МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»
кафедра методики навчання математики та методики навчання інформатики

ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНА ФОРМА

навчальний посібник

для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Дніпро – Слов'янськ – 2024

УДК 512.643.721+004(075.8)
П 22

Затверджено на засіданні Вченої ради
Протокол № 8 від 28.06.2024 р.

Рецензенти:

Нєсмєлова О.В. − доктор фізико-математичних наук, доцент, заступник директора з наукової роботи Інституту прикладної математики і механіки НАН України;

Нестеренко А.М. − кандидат педагогічних наук, доцент кафедри статистики та прикладної математики Черкаського державного технологічного університету

Пащенко З.Д., Турка Т.В.
Жорданова нормальна форма: навчальний посібник для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Математика) – Слов'янськ: ДВНЗ «ДДПУ», 2024, – 70 с.

В посібнику в доступній формі викладено зміст курсу «Вибрані питання математики, інформатики та методики навчання (Жорданова форма)», що відповідає освітньо-професійній програмі Середня освіта (Математика) фізико-математичного факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет». Зміст лекцій розкриває теоретичні та практичні аспекти приведення матриці лінійного оператору до жорданової нормальної форми та знаходження відповідного жорданового базису. Для ґрунтовнішого засвоєння матеріалу в кінці кожного пункту розміщено контрольні питання та завдання.

Рекомендовано для студентів математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

Зміст

Передмова

В теорії лінійних операторів та теорії матриць окреме місце займає жорданова нормальна форма матриці. Жорданова нормальна форма (ЖНФ) – це матриця, яка має найбільш простий вигляд в класі матриць, подібних до даної.

ЖНФ має широке застосування, є досить цікавим і корисним об’єктом при розв’язанні різного роду задач. Вона використовується не тільки в теоріях матриць та лінійних операторів. Також застосовується при розв’язуванні лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь та класифікації їх розв’язків. Тому дослідження жорданової нормальної форми залишається актуальним як у сучасній науці, так і у підготовці спеціалістів з математики, інформатики, прикладної математики тощо.

Ідея лінійності – одна із найбільш фундаментальних в циклі природничих наук. Теорія лінійності розглядається в такому важливому розділі математики, як лінійна алгебра. Для засвоєння теорії і практики приведення матриці до жорданової форми, крім теорії лінійних просторів та лінійних операторів, здобувач повинен володіти теорією многочленів, яка традиційно вивчається після курсу «Лінійна алгебра» в курсі « Алгебра і теорія чисел». Саме цими обставинами зумовлене місце курсу «Жорданова нормальна форма», який викладається в Донбаському державному педагогічному університеті на фізико-математичному факультеті для студентів ІІІ курсу спеціальності 014 Середня освіта (Математика).

Лінійній алгебрі присвячено широке коло літератури, яка досить повно відображає її зміст ([3], [6], [9]). Проте розділ «Жорданові нормальні форми» не відображається в цих підручниках, або відображається не системно. Метою даного навчального посібника є систематичне викладення необхідних теоретичних та практичних питань розділу «Жорданові нормальні форми» в доступній формі.

Метою вивчення курсу «Жорданова нормальна форма» є дослідження теорії жорданових матриць та алгоритмів приведення матриці лінійного оператору до жорданової нормальної форми і побудови відповідного жорданового базису. В результаті вивчення даного курсу здобувач повинен володіти методами аналізу матриць лінійних операторів, навичками використання згаданих алгоритмів.

Основою для написання навчального посібника став досвід читання лекцій з курсу за вибором «Вибрані питання математики, інформатики та методики навчання (Жорданова форма)» для студентів фізико-математичного факультету Донбаського державного педагогічного університету. Зміст навчального посібника відповідає діючій програмі курсу. Він розділений на пункти. Нумерація теорем та тверджень в кожному пункті своя. Вона містить номер пункту та порядковий номер теореми чи твердження у пункті. Кожен пункт супроводжується контрольними питаннями та завданнями, що дає можливість перевірити та самоперевірити засвоєння розглянутого матеріалу. Розв'язані приклади допомагають засвоїти теорію та практику.

Автори висловлюють щиру подяку доктору фізико-математичних наук, професору Кириченко В.В. за доречні поради при написанні цього навчального посібника.

1. Інваріантні підпростори

Нехай P – деяке поле, V,W – лінійні простори над полем P. Лінійні опратори $\varphi : V \to W$ утворюють лінійний простір над P.

Якщо $\varphi : V \to W$ – лінійний оператор, а U – підпростір простору V, то за критерієм підпростору неважко довести, що $\varphi(U)$ – підпростір в W. Зокрема $\varphi(V) = \operatorname{Im}\varphi$.

Якщо $U = \langle e_1, e_2, \ldots, e_s \rangle \subset V$, то $\varphi(U) = \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_s) \rangle \subset W$. Якщо $\dim U = s$, то $e_1, e_2, \ldots, e_s$ – базис U і розмірність лінійної оболонки $\langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_s) \rangle$ не перевищує s. Тобто, $\dim \varphi(U) \le \dim U$ – *розмірність образу підпростору не перевищує розмірності цього підпростору.*

Нагадаємо, що лінійний оператор $\varphi : V \to V$ називається ***лінійним перетворенням***. Лінійні перетворення утворюють алгебру $L(V,V)$ над P. Лінійний оператор $\varphi : V \to V$ є взаємно однозначним тоді і тільки тоді, коли $\varphi(V) = \operatorname{Im}\varphi = V \quad \Leftrightarrow \quad \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V = n$. Будемо також пам'ятати, що відображення φ взаємно однозначне тоді і тільки тоді, коли φ – оборотне, тобто існує обернене відображення φ^{-1}.

Кожному лінійному оператору φ в деякому зафіксованому базисі e відповідає його матриця M_φ порядку n. Так як $\dim \operatorname{Im}\varphi = rgM_\varphi$, то невироджена матриця M_φ ($|M_\varphi| \ne 0 \Leftrightarrow rgM_\varphi = n$) відповідає взаємно однозначному лінійному оператору φ і тільки взаємно однозначному. Тому взаємно однозначні лінійні оператори називають ***невиродженими***. Матриці лінійного оператору в різних базисах подібні. В деякому базисі між лінійними операторами та матрицями існує взаємно однозначна відповідність, навіть більше того, існує ізоморфізм їх просторів. Тому $\dim L(V,V) = \dim M_n(P) = n^2$.

Підпростір $U \subset V$ називається ***інваріантним відносно лінійного оператора*** $\varphi : V \to V$, якщо $\varphi(U) \subset U$. Можемо навести приклади вже відомих нам підпросторів, які є інваріантними відносно оператора $\tilde{A}$:

1. $\ker \tilde{A} : \forall x \in \ker \tilde{A} \quad \tilde{A}x = \theta \in \ker \tilde{A}$;

2. $\operatorname{Im} \tilde{A} : \forall y \in \operatorname{Im} \tilde{A} \Rightarrow y \in V \Rightarrow \tilde{A}y \in \operatorname{Im} \tilde{A}$.

Наявність власного ненульового інваріантного підпростору $U \subset V$ дає можливість спростити матрицю M_φ оператору φ шляхом вибору належного базису в V. А саме, якщо доповнити базис $e_1, \ldots, e_m$ підпростору U до базису $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$ простору V та позначити $W = \langle e_{m+1}, \ldots e_n \rangle$, то, очевидно, $V = U \oplus W$, а з умови $\varphi(e_i) \in U, \quad i = 1, \ldots, m$ випливає, що в цьому базисі матрицею оператору φ буде

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} A_1 & A_0 \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

де $A_1 - m \times m$-матриця, $A_2 - (n-m) \times (n-m)$-матриця і $A_0 - m \times (n-m)$ –матриця. На A_1 можна дивитися як на матрицю лінійного оператору φ_U, що є обмеженням оператору φ на U. Зручно позначати $A_1 = A_U$.

Якщо $A_0 = O$, то це означає, що $\varphi(e_i) \in \langle e_{m+1}, \ldots e_n \rangle = W, \quad i = m+1, \ldots, n$. Тобто підпростір W буде також інваріантним відносно φ $(\varphi(W) \subset W)$, а матриця A_2 буде матрицею A_W оператора, що є обмеженням оператору φ на W. В цьому випадку говорять про ***пряму суму операторів***

$$\varphi = \varphi_U \oplus \varphi_W,$$

що відповідає розкладу $V = U \oplus W$ в пряму суму інваріантних підпросторів.

Матриця прямої суми операторів має клітинно-діагональний вигляд:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} A_U & O \\ O & A_W \end{pmatrix} = A_U \oplus A_W.$$

Нами фактично доведена

Теорема 1.1. *Простір* V *є прямою сумою інваріантних відносно оператору* $\varphi : V \to V$ *підпросторів* U *і* W *тоді і тільки тоді, коли матриця цього оператору в деякому базисі приймає клітинно-діагональний вигляд.*

Це твердження природним чином переноситься на будь-яке число доданків прямого розкладу.

Зауважимо також, якщо підпростір $U \subset V$ інваріантний відносно лінійного оператора $\varphi : V \to V$, а φ_U – невироджений (оборотний, взаємно однозначний) оператор на U, то $\dim \varphi(U) = \dim U$.

На завершення розглянемо ще одне питання, яке стосується інваріантних підпросторів. Нехай підпростір $U \subset V$ інваріантний відносно лінійних операторів $\varphi : V \to V$ і $\psi : V \to V$. Тоді підпростір $U \subset V$ інваріантний відносно довільної лінійної комбінації цих операторів та добутків цих операторів, оскільки

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)U = \alpha\varphi U + \beta\psi U \subseteq \alpha U + \beta U \subseteq U$$

$$(\varphi\psi)U = \varphi(\psi U) \subseteq \varphi U \subseteq U\,,\ (\psi\varphi)U = \psi(\varphi U) \subseteq \psi U \subseteq U\,.$$

Таким чином, нами доведено наступне твердження.

Твердження 1.2. *Лінійні оператори, що діють інваріантно на деякому підпросторі* $U \subset V$*, утворюють підалгебру алгебри* $L(V,V)$.

Зокрема, якщо підпростір $U \subset V$ інваріантний відносно лінійного оператору $\tilde{A} : V \to V$, то він інваріантний відносно всіх степенів цього оператору та їх лінійних комбінацій. А саме, якщо $f(t) \in P[t]$, то підпростір $U \subset V$ інваріантний відносно $f(\tilde{A})$: $\quad \tilde{A}U \subseteq U \quad \Rightarrow \quad f(\tilde{A})U \subseteq U$.

Контрольні питання і завдання

1. Як співвідносяться розмірність простору і розмірність образу лінійного оператору цього простору?

2. Знайдіть розмірність простору перетворень простору V, якщо $\dim V = 5$.

3. Який вигляд має матриця оператору в базисі, що утворений об'єднанням базису інваріантного підпростору та доповняльного базису.

4. $e=(1,-1,0)$ – власний вектор оператору, що має матрицю $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ в стандартному базисі. Доповнити e до базису простору $\mathbf{R}^3$ та побудувати в ньому матрицю цього оператору. Як отриманий результат пов'язаний з попереднім завданням?

5. Коли суму операторів називають прямою?

2 Підалгебра лінійних операторів, породжена одним оператором.

Позначимо $P[\tilde{A}]$ мінімальну підалгебру $L(V,V)$, що містить оператор $\tilde{A}\in L(V,V)$. Нагадаємо, що алгебра $L(V,V)$ має одиничний елемент $\tilde{I}$, що діє за правилом $\tilde{I}x=x,\quad \forall x\in V$. Очевидно, що $\tilde{A}^0=\tilde{I},\quad \tilde{A}^k, k\in\mathbf{N}$ і їх лінійні комбінації повинні належати $P[\tilde{A}]$. Тобто, якщо $f(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_mt^m\in P[t],$ то $f\left(\tilde{A}\right)\in P[\tilde{A}]$. З іншого боку, так як множина многочленів $P[t]$ утворює комутативну алгебру над полем P, а відображення $\Phi: f(t)\to f\left(\tilde{A}\right)$ задовольняє умови гомоморфізму (зберігає всі три операції алгебри многочленів), то $P[\tilde{A}]=\left\{\ f\left(\tilde{A}\right)\quad\middle|\quad f(t)\in P[t]\ \right\}$ – шукана під алгебра, причому вона комутативна, як і $P[t]$. Зауважимо, що $f\left(\tilde{A}\right)=a_0\tilde{I}+a_1\tilde{A}+\ldots+a_m\tilde{A}^m$ є лінійним оператором, причому $f\left(\tilde{A}\right)x=a_0x+a_1\tilde{A}x+\ldots+a_m\tilde{A}^mx$. Так як $P[\tilde{A}]\subset L(V,V)$, то $\dim P[\tilde{A}]\le\dim L(V,V)=n^2$. Пізніше ми покажемо, що насправді ця умова більш сильна: $\dim P[\tilde{A}]\le\dim V=n$.

Так як кожному лінійному оператору $\tilde{A}$ в деякому зафіксованому базисі e відповідає його матриця A_e, добутку лінійних операторів відповідає добуток відповідних їм матриць, а лінійній комбінації операторів – така ж лінійна комбінація відповідних матриць, то оператору $f(\tilde{A}) = a_0\tilde{I} + a_1\tilde{A} + \ldots + a_m\tilde{A}^m$ відповідає матриця $f(A_e) = a_0E + a_1A_e + \ldots + a_mA_e^{\,m}$.

Цікаве спостереження значення многочлену $f(t)$ від подібних матриць. Нехай $A' = T^{-1}AT$. Тоді $(A')^2 = T^{-1}AT \cdot T^{-1}AT = T^{-1}A^2\,T$ і, аналогічно, $(A')^k = T^{-1}A^k\,T,\quad k \in \mathbf{N}$, а *значення многочлену від подібних матриць подібні:*

$$f(A') = a_0E + a_1A' + \ldots + a_m(A')^m = a_0T^{-1}T + a_1T^{-1}AT + \ldots + a_mT^{-1}A^mT = T^{-1}f(A)T.$$

Звичайно, що $f(A) = T\;f(A')\,T^{-1}$. В деяких випадках це співвідношення спрощує знаходження значення $f(A_e)$, де A_e – матриця лінійного оператору $\tilde{A}$ в базисі e. Якщо матриця $A_{e'}$ цього оператору в базисі e' має діагональний вигляд $A_{e'} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то $A^k{}_{e'} = diag(\lambda_1^{\,k}, \ldots, \lambda_n^{\,k})$ і $f(A_e) = T \cdot diag(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)) \cdot T^{-1}$.

Говорять, що многочлен $f(t)$ ***анулює*** лінійний оператор $\tilde{A}$, якщо $f(\tilde{A}) = \tilde{O}$. Врахуємо, що матриця нульового оператору в довільному базисі є нульова матриця, а оператору $f(\tilde{A})$ в базисі e відповідає матриця $f(A_e)$, то многочлен $f(t)$ анулює матрицю A_e і, аналогічно, довільну іншу матрицю $A_{e'}$ цього оператору, яка є подібною до A_e.

Нормалізований (тобто зі старшим коефіцієнтом 1) многочлен мінімального степеня, який анулює $\tilde{A}$, називається ***мінімальним многочленом оператору*** $\tilde{A}$. Цей же многочлен буде мінімальним многочленом матриці A_e і довільної подібної матриці.

Нехай $\mu_{\tilde{A}}(t) = t^m + \mu_1t^{m-1} + \ldots + \mu_{m-1}t + \mu_m$ – мінімальний многочлен лінійного оператору $\tilde{A}$. Тоді оператори $\tilde{I}, \tilde{A}, \tilde{A}^2, \ldots, \tilde{A}^{m-1}$ є лінійно незалежними, оскільки співвідношення $\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_i \tilde{A}^i = \tilde{O}$ означало б, що многочлен $\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_i t^i$ анулює $\tilde{A}$, хоча його степінь менше m. Навпаки, якщо $\tilde{I}, \tilde{A}, \tilde{A}^2, \ldots, \tilde{A}^{m-1}$ – лінійно незалежні оператори (як вектори простору $L(V,V)$), а оператор $\tilde{A}^m$ уже виражається через них ($\tilde{A}^m = \gamma_m \tilde{I} + \gamma_{m-1}\tilde{A} + \gamma_{m-2}\tilde{A}^2 + \ldots + \gamma_1 \tilde{A}^{m-1}$), то це означає, що m – степінь мінімального многочлену $\mu_{\tilde{A}}(t) = t^m - \gamma_1 t^{m-1} + \ldots - \gamma_{m-1}t - \gamma_m$ для $\tilde{A}$. З іншого боку,

$$\tilde{A}^{m+1} = \gamma_m \tilde{A} + \gamma_{m-1}\tilde{A}^2 + \gamma_{m-2}\tilde{A}^3 + \ldots + \gamma_1 \tilde{A}^m =$$
$$= \gamma_m \tilde{A} + \gamma_{m-1}\tilde{A}^2 + \gamma_{m-2}\tilde{A}^3 + \ldots + \gamma_2 \tilde{A}^{m-2} + \gamma_1\left(\gamma_m \tilde{I} + \gamma_{m-1}\tilde{A} + \gamma_{m-2}\tilde{A}^2 + \ldots + \gamma_1 \tilde{A}^{m-1}\right) =$$
$$= \nu_m \tilde{I} + \nu_{m-1}\tilde{A} + \nu_{m-2}\tilde{A}^2 + \ldots + \nu_1 \tilde{A}^{m-1},$$

де ν_i – коефіцієнти, одержані після зведення подібних доданків. Отже, очевидно, що $\tilde{A}^{m+1}$ і, аналогічно, $\tilde{A}^{m+s}, s \geq 0$ лінійно виражаються через $\tilde{I}, \tilde{A}, \tilde{A}^2, \ldots, \tilde{A}^{m-1}$, звідки $\dim P[\tilde{A}] = m$. Раніше було зауважено,що $\dim P[\tilde{A}] \leq \dim L(V,V) = n^2$, тобто $m \leq n^2$. Нами доведено наступне твердження.

Теорема 2.1. *Для довільного лінійного оператору $\tilde{A}$ існує мінімальний многочлен $\mu_{\tilde{A}}(t)$. Його степінь співпадає з розмірністю алгебри $P[\tilde{A}]$.*

Теорема 2.2. *Оператор $\tilde{A}$ оборотний тоді і тільки тоді, коли вільний член μ_m мінімального многочлена $\mu_{\tilde{A}}(t) = t^m + \mu_1 t^{m-1} + \ldots + \mu_{m-1}t + \mu_m$ відмінний від нуля.*

Необхідність. Доведемо від супротивного. Нехай $\tilde{A}$ оборотний і $\mu_m = 0$. Тоді

$$\tilde{O} = \mu_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\right) = \tilde{A}(\tilde{A}^{m-1} + \mu_1 \tilde{A}^{m-2} + \ldots + \mu_{m-1}\tilde{I}).$$

Оператор $\tilde{A}^{m-1} + \mu_1 \tilde{A}^{m-2} + \ldots + \mu_{m-1}\tilde{I} \neq \tilde{O}$, що випливає із означення мінімального многочлену оператору. Значить оператори $\tilde{A}$ і

$\widetilde{A}^{m-1} + \mu_1 \widetilde{A}^{m-2} + \ldots + \mu_{m-1} \widetilde{I}$ є дільниками нуля, а дільник нуля в кільці не може бути оборотним. ▲

Достатність. Якщо $\mu_m \neq 0$, то існує μ_m^{-1} і із рівності $\mu_{\widetilde{A}}\left(\widetilde{A}\right) = \widetilde{O}$ випливає співвідношення

$$\widetilde{A}(-\mu_m^{-1} \widetilde{A}^{m-1} - \mu_m^{-1} \mu_1 \widetilde{A}^{m-2} - \ldots - \mu_m^{-1} \mu_{m-1} \widetilde{I}\,) = \widetilde{I}\ ,$$

звідки обернений оператор існує, має явний вигляд $\widetilde{A}^{-1} = -\mu_m^{-1} \widetilde{A}^{m-1} - \mu_m^{-1} \mu_1 \widetilde{A}^{m-2} - \ldots - \mu_m^{-1} \mu_{m-1} \widetilde{I}$, тому оператор $\widetilde{A}$ оборотний. ■

Теорема 2.3. *Довільний многочлен $f(t)$, що анулює оператор $\widetilde{A}$, ділиться без остачі на мінімальний многочлен $\mu_{\widetilde{A}}(t)$.*

Доведення. За теоремою про ділення з остачею в кільці многочленів над довільним полем, при діленні $f(t)$ на $\mu_{\widetilde{A}}(t)$ існують єдині частка $q(t)$ і остача $r(t)$, такі, що

$$f(t) = q(t)\mu_{\widetilde{A}}(t) + r(t) \text{ і } \deg r(t) < \deg \mu_{\widetilde{A}}(t) \text{ або } r(t) = \mathrm{O}(t).$$

Враховуючи, що $f\left(\widetilde{A}\right) = \widetilde{O}$ і $\mu_{\widetilde{A}}\left(\widetilde{A}\right) = \widetilde{O}$, одержуємо

$$\widetilde{O} = f\left(\widetilde{A}\right) = q\left(\widetilde{A}\right) \cdot \widetilde{O} + r\left(\widetilde{A}\right), \text{ звідки } r\left(\widetilde{A}\right) = \widetilde{O}.$$

Якщо $r(t) \neq \mathrm{O}(t)$, то $\deg r(t) < \deg \mu_{\widetilde{A}}(t)$ і $r\left(\widetilde{A}\right) = \widetilde{O}$, що суперечить означенню мінімального многочлену. Тому остача $r(t) = \mathrm{O}(t)$. ■

Контрольні питання і завдання

1. З яких елементів складається підалгебра лінійних операторів, породжена одним оператором?

2. Матриця оператору $\widetilde{A}$ в деякому базисі має вигляд $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Знайдіть матрицю оператору $f\left(\widetilde{A}\right)$, якщо $f(t) = t^3 - 2t + 5$. Порівняйте її з матрицею $g\left(\widetilde{A}\right)$, де $g(t) = 11t - 7$. Чи буде многочлен $t^4 + 13t^2 + 12t$ анулювати оператор $\widetilde{A}$.

3. Доведіть, якщо $A, B \in M_n(\boldsymbol{R})$ і вони подібні: $A = U^{-1}BU$, то для довільного многочлену з дійсними коефіцієнтами $f(x)$ виконується рівність $f(A) = U^{-1}f(B)U$?

4. Що таке мінімальний многочлен? Яка його основна властивість?

5. Знайдіть анулюючий многочлен лінійного перетворення $\widetilde{A}: V \to V$, якщо $\widetilde{A}^3 = \widetilde{A}^2$.

3. Алгебраїчна та геометрична кратність власного значення

У [11, 12] нами введено поняття власного значення, власного вектора оператора $\widetilde{A}: V \to V$, розглянуто критерій власного значення. Показано, що підпростір $V^\lambda = V^\lambda_{\widetilde{A}} = \left\{ x \in V \,\middle|\, \widetilde{A}x = \lambda x \right\}$ (підпростір всіх власних векторів, що відповідають власному значенню λ, та θ) інваріантний відносно оператора $\widetilde{A}$.

Приклад 3.1. Нехай A та B позначають дві довільні комутуючі матриці (тобто $AB = BA$). Припустимо, що деяке $\lambda \in \mathbf{C}$ є власним числом матриці A. Доведіть, що простір V_A^λ інваріантний відносно B (тобто $B(V_A^\lambda) \subset V_A^\lambda$).

▼ Нехай $v \in V_A^\lambda$, $v \neq 0$. Це означає, що $Av = \lambda v$. Тоді $A(Bv) = (AB)v = (BA)v = B(Av) = B(\lambda v) = \lambda(Bv)$. Тобто Bv є власним вектором оператора A з власним числом λ, звідки $Bv \in V_A^\lambda$. Остаточно $B(V_A^\lambda) \subset V_A^\lambda$. ■

Як відомо із способу знаходження власних векторів, що відповідають власному значенню λ, розмірність V^λ дорівнює $m = n - r$, де $n = \dim V$, $r = rang(A - \lambda E)$, $A \in M_n$ – матриця оператору $\widetilde{A}$ в деякому базисі. Розмірність $\dim V^\lambda = m$ називають ***геометричною кратністю власного значення*** λ.

Власні значення ми знаходимо із характеристичного рівняння

$$|A - tE| = 0. \tag{*}$$

Врахуємо, що $|A - tE| = (-1)^n |tE - A|$, тоді умова (*) еквівалентна умові

$$|tE - A| = 0. \qquad (**)$$

Многочлен

$$\chi_A(t) = |tE - A| = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \ldots + \chi_{n-1} t + \chi_n \in P[t]$$

і називається ***характеристичним многочленом матриці*** A**.** Так як $\det(t\tilde{I} - \tilde{A}) = |tE - A|$, то можна $\chi_A(t)$ вважати ***характеристичним многочленом*** $\chi_{\tilde{A}}(t)$ ***оператору*** $\tilde{A}$**.**

Зауваження 3.1. *Степінь характеристичного многочлену матриці* A *дорівнює порядку матриці* A*, а значить* $|\chi_{\tilde{A}}(t)| = \dim V = n$.

Умова (**) може бути записана як

$$\chi_A(t) = 0 \text{ або } \chi_{\tilde{A}}(t) = 0.$$

Отже, критерій власного значення виглядає так: *Для того, щоб число* λ *було власним значенням оператору* $\tilde{A}$*, необхідно і достатньо, щоб* $\chi_{\tilde{A}}(\lambda) = 0$*, тобто це число* λ *було коренем характеристичного многочлену оператору* $\tilde{A}$.

Ми одразу зауважимо, що властивість мати власні числа суттєво залежить від поля P. Одна й та ж матриця, що розглядається над різними полями, може в одному випадку мати власні числа, а в іншому їх не мати. Так, наприклад, легко переконатись, що для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

маємо $\chi_A(t) = t^2 + 1$. Якщо $P = \mathbf{R}$, тоді многочлен $\chi_A(t)$ не має коренів в P, а отже, матриця A не має власних чисел (і власних векторів). З іншого боку, якщо $P = \mathbf{C}$, ми маємо два корені i та $-i$ характеристичного многочлена.

І взагалі, всякий лінійний оператор, що діє на комплексному лінійному просторі має хоча б одне власне значення і хоча б один лінійно незалежний власний вектор.

Якщо в полі P характеристичний многочлен $\chi_{\tilde{A}}(t)$ не має коренів, то оператор $\tilde{A}$ не має власних значень, а, значить, і власних векторів. Якщо $P = \mathbf{C}$, то, за основною теоремою теорії многочленів, такі корені існують, а, значить, існують і власні значення, і власні вектори. Кратність λ як кореня характеристичного многочлену називається ***алгебраїчною кратністю власного значення*** λ**.**

Зауваження 3.2. Із теорії многочленів над алгебраїчно замкненим полем відомо, що сума кратностей усіх різних коренів многочлену дорівнює степеню цього многочлену. *Якщо простір* V *задано над полем комплексних чисел* (яке є алгебраїчно замкненим), *то* $\left|\chi_{\tilde{A}}(t)\right| = n = n_1 + \ldots + n_p$, *де* p *– кількість різних коренів* $\chi_{\tilde{A}}(t)$, n_i *– їх відповідні алгебраїчні кратності.*

Теорема 3.3. *Геометрична кратність власного значення* λ *не перевищує його алгебраїчної кратності.*

Доведення. Нехай геометрична кратність власного значення λ дорівнює m. Значить $\dim V^{\lambda} = m$. Позначимо $e_1, \ldots, e_m$ – базис V^{λ}, звідки $\tilde{A}e_i = \lambda e_i, \quad i = 1, \ldots, m$. Якщо цей базис доповнити до базису e простору V, то матриця A даного оператору буде мати вигляд

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} \lambda & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & A_1 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & A_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \end{array} \right),$$

де в перших m стовпчиках на діагоналі стоять λ, а решта нулі. Тоді

$$\chi_{\tilde{A}}(t)=\begin{vmatrix} t-\lambda & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & t-\lambda & \dots & 0 & -A_1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & t-\lambda & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & A_2'(t) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \end{vmatrix}=(t-\lambda)^m\cdot\left|A_2'(t)\right|=(t-\lambda)^m q(t).$$

Очевидно, що кратність кореня λ в многочлені $\chi_{\tilde{A}}(t)$ не може бути меншою за m, тобто алгебраїчна кратність k власного значення λ не менша його геометричної кратності m $(k \geq m)$. ■

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ – всі різні власні значення оператору $\tilde{A}$ із поля P, тоді всі вони є коренями характеристичного многочлену $\chi_{\tilde{A}}(t)$ з деякими відповідними алгебраїчними кратностями $n_1, n_2, \dots, n_p$ і геометричними кратностями $m_1, m_2, \dots, m_p$. Зрозуміло, що $n_i \geq m_i, \quad i=1, \dots, p$.

Розглянемо підпростори V^{λ_i}. Легко довести від супротивного, що $V^{\lambda_i} \cap V^{\lambda_j}=\{\theta\}$, якщо $\lambda_i \neq \lambda_j$. Нехай $x_0 \in V^{\lambda_i} \cap V^{\lambda_j}$, $x_0 \neq \theta$. Тоді $\tilde{A}x_0=\lambda_i x_0$ і $\tilde{A}x_0=\lambda_j x_0$. Різниця цих рівностей дає наступну рівність: $\theta=(\lambda_i-\lambda_j)x_0$. Із властивості 7 лінійного простору (п.1.2), ця рівність виконується, якщо $\lambda_i-\lambda_j=0$ або $x_0=\theta$, але ця умова суперечить умові $\lambda_i \neq \lambda_j$ або припущенню $x_0 \neq \theta$.

Таким чином, за зауваженням 2 до критерію прямої суми 1.7.4 у [11], сума $V^{\lambda_1}+V^{\lambda_2}+\dots+V^{\lambda_p}$ буде прямою. Всі V^{λ_i} є підпросторами V, тому, якщо геометрична кратність кожного власного значення λ_i дорівнює його алгебраїчній кратності ($n_i=m_i, \quad i=1, \dots, p$), то $n=m_1+\dots+m_p=\dim V^{\lambda_1}+\dots+\dim V^{\lambda_p}$ і, за зауваженням 1 до критерію прямої суми 1.7.4 у [11], простір V буде прямою сумою $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_p}$. Якщо взяти за базис простору V об'єднання базисів підпросторів V^{λ_i}, то одержимо базис V, який складається із власних векторів оператору $\tilde{A}$. За критерієм діагоналізовності матриці A лінійного оператору одержимо, що матриця A приводиться до діагонального виду. Таким чином, нами доведена частина наступної теореми.

Теорема 3.4. *Нехай* $\tilde{A}$ *– лінійний оператор на скінченномірному векторному просторі* V *над полем* P. *Матриця* A *цього оператору приводиться до діагонального виду тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:*

1) *всі корені характеристичного многочлену* $\chi_{\tilde{A}}(t)$ *лежать в* P*;*

2) *геометрична кратність кожного власного значення* λ_i *дорівнює його алгебраїчній кратності.*

Необхідність. Нехай матриця A приводиться до діагонального виду. Порядок цієї матриці дорівнює $n = \dim V$, її елементи належать полю P. Позначимо через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ всі різні власні значення оператору $\tilde{A}$, тоді діагональна матриця оператору $\tilde{A}$ має вид:

$$A = diag(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_p, \ldots, \lambda_p}_{k_p}).$$

З цього представлення очевидно, що $\dim V^{\lambda_i} = k_i, \quad i = 1, \ldots, p,$ $n = \sum\limits_{i=1}^{p} k_i$, $\quad \chi_{\tilde{A}}(t) = \chi_A(t) = \det(tE - A) = (t - \lambda_1)^{k_1} \ldots (t - \lambda_p)^{k_p}$, звідки кратність кореня λ_i дорівнює k_i, тобто виконуються обидві умови: 1) всі корені характеристичного многочлену $\chi_{\tilde{A}}(t)$ лежать в P; 2) геометрична кратність кожного власного значення λ_i дорівнює його алгебраїчній кратності. ▲

Достатність доведено попереду. ■

Зауваження 3.5. Якщо простір задано над алгебраїчно замкненим полем, то попередній критерій діагоналізовності матриці стає наступним

Матриця A лінійного оператору $\widetilde{A}$ на скінченномірному векторному просторі V над алгебраїчно замкненим полем приводиться до діагонального виду тоді і тільки тоді, коли геометрична кратність кожного власного значення дорівнює його алгебраїчній кратності.

Контрольні питання і завдання

1. Нехай v – власний вектор операторів $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$, що відповідає власному значенню λ. Знайдіть власне значення оператору

а) $\widetilde{A}+\widetilde{B}$ б) $\widetilde{A}\widetilde{B}$, в) $\frac{1}{3}\widetilde{A}+\frac{2}{3}\widetilde{B}$, якому відповідає вектор v.

2. Дайте означення геометричної і алгебраїчної кратностей власного значення.

3. Як співвідносяться геометрична та алгебраїчна кратності власного значення?

4. Доведіть, що не існує матриці рангу 3 з характеристичним поліномом $\chi(t)=t^7-t^5+t^3$.

5. Чим відрізняються критерії діагоналізовності матриці оператору над довільним полем та алгебраїчно замкненим?

6. Доведіть, що $\forall A, B \in M_n(K)$ виконується рівність $\chi_{AB}(\lambda)=\chi_{BA}(\lambda)$.

4. Теорема Гамільтона-Келі

Намагаючись розібратися з дією заданого лінійного оператору $\widetilde{A}: V \to V$, природно поставити собі мету знайти базис у просторі V, в якому матриця A оператору $\widetilde{A}$ має найпростіший вигляд. Із зрозумілих причин ця задача пов'язана з основним полем P, над яким визначений векторний простір. Надалі будемо вважати, що $P = \mathbf{C}$ – поле комплексних чисел.

Для доведення теореми Гамільтона-Келі ми скористаємося наступним твердженням.

Теорема 4.1. *Довільний комплексний лінійний оператор* $\widetilde{A}: V \to V$*, де* $\dim V = n$*, володіє інваріантним підпростором* $U \subset V$*, що* $\dim U = n-1$.

Доведення даної теореми спирається на поняття та властивості спряженого простору, спряженого оператору і його можна розглянути, наприклад, в [9].

Теорема 4.2. *Матрицю лінійного оператору завжди можна привести до трикутного виду.*

Доведення. Нехай $\widetilde{A}: V \to V$, $\dim V = n$. Проведемо доведення методом математичної індукції по розмірності n простору V.

1. $n = 1,\quad A = (\lambda_1)$ – трикутний вид у довільному базисі;

2. $n = 2$. Так як нами розглядаються лінійні оператори в просторі над полем $\mathbf{C}$, то характеристичний многочлен $\chi_{\widetilde{A}}(t)$ має хоча б один корінь λ_1, а оператор $\widetilde{A}$ – хоча б один відповідний власний вектор e_1: $\widetilde{A}e_1 = \lambda_1 e_1$. Побудуємо простір $U = \langle e_1 \rangle = \{ke_1 \mid k \in \mathbf{C}\}$. Він є інваріантним відносно оператору $\widetilde{A}$: $\widetilde{A}U = \{k\lambda_1 e_1\} = U$. Доповнимо e_1 до базису e_1, e_2 простору V. Тоді існують α, β такі, що образ $\widetilde{A}e_2 = \alpha e_1 + \beta e_2$. Елемент $\alpha e_1 = u \in U$ і позначимо $\beta = \lambda_2$. Тоді $\widetilde{A}e_2 = u + \lambda_2 e_2$ і $A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ – трикутний вигляд. Зауважимо, що при введених позначеннях простір $V = \langle U, e_2 \rangle,\quad e_2 \notin U$.

3. Припустимо, що для довільного простору U, що $\dim U = n-1$, теорема справедлива, тобто матриця лінійного оператору $\widetilde{A}$ на ньому приводиться до діагонального виду в деякому базисі $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$. Тоді цей базис задовольняє умові, що

$$\tilde{A}e_i = u_i + \lambda_i e_i, \quad u_i \in \langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle. \tag{1}$$

За наведеною попередньою теоремою, довільний комплексний лінійний оператор $\tilde{A}: V \to V$, де $\dim V = n$, володіє інваріантним підпростором $U \subset V$ таким, що $\dim U = n-1$. До цього підпростору можна застосувати припущення індукції.

Також маємо, що $\forall e_n \notin U,\, e_n \in V \quad \Rightarrow \quad V = \langle U, e_n \rangle$. Нехай

$$\tilde{A}e_n = u + \mu e_n, \quad u \in U. \tag{2}$$

Тоді з умов (1) і (2) в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n$ матриця оператору $\tilde{A}$ має трикутний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & \ldots & 0 & \mu \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Теорема 4.3 (Гамільтона-Келі). *Лінійний оператор* $\tilde{A}$ *і відповідна йому матриця* A *в довільному базисі анулюються своїм характеристичним многочленом* $\chi_{\tilde{A}}(t)$ *, тобто* $\chi_{\tilde{A}}(\tilde{A}) = \tilde{O}$.

Доведення. Так як це твердження не залежить від вибору базису, то виберемо базис $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n$ із попередньої теореми, в якому матриця оператору $\tilde{A}$ має трикутний вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен такої матриці (а значить і оператору $\tilde{A}$) $\chi_{\tilde{A}}(t) = \chi_A(t) = \det(tE - A) = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$. Розглянемо ланцюг $\tilde{A}$-інваріантних підпросторів

$$\{\theta\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V,$$

де $V_k = \langle e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k \rangle$. Так як із доведення попередньої теореми $\tilde{A}e_i = u_i + \lambda_i e_i, \quad u_i \in \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle$, то

$$\left.\begin{array}{l}\left(\tilde{A} - \lambda_i \tilde{I}\right)e_s = (\lambda_s - \lambda_i)e_s + u_s \in V_s,\ s < i, \quad \left(\tilde{A} - \lambda_i \tilde{I}\right)e_i = u_i \in V_{i-1} \quad \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \left(\tilde{A} - \lambda_i \tilde{I}\right)V_i \subset V_{i-1}\end{array}\right..$$

Зокрема, $\left(\tilde{A} - \lambda_1 \tilde{I}\right)V_1 \subseteq V_0 \quad \Rightarrow \quad \left(\tilde{A} - \lambda_1 \tilde{I}\right)V_1 = \{\theta\}$ Значить

$$\begin{aligned}\chi_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\right)V = \prod_{i=1}^{n} \left(\tilde{A} - \lambda_i \tilde{I}\right)V = \left(\tilde{A} - \lambda_1 \tilde{I}\right)\cdot \dots \cdot \left(\tilde{A} - \lambda_n \tilde{I}\right)V_n \subset \\ \subset \left(\tilde{A} - \lambda_1 \tilde{I}\right)\cdot \dots \cdot \left(\tilde{A} - \lambda_{n-1} \tilde{I}\right)V_{n-1} \subset \left(\tilde{A} - \lambda_1 \tilde{I}\right)\cdot \dots \cdot \left(\tilde{A} - \lambda_{n-2} \tilde{I}\right)V_{n-2} \subset \\ \subset \dots \subset \left(\tilde{A} - \lambda_1 \tilde{I}\right)V_1 = \{\theta\}.\end{aligned}$$

Це означає, що оператор $\chi_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\right)$ довільний елемент простору V відображає в θ, тобто він є нульовим оператором: $\chi_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\right) = \tilde{O}$. ■

Наслідок 4.4. *Мінімальний многочлен $\mu_{\tilde{A}}(t)$ лінійного оператору $\tilde{A}$ є дільником характеристичного многочлену $\chi_{\tilde{A}}(t)$, який ділиться на $t - \lambda_i$, де λ_i – всі різні власні значення оператору $\tilde{A}$.*

Доведення. Як доведено в теоремі Гамільтона-Келі, лінійний оператор $\tilde{A}$ анулюється своїм характеристичним многочленом $\chi_{\tilde{A}}(t)$. Раніше було доведено, що довільний многочлен $f(t)$, що анулює оператор $\tilde{A}$, ділиться без остачі на мінімальний многочлен $\mu_{\tilde{A}}(t)$. Отже, $\chi_{\tilde{A}}(t) \vdots \mu_{\tilde{A}}(t)$.

За означенням, $\mu_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\right) = \tilde{O}$, тому дія оператору $\mu_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\right)$ на довільний елемент простору дорівнює нульовому елементу: $\forall v \in V \quad \mu_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\right)v = \theta$. Нехай $\mu_{\tilde{A}}(t) = t^m + \mu_1 t^{m-1} + \dots + \mu_{m-1}t + \mu_m$, λ – власне значення оператору $\tilde{A}$, $v_0 \neq \theta$ – відповідний власний вектор, тоді $\tilde{A}v_0 = \lambda v_0$, $\tilde{A}^2 v_0 = \tilde{A}(\tilde{A}v_0) = \tilde{A}(\lambda v_0) = \lambda \tilde{A}v_0 = \lambda^2 v_0$, аналогічно $\tilde{A}^k v_0 = \lambda^k v_0$ і

$$\theta = \mu_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\right)v_0 = \left(\tilde{A}^m + \mu_1\tilde{A}^{m-1} + \ldots + \mu_{m-1}\tilde{A} + \mu_m\tilde{I}\right)v_0 =$$

$$= \tilde{A}^m v_0 + \mu_1\tilde{A}^{m-1}v_0 + \ldots + \mu_{m-1}\tilde{A}v_0 + \mu_m\tilde{I}v_0 =$$

$$= \lambda^m v_0 + \mu_1\lambda^{m-1}v_0 + \ldots + \mu_{m-1}\lambda v_0 + \mu_m v_0 = \mu_{\tilde{A}}(\lambda)\cdot v_0.$$

Оскільки $\mu_{\tilde{A}}(\lambda)v_0 = \theta,\ \ v_0 \neq \theta,$ то із властивості 7 лінійного простору [11] $\mu_{\tilde{A}}(\lambda) = 0 \ \Rightarrow \ \mu_{\tilde{A}}(t) \,\vdots\, (t-\lambda)$ ■

Наслідок 4.5. *Степінь мінімального многочлену* $\mu_{\tilde{A}}(t)$ *не може бути менше 1, оскільки він ділиться хоча б на один многочлен першого степеню* $(t-\lambda)$.

Доведіть самостійно, що оператор $\tilde{A}$ оборотний тоді і тільки тоді, коли вільний член χ_n характеристичного многочлена $\chi_{\tilde{A}}(t) = \chi^n + \chi_1 t^{n-1} + \ldots + \chi_{n-1}t + \chi_n$ відмінний від нуля.

Приклад 4.6. Дано лінійне перетворення $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ з характеристичним поліномом $p(x) = x^2 + 2x - 3$. Довести, що лінійне перетворення $2T + I$ є ізоморфізмом. Який характеристичний поліном у T^3?

▼Лінійне перетворення є ізоморфізмом, якщо воно оборотне, тобто вільний член його характеристичного многочлена відмінний від нуля. За теоремою 4.3, кожне лінійне перетворення анулюється своїм характеристичним многочленом. Тому $p(T) = T^2 + 2T - 3I = O.$

Лінійне перетворення $A = 2T + I:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, тому його характеристичний поліном χ_A також має степінь 2, примітивний (старший коефіцієнт дорівнює $1 = \left(-1^2\right)$) і анулює A. Знайдемо характеристичний поліном A. Врахуємо, що $T = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I$. Тоді

$$p(T) = \frac{1}{4}(A - I)^2 + (A - I) - 3I = \frac{1}{4}(A^2 + 2A - 15I) = O.$$

Звідки $\chi_A(x)=x^2+2x-15$. Так як його вільний член $-15\neq 0$, то лінійне перетворення $A=\ 2T+I$ є ізоморфізмом.

Лінійне перетворення $T^3:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, тому його характеристичний поліном χ_{T^3} також має степінь 2, примітивний і анулюється T^3: $\chi_{T^3}(x)=x^2+ax+b$. Тоді $\chi_{T^3}(T^3)=T^6+aT^3+bI=O$.

Знайдемо характеристичний поліном χ_{T^3}. Врахуємо, що

$$T^2+2T-3I=O\quad\Rightarrow\quad T^2=-2T+3I\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ T^3=-2T^2+3T=-2\left(T^2+2T-3I\right)+7T-6I=7T-6I\quad\Rightarrow.$$
$$\Rightarrow\quad T^6=(7T-6I)^2=49T^2-84T+36I.$$

Тоді

$$\chi_{T^3}\left(T^3\right)=49T^2-84T+36I+a(7T-6I)+bI=O\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad\chi_{T^3}\left(T^3\right)=49T^2+(-84+7a)T+(36-6a+b)I=O=$$
$$=49(T^2+2T-3I)=49T^2+98T-147I\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad\begin{cases}-84+7a=98\\ 36-6a+b=-147\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=26\\ b=-27\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad\chi_{T^3}(x)=x^2+26x-27.\ \blacksquare$$

Приклад 4.7. Знайти мінімальний многочлен матриці

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&7&-4\\-3&6&-3\end{pmatrix}$$

▼ Мінімальний многочлен анулюється своєю матрицею та є дільником характеристичного многочлену цієї матриці (наслідок 4.4). Він має ті ж самі лінійні множники, що і характеристичний многочлен, лише може мати менші степені цих множників (але не менше 1).

$$\chi_A(\lambda)=-\lambda^3+8\lambda^2-21\lambda+18=(\lambda-3)^2(\lambda-2).$$

У розкладі мінімального многочлену тільки співмножник $(\lambda-3)$ може понизити свою степінь. Отже, перевіримо за означенням, чи буде многочлен $(\lambda-3)(\lambda-2)$ мінімальним многочленом матриці A:

$$(A-3E)(A-2E)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -3 & 6 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо, $\mu_A(t)=(t-3)(t-2)=t^2-5t+6$. ■

Контрольні питання і завдання

1. Слід матриці A – це сума діагональних елементів цієї матриці. Позначається trA. Доведіть, що $trAB=trBA$.

2. Доведіть, що слід матриці $A\in M_{n\times n}(K)$ співпадає із слідом матриці $U^{-1}AU$ для будь-якої оборотної квадратної матриці $U\in M_{n\times n}(K)$: $trA=trU^{-1}AU$.

3. Порівняйте степені мінімального та характеристичного многочленів. Відповідь обґрунтуйте.

4. Яким буде мінімальний многочлен матриці, якщо всі корені характеристичного многочлена різні?

5. Знайдіть мінімальні многочлени матриць:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Доведіть, якщо $\tilde{A}^3=\tilde{A}^2$, то лінійне перетворення $\tilde{A}:V\to V$ має тільки власні значення 1 або 0.

7. Якими можуть бути власні значення лінійного перетворення $\tilde{A}:V\to V$, що задовольняє умову $\tilde{A}^2-\tilde{A}=6\tilde{I}$.

5. Жорданові матриці

Для $k \in \mathbf{N}$ та $\lambda \in \mathbf{C}$; *(верхньою)* ***клітиною Жордана*** $J_k(\lambda)$ порядку k, що відповідає власному значенню λ ми називатимемо елемент з $M_{k\times k}(\mathbf{C})$, що має наступний вигляд:

$$J_k(\lambda)=\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{k}$$

Жордановою матрицею називається матриця, що складається із діагональних блоків $J_{m_i}(\lambda_i)$ і нулів за межами цих блоків:

$$J=\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & J_{m_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Жордановим базисом для лінійного оператору $\tilde{A}: V \to V$ називається такий базис простору V, в якому матриця оператору $\tilde{A}$ є жордановою, або як говорять, має ***жорданову нормальну форму*** **(ЖНФ)** $J(\tilde{A})$.

Приведенням квадратної матриці A ***до жорданової нормальної форми*** називається розв'язок рівняння в матрицях виду $X^{-1}AX = J(A)$, де X – невідома невироджена матриця, а $J(A)$ невідома жорданова матриця. Метою даного розділу як раз і є дослідження теорії питання приведення квадратної матриці до жорданової нормальної форми.

Матриці деяких операторів в довільному базисі мають жорданову форму. Наприклад, матрицею нульового оператору $\tilde{O}$ є нульова матриця O, єдиним власним значенням цього оператору є число 0, тому $\mu_{\tilde{O}}(t)\mathrm{M}(t-0)$. Очевидно, що многочлен $f(t)=t$ анулює оператор $\tilde{O}$. Так як $\mu_{\tilde{O}}(t)$ не може мати степінь менше одиниці, то $\mu_{\tilde{O}}(t)=\mu_O(t)=t$. Матрицею тотожного оператору $\tilde{I}$ є одинична матриця E, єдиним власним значенням цього оператору є число 1, тому $\mu_{\tilde{I}}(t)\mathrm{M}(t-1)$. Очевидно, що многочлен $f(t)=t-1$ анулює оператор $\tilde{I}$. Так як $\mu_{\tilde{I}}(t)$ не може мати степінь менше одиниці, то, $\mu_{\tilde{I}}(t)=\mu_E(t)=t-1$.

Матриця A називається ***нільпотентною***, якщо $A^m=O$ для деякого $m>0$. Найменше з таких m називається ***індексом нільпотентності***.

Зрозуміло, що для матриці A з індексом нільпотентності m мінімальний многочлен $\mu_A(t)=t^m$.

Розглянемо матрицю $J_k(0)$. Якщо $k=1$, то $J_1(0)=(0)$. Індекс нільпотентності цієї матриці $m=1$.

Якщо $k=2$, то $J_2(0)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. Індекс нільпотентності цієї матриці $m=2$, оскільки $J_2^2(0)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Якщо $k=3$, то $J_3(0)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Індекс нільпотентності цієї матриці $m=3$, оскільки $J_3^2(0)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq O$,

$$J_3^3(0)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Аналогічно можна одержати, що *індекс нільпотентності матриці* $J_k(0)$ *дорівнює* k . Її мінімальний многочлен $\mu_{J_k(0)}(t) = t^k$.

Навпаки, *матриця* $J_k(\lambda),\quad \lambda \neq 0$ *не є нільпотентною:*

$J_1(\lambda) = (\lambda),\quad J_1^s(\lambda) = \left(\lambda^s\right) \neq O \quad \forall s \in \mathbf{N}$;

$$J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad J_2^2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \neq O,$$

$$J_2^s(0) = \begin{pmatrix} \lambda^s & s\lambda^{s-1} \\ 0 & \lambda^s \end{pmatrix} \neq O \quad \forall s \in \mathbf{N}.$$

Аналогічно $J_k^s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^s & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda^s \end{pmatrix} \neq O \quad \forall s \in \mathbf{N}$.

Зауважимо, що $J_k(\lambda) - \lambda E = J_k(0)$ нільпотентна матриця з індексом нільпотентності k . Зокрема, $(t - \lambda)^k$ мінімальний многочлен клітини Жордана $J_k(\lambda)$ і λ – її єдине власне значення (поняття власного значення матриці розглянуто в [12]).

Жорданова матриця має клітинно-діагональний вид

$$J = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \ldots & A_s \end{pmatrix}.$$

Натуральні степені цієї матриці мають вид

$$J^k = \begin{pmatrix} A_1^k & \ldots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \ldots & A_s^k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Розглянемо окремі випадки таких степенів.

1. Нехай $J = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, $A_1 = J_{m_1}(\lambda)$, $A_2 = J_{m_2}(\lambda)$, $m_1 < m_2$. Тоді

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & O \\ O & J_{m_2}(0) \end{pmatrix}, \qquad (J - \lambda E)^k = \begin{pmatrix} O & O \\ O & J_{m_2}^{k_1}(0) \end{pmatrix} \neq O, \quad m_1 \leq k < m_2,$$

$$(J - \lambda E)^{m_2} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix}, \text{ звідки } \mu_J(t) = (t - \lambda)^{m_2}.$$

Розповсюджуючи цей результат на p клітин Жордана $J_{m_i}(\lambda)$, що відповідають одному й тому ж власному значенню λ, маємо

$$\mu_J(t) = (t - \lambda)^m, \text{ де } m = \max\{ m_1, \ldots, m_p \}.$$

2. Нехай $J = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, $A_1 = J_{m_1}(\lambda_1)$, $A_2 = J_{m_2}(\lambda_2)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді,

$$(J - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & O \\ O & J_{m_2}(-\lambda) \end{pmatrix}, \ \lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0,$$

$$(J - \lambda_1 E)^k = \begin{pmatrix} O & O \\ O & J_{m_2}^{k}(-\lambda) \end{pmatrix} \neq O, \quad m_1 \leq k,$$

аналогічно $(J - \lambda_2 E)^k = \begin{pmatrix} J_{m_1}^{k}(\lambda) & O \\ O & O \end{pmatrix} \neq O, \quad m_2 \leq k$, але

$$(J - \lambda_1 E)^{m_1} \cdot (J - \lambda_2 E)^{m_2} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & J_{m_2}^{m_1}(-\lambda) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_{m_1}^{m_2}(\lambda) & O \\ O & O \end{pmatrix} = O,$$

причому. $(J - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot (J - \lambda_2 E)^{k_2} \neq O$, якщо $k_1 < m_1$ і $k_2 < m_2$. Тому многочлен $\mu_J(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2}$ є мінімальним для матриці J.

Узагальнюючи дані спостереження можна зробити висновок:

Твердження 5.1. *Якщо*

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & J_{m_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\mu_J(t) = \left(t - \lambda_{i_1}\right)^{m_{i_1}} \cdot \ldots \cdot \left(t - \lambda_{i_p}\right)^{m_{i_p}},$$

де $\left\{\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_p}\right\}$ *всі попарно різні власні значення із* $\left\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\right\}$ *матриці* J*, а* m_{i_k} *максимальний із тих порядків жорданових клітин* $J_{m_j}\left(\lambda_j\right)$*, які відповідають власним значенням* $\lambda_j = \lambda_{i_k}$.

Якщо при приведенні квадратної матриці A до жорданової нормальної форми матриця $J(A) = J$, то, враховуючи подібність A і J, мінімальний многочлен

$$\mu_A(t) = \mu_J(t) = \left(t - \lambda_{i_1}\right)^{m_{i_1}} \cdot \ldots \cdot \left(t - \lambda_{i_p}\right)^{m_{i_p}}. \qquad (***)$$

Так як характеристичні многочлени подібних матриць рівні, то власні значення подібних матриць співпадають і можна говорити, що $\left\{\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_p}\right\}$ – всі попарно різні власні значення матриці A. Сам же характеристичний многочлен матриці порядку n

$$\chi_A(t) = \left(t - \lambda_{i_1}\right)^{n_{i_1}} \cdot \ldots \cdot \left(t - \lambda_{i_p}\right)^{n_{i_p}}, \quad n_{i_k} \geq m_{i_k}, \quad n_{i_1} + \ldots + n_{i_p} = n.$$

Ясно, якщо всі $m_{i_k} = 1$, то всі клітини Жордана матриці J мають порядок 1, а матриця J є діагональною. Тому, з урахуванням (***), одержуємо настуний критерій діагонолізовності.

Наслідок 5.2. *Квадратна матриця* A *над* $\mathbf{C}$ *діагонолізовна тоді і тільки тоді, коли її мінімальний многочлен* $\mu_A(t)$ *не має кратних коренів.*

Контрольні питання і завдання

1. Який мінімальний многочлен клітини Жордана $J_k(\lambda)$? Які вона має власні значення?

2. Який мінімальний многочлен жорданової матриці $J = diag\left(J_3(-1), J_4(-1), J_2(3)\right)$?

3. Чи подібні матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

4. Які з матриць подібні : $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, чи $C = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$?

6. Кореневі підпростори.

Оператор $\widetilde{A}$ називається ***нільпотентним***, якщо $\widetilde{A}^m = \widetilde{O}$ для деякого натурального $m > 0$. Найменше з таких m називається ***індексом нільпотентності***. Очевидно, що матриця нільпотентного оператору нільпотентна і навпаки, причому їх індекси нільпотентності співпадають.

Зрозуміло, що для оператору $\widetilde{A}$ з індексом нільпотентності m, так само, як і для нільпотентної матриці, мінімальний многочлен $\mu_{\widetilde{A}}(t) = t^m$.

Якщо оператор $\widetilde{A}: V \to V$ з індексом нільпотентності m, то $\widetilde{A}^{m-1} \neq \widetilde{O}$, значить існує $v \in V$, що $\widetilde{A}^{m-1} v \neq \theta$. Тоді *вектори* $v, \widetilde{A}v, \widetilde{A}^2 v, \ldots, \widetilde{A}^{m-2} v, \widetilde{A}^{m-1} v$ *лінійно незалежні*. Дійсно, складемо лінійну комбінацію цих векторів і прирівняємо до нуля:

$$a_0 v + a_1 \widetilde{A} v + \ldots + a_{m-2} \widetilde{A}^{m-2} v + a_{m-1} \widetilde{A}^{m-1} v = \theta . \tag{1}$$

Подіємо на обидві частини рівняння (1) оператором $\widetilde{A}$, врахувавши зауваження 2.1.1, що нульовий елемент лінійним оператором відображається в нульовий елемент і $\widetilde{A}^m v = \theta$. Одержимо

$$a_0 \widetilde{A} v + a_1 \widetilde{A}^2 v + \ldots + a_{m-2} \widetilde{A}^{m-1} v + \theta = \theta . \tag{2}$$

На обидві частини рівняння (2) і наступних також подіємо оператором $\widetilde{A}$ і одержимо систему рівнянь (1) $-(m)$:

$$a_0 \widetilde{A}^2 v + a_1 \widetilde{A}^3 v + \ldots + a_{m-3} \widetilde{A}^{m-1} v = \theta ; \tag{3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

$$a_0 \widetilde{A}^{m-2} v + a_1 \widetilde{A}^{m-1} v = \theta ; \tag{$m-1$}$$

$$a_0\widetilde{A}^{m-1}v=\theta. \qquad (m)$$

За припущенням, $\widetilde{A}^m v=\theta$, а $\widetilde{A}^{m-1}v\neq\theta$. Тому із рівняння (m) за властивістю 7 лінійних просторів (п.1.2) випливає, що $a_0=0$. Підставимо це значення в $(m-1)$ і одержимо $a_1\,\widetilde{A}^{m-1}v=\theta \;\Rightarrow\; a_1=0$. Аналогічно одержимо, що $a_i=0 \quad \forall i\in\{0,1,2,\ldots m-2,m-1\}$, звідки сукупність векторів (6.1) лінійно незалежна. ▲

Наслідок 6.1. *Індекс нільпотентності оператору* $\widetilde{A}:V\to V$ *не перевищує* $\dim V$.

Зауважимо, що цей результат також випливає із наслідку 4.4 та зауваження 2.1:

$$m=\left|t^m\right|=\left|\mu_{\widetilde{A}}(t)\right|\leq\left|\chi_{\widetilde{A}}(t)\right|=n=\dim V.$$

Зауваження 6.2. *Якщо* $\widetilde{A}:V\to V$ *– нільпотентний оператор і* $\widetilde{A}^k u\neq\theta$ *для деякого* $u\in V$, *то сукупність векторів* $u,\widetilde{A}u,\widetilde{A}^2u,\ldots,\widetilde{A}^k u$ *лінійно незалежна.*

Зауваження доводиться аналогічно до сукупності (6.1), починаючи діяти на лінійну комбінацію даних векторів оператором $\widetilde{A}^s$, де $s+k$ – індекс нільпотентності оператору $\widetilde{A}$.

Приклад 6.1. Знайти базис, в якому матриця нільпотентного оператору має жорданову форму, якщо індекс нільпотентності оператору співпадає з розмірністю простору.

▼Припустимо, що індекс нільпотентності оператору $\widetilde{A}:V\to V$ дорівнює $\dim V=n$. Зразу зауважимо, що $\exists\, e\in V$ такий, що $\widetilde{A}^{n-1}e\neq\theta$, оскільки в протилежному випадку $\widetilde{A}^{n-1}v=\theta,\forall v\in V$, а це означає $\widetilde{A}^{n-1}=\widetilde{O}$, що суперечить індексу нільпотентності оператору $\widetilde{A}$. Тоді, за зауваженням 6.2 та теоремою 4.2, сукупність

$$e,\widetilde{A}e,\widetilde{A}^2e,\ldots,\widetilde{A}^{n-2}e,\;\widetilde{A}^{n-1}e$$

утворює базис простору V $\left(V=\left\langle e,\tilde{A}e,\ldots,\tilde{A}^{n-1}e\right\rangle\right)$. Введемо наступні позначення для базисних векторів:

$$e_1=\tilde{A}^{n-1}e,\ e_2=\tilde{A}^{n-2}e,\ \ldots,e_{n-1}=\tilde{A}e,\ e_n=e.$$

Тоді $\tilde{A}e_1=\theta,\tilde{A}e_k=e_{k-1},\ k>1$. При побудові матриці цього оператору в базисі $e_1,\ldots,e_n$ будемо мати перший стовпчик нульовий, а кожний k-й стовпчик $(2\le k\le n)$ буде складатися із 1 в $(k-1)$-му рядочку та 0 в інших рядках. Тому матрицею оператору $\tilde{A}$ в базисі $e_1,\ldots,e_n$ буде жорданова матриця $J_n(0)$. ▲

Приклад 6.2. Нехай $V=\left\langle 1,t,t^2,\ldots,t^{n-1}\right\rangle$ – простір многочленів степеня, меншого n і $D=\dfrac{d}{dt}$ – оператор диференціювання по t. Тоді матрицею цього оператору в базисі $e_1,\ldots,e_n$, $\quad e_i=\dfrac{1}{i!}t^i$, буде як раз матриця $J_n(0)$. ▲

Множина векторів

$$V(\lambda)=\left\{v\in V\ \middle|\ \exists k\in\mathbf{N},\quad \left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^k v=\theta\right\}$$

називається ***кореневим підпростором***, що відповідає власному значенню λ оператору $\tilde{A}:V\to V$. Зауважимо, якщо $v\in V(\lambda)$, то $\exists k$, що $\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^k v=\theta$, а значить $\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^{k+1}v=\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^k v=\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)\theta=\theta$ і

$$\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^s v=\theta\quad \forall s\ge k. \tag{6.2}$$

Далі, $\forall s<k\quad \left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^{k-s}\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^s v=\theta\quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad \forall s<k\quad \left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^s v\in V(\lambda) \tag{6.3}$$

Перевіримо, що $V(\lambda)$ є підпростором за критерієм підпростору 6.1 а. Нехай $u,v\in V(\lambda)$, причому $\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^s u=\theta,\ \left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^t v=\theta,\ m=\max\{s,t\}$. Тоді, за (6.2),

$$\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^m(\alpha u+\beta v)=\alpha\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^m u+\beta\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^m v=\alpha\theta+\beta\theta=\theta.$$

Значить $\alpha u+\beta v\in V(\lambda)\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbf{C}\quad\Rightarrow\quad V(\lambda)$ – підпростір.

Очевидно, що всі власні вектори, які відповідають власному значенню λ, належать $V(\lambda)$, тому $V(\lambda)\neq\{\theta\}$ і $V^{\lambda}\subseteq V(\lambda)$.

Нехай $v\in V(\lambda)$ і m – найменше з тих натуральних чисел, що $\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^m v=\theta$. Розглянемо сукупність векторів

$$v,\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)v,\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^2 v,\ \ldots,\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^{m-2}v,\ \left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^{m-1}v. \tag{6.4}$$

За (6.3) всі ці вектори належать кореневому підпростору $V(\lambda)$. Так як ця сукупність має вид (6.1), то вона лінійно незалежна.

Так як $V(\lambda)\subseteq V$, то $\dim V(\lambda)\leq\dim V=n$. Припустимо, що $\exists v\in V(\lambda)$ таке, що $\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^n v\neq\theta$, тобто $m>n$. Тоді ЛНЗ сукупність (6.4) містить m векторів підпростору $V(\lambda)$, що суперечить умові $\dim V(\lambda)\leq n$. Ця суперечність доводить, що $\forall v\in V(\lambda)\quad\Rightarrow\quad\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^n v=\theta$. Навпаки очевидно, тому справедливо наступне:

$$V(\lambda)=\left\{v\in V\ \middle|\ \left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^n v=\theta\right\}. \tag{6.5}$$

Ця умова дає можливість стверджувати, що $\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)$ є нільпотентним на $V(\lambda)$ з індексом нільпотентності $k\leq n$, бо на $V(\lambda)$ оператор $\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)^n$ діє як нульовий оператор.

Ланцюжковим базисом кореневого підпростору $V(\lambda)$ оператору $\tilde{A}$, що відповідає власному числу λ, називається такий його базис v_{ij}, $1\leq i\leq s, 1\leq j\leq p_i$, для якого $\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)v_{ij}=v_{i(j-1)}$ та $\left(\tilde{A}-\lambda\tilde{I}\right)v_{i1}=\theta$.

Теорема 6.3. *Нехай $\tilde{A}:V\to V$ – лінійний оператор простору V над полем P з характеристичним многочленом*

$$\chi_A(t)=(t-\lambda_1)^{n_1}\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_p)^{n_p}, \qquad \lambda_i\neq\lambda_j \quad (i\neq j).$$

Тоді

1). $V=V(\lambda_1)\oplus\ldots\oplus V(\lambda_p)$ *– пряма сума кореневих підпросторів* $V(\lambda_i)$, *кожний з яких інваріантний відносно* $\tilde{A}$ *і має розмірність* $\dim V(\lambda_i)=n_i$.

2).Оператор $\tilde{A}-\lambda_i\tilde{I}$ *, нільпотентний на* $V(\lambda_i)$*, діє невиродженим чином на підпросторі*

$$V_i=V(\lambda_1)\oplus\ldots\oplus V(\lambda_{i-1})\oplus V(\lambda_{i+1})\oplus\ldots\oplus V(\lambda_p).$$

3). Нарешті, λ_i *– єдине власне значення оператору* $\tilde{A}\big|_{V(\lambda_i)}$.

Доведення. Позначимо $\chi_i(t)=\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}(t-\lambda_j)^{n_j}$, $\quad i=1,\ldots,p$ добуток всіх співмножників $\chi_A(t)$ без $(t-\lambda_i)^{n_i}$. Жоден з простих множників $t-\lambda_k$ не може бути дільником одночасно всіх многочленів $\chi_i(t)$, тому НСД$(\chi_1(t),\ldots,\chi_p(t))=1$. Значить існують многочлени $f_1(t),\ldots,f_p(t)\in P[t]$, які дають лінійне представлення НСД$(\chi_1(t),\ldots,\chi_p(t))$:

$$\sum_{i=1}^{p}\chi_i(t)f_i(t)=1. \tag{1}$$

Введемо до розгляду підпростори

$$W_i=\chi_i(\tilde{A})f_i(\tilde{A})V=\{\chi_i(\tilde{A})f_i(\tilde{A})v \mid v\in V\}, \qquad 1\leq i\leq p,$$

які є образами оператору $\chi_i(\tilde{A})f_i(\tilde{A})$. Ці підпростори *інваріантні* відносно $\tilde{A}$. Це легко довести, пам'ятаючи, що $P[\tilde{A}]$ – комутативна алгебра:

$$\tilde{A}W_i=\tilde{A}\chi_i(\tilde{A})f_i(\tilde{A})V=\chi_i(\tilde{A})f_i(\tilde{A})\tilde{A}V\subseteq\chi_i(\tilde{A})f_i(\tilde{A})V=W_i.$$

Крім того, враховуючи, що

$$(t-\lambda_i)^{n_i}\chi_i(t)=(t-\lambda_i)^{n_i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}(t-\lambda_j)^{n_j}=\chi_{\tilde{A}}(t), \text{ і } \chi_{\tilde{A}}(\tilde{A})=\tilde{O},$$

маємо, що $(\tilde{A}-\lambda_i\tilde{I})^{n_i}W_i=\chi_{\tilde{A}}(\tilde{A})f_i(\tilde{A})V=\theta$, тобто

$$W_i \subseteq V(\lambda_i). \tag{2}$$

Співвідношення (1) від оператору $\tilde{A}$ має вигляд $\sum_{i=1}^{p} \chi_i(\tilde{A}) f_i(\tilde{A}) = \tilde{I}$. Якщо подіяти оператором $\tilde{I}$ на простір V, то маємо $V = \tilde{I}V = \sum_{i=1}^{p} \chi_i(\tilde{A}) f_i(\tilde{A}) V = \sum_{i=1}^{p} W_i$, а врахувавши (2), отримаємо розклад простору V у суму кореневих підпросторів:

$$V = \sum_{i=1}^{p} V(\lambda_i).$$

Розглянемо підпростір $V_i = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_{i-1}) \oplus V(\lambda_{i+1}) \oplus \dots \oplus V(\lambda_p)$. Кожний елемент v цього підпростору розкладається у суму $v = \sum_{j \neq i} v_j, \quad v_j \in V(\lambda_j)$.

Нехай $v \in V(\lambda_i) \cap V_i$, причому $v = \sum_{j \neq i} v_j, \quad v_j \in V(\lambda_j)$. Дослідимо цей перетин. За умовою (6.5), враховуючи, що $\dim V = n$, маємо

$$v \in V(\lambda_i) \Rightarrow \left(\tilde{A} - \lambda_i \tilde{I}\right)^n v = \theta \qquad \text{і}$$

$$v_j \in V(\lambda_j) \Rightarrow \left(\tilde{A} - \lambda_j \tilde{I}\right)^n v_j = \theta \Rightarrow \left\{\prod_{k \neq i} \left(\tilde{A} - \lambda_k \tilde{I}\right)^n\right\} v_j = \theta, \quad j = 1, \dots, p,\ j \neq i.$$

Так як оператор $\prod_{k \neq i} \left(\tilde{A} - \lambda_k \tilde{I}\right)^n$ кожен доданок суми $v = \sum_{j \neq i} v_j$ відображає в нуль, то $\left\{\prod_{k \neq i} \left(\tilde{A} - \lambda_k \tilde{I}\right)^n\right\} v = \theta$.

Далі розглянемо многочлени $h(t) = (t - \lambda_i)^n$, $g(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \left(t - \lambda_j\right)^n$. Так як $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$, то всі їх прості співмножники $(t - \lambda_i)$ і $(t - \lambda_j)$ попарно взаємнопрості, а значить $(h(t), g(t)) = 1$ і існують $a(t), b(t)$, для яких

$$1 = a(t)h(t) + b(t)g(t) \text{ і } \tilde{I} = a(\tilde{A})h(\tilde{A}) + b(\tilde{A})g(\tilde{A}).$$

Одержуємо

$$v = a(\tilde{A})\left(\tilde{A} - \lambda_i \tilde{I}\right)^n v + b(\tilde{A})\left\{\prod_{j \neq i} \left(\tilde{A} - \lambda_j \tilde{I}\right)\right\} v = \theta + \theta = \theta,$$

тобто $V(\lambda_i)\cap V_i=\{\theta\}$. Значить, за зауваженням 2 до критерію 1.7.4 [11], ми маємо *розклад*

$$V=V(\lambda_1)\oplus\ldots\oplus V(\lambda_p) \tag{3}$$

у пряму суму $\tilde{A}$*-інваріантних підпросторів*, звідки $n_1'+\ldots+n_p'=n$, де $n_i'=\dim V(\lambda_i)$ і базис простору V може бути об'єднанням базисів підпросторів $V(\lambda_i)$.

Із включення (2) та розкладу (3) безпосередньо випливає, що $W_i=V(\lambda_i)$. Таким чином, для $V(\lambda_i)$ одержано ефективний вираз

$$V(\lambda_i)=\chi_i(\tilde{A})f_i(\tilde{A})V,$$

де $\chi_i(t),\ f_i(t)$ – многочлени із тотожності (1).. Зокрема,

$$\left(\tilde{A}-\lambda_i\tilde{I}\right)^{n_i}V(\lambda_i)=\chi_{\tilde{A}}(\tilde{A})f_i(\tilde{A})V(\lambda_i)=\tilde{O}V(\lambda_i)=\theta.$$

Мінімальним многочленом для $\tilde{A}$ на $V(\lambda_i)$ буде деякий дільник многочлена $(t-\lambda_i)^{n_i}$. Звідси випливає, по-перше, що λ_i – *єдине власне значення оператору* $\tilde{A}\big|_{V(\lambda_i)}$, по-друге, що характеристичним многочленом для $\tilde{A}$ на $V(\lambda_i)$ буде многочлен $(t-\lambda_i)^{n_i'}$. Далі, враховуючи теорему4.1.1, в базисі, що є об'єднанням базисів $\tilde{A}$-інваріантних підпросторів $V(\lambda_i),\ i=1,\ldots,p$, оператор $\tilde{A}$ має клітинно-діагональну матрицю

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ O & \ldots & A_p \end{pmatrix},$$

де A_i – матриця порядку $n'_i=\dim V(\lambda_i)$ з єдиним власним значенням λ_i і характеристичним многочленом $\chi_{A_i}(t)=(t-\lambda_i)^{n_i'}$ так, як і для $\tilde{A}\big|_{V(\lambda_i)}$. Так як з одного боку, $\chi_A(t)=\prod_{i=1}^{p}\chi_{A_i}(t)=\prod_{i=1}^{p}(t-\lambda_i)^{n_i'}$, а з іншого боку, $\chi_A(t)=\chi_{\widetilde{A}}(t)=\prod_{i=1}^{p}(t-\lambda_i)^{n_i}$, то $n_i'=n_i$, *тобто* $\dim V(\lambda_i)=n_i$.

В цьому доведенні залишилось довести невиродженість обмеження $\left(\widetilde{A}-\lambda_i\widetilde{I}\right)\Big|_{V_i}$, тобто його взаємну однозначність, що ми зробимо методом від супротивного. Нам відомо, що довільний лінійний оператор нульовий елемент відображає в нульовий (зауваження 1.1), а взаємна однозначність довільного відображення включає ін'єктивність. Припустимо, що ін'єктивність лінійного оператору $\left(\widetilde{A}-\lambda_i\widetilde{I}\right)\Big|_{V_i}$ не виконується, тобто $\exists v\in V_i,\, v\neq\theta$ таке, що $\left(\widetilde{A}-\lambda_i\widetilde{I}\right)v=\theta$. Звідси випливає $\widetilde{A}v-\lambda_i\widetilde{I}v=\theta \Rightarrow \widetilde{A}v=\lambda_i v$, тобто λ_i – власне значення оператору $\widetilde{A}$ на V_i.

За умовою теореми, $V_i=V(\lambda_1)\oplus\ldots\oplus V(\lambda_{i-1})\oplus V(\lambda_{i+1})\oplus\ldots\oplus V(\lambda_p)$ – пряма сума кореневих підпросторів $V(\lambda_j)$, $j\neq i$, тому, аналогічно до розглянутого попереду, оператор $\widetilde{A}\Big|_{V_i}$ має клітинно-діагональну матрицю з матрицями $A_j,\ j\neq i$ на діагоналі і характеристичним многочленом $\chi_i(t)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}(t-\lambda_i)^{n_i}$, що є добутком характеристичних многочленів відповідних матриць $A_j,\ j\neq i$. З цього характеристичного многочлену видно, що λ_i не може бути власним значенням оператору $\widetilde{A}$ на V_i. Одержали суперечність, що доводить справедливість останнього твердження і всієї теореми. ■

Контрольні питання і завдання

1. Доведіть наслідок 6.1 за допомогою наслідку 4.4 та зауваження 2.1.
2. Доведіть зауваження 6.2.

3. Перевірте, чи можуть вектори $(2,0,0)$ та $(0,0,1)$ входити до ланцюжкового базису оператору з матрицею $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Нільпотентний оператор. Циклічний підпростір

Нехай $\tilde{B}: V \to V$ – нільпотентний оператор з індексом нільпотентності m і нільпотентною матрицею B.

Лінійна оболонка

$$P[\tilde{B}]v = \left\langle v, \tilde{B}v, \ldots, \tilde{B}^{m-1}v \right\rangle$$

називається ***циклічним підпростором***, асоційованим з оператором $\tilde{B}$ індексу нільпотентності m і вектором v. Зрозуміло, якщо m' – найменше натуральне число, для якого $\tilde{B}^{m'}v = \theta$, то

$$P[\tilde{B}]v = \left\langle v, \tilde{B}v, \ldots, \tilde{B}^{m'-1}v \right\rangle,$$

$m' \le m$ і $v, \tilde{B}v, \ldots, \tilde{B}^{m'-1}v$ – базис циклічного підпростору $P[\tilde{B}]v$.

Якщо розмірність простору V дорівнює індексу нільпотентності m оператору $\tilde{B}$, то, як видно із прикладу 6.1, $\exists e \in V$, що $P[\tilde{B}]e = \left\langle e, \tilde{B}e, \ldots, \tilde{B}^{m-1}e \right\rangle = V$ і матрицею цього оператору в базисі

$$f_1 = \tilde{B}^{m-1}e, \;\; f_2 = \tilde{B}^{m-2}e, \; \ldots, \; f_{m-1} = \tilde{B}e, \;\; f_m = e, \tag{7.1}$$

що утворюється із твірних елементів $P[\tilde{B}]e$, взятих в зворотному напрямі, буде жорданова матриця $J_m(0)$.

Зауважимо, що

$$\tilde{B}f_k = \tilde{B}^{m-k+1}e = \tilde{B}^{m-(k-1)}e = f_{k-1}, \; 2 \le k \le m, \quad \tilde{B}f_1 = \theta.$$

Перенесемо це спостереження на загальний випадок. Нехай $\tilde{B}: V \to V$ є нільпотентним оператором з індексом нільпотентності m і V розкладається в пряму суму циклічних підпросторів $V = \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} P[\widetilde{B}]e_i$. Тоді існують числа $m_i \le m$, що $P[\widetilde{B}]e_i = \left\langle e_i, \widetilde{B}e_i, \ldots, \widetilde{B}^{m_i - 1}e_i \right\rangle$, $\widetilde{B}^{m_i} e_i = \theta$, тому в базисі

$$F : f_{11}, \ldots, f_{1m_1}, \ldots, f_{sm_s}, \quad f_{ij_i} = \widetilde{B}^{m_i - j_i} e_i,\ j_i = 1, \ldots, m_i,$$

що складається із сукупності базисів виду (4.7.1) підпросторів $P[\widetilde{B}]e_i$, матриця оператору $\widetilde{B}$ має жорданову форму

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & J_{m_s}(0) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $\dim V = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$. Крім того, індекс нільпотентності оператору $m = \max\{m_1, \ldots, m_s\}$. Будемо вважати, що $m_1 \ge m_2 \ge \ldots \ge m_s$, тоді $m = m_1$.

Зауважимо, що

$$\widetilde{B}f_{ij_i} = \widetilde{B}^{m_i - j_i + 1}e_i = f_{i(j_i - 1)},\ j_i = 2, \ldots, m_i, \quad \widetilde{B}f_{i1} = \widetilde{B}^{m_i}e_i = \theta,$$

тобто *жордановий базис* F *є ланцюжковим базисом кореневого підпростору оператору* $\widetilde{B}$*, що відповідає власному числу 0*. Оскільки оператор $\widetilde{B}$ є нільпотентним, то, за наслідком 4.4, він не має власних значень, відмінних від нуля, а значить його кореневий підпростір, що відповідає власному числу 0, дорівнює простору $V = \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} P[\widetilde{B}]e_i$ з базисом F.

Теорема 7.1. *Жорданова нормальна форма нільпотентного оператору існує (основне поле* P *довільне).*

Доведення. Нехай $\dim V = n$ і $\widetilde{B} : V \to V$ є нільпотентним оператором з індексом нільпотентності m і нільпотентною матрицею B. Мінімальним многочленом оператору $\widetilde{B}$ та матриці B є многочлен $\mu_{\widetilde{A}}(t) = t^m$. Він має тільки нульові корені. За наслідком 4.4, оператор $\widetilde{B}$ має тільки нульові власні значення.

Доведення проведемо індукцією по n. При $n=1$ нільпотентний оператор єдиний – нульовий. Його матриця нульова, а значить жорданова і все доведено.

В загальному випадку нам необхідно показати, що векторний простір V, на якому діє оператор $\widetilde{B}$, розкладається в пряму суму <u>належним чином вибраних циклічних підпросторів</u>. Припустимо, що для довільного простору U розмірності $n-1$ жорданова нормальна форма нільпотентного оператору існує. Якщо $U \subset V$, то $\widetilde{B}_U$ також нільпотентний оператор і його нормальна форма має вид:

$$J\left(\widetilde{B}_U\right)=\begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & J_{m_s}(0) \end{pmatrix}=diag\left(J_{m_1}(0),\ldots,J_{m_s}(0)\right),$$

причому, як і раніше, будемо вважати, що $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_s$.

Тоді, за теоремою 1.1, простір U розкладається в пряму суму підпросторів, причому ці підпростори будуть циклічними. Нехай $U=\bigoplus\limits_{i=1}^{s} P[\widetilde{B}_U]e_i$, де $P[\widetilde{B}_U]e_i=\left\langle e_i, \widetilde{B}_U e_i, \ldots, \widetilde{B}_U{}^{m_i-1}e_i\right\rangle$, $\widetilde{B}_U{}^{m_i}e_i=\theta$. Тоді $m_1+m_2+\ldots+m_s=n-1$, а

$$F: f_{11},\ldots,f_{1m_1},\ldots,f_{sm_s}, \quad f_{ij_i}=\widetilde{B}_U{}^{m_i-j_i}e_i,\ i=1,\ldots,s,\ j_i=1,\ldots,m_i \ –$$

жордановий базис оператору $\widetilde{B}_U$.

За теоремою 4.2 матриця B приводиться до верхнього трикутного виду у деякому базисі $g_1,\ldots,g_n$. На діагоналі у такої матриці стоять власні значення $\lambda=0$ і вона має наступний вигляд:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З цього вигляду очевидно, що лінійна оболонка $U=\langle g_1,\ldots,g_{n-1}\rangle$ перших $n-1$ базисних векторів інваріантна відносно $\widetilde{B}$, оскільки у розкладі образів цих векторів (перші $n-1$ стовпчики матриці B) останній базисний вектор g_n не приймає участі, бо остання координата дорівнює 0.

Розглянемо множину $\widetilde{B}V$, використовуючи вид матриці $B=(a_{ij})$, $a_{ts}=0,\ t\ge s$ лінійного оператору $\widetilde{B}$ в базисі $g_1,\ldots,g_n$:

$$\widetilde{B}V=\widetilde{B}\langle g_1,\ldots,g_n\rangle=\langle \widetilde{B}g_1,\widetilde{B}g_2,\widetilde{B}g_3,\ldots,\widetilde{B}g_n\rangle=$$

$$=\left\langle \theta, a_{12}g_1, a_{13}g_1+a_{23}g_2,\ldots,\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}g_i\right\rangle\subseteq\langle g_1,g_2,\ldots,g_{n-1}\rangle=U.$$

Так як розмірність простору V на 1 більша розмірності U, то $\forall v\in V, v\notin U$ маємо $V=\langle v,U\rangle$, $\widetilde{B}v\in U$. Врахуємо, що на множині U дія операторів $\widetilde{B}$ і $\widetilde{B}_U$ співпадає, а елементи простору U виражаються через лінійну комбінацію

$$F:\ f_{11},\ldots,f_{1m_1},\ldots,f_{sm_s},\quad f_{ij_i}=\widetilde{B}_U^{\,m_i-j_i}e_i=\widetilde{B}^{m_i-j_i}e_i,\ j_i=1,\ldots,m_i,$$

де кожен елемент $f_{im_i}=e_i, i=1,\ldots,s$, а кожен елемент $f_{ij_i},\ j_i\ne m_i$ має вид $\widetilde{B}^k e_i, k\ge 1$. Тому $f_{ij_i},\ j_i\ne m_i$ належать $\widetilde{B}U$ і довільна їх лінійна комбінація $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j_i=1}^{m_i-1}\lambda_{ij_i}f_{ij_i}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j_i=1}^{m_i-1}\lambda_{ij_i}\widetilde{B}^{m_i-j_i}e_i=\widetilde{B}u$, де $u=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j_i=1}^{m_i-1}\lambda_{ij_i}\widetilde{B}^{m_i-j_i-1}e_i\in U$.

Так як $\widetilde{B}V\subseteq U$, то

$$\widetilde{B}v=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j_i=1}^{m_i}\lambda_{ij_i}f_{ij_i}=\sum_{i=1}^{s}\lambda_{im_i}e_i+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j_i=1}^{m_i-1}\lambda_{ij_i}\widetilde{B}^{m_i-j_i}e_i=\sum_{i=1}^{s}\lambda_{im_i}e_i+\widetilde{B}u.$$

Це представлення можливе, оскільки у всіх доданків $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j_i=1}^{m_i-1}\lambda_{ij_i}\widetilde{B}^{m_i-j_i}e_i$ степінь $\widetilde{B}$ не менша 1 і $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j_i=1}^{m_i-1}\lambda_{ij_i}\widetilde{B}^{m_i-j_i}e_i = \widetilde{B}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j_i=1}^{m_i-1}\lambda_{ij_i}\widetilde{B}^{m_i-j_i-1}e_i = \widetilde{B}u$.

Якщо позначити $v' = v - u$, то $v' \notin U$, $V = \langle v', U\rangle$ і

$$\widetilde{B}v' = \widetilde{B}v - \widetilde{B}u = \sum_{i=1}^{s}\lambda_{im_i}e_i \ .$$

1. Нехай $\lambda_{im_i} = 0, 1 \le i \le s$. Тоді $\widetilde{B}v' = \theta$, а так як $v' \notin U$, то $v' = f_{(s+1)1} = e_{s+1}$ – доповнення базису F до базису F_1 простору V. Причому, так як $\widetilde{B}e_{s+1} = \theta$, циклічний підпростір $P[\widetilde{B}]e_{s+1} = \langle e_{s+1}\rangle$ має розмірність 1 і $V = \bigoplus_{i=1}^{s+1} P[\widetilde{B}]e_i$. Такому прямому розкладу V в базисі F_1 відповідає нормальна форма

$$J\left(\widetilde{B}\right) = diag\left(J_{m_1}(0), \ldots, J_{m_s}(0), J_1(0)\right).$$

2. Залишається розглянути випадок, коли $\exists r \ge 1$, що

$$\lambda_{im_i} = 0, 1 \le i < r,\ \lambda_{rm_r} \ne 0,\ \widetilde{B}v' = \sum_{i=r}^{s}\lambda_{im_i}e_i \ .$$

Зручно позначити

$$e_i' = e_i, \quad i \ne r, \qquad e_r' = \frac{1}{\lambda_{rm_r}}v', \qquad \beta_i = \frac{\lambda_{im_i}}{\lambda_{rm_r}}.$$

Тоді $\widetilde{B}e_r' = e_r + \sum_{i=r+1}^{s}\beta_i e_i := p_r$. Розглянемо циклічний підпростір $P[\widetilde{B}]p_r$.

Так як числа m_i впорядковані, то $m_r \ge m_{r+1} \ge \ldots \ge m_s$, а значить $\widetilde{B}^{m_r}e_i = \theta, \quad i \ge r$ і тому $\widetilde{B}^{m_r}p_r = \theta$. Припустимо, що $\widetilde{B}^{m_r-1}p_r = \theta$. Тоді

$$\widetilde{B}^{m_r-1}e_r + \beta_{r+1}\widetilde{B}^{m_r-1}e_{r+1} + \ldots + \beta_s\widetilde{B}^{m_r-1}e_s =$$
$$= 0\widetilde{B}^{m_r-1}e_1 + \ldots + 0\widetilde{B}^{m_r-1}e_{r-1} + \widetilde{B}^{m_r-1}e_r + \beta_{r+1}\widetilde{B}^{m_r-1}e_{r+1} + \ldots + \beta_s\widetilde{B}^{m_r-1}e_s = \theta.$$

Маємо розклад нуля в суму елементів прямої суми $U = \mathop{\oplus}\limits_{i=1}^{s} P[\widetilde{B}]e_i$. Так як цей розклад однозначний, то всі його доданки нульові. Ця умова не може виконуватись для r-го доданку, оскільки $\widetilde{B}^{m_r-1}e_r \neq \theta$ в силу вибору e_r. Отже, припущення невірне, тому $\widetilde{B}^{m_r-1}p_r \neq \theta$. Також ми показали, що $\dim P[\widetilde{B}]p_r = m_r$.

Крім того, покажемо, що сума $\sum\limits_{i \neq r} P[\widetilde{B}]e'_i + P[\widetilde{B}]p_r$ є прямою. Зауважимо, так як $e'_i = e_i$ при $i \neq r$, то $\sum\limits_{i \neq r} P[\widetilde{B}]e'_i + P[\widetilde{B}]p_r = \sum\limits_{i \neq r} P[\widetilde{B}]e_i + P[\widetilde{B}]p_r$.

Далі, $P[\widetilde{B}]e_i = \left\{ \sum\limits_{t=0}^{m_i-1} \mu_{ti} \widetilde{B}^t e_i \mid \mu_{ti} \in P \right\}, \quad 1 \leq i \leq s$. Оскільки $\widetilde{B}^t e_i = \theta \quad \forall t \geq m_i$, а $m \geq m_i, \quad 1 \leq i \leq s$, то

$$P[\widetilde{B}]e_i = \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \mu_{ti} \widetilde{B}^t e_i \right\} = \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \widetilde{B}^t \mu_{ti} e_i \right\}, \quad 1 \leq i \leq s \text{ і } \sum_{i \neq r} P[\widetilde{B}]e_i = \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \widetilde{B}^t \sum_{i \neq r} \mu_{ti} e_i \right\}.$$

Аналогічно $P[\widetilde{B}]p_r = \left\{ \sum\limits_{t=0}^{m-1} \widetilde{B}^t \mu_{tr} (e_r + \sum\limits_{i=r+1}^{s} \beta_i e_i) \mid \mu_{tr}, \beta_i \in P \right\}$.

Так як $U = \mathop{\oplus}\limits_{i=1}^{s} P[\widetilde{B}]e_i$, то $U = \sum\limits_{i \neq r} P[\widetilde{B}]e_i \oplus P[\widetilde{B}]e_r$, звідки, за критерієм прямої суми, $\sum\limits_{i \neq r} P[\widetilde{B}]e_i \cap P[\widetilde{B}]e_r = \{\theta\}$ і $n - 1 = \dim U = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ m \neq r}}^{s} m_i + m_r$.

Розглянемо $\sum\limits_{i \neq r} P[\widetilde{B}]e_i \cap P[\widetilde{B}]p_r$. Нехай $x \in \sum\limits_{i \neq r} P[\widetilde{B}]e_i \cap P[\widetilde{B}]p_r$, тоді $x = \sum\limits_{t=0}^{m-1} \widetilde{B}^t \sum\limits_{i \neq r} \mu_{ti} e_i = \sum\limits_{t=0}^{m-1} \widetilde{B}^t \mu_{tr} (e_r + \sum\limits_{i=r+1}^{s} \beta_i e_i)$. Якщо покласти $\beta_i = 0, \quad 1 \leq i \leq r-1$, то з попередньої рівності одержимо, що

$$\sum_{t=0}^{m-1} \widetilde{B}^t \sum_{i \neq r} (\mu_{ti} - \mu_{tr} \beta_i) e_i = \sum_{t=0}^{m-1} \widetilde{B}^t \mu_{tr} e_r .$$

Елемент зліва належить $\sum\limits_{i\neq r} P[\widetilde{B}]e_i$, а справа – $P[\widetilde{B}]e_r$, отже він належить $\sum\limits_{i\neq r} P[\widetilde{B}]e_i \cap P[\widetilde{B}]e_r = \{\theta\}$, а це означає, що $\sum\limits_{i\neq r} P[\widetilde{B}]e_i \cap P[\widetilde{B}]p_r = \{\theta\}$ і сума $\sum\limits_{i\neq r} P[\widetilde{B}]e_i' + P[\widetilde{B}]p_r$ є прямою.

$\dim \sum\limits_{i\neq r} P[\widetilde{B}]e_i + \dim P[\widetilde{B}]p_r = \sum\limits_{i\neq r} m_i + m_r = n-1 = \dim U$. Очевидно, що $\sum\limits_{i\neq r} P[\widetilde{B}]e_i$ і $P[\widetilde{B}]p_r$ є підпросторами U, тому одержані результати доводять, що

$$\sum_{i\neq r} P[\widetilde{B}]e_i' \oplus P[\widetilde{B}]p_r = U. \tag{*}$$

Якщо в базисі $F: f_{11}, \ldots, f_{1m_1}, \ldots, f_{sm_s}$, $f_{ij_i} = \widetilde{B}^{m_i - j_i} e_i$, $j_i = 1, \ldots, m_i$ замінити елементи $f_{r1}, \ldots, f_{rm_r}$ на елементи $f_{r1}', \ldots, f_{rm_r}'$ $f_{rj}' = \widetilde{B}^{m_r - j} p_r$, $j = 1, \ldots, m_r$, а решту елементів не змінювати: $f_{ij}' = f_{ij}$, $i \neq r$ то створена сукупність також буде жордановим базисом простору U відносно оператору $\widetilde{B}$. Позначимо цей базис F'. Він відповідає розкладу (*) простору U а $J\left(\widetilde{B}_U\right) = diag\left(J_{m_1}(0), \ldots, J_{m_s}(0)\right)$.

Так як $V = \langle v', U \rangle$, а $e_r' = \dfrac{1}{\lambda_{rm_r}} v'$, то $V = \langle e_r', U \rangle$. Базисом цього простору є сукупність $F'': e_r', f_{11}', \ldots, f_{1m_1}', \ldots, f_{sm_s}'$.

Зауважимо, що

$$\widetilde{B}e_r' = p_r = f_{rm_r}, \quad \widetilde{B}^2 e_r' = \widetilde{B}p_r = f_{r(m_r-1)}, \quad \ldots, \quad \widetilde{B}^{m_r} e_r' = \widetilde{B}^{m_r - 1} p_r = f_{r1},$$
$$\widetilde{B}^{m_r+1} e_r' = \widetilde{B}^{m_r} p_r = \theta.$$

Тому циклічний підпростір

$P[\widetilde{B}]e'_r = \left\langle e'_r, \widetilde{B}e'_r, \ldots, \widetilde{B}^{m_r} e'_r \right\rangle = \left\langle e'_r, P[\widetilde{B}]p_r \right\rangle \subset V$ і має розмірність $m'_r = m_r + 1.$

Введемо позначення: $f'_{r(m_r+1)} = e'_r$, тоді

$$P[\widetilde{B}]e'_r = \left\langle e'_r, f'_{rm_r}, \ldots, f'_{r1} \right\rangle = \left\langle f'_{r1}, \ldots, f'_{rm_r}, f'_{r(m_r+1)} \right\rangle,$$

а сукупність

$$F_1 : f'_{11}, \ldots, f'_{1m_1}, \ldots, f'_{r1}, \ldots, f'_{r(m_r+1)}, \ldots, f'_{sm_s}$$

співпадає з сукупністю F'' і відрізняється лише порядком слідування її елементів та залишається базисом простору V. Цей базис відповідає розкладу простору $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} P[\widetilde{B}]e'_i$ та є його жордановим базисом відносно оператору $\widetilde{B}$:

$$J\left(\widetilde{B}\right) = diag\left(J_{m'_1}(0), \ldots, J_{m'_s}(0)\right), \text{ де } m'_i = m_i,\ i \neq r, \quad m'_r = m_r + 1,$$

тобто число клітин Жордана не змінилося, лише розмір однієї клітини збільшився на 1. Таким чином, існування жорданової нормальної форми для нільпотентного оператору доведене. ■

Контрольні питання і завдання

1. Дайте означення циклічного підпростору нільпотентного оператору.

2. Знайдіть циклічні підпростори $P[\widetilde{B}]v$, асоційовані з оператором $\widetilde{B}$ з матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ і векторами $v_1 = (2,0,0)$ та $v_2 = (0,0,1)$

8. Основна теорема про ЖНФ. Єдиність

Основна теорема 8.1. *Кожна квадратна матриця A порядку n над алгебраїчно замкненим полем P (зокрема, над* $\mathbf{C}$*) приводиться до жорданової нормальної форми. А саме, існує невироджена матриця C, для якої $C^{-1}AC = J(A)$ – жорданова матриця. З точністю до перестановки клітин ЖНФ матриці єдина*.

Як досліджено в пункті 4.5, мінімальним многочленом такої матриці є

$$\mu_A(t) = \mu_J(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_p)^{m_p},$$

де $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ – всі попарно різні власні значення матриці A, а характеристичний многочлен матриці порядку n

$$\chi_A(t) == (t-\lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_p)^{n_p}, \quad n_k \geq m_k, \quad n_1 + \ldots + n_p = n.$$

Дана теорема може бути сформульована для лінійних операторів. Тоді вона буде мати наступний зміст.

Основна теорема 8.1 а. *Кожний лінійний оператор n-мірного простору V над алгебраїчно замкненим полем P (зокрема, над* $\mathbf{C}$*) має жордановий базис. З точністю до перестановки клітин ЖНФ матриці цього оператору єдина*.

Доведення основної теореми в цьому вигляді безпосередньо випливає з теорем 6.3 та 7.1, оскільки, за теоремою 6.3, простір $V = V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_p)$ розкладається в пряму суму інваріантних відносно деякого оператору $\tilde{A}$ кореневих підпросторів $V(\lambda_i)$, λ_i – єдине власне значення обмеження оператору $\tilde{A}\big|_{V(\lambda_i)}$, а в базисі, що є об'єднанням базисів $\tilde{A}$-інваріантних підпросторів $V(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, p$, оператор $\tilde{A}$ має клітинно-діагональну матрицю $A = diag(A_1, \ldots, A_p)$. Тоді для приведення матриці оператору $\tilde{A}: V \to V$ простору V над полем P до жорданової нормальної форми залишилось розглянути випадок, коли оператор $\widetilde{A}\big|_{V(\lambda_i)}$ має єдине власне значення λ_i і мінімальний многочлен $\mu_i(t) = (t-\lambda_i)^{m_i}$. У цьому випадку $\left(\widetilde{A}\big|_{V(\lambda_i)} - \lambda_i \widetilde{I}\right)^{m_i} = \widetilde{O}, m_i \le \dim V(\lambda_i) = n_i, \quad 1 \le i \le p$, тобто $\left(\widetilde{A}\big|_{V(\lambda_i)} - \lambda_i \widetilde{I}\right)$ – нільпотентні оператори індексу нільпотентності m_i. За теоремою 4.7.1, матриця кожного нільпотентного оператору $\left(\widetilde{A}\big|_{V(\lambda_i)} - \lambda_i \widetilde{I}\right)$ у ланцюжковому базисі має жорданову форму

$$\left(J_{m_{1i}}(0), \ldots, J_{m_{si}}(0)\right), \quad \max(m_{1i}, \ldots, m_{si}) = m_i, \; m_{1i} + \ldots + m_{si} = n_i,$$

тоді матрицею оператору $\widetilde{A}\big|_{V(\lambda_i)}$ в цьому ж базисі буде жорданова матриця

$$J_i = \left(J_{m_{1i}}(\lambda_i), \ldots, J_{m_{si}}(\lambda_i)\right),$$

яка подібна до матриці A_i. В базисі, що є об’єднанням ланцюжкових базисів кореневих підпросторів $V(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, p$, оператор $\widetilde{A}$ має клітинно-діагональну матрицю $J = diag(J_1, \ldots, J_p)$, яка буде жордановою. Таким чином, існування жорданового базису лінійного оператору доведено.

Залишилось довести єдиність ЖНФ оператору $\widetilde{A}: V \to V$. Для цього достатньо довести, що кількість жорданових клітин певного розміру для кожного власного значення не залежить від вибору ланцюжкового базису відповідного кореневого підпростору. Позначимо $N(m,\lambda)$ ***число жорданових клітин*** $J_m(\lambda)$ порядку $m \ge 1$, що відповідають власному значенню λ оператору $\widetilde{A}$. Розкладемо V в пряму суму

$$V = V(\lambda) \oplus V', \tag{8.1}$$

де кореневий підпростір

$$V(\lambda) = \bigoplus_{j=1}^{s} \left\langle e_j, (\widetilde{A} - \lambda I)e_j, \ldots, (\widetilde{A} - \lambda I)^{m_j - 1} e_j \right\rangle = \bigoplus_{j=1}^{s} P[\widetilde{A} - \lambda I]e_j$$

є прямою сумою циклічних підпросторів $P[\widetilde{A} - \lambda I]e_j$,

$V' = \bigoplus_{\lambda' \neq \lambda} V(\lambda')$ – пряма сума кореневих підпросторів, що відповідають власним значенням λ' оператору $\tilde{A}$, відмінним від власного значення λ.

Будемо розглядати розмірність $r_t = \dim\left(\tilde{A} - \lambda I\right)^t V$ простору $\left(\tilde{A} - \lambda I\right)^t V = \operatorname{Im}\left(\tilde{A} - \lambda I\right)^t$. Звичайно, ця розмірність не залежить від вибору базису в V. Кожний із підпросторів розкладу (8.1) інваріантний відносно $\left(\tilde{A} - \lambda I\right)^t$, тому

$$\dim\left(\tilde{A} - \lambda I\right)^t V = \sum_j \dim\left(\tilde{A} - \lambda I\right)^t P[\tilde{A} - \lambda I]e_j + \dim\left(\tilde{A} - \lambda I\right)^t V'$$

Для визначеності будемо вважати $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_s$. Якщо $m_j \leq t$, то $\left(\tilde{A} - \lambda I\right)^t P[\tilde{A} - \lambda I]e_j = \theta$. При $m_j > t$ $\left(m_j \geq t + 1\right)$ маємо $t \leq m_j - 1$ і

$$\left(\tilde{A} - \lambda I\right)^t P[\tilde{A} - \lambda I]e_j =$$
$$= \left\langle \left(\tilde{A} - \lambda I\right)^t e_j, \left(\tilde{A} - \lambda I\right)^{t+1} e_j, \ldots, \left(\tilde{A} - \lambda I\right)^{m_j - 1} e_j \right\rangle,$$

так що

$$\dim\left(\tilde{A} - \lambda I\right)^t P[\tilde{A} - \lambda I]e_j = m_j - t.$$

На V' оператор $\left(\tilde{A} - \lambda I\right)$ невироджений (теорема 6.3), тому

$$\dim\left(\tilde{A} - \lambda I\right)^t V' = \dim V'.$$

Одержуємо

$$r_t = \sum_{m_j \geq t+1} \left(m_j - t\right) + \dim V',$$

звідки

$$r_t - r_{t+1} = \sum_{m_j \geq t+1} \left(m_j - t\right) + \sum_{m_j \geq t+2} \left(m_j - t - 1\right) =$$
$$= \sum_{m_j \geq t+1} \left(m_j - t\right) - \sum_{m_j \geq t+2} \left(m_t - t\right) + \sum_{m_j \geq t+2} 1 =$$
$$= \sum_{m_j = t+1} 1 + \sum_{m_j \geq t+2} 1 = N\left(t + 1, \lambda\right) + N\left(t + 2, \lambda\right) + \ldots \quad .$$

Таким чином

$$r_{m-1} - r_m - (r_m - r_{m+1}) = \{N(m,\lambda) + N(m+1,\lambda) + N(m+2,\lambda) + \ldots \quad \} -$$
$$- \{N(m+1,\lambda) + N(m+2,\lambda) + \ldots \} = N(m,\lambda),$$

і ми отримуємо формулу (8.2) для обчислення ***числа жорданових клітин*** $J_m(\lambda)$ порядку $m \geq 1$, що відповідають власному значенню λ оператору $\widetilde{A}$. Враховуючи означення рангу оператору ($rang\widetilde{B} = \dim(\operatorname{Im}\widetilde{B})$), вона має вигляд:

$$N(m,\lambda) = r_{m-1} - 2r_m + r_{m+1},$$
$$m \geq 1, \quad r_t = rang\left(\widetilde{A} - \lambda I\right)^t, \quad r_0 = n. \tag{8.2}$$

При доведенні цієї формули ми використовували ланцюжковий базис простору $V(\lambda)$, але числа $r_t = \dim\left(\widetilde{A} - \lambda I\right)^t V$ не залежать від вибору базису в V. Значить формулою (8.2) встановлюється не тільки *правило знаходження жорданової номальної форми* $J(\widetilde{A})$ оператора $\widetilde{A}$, а також однозначність цієї жорданової форми. Теорема 8.1а доведена. ■

За теоремою 2.6.4 [11] ранг лінійного оператору дорівнює рангу матриці цього оператору в довільному базисі. Тому формула (8.2) для кожного власного значення λ може бути у вигляді:

$$N(m,\lambda) = r_{m-1} - 2r_m + r_{m+1},$$
$$m \geq 1, \quad r_m = rg(A - \lambda E)^m, \quad r_0 = n. \tag{8.3}$$

Причому в такому вигляді це є формула для побудови *жорданової форми* $J(A)$ довільної матриці A. Практично теорема 8.1 також доведена.

Згадаємо, що ми позначали $r_t = \dim\left(\widetilde{A} - \lambda I\right)^t V$, а це означає, що $r_t = rg(A - \lambda E)^t$. Враховуючи, що $V = V(\lambda) \oplus V'$, а $\left(\widetilde{A} - \lambda I\right)^t V(\lambda) = \theta$ при $t \geq m_s$, то

$$r_t = \dim\left(\widetilde{A} - \lambda I\right)^t V = \dim\left(\widetilde{A} - \lambda I\right)^t V' = \dim\left(\widetilde{A} - \lambda I\right) V' \quad \forall t \geq m_s.$$

Це означає, що для кожного власного значення λ при деякому $m*$ значення $r_t = rg(A - \lambda E)^t$ стабілізується для всіх $t \geq m*$.

На основі розглянутого попереду, можна сформулювати **алгоритм знаходження ЖНФ матриці A.**

1. Знайти характеристичний многочлен матриці A та її власні числа.

2. Для кожного власного числа λ матриці A та для кожного $i \in \mathbf{N}$ обчислити кількість $N(i, \lambda)$ клітин $J_i(\lambda)$, що входять до ЖНФ матриці A. Для цього обчислити числа $r_0(\lambda) = n, \quad r_1(\lambda) = rg(A - \lambda E), \quad r_2(\lambda) = rg(A - \lambda E)^2$ і так далі до тих пір, поки не знайдеться таке m^*, що $r_{m^*}(\lambda) = r_{m^*+1}(\lambda)$. Потім скористатись формулою $N(i, \lambda) = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}, \quad i = 1, \ldots m^*$.

3. Побудувати ЖНФ $J(A)$ як блочно-діагональну матрицю, діагональ якої складають клітини Жордана $J_i(\lambda)$, де λ пробігає всі власні числа матриці A, і кожна з клітин $J_i(\lambda)$ зустрічається $N(i, \lambda)$ разів.

Варто зауважити, що в результаті на діагоналі ЖНФ $J(A)$ власні числа λ матриці A зустрічаються стільки разів, якою є алгебраїчна кратність числа λ. Це зауваження може бути корисним для самоконтролю вірності визначення ЖНФ.

Залишилось з'ясувати існування матриці подібності C: $J(A) = C^{-1}AC$. Але, так як тепер A і $J(A)$ – відомі матриці, то матрицю C можна знайти із матричного рівняння

$$XJ(A) - AX = O,$$

яке еквівалентне однорідній системі лінійних рівнянь порядку n^2. Не всі розв'язки цієї системи будуть невиродженими матрицями. Та існування жорданової форми забезпечує існування матриці подібності. Зрозуміло, що матриця C визначається з цієї системи неоднозначно. Крім того, знаходження її таким способом не дуже практичне, хоча й не викликає принципіальних труднощів.

Отже, в наступному пункті ми розглянемо знаходження матриці C через побудову ланцюжкових базисів для кожного власного значення.

Контрольні питання і завдання

1. За якою формулою знаходиться кількість жорданових клітин матриці лінійного оператору заданого розміру для кожного власного значення?

2. Якого вигляду може бути жорданова матриця розміру (5×5).

3. Знайдіть жорданову матрицю матриці:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

4. Матриця 4-го порядку сингулярна (вироджена). Відомо, що $rg(A+2E)=2$ і $\det(A-2E)=0$. Знайти характеристичний многочлен матриці A. Чи буде вона діагоналізовною?

9 Побудова жорданового базису

Кожній клітині Жордана порядку m відповідає циклічний базис довжини m (будемо називати його ***ланцюжком довжини*** m). Тому кількість $s_m(\lambda)$ ланцюжків довжини m кореневого підпростору оператору $\tilde{A}$, що відповідають власному значенню λ, дорівнює кількості $N(m,\lambda)$ клітин Жордана порядку m, що обчислюється за формулами (8.3). а об'єднання всіх ланцюжків по всіх m утворює ланцюжковий базис, що відповідає власному значенню λ.

В результаті всього дослідженого попереду, ми отримуємо **алгоритм знаходження ланцюжкового базису кореневого підпростору оператору $\tilde{A}$ з матрицею A, що відповідає власному значенню λ.**

1. Знайти кількість $s_m(\lambda)$ ланцюжків довжини m кореневого підпростору оператору $\tilde{A}$, що обчислюється за формулами

$$s_m(\lambda)=r_{m-1}-2r_m+r_{m+1},$$
$$m\ge 1,\quad r_m=r_m(\lambda)=rg(A-\lambda E)^m,\quad r_0=n.$$

2. Зафіксувати те найменше m^*, що $r_{m^*}(\lambda) = r_{m^*+1}(\lambda)$. (Це буде розмір найбільшої клітини Жордана з числом λ на діагоналі у ЖНФ матриці A).

3. Знайти фундаментальну сукупність розв'язків (ФСР) однорідної системи з матрицею $(A - \lambda E)^{m^*}$.

4. Для кожного вектора v із цієї ФСР побудувати ланцюжок $v_{i+1} = (A - \lambda E)^i v,\quad i = 0, \ldots, m^* - 1$. (Так як $(A - \lambda E)^{m^*} v = \theta$, то $(A - \lambda E)v_{m^*} = (A - \lambda E)^{1+(m^*-1)} v = \theta \quad \Rightarrow \quad v_{m^*} -$ власний вектор.)

5. Вибрати $s_{m^*}(\lambda)$ ланцюжків довжини m^*, які складаються з лінійно незалежних векторів. (Це буде частина шуканого базису.)

6. Проробити аналогічні дії для наступного (за спаданням) i, для якого $s_i(\lambda) \neq 0$, слідкуючи за лінійною незалежністю векторів, що вибираються, з вибраними раніше.

7. Продовжувати таким чином, доки не будуть вибрані всі ланцюжки.

Нагадаємо, що приведенням квадратної матриці A до ЖНФ називається розв'язок рівняння в матрицях виду $X^{-1}AX = J(A)$. Після знаходження ланцюжкового базису для кожного власного числа λ матриці A ми можемо привести цю матрицю до жорданової форми, але в цьому не можна діяти необачно. Спочатку клітині $J_1 = J_{m_1}(\lambda_1)$ поставимо у відповідність ланцюжок довжини m_1, одержаний за допомогою попереднього алгоритму, та занумеруємо його в зворотному напрямі: $e_1 = v^{(1)}{}_{m_1},\ e_2 = v^{(1)}{}_{m_1-1}, \ldots, e_{m_1} = v_1^{(1)} = v^{(1)}$, де $v^{(1)}{}_{i+1} = (A - \lambda_1 E)^i v^{(1)}$. Потім клітині $J_2 = J_{m_2}(\lambda_2)$ поставимо у відповідність ланцюжок довжини m_2 та занумеруємо його в зворотному напрямі з урахуванням попередніх базисних векторів e_i: $e_{m_1+1} = v^{(2)}{}_{m_2},\ e_{m_2+2} = v^{(2)}{}_{m_2-1}, \ldots, e_{m_1+m_2} = v_1^{(2)} = v^{(2)}$, де $v^{(2)}{}_{i+1} = (A - \lambda_2 E)^i v^{(2)}$. Те саме необхідно проробити для третьої, четвертої і т.д.

клітин. Матриця U, яка може бути розв'язком рівняння $X^{-1}AX = J(A)$, складається із координат базисних векторів e_i, записаних по стовпчиках.

Приклад 9.1. Привести до ЖНФ матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

▼ Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$|A - \lambda E| = -(\lambda + 1)^5.$$

Він має один корінь $\lambda = -1$ алгебраїчної кратності 5. $r_0(\lambda) = 5$. Знайдемо $(A - \lambda E)$ і $r_1(\lambda) = rg(A - \lambda E)$:

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_1 = rg(A - \lambda E) = 3.$$

Лінійно незалежними власними векторами матриці A, що відповідають власному числу $\lambda = -1$, будуть вектори $\alpha_1 = (-1,-1,0,1,0)$, $\alpha_2 = (0,0,0,0,1)$.

Знайдемо $(A - \lambda E)^2$ і $r_2(\lambda) = rg(A - \lambda E)^2$:

$$(A-\lambda E)^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$r_2 = rg(A-\lambda E)^2 = 2.$$

Знайдемо $(A-\lambda E)^3$, $(A-\lambda E)^4$ і т.д. та $r_3(\lambda)=rg(A-\lambda E)^3$, $r_4(\lambda)=rg(A-\lambda E)^4$ і т.д.:

$$(A-\lambda E)^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad r_3 = rg(A-\lambda E)^3 = 1,$$

$(A-\lambda E)^4 = O$, значить $r_4(\lambda)=r_5(\lambda)=0$. Таким чином, $m^*=4$. Знайдемо кількості ланцюжків різної довжини, що співпадає з кількістю клітин Жордана різного порядку:

$$s_1(\lambda)=r_0-2r_1+r_2=5-6+2=1,$$

$$s_2(\lambda)=r_1-2r_2+r_3=3-4+1=0,$$

$$s_3(\lambda)=r_2-2r_3+r_4=2-2+0=0,$$

$$s_4(\lambda)=r_3-2r_4+r_5=1-0+0=1.$$

Ми можемо і далі обчислювати $s_m(\lambda)=r_{m-1}-2r_m+r_{m+1}=0,\quad m\geq 5$, хоча цей результат є очевидним, оскільки крім визначених однієї клітини порядку 1 та однієї клітини порядку 4 в жордановій матриці порядку 5 бути не може. Таким чином $J(A)=diag(J_1(-1),J_4(-1))=J_1(-1)\oplus J_4(-1)$.

Фундаментальна сукупність розв'язків системи $(A-\lambda E)^4 X=\theta$ складається з довільного базису простору V. Наприклад, $f_1=(1,0,0,0,0)$, $f_2=(0,1,0,0,0)$, $f_3=(0,0,1,0,0)$, $f_4=(0,0,0,1,0)$, $f_5=(0,0,0,0,1)$.

Вектор $f_5=(0,0,0,0,1)$ є власним, тому починати знаходити ланцюжок довжини 4 можна з векторів f_1, f_2, f_3, f_4, користуючись умовою $(A-\lambda E)^3 X\neq\theta$. А цій умові задовольняє тільки вектор f_3:

$$(A-\lambda E)^3 f_3=\begin{pmatrix}-4\\-4\\0\\4\\-4\end{pmatrix}\neq\theta.$$

Отже, ланцюжок довжини 4 складається із векторів

$$f_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ (A-\lambda E)f_3=\begin{pmatrix}3\\7\\0\\3\\-3\end{pmatrix},\ (A-\lambda E)^2 f_3=\begin{pmatrix}-4\\-8\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ (A-\lambda E)^3 f_3=\begin{pmatrix}-4\\-4\\0\\4\\-4\end{pmatrix}.$$

Вектор $f_5=(0,0,0,0,1)$ є лінійно незалежний з попередніми. А так як він є власним, то утворює ланцюжок довжини 1.

Тепер можна приступити до приведення матриці A до ЖНФ. Клітині $J_1(-1)$ поставимо у відповідність вектор $e_1=f_5=(0,0,0,0,1)$. Клітині $J_4(-1)$ поставимо у відповідність вектори

$$\begin{array}{l} e_2=(A-\lambda E)^3 f_3=(-4,-4,0,4,-4),\quad e_3=(A-\lambda E)^2 f_3=(-4,-8,0,0,0),\\ e_4=(A-\lambda E)f_3=(3,7,0,3,-3),\quad e_5=f_3=(0,0,1,0,0).\end{array}.$$

В результаті, якщо скласти матрицю U із координат базисних векторів e_i, записаних по стовпчиках, то

$$U=\begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 & 3 & 0\\ 0 & -4 & -8 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0\\ 1 & -4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ і } J(A)=J_1(-1)\oplus J_4(-1)=U^{-1}AU \text{ .}\blacksquare$$

Приклад 9.2. Привести до ЖНФ матрицю

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 5 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

▼ Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}\cdot(-1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3\\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda+1)^4(\lambda-2)^2.$$

Він має корінь $\lambda_1=-1$ алгебраїчної кратності 4 і корінь $\lambda_2=2$ алгебраїчної кратності 2. $r_0(\lambda_1)=r_0(\lambda_2)=6$.

Знайдемо $(A-\lambda_1 E)$ і $r_1(\lambda_1)=rg(A-\lambda_1 E)$:

$$(A-\lambda_1 E)=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$r_1(\lambda_1)=rg(A-\lambda_1 E)=4.$$

Лінійно незалежними власними векторами матриці A, що відповідають власному числу $\lambda_1=-1$, будуть вектори $\alpha_1=(-1,-1,1,0,0,0)$, $\alpha_2=(0,0,0,1,0,0)$.

Знайдемо $(A-\lambda_1 E)^2$ і $r_2(\lambda_1)=rg(A-\lambda_1 E)^2$:

$$(A-\lambda_1 E)^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$r_2(\lambda_1)=rg(A-\lambda_1 E)^2=3.$$

Знайдемо $(A-\lambda_1 E)^3$, $(A-\lambda_1 E)^4$ і т.д. та $r_3(\lambda_1)=rg(A-\lambda_1 E)^3$, $r_4(\lambda_1)=rg(A-\lambda_1 E)^4$ і т.д.:

$$(A-\lambda_1 E)^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 108 & -81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & -54 \end{pmatrix},$$

тобто $(A-\lambda_1 E)^3$ має вигляд блочно-діагональної матриці, у якої перша матриця на діагоналі нульова, а друга – $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^3$. Матриця $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ є невиродженою, тому ранг довільної її степені дорівнює 2. Отже, $r_3(\lambda_1) = rg(A-\lambda_1 E)^3 = 2$.

Матриця $(A-\lambda_1 E)^4$ також буде мати вигляд блочно-діагональної матриці, у якої перша матриця на діагоналі нульова, а друга – $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^4$, значить $r_4(\lambda_1) = r_3(\lambda_1) = 2$. Таким чином, $m_1{*} = 3$. Знайдемо кількості клітин Жордана різного порядку (ланцюжків різної довжини) для власного числа $\lambda_1 = -1$:

$$s_1(\lambda_1) = r_0 - 2r_1 + r_2 = 6 - 8 + 3 = 1,$$
$$s_2(\lambda_1) = r_1 - 2r_2 + r_3 = 4 - 6 + 2 = 0,$$
$$s_3(\lambda) = r_2 - 2r_3 + r_4 = 3 - 4 + 2 = 1.$$

Нами визначено, що в шуканій жордановій матриці одна клітина $J_1(-1)$ та одна клітина $J_3(-1)$. Сума порядків цих матриць дорівнює алгебраїчній кратності власного числа $\lambda_1 = -1$, тому можемо далі і не обчислювати $s_m(\lambda_1),\quad m \geq 4$. Всі вони рівні нулю.

Виконаємо аналогічні обчислення для $\lambda_2 = 2$:

$$(A-\lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$r_1(\lambda_2) = rg(A-\lambda_2 E) = 5.$$

Власні вектори матриці A, що відповідають власному числу $\lambda_2 = 2$, задовольняють рівнянню $(A-\lambda_2 E)X = \theta$. Лінійно незалежною системою розв'язків тут буде лише один вектор. Наприклад, $\alpha_3 = (0,0,0,0,1,1)$. Пам'ятаючи, що клітин у ЖНФ стільки, скільки лінійно незалежних власних векторів, можемо сказати, що кореню $\lambda_2 = 2$ алгебраїчної кратності 2 відповідає одна клітина порядку 2 і $m_2{*} = 2$. (Це ж можна одержати і за допомогою обчислень $s_m(\lambda_2)$, $m \geq 1$, оскільки $r_2(\lambda_2) = rg(A-\lambda_2 E)^2 = 4 = r_3(\lambda_2) = \ldots$.)

Таким чином,

$$J(A) = diag(J_1(-1), J_3(-1), J_2(2)) = J_1(-1) \oplus J_3(-1) \oplus J_2(2).$$

Далі знайдемо ланцюжковий базис простору $V(\lambda_1)$. Так як $m_1{*} = 3$, то слід розглянути систему $(A-\lambda_1 E)^3 X = \theta$. Фундаментальна сукупність розв'язків цієї системи складається, наприклад, з таких векторів $f_1 = (1,0,0,0,0,0)$, $f_2 = (0,1,0,0,0,0)$, $f_3 = (0,0,1,0,0,0)$, $f_4 = (0,0,0,1,0,0)$.

Вектор $f_4 = (0,0,0,1,0,0) = \alpha_2$ є власним, тому починати знаходити ланцюжок довжини 3 можна з векторів f_1, f_2, f_3, користуючись умовою $(A-\lambda_1 E)^2 X \neq \theta$. А цій умові задовольняють всі ці вектори:

$$(A-\lambda_1 E)^2 f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \theta, \quad (A-\lambda_1 E)^2 f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \theta,$$

$$(A-\lambda_1 E)^2 f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \theta.$$

Отже, ланцюжків довжини 3 ми можемо обрати три. Виберемо останній із них, який складається із векторів

$$f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (A-\lambda_1 E) f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (A-\lambda_1 E)^2 f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $f_4 = (0,0,0,1,0,0)$ є лінійно незалежний з попередніми. А так як він є власним, то утворює ланцюжок довжини 1. Отже, f_3, $(A-\lambda_1 E) f_3$, $(A-\lambda_1 E)^2 f_3$, f_4 – ланцюжковий базис простору $V(\lambda_1)$.

Далі знайдемо ланцюжковий базис простору $V(\lambda_2)$. Так як $m_2{*} = 2$, то слід розглянути систему $(A-\lambda_2 E)^2 X = \theta$. Фундаментальна сукупність розв'язків цієї системи складається, наприклад, з таких векторів $f_5 = (0,0,0,0,1,0)$, $f_6 = (0,0,0,0,0,1)$. Так як $(A-\lambda_2 E)^2 f_5 \neq \theta$, то ланцюжок довжини 2 складається із векторів

$$f_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (A-\lambda_2 E) f_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Цей ланцюжок також утворює ланцюжковий базис простору $V(\lambda_2)$.

Тепер можна приступити до приведення матриці A до ЖНФ. Клітині $J_1(-1)$ поставимо у відповідність вектор $e_1 = f_4 = (0,0,0,1,0,0)$. Клітині $J_3(-1)$ поставимо у відповідність вектори

$$e_2 = (A - \lambda_1 E)^2 f_3 = (1,1,-1,1,0,0), \quad e_3 = (A - \lambda_1 E) f_3 = (2,3,-1,1,0,0),$$
$$e_4 = f_3 = (0,0,1,0,0,0).$$

Клітині $J_2(2)$ поставимо у відповідність вектори $e_5 = (A - \lambda_2 E) f_5 = (0,0,0,0,3,3), \quad e_6 = f_5 = (0,0,0,0,1,0).$

Таким чином, жордановий базис складають вектори

$$e_1 = (0,0,0,1,0,0),$$
$$e_2 = (1,1,-1,1,0,0),$$
$$e_3 = (2,3,-1,1,0,0),$$
$$e_4 = (0,0,0,1,0,0),$$
$$e_5 = (0,0,0,0,3,3),$$
$$e_6 = (0,0,0,0,1,0).$$

В результаті, якщо скласти матрицю U із координат базисних векторів e_i, записаних по стовпчиках, то

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ і}$$

$$J(A) = J_1(-1) \oplus J_3(-1) \oplus J_2(2) = U^{-1} A U \,.\blacksquare$$

Приклад 9.3. Привести до ЖНФ матрицю

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

▼ Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}^2=(\lambda-2)^4.$$

Він має корінь $\lambda_1=2$ алгебраїчної кратності 4, $r_0(\lambda_1)=4$.

Знайдемо $(A-\lambda_1 E)$ і $r_1(\lambda_1)=rg(A-\lambda_1 E)$:

$$(A-\lambda_1 E)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$r_1(\lambda_1)=rg(A-\lambda_1 E)=2.$$

Лінійно незалежними власними векторами матриці A, що відповідають власному числу $\lambda_1=2$, будуть вектори $\alpha_1=(-1,1,0,0)$, $\alpha_2=(0,0,-1,1)$.

Оскільки $(A-\lambda_1 E)^2=\mathrm{O}$, то $r_2(\lambda_1)=0$, $m^*=2$. Тоді $s_1(\lambda_1)=r_0-2r_1+r_2=4-4+0=0,$ $s_2(\lambda_1)=r_1-2r_2+r_3=2-0+0=2$. Маємо $J(A)=J_2(2)\oplus J_2(2)$. Ланцюжковий базис буде складатися із двох ланцюжків довжини 2. Знайдемо їх.

Так як $m^*=2$, то всі вектори ланцюжкового базису повинні задовольняти умові $(A-\lambda_1 E)^2 X=\theta$. Оскільки $(A-\lambda_1 E)^2=\mathrm{O}$, то фундаментальна сукупність розв'язків системи $(A-\lambda_1 E)^2 X=\theta$ складається з довільного базису простору V. Наприклад, $f_1=(1,0,0,0)$, $f_2=(0,1,0,0)$, $f_3=(0,0,1,0)$, $f_4=(0,0,0,1)$.

Для демонстрації аналізу побудуємо три ланцюжки за допомогою перших трьох векторів:

$$f_1,\quad (A-\lambda_1 E)f_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ f_2,\quad (A-\lambda_1 E)f_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$f_3,\quad (A-\lambda_1 E)f_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Перші два ланцюжки не можуть утворювати ланцюжковий базис, оскільки вони утворюють лінійно залежну систему векторів, тоді як два ланцюжки довжини 2

$$f_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad (A-\lambda_1 E)f_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\text{ і }f_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad (A-\lambda_1 E)f_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

утворюють лінійно незалежну систему, тому утворюють ланцюжковий базис.

Таким чином, жордановий базис складають вектори

$e_1=(1,-1,0,0)$,

$e_2=(1,0,0,0)$,

$e_3=(1,-1,1,-1)$,

$e_4=(0,0,1,0)$.

В результаті, якщо скласти матрицю U із координат базисних векторів e_i, записаних по стовпчиках, то

$$U=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\-1&0&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix} \text{ і } J(A)=J_2(2)\oplus J_2(2)=U^{-1}AU. \blacksquare$$

Зауважимо, що існують і інші підходи до побудови жорданового базису. Один з таких підходів базується на означенні ланцюжкового базису. Переходячи із мови операторів на мову матриць його суть полягає в наступних умовах: $(A-\lambda E)v_{ij}=v_{i(j-1)}$ та $(A-\lambda E)v_{i1}=\theta$. Тобто кожний ланцюжок починається із власного вектору $v_{i1}=\alpha_i$ та кожний наступний вектор $v_{i(j+1)}$ ланцюжка знаходиться із рівняння $(A-\lambda E)X=v_{ij}$.

Побудуємо таким способом жордановий базис попереднього прикладу. Лінійно незалежними власними векторами матриці A будуть вектори $\alpha_1=(-1,1,0,0)$, $\alpha_2=(0,0,-1,1)$.

Нехай $v_{11}=\alpha_1$. Розв’яжемо рівняння .$(A-2E)X=v_{11}=(-1,1,0,0)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\-1&-1&-1&-1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&-1&-1&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1-x_2\\x_2\\-x_4\\x_4\end{pmatrix},\quad x_2,x_4\in\mathbf{R}$$

Таким чином, можна взяти $v_{12}=(-1,0,0,0)$ і обчислення першого ланцюжка довжини 2 завершене: $e_1=v_{11}=(-1,1,0,0)$, $e_2=v_{12}=(-1,0,0,0)$.

Продовжимо далі. Нехай $v_{21}=\alpha_2=(0,0,,-1,1)$. Розв’яжемо рівняння $(A-2E)X=v_{21}=(0,0,-1,1)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\-1&-1&-1&-1&0\\0&0&1&1&-1\\0&0&-1&-1&1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1-x_2\\x_2\\-1-x_4\\x_4\end{pmatrix},\quad x_2,x_4\in\mathbf{R}$$

Таким чином, можна взяти $v_{22}=(1,0,-1,0)$ і обчислення другого ланцюжка довжини 2 завершене: $e_3=v_{21}=(0,0,-1,1)$, $e_4=v_{22}=(1,0,-1,0)$. Отже, ми одержали інший жордановий базис та іншу матрицю

$$U=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Але незмінною залишається залежність $J(A)=U^{-1}AU$, тому ця матриця U також приводить матрицю A до ЖНФ.

При застосуванні останнього методу також є окремі особливості. Розглянемо застосування такого методу для **прикладу 9.2**. Лінійно незалежними власними векторами матриці A, що відповідають власному числу $\lambda_1=-1$, будуть, наприклад, вектори $\alpha_1=(-1,-1,1,0,0,0)$, $\alpha_2=(0,0,0,1,0,0)$, що складають ФСР системи $(A-\lambda_1 E)X=\theta$. Зауважимо, що власними векторами матриці A, що відповідають власному числу $\lambda_1=-1$, будуть і всі ненульові лінійні комбінації цих векторів.

Нехай $v_{11}=\alpha_1$. Розв'яжемо матричне рівняння. $(A+E)X=v_{11}=(-1,-1,1,0,0,0)$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 5 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccccc|c}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Це рівняння не має розв'язку. Така ж ситуація відбувається і при $v_{11}=\alpha_2$. Але це не означає, що ми не можемо знайти необхідний ланцюжок даним способом. В такому випадку слід взяти лінійну комбінацію ФСР системи

$(A+E)X=\theta$: $v_{11}=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2=(-t_1,-t_1,t_1,t_2,0,0)$. Тоді умова $(A-\lambda E)X=v_{11}$ має такий розв'язок:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -t_1 \\ 5 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & -t_1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & t_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -t_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2t_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1+t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \quad .$$

Тепер очевидно, що для існування розв'язку повинна виконуватись умова $t_1+t_2=0$, отже можна взяти $t_1=1, \quad t_2=-1$, тоді $v_{11}=(-1,-1,1,-1,0,0)$, а $v_{12}=(-1-s_1,-2-s_1,s_1,s_2,0,0)$, де s_1,s_2 – довільні дійсні числа. Знайдемо v_{13} із умови $(A+E)X=v_{12}$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1-s_1 \\ 5 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2-s_1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & s_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2s_1+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1+s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Для існування розв'язку цієї системи повинна виконуватись умова $s_1+s_2=0$, отже можна взяти $s_1=0, \quad s_2=0$, тоді $v_{12}=(-1,-2,0,0,0,0)\neq\theta$, а $v_{13}=(-p_1,1-p_1,p_1,p_2,0,0)$, де p_1,p_2 – довільні дійсні числа, зокрема $v_{13}=(0,1,0,0,0,0)$.

Якщо не врахувати, що для власного значення $\lambda=-1$ максимальна довжина ланцюжка дорівнює 3 і продовжувати процес, то він обірветься з тієї причини, що наступна система не буде мати розв'язку при довільних p_1 і p_2:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -p_1 \\ 5 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1-p_1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -p_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1+p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

отже, природно, v_{14} не існує, ланцюжок довжини 3 можуть складати вектори $v_{11} = (-1,-1,1,-1,0,0)$, $v_{12} = (-1,-2,0,0,0,0)$, $v_{13} = (0,1,0,0,0,0)$, а доповнити його до ланцюжкового базису можна як вектором $\alpha_1 = (-1,-1,1,0,0,0)$, так і вектором $\alpha_2 = (0,0,0,1,0,0)$, оскільки жоден з них не утворює лінійно залежної системи з векторами v_{11}, v_{12}, v_{13}. ■

Контрольні питання і завдання.

1. Опишіть алгоритм знаходження ланцюжкового базису кореневого підпростору оператору.

2. Які вам відомі методи знаходження ланцюжкового базису?

3. Знайдіть жордановий базис матриці

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\ \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ \text{г)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Індивідуальні завдання

Знайти жорданову форму та жордановий базис матриці лінійного оператору:

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -6 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -6 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 9 & -3 & 47 & 20 \\ -1 & -1 & -3 & 1 & -13 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 14 & 5 & 56 & 25 \\ -1 & -2 & -8 & -6 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

Список позначень

L_P – лінійний простір L над полем P;

e – рядок, складений із елементів базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$;

x_e – рядок із координат елементу x в базисі e;

x_e^T – стовпчик із координат елементу x в базисі e;

$\dim L$ – розмірність простору L;

$e \xrightarrow{U} e'$ – матрицею переходу від базису e до базису e' є матриця U;

$L_1 \oplus L_2$ – пряма сума підпросторів L_1 і L_2;

$P_n[x]$ – множина многочленів з дійсними коефіцієнтами степеня не більшого n;

V_n – множина дійсних векторів-рядків порядку n;

T_n – множина дійсних векторів-стовпчиків порядку n;

$M_{m\times n}(\mathbf{R})$, $M_{m\times n}$ – множина матриць розміру $m\times n$ з дійсними коефіцієнтами;

$M_n(\mathbf{R})$, M_n – множина квадратних матриць n-го порядку з дійсними коефіцієнтами;

E – одинична матриця;

$C_{[a,b]}$ – множина дійсних функцій неперервних на відрізку $[a,b]$;

$C^*_{[a,b]}$ – множина комплексних функцій, неперервних на відрізку $[a,b]$;

T_n^* – множина комплексних векторів-стовпчиків порядку n;

(x, y) – скалярний добуток векторів x і y;

$M^\perp$ – ортогональне доповнення множини M;

$\widetilde{A}: V \to W$ – лінійне відображення із простору V в простір W;

$L(V,W)$ – простір лінійних відображень із простору V в простір W;

$\widetilde{I}$ – тотожне перетворення;

A_e – матриця лінійного перетворення $\widetilde{A}$ в базисі e;

rgA – ранг матриці A;

$Ker\widetilde{A}$ – ядро лінійного оператору $\widetilde{A}$;

$\operatorname{Im}\widetilde{A}$ – образ лінійного оператору $\widetilde{A}$;

$def\widetilde{A}$ – дефект лінійного оператору $\widetilde{A}$;

$rang\widetilde{A}$ – ранг лінійного оператору $\widetilde{A}$;

$V_{\widetilde{A}}^{\lambda}$ – множина власних векторів перетворення $\widetilde{A}$, що відповідають власному значенню λ.

$\det\widetilde{A}$ – детермінант оператору $\widetilde{A}$;

$\det(\widetilde{A} - \lambda\widetilde{I})$ – характеристичний многочлен оператору $\widetilde{A}$.

Список використаної літератури

1. Авдєєва Т.В., Веригіна І.В. Лінійні оператори. Жорданова форма матриці. Практикум. Київ : НТУУ «КПІ», 2016. 163 с.
2. Андрійчук В., Забавський Б. Лінійна алгебра: навчальний посібник. Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008. 238с.
3. Безущак О., Ганюшкін О., Кочубінська Є. Навчальний посібник з лінійної алгебри для студентів механіко-математичного факультету. Київ : ВПЦ «Київ. ун-т», 2019. 223 с.
4. Борозенець Н., Пугач В. Вища математика. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. Практикум для студентів 1 курсу інженерно-технологічних спеціальностей денної і заочної форм навчання. Суми : СНАУ, 2017.
5. Волошина Т. Лінійна алгебра: навчальний посібник. Луцьк : Вежа-Друк, 2020. 308 с.
6. Завало С., Костарчук В, Хацет Б. Алгебра і теорія чисел : курс лекцій: в 2 ч. Київ : Вища школа, 2010. Ч.1. 398 с.
7. Завало С., Левіщенко С., Пилаєв В., Рокицький І. Алгебра і теорія чисел : практикум: в 2 ч. Київ : Вища школа, 2010. Ч.1. 232 с.
8. Зайцев О. Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до матаналізу, навчальний посібник. К.: Алерта, 2017. 574 с.
9. Калужнін Л., Вишенський В., Шуб Ц. Лінійні простори. Київ : Вища школа, 1971. 343 с.
10. Мазорчук В.С. Жорданова нормальна форма. Київ : ВПЦ «Київський університет», 1998. 123 с.
11. Пащенко З., Турка Т. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Лінійна алгебра» (1 семестр). Слов’янськ: ДВНЗ «ДДПУ», 2016, 80 с.
12. Пащенко З., Турка Т. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Лінійна алгебра» (2 семестр). Слов’янськ: ДВНЗ «ДДПУ», 2017. 109 с.
13. Пащенко З., Шажко С. Жорданова нормальна форма та класифікація лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь. *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*. 2015. № 5. С. 38–42.