$ » за формулами

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Чи є  $(P, \oplus, \otimes)$  кільцем, полем?

**11.** Довести, що елемент, до якого існує обернений елемент, не може бути дільником нуля.

**12.** На множині  $R_0 = R \setminus \{0\}$  визначена бінарна операція «\*», яка задовольняє умови:

1)  $\forall x, y, z \in R_0((x, y) * z = x(y * z))$ ;

2)  $\forall x \in R_0(x * x = 1)$ ;

Обчислити  $12 * 18$  і з'ясувати, чи є умови 1) і 2) незалежними.

### Заняття 3. Гомоморфізми та ізоморфізми алгебраїчних систем.

*Мета:* перевірка алгебраїчних систем на гомоморфність та ізоморфність

*Необхідні означення.*

Нехай  $A$  — непорожня множина,  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$  — множина визначених на  $A$  алгебраїчних операцій,  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$  — множина визначених в  $A$  відношень,  $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  — множина виділених (фіксованих) елементів із  $A$ . Тоді впорядковану четвірку

$$(A, \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}, \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}, \{a_1, a_2, \dots, a_s\})$$

називають **алгебраїчною системою**.

Дві алгебраїчні системи

$$(A, \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}, \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}, \{a_1, a_2, \dots, a_s\}),$$

$$(B, \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}, \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \{b_1, b_2, \dots, b_t\})$$

називають **однотипними**, якщо:

1)  $k = m, r = n, s = t$ ;

2) відповідні операції  $\alpha_j$  і  $\beta_j$  мають однакову арність (однакову кількість аргументів) для всіх  $j = 1, 2, \dots, k = m$ ;

3) відповідні відношення  $\omega_i$  і  $\sigma_i$  мають однакову арність (однакову кількість аргументів) для всіх  $i = 1, 2, \dots, r = n$ .

Дві однотипні алгебраїчні системи

$$(A, \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}, \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}, \{a_1, a_2, \dots, a_s\}),$$

$$(B, \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}, \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}, \{b_1, b_2, \dots, b_s\})$$

називаються **ізоморфними**, якщо існує таке взаємно однозначне відображення  $f$  множини  $A$  на множину  $B$  (ізоморфізм  $A$  на  $B$ ), при якому виконуються умови:

1)  $\forall x_1, x_2, \dots, x_p \in A$

$$(f\alpha_j(x_1, x_2, \dots, x_p) = \beta_j(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p))),$$

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p) \in B \text{ для всіх } j = 1, 2, \dots, k;$$

2)  $\forall x_1, x_2, \dots, x_t \in A$   
 $((x_1, x_2, \dots, x_t) \in \omega_j \Leftrightarrow (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_t)) \in \sigma_j)$   
 для всіх  $j = 1, 2, \dots, k$ ;

3)  $f(a_j) = b_j$  для всіх  $j = 1, 2, \dots, s$ .

Якщо при цьому  $f$  просто відображення, то алгебраїчні системи  $A$  і  $B$  називаються гомоморфними, а саме відображення  $f$  — гомоморфізмом.

## Основні задачі

1. Нехай  $(A, +, \cdot)$ ,  $(B, \oplus, \otimes)$  — алгебраїчні системи з відповідними бінарними операціями і  $f$  — гомоморфне відображення  $A$  на  $B$ . Довести, що операції  $\oplus$  і  $\otimes$  на  $B$  пов'язані законом дистрибутивності, якщо цим законом пов'язані операції  $+$  і  $\cdot$  на  $A$ .

2. Нехай  $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in Z \right\}$ . Довести, що відображення

$$\varphi : K \rightarrow Z : \varphi \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a - b \text{ — гомоморфізм.}$$

Знайти ядро гомоморфізму  $\text{Ker } \varphi$ .

3. Довести, що:

а) множина цілих чисел і множина цілих парних чисел ізоморфні відносно додавання;

б) поле матриць  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ,  $a \in R$  ізоморфне полю дійсних чисел;

в) відношення ізоморфізму є відношенням еквівалентності.

4. Довести, що поля  $Q[\sqrt{p}]$  і  $Q[\sqrt{q}]$ , де  $p$  і  $q$  — різні прості числа, не ізоморфні.

5. Довести, що в системі натуральних чисел є безліч піднапівгруп, ізоморфних адитивній напівгрупі  $(N, +)$  натуральних чисел.

6. Знайти всі автоморфізми поля комплексних чисел  $C$ , при яких кожне дійсне число переходить в себе.

## Завдання для самостійної роботи

7. Довести, що множина цілих чисел і множина цілих парних чисел не ізоморфні відносно множення.

8. Довести, що кільце  $(K, \oplus, \otimes)$  пар  $(a, b)$   $a, b \in R$  з операціями

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$(a_1, b_1) \otimes (a_2, b_2) = (a_1 b_2 + a_2 b_1, a_1 a_2 + b_1 b_2)$$

ізоморфне кільцю матриць  $\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in R$  за додаванням і множенням.

9. Довести, що групоїди  $(R, *)$  і  $(R, \circ)$ , де  $x * y = \frac{|x + y|}{2}$ ,  
 $x \circ y = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$ , не ізоморфні.

## Заняття 4. Змістовна аксіоматична теорія натуральних чисел. Аксіоми Пеано і наслідки з них.

*Мета:* використання аксіоми індукції для доведення математичних рівностей та нерівностей.

*Необхідні означення.*

Алгебру  $(N; ', +, \cdot; 1)$  називають **системою натуральних чисел**, де  $N$  — непорожня множина елементів, «'» — символ унарної алгебраїчної операції, «+» і « $\cdot$ » — символи бінарних алгебраїчних операцій на  $N$ , «1» — виділений елемент множини  $N$ , якщо виконуються **аксіоми Пеано**:

$$n_1. \forall a \in N (a' \neq 1);$$

$$n_2. \forall a, b \in N (a' = b' \Rightarrow a = b);$$

$n_3.$  Аксіома індукції:

$$\forall M (M \subseteq N \wedge 1 \in M \wedge \forall a \in N (a \in M \Rightarrow a' \in M) \Rightarrow M = N);$$

$$n_4. \forall a \in N (a + 1 = a');$$

$$n_5. \forall a, b \in N (a + b' = (a + b)');$$

$$n_6. \forall a \in N (a \cdot 1 = a);$$

$$n_7. \forall a, b \in N (a \cdot b' = ab + a).$$

### Основні задачі

1. Доведіть за допомогою аксіоми індукції властивості дій над натуральними числами:

1) комутативність множення:  $\forall a, b \in N (a \cdot b = b \cdot a)$ ,

2) ліву дистрибутивність:  $\forall a, b, c \in N (a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$ .

2. Доведіть, що для всіх натуральних чисел  $n \geq 5$  виконується  $2^n > n^2$ .

3. Доведіть, що при довільному натуральному  $n$  число  $10^n - 1$ :9.

4. Позначивши натуральні числа як  $1' = 2, 2' = 3, 3' = 4, 4' = 5, 5' = 6, 6' = 7, 7' = 8, 8' = 9$ . Довести на основі аксіом Пеано:  $2 + 3 = 5, 3 + 6 = 9, 2 \cdot 4 = 8, 3 \cdot 3 = 9$ .

5. Довести:

1)  $\forall a, b \in N (a + 1 \geq b \wedge b > a \Rightarrow b = a + 1)$ ;

2)  $\forall a, b \in N (a + b > a)$ .

6. Відомо, що принцип найменшого числа еквівалентний аксіомі математичної індукції. Довести твердження: для будь-якого числа  $n \in N$  справедлива формула:  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , не користуючись аксіомою математичної індукції.

7. Дано:  $a_{n+1} = a_1 \cdot a_n - a_0 \cdot a_{n-1}$ ;  $a_0 = 2, a_1 = 3$ .

Довести, що  $a_n = 2^n + 1$ .

8. Довести, що:

1)  $\forall n \in N \left( 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$ ;

2)  $\forall n \in N ((10^n - 4n^2 + 3n) : 9)$ ;

3)  $\forall n \in N (2^n > n^2 - 2n + 2)$ .

9. Довести, що сума однакових непарних степенів двох натуральних чисел ділиться на суму основ, тобто  $(a^{2n-1} + b^{2n-1}) : (a + b)$  для будь-яких натуральних  $n$ , де  $a$  і  $b$  — цілі, причому  $a + b \neq 0$ .

## Завдання для самостійної роботи

10. Довести:

1)  $\forall a, b \in \mathbb{N} (ab \geq a)$ ;

2)  $\forall a, b \in \mathbb{N} (a : b \Rightarrow \frac{a}{b} \leq a)$ .

**11.** Довести, що:

1)  $\forall n \in \mathbb{N} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2)$ ;

2)  $\forall n \in \mathbb{N} ((7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n) : 19)$ ;

3)  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} (3^n > 2^n + 3n)$ .

**12.** Довести, що для парного  $n$  вираз  $20^n + 16^n - 3^n - 1$  ділиться на 323,  $n \in N_0$ .

## Заняття 5. Упорядковані алгебраїчні системи. Критерій упорядкованості кілець. Незалежність системи аксіом натуральних чисел.

*Мета:* перевірка незалежності аксіом системи аксіом Пеано, перевірка алгебраїчних систем на впорядкованість.

*Необхідні означення.*

Упорядкована алгебраїчна система є складним математичним об'єктом, який одночасно наділений алгебраїчною структурою (напівгрупи, групи...) і структурою упорядкованої множини, які між собою певним чином узгоджуються.

Алгебраїчна система  $(G, *, \succ)$  називається **упорядкованою напівгрупою**, якщо виконуються умови (аксіоми):

- 1)  $(G, *)$  — напівгрупа;
- 2)  $(G, \succ)$  — упорядкована множина;
- 3)  $\forall a, b, c \in G (a \succ b \Rightarrow (a * c \succ b * c) \wedge (c * a \succ c * b))$  — аксіома монотонності відношення « $\succ$ » відносно операції « $*$ ».

Якщо  $(G, *)$  — група, то система  $(G, *, \succ)$  називається **упорядкованою групою**.

Якщо відношення « $\succ$ » є відношенням часткового (лінійного) порядку, то система  $(G, *, \succ)$  називається частково (лінійно) впорядкованою напівгрупою або групою.

Алгебраїчна система  $(K, +, \cdot, >)$  називається **упорядкованим напівкілецьцем**, якщо виконуються наступні умови (аксіоми):

- 1)  $(K, +, \cdot)$  — напівкілецьце;
- 2)  $(K, >)$  — упорядкована множина;
- 3)  $\forall a, b, c \in K (a > b \Rightarrow (a + c > b + c))$ ;
- 4)  $\forall a, b \in K \forall c \in K^+ (a > b \Rightarrow (ac > bc) \wedge (ca > cb))$ .

В аксіомі 4)  $K^+$  — непорожня множина додатних елементів.

Упорядковане напівкілецьце  $(K, +, \cdot, >)$  називається **упорядкованим кільцем (полем)**, якщо алгебраїчна система

$(K, +, \cdot)$  є кільцем (полем).

**Теорема.** (Критерій строгої і лінійної впорядкованості кільця)  
Кільце  $K$  тоді і тільки тоді є строго лінійно впорядкованим кільцем, коли для його елементів означена властивість бути додатним елементом, яка задовольняє наступні умови:

- 1)  $\forall a \in K (a > 0 \vee a = 0 \vee -a > 0)$ ;
- 2)  $\forall a, b \in K (a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a + b > 0 \wedge ab > 0)$ ;
- 3)  $\forall a, b \in K (a > b \Leftrightarrow a - b > 0)$ .

**Теорема.** (Критерій однозначності строгого лінійного порядку)  
Нехай  $(K, +, \cdot, 0)$  — кільце, яке можна лінійно і строго впорядкувати хоча б одним способом і нехай  $K^+, K^{++}$  — додатні частини двох порядків. Тоді

$$K^+ = K^{++} \iff K^+ \subseteq K^{++}.$$

## Основні задачі

1. Перевірте, що в алгебраїчній системі  $(Z_2, +, \cdot, \bar{1})$ , де  $Z_2$  — кільце класів лишків за модулем 2, виконуються всі аксіоми, окрім аксіоми

$$n_1 : \forall a \in N (a' \neq 1).$$

2. За допомогою алгебраїчної системи  $(A, \circ, \times, 1)$ , де  $A = \{1, 2\}$  та  $1 \circ 2 = 2 \circ 1 = 1 \circ 1 = 2 \circ 2 = 2$ ,  $1 \times 2 = 2 \times 2 = 2 \times 1 = 2$ ,  $1 \times 1 = 1$  покажіть незалежність аксіоми  $n_2 : \forall a, b \in N (a' = b' \Rightarrow a = b)$  від інших.

3. Чи можна адитивну групу з двох елементів лінійно і строго впорядкувати?

4. Який порядок у напівгрупі  $(\{0, 1\}, \cdot)$ , якщо відношення порядку введено так:  $0 \succ 0$ ,  $1 \succ 0$ .

5. Довести, що напівгрупу натуральних чисел  $(\mathbb{N}, \cdot)$  можна лінійно і строго упорядкувати нескінченною кількістю способів.

6. Довести, що алгебраїчна система  $(N, \cdot, :)$  — частково і нестрого впорядкована напівгрупа.

7. Довести, що у впорядкованому кільці з одиницею завжди  $1 \succ 0$ . Якщо ще і  $a$  і  $b$  мають в ньому обернені елементи, то з  $a \succ b$  для  $a$  і  $b$  одного знаку випливає:  $\frac{1}{a} \prec \frac{1}{b}$ .

8. Чи можна в  $(N, +, \cdot, >)$  порядок ввести так:

$$\forall a, b \in N (a > b \Leftrightarrow \exists n \in N (b = a + n)).$$

9. Нехай  $(T, +, \cdot, 0, e, \succ)$  — упорядковане тіло.

Довести, що  $\forall a, b \in T (a \succ b \Rightarrow a \succ (a + b)(2e)^{-1} \succ b)$ .

10. Чи є впорядкованим кільце  $(Z, +, \cdot, \succ)$ , де порядок  $\succ$  введений так: 0 передреє будь-якому елементу і зберігається порядок елементів, відмінних від нуля.

## Завдання для самостійної роботи

11. Довести, що напівкільце натуральних чисел  $(N, +, \cdot)$  можна лінійно і строго упорядкувати лише одним способом.

12. Довести, що напівгрупу натуральних чисел  $(N, +)$  можна лінійно і строго упорядкувати тільки двома способами.

13. Довести, що напівгрупу цілих чисел  $(Z, \cdot)$  не можна лінійно і строго упорядкувати.

14. Довести, що в упорядкованому кільці сума квадратів скінченного числа його відмінних від нуля елементів не дорівнює нулю.

15. Нехай  $(T, +, \cdot, 0, e, \succ)$  — упорядковане тіло.

Довести, що  $\forall a \in T (a \succ 0 \Leftrightarrow a^{-1} \succ 0)$ .

## Заняття 6. Цілі числа.

*Мета:* вивчення аксіоматичної теорії цілих чисел та використання властивостей цілих чисел.

*Необхідні означення.*

Алгебраїчну систему  $(\mathbb{Z}; +, \cdot; 0, 1, N)$  називають **системою цілих чисел**, а її елементи цілими числами, якщо виконуються такі властивості (**аксіоми цілих чисел**):

$z_1$ .  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ;

$z_2$ .  $(\mathbb{Z}; +, \cdot; 0, 1)$  — комутативне кільце з одиницею;

$z_3$ . *Аксіома мінімальності:* Нехай  $M \subseteq \mathbb{Z}$ , причому

а)  $N \subset M$ ;

б)  $\forall a, b \in M (a \in M \wedge b \in M \Rightarrow (a - b) \in M)$ .

Тоді  $M = \mathbb{Z}$ .

Систему цілих чисел запишемо скорочено так:  $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$ , адитивну групу цілих чисел позначатимемо  $(\mathbb{Z}; +; 0)$ , а мультиплікативну напівгрупу цілих чисел  $(\mathbb{Z}; \cdot; 1)$ .

**Теорема.** *Будь-яке ціле число є різниця двох натуральних чисел, тобто  $\forall a \in \mathbb{Z} \exists l, k \in \mathbb{N} (a = k - l)$ .*

**Наслідок.** *Кожне ціле число є або натуральним числом, або нулем, або протилежним до натурального (від'ємним числом).*

### Основні задачі

1. Довести, що рівняння  $3x = 1$  не має розв'язку в  $\mathbb{Z}$ .
2. Довести, що із  $m$  різних цілих чисел завжди можна вибрати два таких, різниця яких ділиться на  $m - 1$ .
3. Довести, що числа виду  $3n + 2$  при кожному натуральному  $n$  не є квадратами цілих чисел.
4. Чи можуть довжини обох катетів трикутника Піфагора бути непарними?

5. Довести, що  $(a^2 + b^2):7 \Rightarrow a:7 \wedge b:7$ .

6. Довести, що для кожного цілого  $n$  вираз  $\frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30}$  є цілим числом.

7. Чи існують цілі числа  $m$  і  $n$ , які задовольняють рівняння:  $m^2 + 1982 = n^2$ ?

8. Чи можна в кільці цілих чисел виділити підмножину, яка сама буде кільцем?

9. Знайти всі автоморфізми кільця цілих чисел.

10. Довести, що множини  $N$  і  $Z$  рівнопотужні.

### Завдання для самостійної роботи

11. Довести, що довжина принаймні одного із катетів трикутника Піфагора ділиться на 3.

12. Розв'язати в цілих числах рівняння  $x^n + y^n = z^{n+1}$ .

13. Чи можна на площині побудувати такий правильний трикутник, щоб усі його вершини мали цілі координати?

14. Нехай  $K = \{(a, b) | a, b \in Z\}$  і операції  $+$  і  $\cdot$  визначено так:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

Довести, що  $(K, +, \cdot)$  — комутативне кільце з дільниками нуля.

## Заняття 7. Аксиоматична теорія раціональних чисел.

*Мета:* вивчення аксиоматичної теорії раціональних чисел та використання властивостей раціональних чисел.

*Необхідні означення.*

Алгебраїчну систему  $(\mathbb{Q}; +, \cdot; 0, 1)$  називають **системою раціональних чисел**, а її елементи раціональними числами, якщо виконуються такі властивості (**аксіоми раціональних чисел**):

q<sub>1</sub>.  $Z \subset Q$ ;

q<sub>2</sub>.  $(Q; +, \cdot; 0, 1)$  — поле;

q<sub>3</sub>. *Аксиома мінімальності:* Нехай  $M \subseteq Q$ , причому

а)  $Z \subset M$ ;

б)  $\forall q_1, q_2 \in Q \left( q_1 \in M \wedge q_2 \in M \wedge q_2 \neq 0 \Rightarrow \left( \frac{q_1}{q_2} \right) \in M \right)$ .

Тоді  $M = Q$ .

**Теорема.** *Будь-яке раціональне число є часткою двох цілих чисел.*

### Основні задачі

1. Вивести правила додавання, віднімання і ділення дробів.
2. Довести, що мультиплікативну групу всіх раціональних чисел, відмінних від нуля, не можна лінійно і строго впорядкувати.
3. Довести, що множина раціональних чисел зчисленна.
4. Довести, що  $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$  для  $a, b \in Z, b \neq 0$ .
5. Довести, що якщо  $a \neq 0$  і  $b \neq 0$ , то  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}, a, b \in Z$ .

6. Довести, що коли дріб  $\frac{a}{b}$  нескоротний, то  $\frac{a+b}{ab}$ ,  $\frac{a-b}{ab}$  — також нескоротні дроби.

7. Довести, що число  $1+\sqrt{3}$  не є квадратом жодного числа  $a+b\sqrt{3}$ , де  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

8. Довести раціональність чисел:

1)  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$ ;    2)  $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$ .

9. Яке з чисел більше: а)  $0,7(81)$  чи  $\frac{11}{14}$ ;    б)  $\frac{m}{n}$  чи  $\frac{m^2}{n^2}$ ?

10. Довести, що раціональними є такі числа:

1)  $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$ ;    2)  $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$ ;  
3)  $\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}$ .

### Завдання для самостійної роботи

11. Довести, що рівняння  $x^3 + x^2y + y^3 = 0$  не має раціональних коренів, крім  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

12. Довести раціональність чисел:

1)  $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$ ;    2)  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ ;  
3)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2} - 3}$ ;    4)  $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ .

13. При якій умові: а)  $\frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \frac{a + b}{a + c}$ ;    б)  $a + b = ab$ .

## Заняття 8. Раціональні числа.

*Мета:* доведення раціональності чисел.

### Основні задачі

1. Довести, що такі є раціональними:

1)  $\operatorname{tg}(\arcsin \frac{5}{13})$ ; 2)  $\sin(\operatorname{arctg} \frac{3}{4} - \arccos \frac{12}{13})$ ;

3)  $\left( \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \right)^2$ ;

4)  $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$ .

2. Чи існують два раціональних числа (дроби), сума і добуток яких цілі числа?

3. Раціональне чи ірраціональне число  $\sqrt{\sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}}$ ?

4. Відомо, що числа  $a, b, \sqrt{a} - \sqrt{b}$  — раціональні. Довести, що  $\sqrt{a}$  і  $\sqrt{b}$  — теж раціональні числа.

5. Знайти правильний дріб, що перевищує  $\frac{1}{3}$ , знаючи, що від збільшення його чисельника на деяке число і множення знаменника на те саме число величина дроби не зміниться.

6. Довести, що дріб  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2 + 5}$  для будь-якого натурального  $n$  можна подати мішаним періодичним десятковим дробом.

7. Знайти всі раціональні значення  $x$ , при яких  $\sqrt{x^2 + x + 1}$  є раціональне число.

### Завдання для самостійної роботи

8. Довести, що такі є раціональними:

1)  $\sin(2\operatorname{arctg} \frac{1}{2}) - \tan(\frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{17})$ ;

2)  $2\operatorname{arctg}(-2) + 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

9. Чи існують два раціональних числа (дроби). сума і сума квадратів яких цілі числа?

10. Довести, що дані числа є раціональними:

1)  $\operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 50^\circ + \operatorname{tg}^2 70^\circ$ ;

2)  $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ \cdot \operatorname{tg} 140^\circ$ .

11. Довести, що число є раціональним  $\sqrt{\log_6 \sqrt[5]{25} + \log_6 \sqrt[7]{49}}$ .

12. Чи є раціональними числа:

1)  $\sqrt{6} + \sqrt{9} + \sqrt{19}$ ; 2)  $\sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}$ .

## Заняття 9. Дійсні числа. Зображення дійсних чисел.

*Мета:* вивчення аксіоматичної теорії дійсних чисел.

*Необхідні означення.*

Алгебраїчну систему  $(\mathbb{R}; +, \cdot; 0, 1; >)$  називають **системою дійсних чисел**, а її елементи дійсними числами, якщо виконуються такі властивості (**аксіоми дійсних чисел**):

- 1).  $Q \subset R$ ;
- 2).  $(R; +, \cdot; 0, 1; >)$  — неперервне поле:
  - $r_1. \forall a, b \in R (a \neq b \Rightarrow a > b \vee b > a)$ ,
  - $r_2. \forall a \in R (\overline{a > a})$ ,
  - $r_3. \forall a, b, c \in R (a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c)$ ,
  - $r_4. \forall a, b, c \in R (a > b \Rightarrow a + c > b + c)$ ,
  - $r_5. \forall a, b, c \in R (a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc)$ ,
  - $r_6. \forall a, b \in R (a > 0 \Rightarrow (\exists n \in N(n \cdot a > b)))$ ,
  - $r_7.$  Для будь-якої фундаментальної послідовності  $(a_n)$  елементів з  $R$  існує в  $R$  елемент  $r$  такий, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r.$$

### Основні задачі

1. Розкласти в ланцюговий дріб:

1)  $\sqrt{5}$ ; 2)  $\frac{3 + \sqrt{7}}{2}$ .

2. Знайти квадратичну ірраціональність  $\alpha$ , якщо  $\alpha$  розкладається в такий нескінченний мішаний періодичний дріб:

1)  $[4; 3(2, 1)]$ ; 2)  $[(1, 2)]$ ; 3)  $[2; (5)]$ .

3. Довести, що число ірраціональне:

1)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ; 2)  $\sqrt[5]{5} - \sqrt{3}$ ; 3)  $\sqrt[3]{12}$ ; 4)  $\lg 2$ ; 5)  $\sqrt{\log_2 3}$ .

4. Довести, що  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  — ірраціональне число.
5. Довести, що поле дійсних чисел має лише тотожний автоморфізм.
6. Довести, що число  $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$  — ірраціональне.
7. Яке з заданих чисел більше:  
 1)  $\sqrt[3]{3}$  чи  $\sqrt[4]{4}$ ; 2)  $\sqrt{n} + \sqrt{m}$  чи  $\sqrt{n-1} + \sqrt{m+1}$ .

### Завдання для самостійної роботи

8. Розкласти в ланцюговий дріб:  
 1)  $\sqrt{7}$ ; 2)  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ; 3)  $\sqrt{q^2 + 1}, q \in \mathbb{N}$ .
9. Знайти квадратичну ірраціональність  $\alpha$ , якщо  $\alpha$  розкладається в такий нескінченний мішаний періодичний дріб:  
 1)  $[1;(3)]$ ; 2)  $[3,(1,1,6)]$ ; 3)  $[2;3,(2,1,1)]$ .
10. Довести, що число ірраціональне:  
 1)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ ; 2)  $\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt[3]{2}}$ ;  
 3)  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ ; 4)  $\sqrt{3}(\sqrt{6} - 3)$ .
11. Яке з заданих чисел більше:  
 1)  $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$  чи  $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$ ; 2)  $\sqrt{n} + \sqrt{m}$  чи  $\sqrt{n-k} + \sqrt{m+k}$ .
12. Довести, що число ірраціональне:  $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$ .

## Заняття 10. Дійсні та комплексні числа.

*Мета:* вивчення аксіоматичної теорії комплексних чисел.

*Необхідні означення.*

Алгебраїчну систему  $(\mathbb{C}; +, \cdot; 0, 1)$  називають **системою комплексних чисел**, а її елементи комплексними числами, якщо виконуються такі властивості (*аксіоми комплексних чисел*):

$c_1$ .  $R \subset C$ ;

$c_2$ .  $\exists i \in C (i^2 + 1 = 0)$ ;

$c_3$ .  $(C; +, \cdot; 0, 1)$  — поле;

$c_4$ . *Аксіома мінімальності:* Нехай  $M \subseteq C$ , причому

а)  $R \subset M \wedge i \in M$ ;

б)  $\forall c_1, c_2 \in C (c_1 \in M \wedge c_2 \in M \Rightarrow c_1 + c_2 \in M \wedge c_1 \cdot c_2 \in M)$ .

Тоді  $M = C$ .

### Основні задачі

1. Довести, що число  $\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$  — ірраціональне.
2. Чи існують два ірраціональних числа  $x_1$  і  $x_2$ , сума і добуток яких є числа раціональні?
3. Довести, що дані числа є ірраціональними:  
1)  $\cos 20^\circ$ ; 2)  $\operatorname{tg} 5^\circ$ ; 3)\*  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ .
4. Показати, що функція  $\varphi$ ,  $\varphi(a + bi) = \sqrt{a^2 + b^2}$  має такі властивості при  $k_1 = a_1 + b_1i$ ,  $k_2 = a_2 + b_2i$ :  
а)  $k_1 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$ ; б)  $\varphi(k_1 \cdot k_2) = \varphi(k_1) \cdot \varphi(k_2)$ .
5. Знайти всі такі  $z \in C$ ,  $2|z| = zi + 1$ .
6. Знайти дійсні розв'язки:  $(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$ .
7. Виконати дію:  $\frac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}$ .

8. Розв'язати рівняння:

а)  $(1 - i)x^2 - (3 + 3i)x + (-4 + 2i) = 0$ ,    б)  $z^2 + \bar{z} = 0$ ,

в)  $z \cdot \bar{z} + 2z + i = 0$ .

### Завдання для самостійної роботи

9. Показати, що функція  $\varphi$ ,  $\varphi(a + bi) = \sqrt{a^2 + b^2}$  має таку властивість при  $k_1 = a_1 + b_1i$ ,  $k_2 = a_2 + b_2i$ :

$$\varphi(k_1 + k_2) \leq \varphi(k_1) + \varphi(k_2).$$

10. Знайти дійсні розв'язки:  $(3x - 1)(2 + i) + (x - yi)(1 + 2i) = 5 + 6i$ .

11. Розв'язати рівняння:

а)  $x^2 - (4 + 3i)x + (-4 + 2i) = 0$ ;    б)  $z = \bar{z}$ ;

в)  $\bar{z} - z = 1 + 2i$ ;    г)  $z = \overline{-z}$ .

12. Подати у тригонометричній формі комплексне число  $1 - \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$ .

## Заняття 11. Аксиоми комплексних чисел.

*Мета:* операції з комплексними числами.

### Основні задачі

1. Обчислити: а)  $\frac{(1 + i\sqrt{3})^{95}}{(\sqrt{3} - i)^{126}}$ , б)  $\sqrt[6]{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ .
2. Розв'язати нерівність:  $(2 + i)z < 1 - i$ .
3. Розв'язати систему рівнянь: 
$$\begin{cases} |z - 2i| = |z|, \\ |z - i| = |z - 1|. \end{cases}$$
4. Довести, що поле комплексних чисел має лише два автоморфізми, які залишають дійсні числа на місці.
5. Довести, що корені  $n$ -го степеня з 1 утворюють мультиплікативну циклічну групу порядку  $n$ .
6. Довести, що множина всіх матриць виду  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ , де  $\alpha, \beta \in R$ , ізоморфна полю комплексних чисел.
7. Комплексні числа вигляду  $a+bi$ , де  $a, b \in \mathbb{Z}$  називаються цілими гаусовими числами і гаусовими, якщо  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Довести, що цілі гаусові числа утворюють кільце.

### Завдання для самостійної роботи

8. Довести, що  $\sqrt{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ .
9. Розв'язати рівняння  $z + |z + 1| + i = 0$ .
10. Розв'язати систему рівнянь: 
$$\begin{cases} |z^2 - 2i| = 4; \\ \left| \frac{z + 1 + i}{z - 1 - i} \right| = 1 \end{cases}$$
11. Довести, що всі комплексні числа з модулем 1 утворюють абелеву мультиплікативну групу.

**12.** Комплексні числа вигляду  $a + bi$ , де  $a, b \in \mathbb{Z}$  називаються цілими гаусовими числами і гаусовими, якщо  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Довести, що

- а) гаусові числа утворюють поле,
- б) кожне гаусове число є часткою від ділення двох цілих гаусових чисел.

## Заняття 12. Лінійні алгебри скінченного рангу.

*Мета:* вивчення лінійних алгебр скінченного рангу, алгебри кватерніонів, алгебри Келі.

*Необхідні означення.*

Нехай  $(A; +, \cdot)$  — кільце,  $(P; +, \cdot; 0, 1)$  — поле та для кожного елемента  $a \in A$  і кожного елемента  $\lambda \in P$  однозначно визначено добуток  $\lambda a \in A$ . Якщо при цьому виконуються такі умови:

- 1)  $\forall a \in A (1 \cdot a = a)$ ;
- 2)  $\forall a, b \in A \forall \lambda \in P (\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b)$ ;
- 3)  $\forall a, b \in A \forall \lambda \in P (\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b))$ ;
- 4)  $\forall a \in A \forall \lambda, \mu \in P ((\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a)$ ;
- 5)  $\forall a \in A \forall \lambda, \mu \in P ((\lambda\mu)a = \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a))$ ;

то система  $(A; +, \cdot; P)$  називається **лінійною алгеброю над полем  $P$** .

Якщо при цьому кільце  $(A; +, \cdot)$  є тілом, то система  $(A; +, \cdot; P)$  називається **алгеброю з діленням**.

### Основні задачі

1. Скласти таблицю множення (квадрат Келі) базисних елементів  $1, i, j, k$  алгебри кватерніонів.
2. Знайти суму, різницю, добуток і частку кватерніонів:  $x = 2 - 3i + 5j - k, y = 4 - 2j + 3k$ .
3. Знайти  $q^{-1}$  та  $n(q)$ , де  $n(q) = q \cdot \bar{q}$  якщо  $q = 1 + 2i + 3j + 4k$ .
4. Вираз  $[x, y] = xy - yx$  називається *комутатором* кватерніонів. Знайти комутатор кватерніонів  $x = 2 - 3i + 5j - k, i y = 4 - 2j + 3k$ .
5. Нехай  $x_1 = \alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k, x_2 = \alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k$  — кватерніони.

Довести, що 1)  $\overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2, \quad 2) x_1 \cdot \bar{x}_1 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2$ .

6. Довести, що норма октав Келі має властивість мультиплікативності:  $n(xy) = n(x)n(y)$ .

### Завдання для самостійної роботи

7. Знайти суму, різницю, добуток і частку кватерніонів  $1 + 2i + 3j + 4k$ ,  $5i - 6j + 2k$ .

8. Знайти  $q^{-1}$  та  $n(q)$  якщо  $q = 5i - 6j + 2k$ .

9. Нехай  $x_1 = \alpha_1 + \beta_1i + \gamma_1j + \delta_1k$ ,  $x_2 = \alpha_2 + \beta_2i + \gamma_2j + \delta_2k$  — кватерніони. Довести, що  $(x_1 \cdot \overline{x_1}) \cdot (x_2 \cdot \overline{x_2}) = (x_1 \cdot x_1) \cdot (\overline{x_2})$

10. Скласти таблицю множення (квадрат Келі) базисних елементів  $1, i, j, k, l, il, jl, kl$  алгебри Келі, виходячи з означення операцій додавання і множення октав Келі.

## Приклади типових завдань до контрольної роботи з дисципліни «Числові системи»

*Мета:* перевірити оволодіння основними практичними навичками з курсу «Числові системи».

**Задача 1.** Чи утворює множина пар цілих чисел  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$  кільце, якщо операція додавання і множення пар введено так:

$$(a, b) + (c, d) = (ac, bd), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a + c, b + d).$$

**Задача 2.** Раціональні чи ірраціональні такі числа:

$$1) \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}, \quad 2) \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$$

**Задача 3.** Довести, що:  $\forall n(n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 62n):24, n \in N_0$ .

**Задача 4.** Знайти дійсні числа  $x$  та  $y$ :  $(2-i)x + (5+6i)y = 1-3i$ .

**Задача 5.** Розв'язати рівняння:

$$1) x^2 - (2 + i)x + (-1 + 7i) = 0, \quad 2) |z| - z = 8 + 12i.$$

**Задача 6.** Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i, \\ (4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i. \end{cases}$$

# Індивідуальне семестрове завдання для самостійної роботи студентів

## ТЕМА 1. Теоретико-множинні передумови.

З таблиці варіантів (таблиця 1 додатку) вибрати дані згідно свого варіанту і відповісти на питання.

**Дані:** (множина  $A$ , операція  $O_1$ , операція  $O_2$ , відношення  $R$  на множині, відображення  $F$ ).

### Питання:

- 1) Ядро  $R$ .
- 2)  $R$  рефлексивно?
- 3)  $R$  антирефлексивно?
- 4)  $R$  антисиметрично?
- 5)  $R$  симетрично?
- 6)  $R$  транзитивно?
- 7) Чи є  $R$  відношенням еквівалентності?
- 8) Чи є  $R$  відношенням порядку?
- 9) Область визначення  $F$ .
- 10) Область значення  $F$ .
- 11)  $F$  — ін'єкція?
- 12)  $F$  — сюр'єкція?
- 13)  $F$  — бієкція?
- 14) Побудувати  $F^{-1}$ .
- 15) Ядро  $F$ .
- 16) Система твірних для  $A$ .
- 17) Чи є  $A$  скінчено-породженою?
- 18) Асоціативність  $O_1$ .
- 19) Комутативність  $O_1$ .
- 20) Ідемпотентність  $O_1$ .
- 21) Асоціативність  $O_2$ .
- 22) Комутативність  $O_2$ .
- 23) Ідемпотентність  $O_2$ .
- 24) Дистрибутивність  $O_1$  відносно  $O_2$ .

25) Чи є  $A$  напівгрупою відносно будь-якої із заданих операцій?

26) Чи є  $A$  групою відносно будь-якої із заданих операцій?  
Побудувати обернений елемент.

27) Чи є  $A$  кільцем?

28) Чи є  $A$  полем?

## Питання до іспиту з курсу «Числові системи»

1. Відношення. Основні види відношень.
  2. Функціональне відношення.
  3. Відношення еквівалентності.
  4. Відношення порядку.
  5. Поняття алгебраїчної системи.
  6. Ізоморфізм алгебраїчних систем.
  7. Напівгрупи і групи.
  8. Напівкільця і кільця.
  9. Лінійні алгебри над полем.
  10. Відношення порядку на множині  $\mathbb{N}$ .
  11. Скінченні множини.
  12. Упорядковані напівгрупи і групи.
  13. Упорядковані кільця і поля.
  14. Аксиоматичний метод у математиці.
  15. Аксиоми Пеано і наслідки з них.
  16. Основні властивості операції додавання.
  17. Основні властивості операції множення.
  18. Характеристика системи аксіом Пеано.
  19. Аксиоми цілих чисел. Властивості цілих чисел.
  20. Аксиоми раціональних чисел і деякі наслідки з них.
  21. Властивості раціональних чисел.
  22. Нормовані поля. Властивості норми.
  23. Аксиоматична теорія дійсних чисел. Властивості дійсних чисел.
  24. Зображення дійсних чисел системними дробами.
  25. Зображення дійсних чисел ланцюговими дробами.
  26. Різні способи введення комплексних чисел.
  27. Аксиоми комплексних чисел. Властивості комплексних чисел.
  28. Подальші розширення поняття числа.
  29. Алгебри скінченного рангу.
  30. Алгебри над полем  $\mathbb{R}$ . Теорема Фробеніуса.

## Література

- [1] Андронов И.К. Арифметика рациональных чисел / И.К. Андронов, А.К. Окунев. — Москва: Просвещение, 1971. — 399 с.
- [2] Бородін О.І. Теорія чисел / О.І. Бородін. — Київ: Вища школа, 1970. — 274 с.
- [3] Бухштаб А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. — Москва: Учпедгиз, 1960. — 375 с.
- [4] Ван дер Вандер Б.Л. Алгебра / Б.Л. Ван дер Вандер. — Москва: Наука, 1976. — 648 с.
- [5] Вивальнюк Л. М. Числові системи / Л. М. Вивальнюк, В. К. Григоренко, С. С. Левіщенко. — Київ: Вища школа, 1988. — 271 с.
- [6] Ганюшкін О. Г. Теорія груп / О. Г. Ганюшкін, О. О. Безущак. — Київ: ВПЦ Київський університет, 2005. — 126 с.
- [7] Ганюшкін О. Г. Завдання до практичних занять з алгебри та теорії чисел (теорія груп) / О. Г. Ганюшкін, О. О. Безущак. — Київ: ВПЦ Київський університет, 2004. — 187 с.
- [8] Завало С. Т. Алгебра і теорія чисел / С. Т. Завало, В. М. Костарчук, Б. І. Хацет. — Київ: Вища школа, 1976. — 483 с.
- [9] Завало С. Т. Арифметика, алгебра і елементи аналізу / С. Т. Завало. — Київ: Рад.школа, 1969. — 503 с.
- [10] Кантор И. Л. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор. — Москва: Наука, 1973. — 144 с.
- [11] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры / А. И. Кострикин. — Москва: Физматлит, 2001. — 271 с.

- [12] Кужель О.В. Основы арифметики / О.В. Кужель — Київ: Рад.школа, 1965. — 131 с.
- [13] Ландау Э. Основы анализа / Э. Ландау — Москва: Изд-во иностр. лит, 1947. — 182 с.
- [14] Лиман Ф. М. Числові системи: навчальний посібник / Ф. М. Лиман. — Суми: Видавництво «МақДен», 2010.
- [15] Лиман Ф. М. Математична логіка і теорія алгоритмів / Ф.М. Лиман. — Суми: Слобожанщина, 1998. — 152 с.
- [16] Ляпин Е.С. Алгебра и теория чисел / Е.С. Ляпин, А.Е. Евсеев. — Москва: Просвещение, 1974, 1978.
- [17] Мальцев А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. — Москва: Наука, 1970. — 392 с.
- [18] Нечаев В. И. Числовые системы / В. И. Нечаев. — Москва: Просвещение, 1975. — 199 с.
- [19] Нечаев В. И. Упорядоченные множества и упорядоченные алгебры с одной и двумя бинарными операциями / В. И. Нечаев. // Математика в школе. — 1973. — №5. — С. 4–13.
- [20] Понтрягин Л.С. Обобщение чисел / Л.С. Понтрягин. — Москва: Наука, 1986. — 120 с.
- [21] Проскуряков И. В. Числа и многочлены / И.В. Проскуряков. — Москва: Просвещение, 1965. — 284 с.
- [22] Проскуряков И. В. Понятие множества, группы, кольца и поля. Теоретические основы арифметики / И. В. Проскуряков // Энциклопедия элементарной математики / И. В. Проскуряков. — Москва, 1951. — (1). — С. 77–255.
- [23] Суцанський В.І. Операції на групах підстановок. Теорія та застосування / В.І. Суцанський, В.С. Сікора. — Чернівці: Рута, 2003. — 243 с.

- [24] Холл М. Теория групп / М. Холл. — Москва: ИЛ, 1962. — 232 с.
- [25] Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре / Д.К. Фаддеев — Москва: Наука, 1984 — 416 с.
- [26] Феферман С. Числовые системы / С. Феферман — Москва: Наука, 1971 — 440 с.